REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCEN

THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité: Mathématiques

Par :

Mr BOUZIR Habib

Sur le thème

Les structures de contact généralisées

Soutenue publiquement le 15 janvier 2018 à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr Miloud Messirdi	M.Conf. A	Université de Tlemcen	Président
Mr Mohamed Belkhelfa	Professeur	Université de Mascara	Directeur de thèse
M^{me} Aissa Wade	Professeur	Université de Pennsylvanie USA	Co-Directrice de thèse
Mr Mohamed Benalili	Professeur	Université de Tlemcen	Examinateur
Mr Mustapha Djaa	Professeur	Centre universitaire de Relizane	Examinateur
M^{me} Z. Souici Benhamadi	M.Conf. A	Université de Annaba	Examinatrice

Remerciements

Nous remercions tout d'abord et le tout puissant ALLAH qui nous a aidé à achever ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes sincères reconnaissances à mes directeurs de thèse : Monsieur BELKHELFA Mohamed, Professeur à l'université de Mascara, et Madame WADE Aissa, Professeur à l'université de Pennsylvanie à USA, pour le rôle d'initiateur qu'ils ont joué dans mes recherches, pour m'avoir permis d'enrichir ma réflexion sur différents aspects de mes études, pour leurs conseils et pour leurs soutien constant tout au long de mon travail, en plus pour les efforts qui ont été faits au cours de la préparation de ma visite scientifique à l'université de Pennsylvanie (PA 16802) USA, et pour la disponibilité et la réception par Madame Aissa Wade durant cette visite.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Miloud Messirdi, Maître de conférence A, à l'université de Tlemcen qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Je remercie également Monsieur Mohammed Benallili, Professeur à l'université de Tlemcen qui a accepté de rapporter cette thèse, je le remercie pour le temps qu'il a consacré.

Je tiens aussi à remercier vivement Monsieur Mustapha Djaa, Professeur au centre universitaire de Relizane, pour avoir accepter de faire partie du jury, et pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Je voudrais également témoigner ma profonde gratitude à Madame Zoubida Souici Benhamadi, Maître de conférence A, à l'université de Annaba, pour sa participation au jury.

Mes remerciements vont aux dirigeants, personnel et enseignants de la faculté des sciences de l'université de Tlemcen (particulièrement, le département de Mathématiques et le conseil scientifique), qui ont contribué à la réussite de cette thèse. Sans oublier surtout le laboratoire L.P.Q.3M de l'université de Mascara (dont je suis membre), pour avoir assurer le climat et *l'environnement favorables aux activités de la recherche scientifique.*

Enfin, j'adresse mes remerciement à tous mes collègues qui ont contribués de près ou de loin à m'encourager et de donner des conseils pour terminer ce travail.

Dédicace

A

Ma famille, qui m'a aidé à arriver à ce point dans mes études.

A tous mes amis .

Je dédie cette thèse.

BOUZIR Habib

Résumé

Le concept de la géométrie généralisée est dû à Nigel Hitchin ([38], 2003), et elle est intéressante dans la théorie physique de la supersymétrie. En géométrie généralisée on étudie non pas le fibré tangent d'une variété différentiable M*, qui est noté* TM *mais plutôt la somme du fibré tangent et du fibré cotangent, que nous noterons par* $\mathbb{T}M := TM \oplus T^*M$*, qu'on appel le fibré de Pontryagin (ou le fibré tangent généralisé) sur la variété* M *avec la somme de Whitney* $TM \oplus T^*M$ *des fibrés tangent et cotangent.*
La géométrie Kählérienne généralisée est une partie de la géométrie généralisée dont la variété différentiable M *est de dimension (*$2n$*). Une structure Kählérienne généralisée peut également être définie de manière équivalente comme un quadruple* (g, b, J_+, J_-)*, où* g *est une métrique Riemannienne,* b *est une deux-forme et* $J_\pm$ *sont des structures presque hermitiennes sur* (M, g) *satisfaisant une certaine condition de torsion.*
En d'autres termes, une structure de Kähler généralisée sur M *peut être considérée comme une structure bi-hermitienne satisfaisant une certaine condition de torsion. Les structures de Kähler généralisées ont été introduites et étudiées par Gualtieri dans [28]. L'un des objectifs de ce travail est d'explorer d'autres façons de construire des structures de Kähler généralisées. Nous avons construit ce type de structures par deux façons différentes. Dans la première, nous construisons des structures de Kähler généralisées à partir des variétés métriques de contact classiques de dimension impaire (précisément, à partir des variétés* β*-Kenmotsu), par l'utilisation une fois le produit des variétés et la métrique bi-tordu* $\mathcal{D}$*-homothetique (*$\mathcal{D}$*-homothetic bi-warping) ([11],[8]), passant par le Théorème (2.3.1) de Marco Gualtieri ([28]), qui nous permet de construire une structure Kählérienne généralisée à partir d'une structure bi-hermitienne classique. Le premier résultat, nous le démontrons dans le Théorème (4.1.1), ce résultat nous permet de construire une famille des structures Kählériennes généralisées sur* $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ *à partir d'une structure* β*-Kenmotsu sur* M^{2n+1}*. Dans la deuxième, nous construisons des structures de Kähler généralisées à partir des variétés presque Kählériennes de dimension paire, par l'utilisation deux fois du produit des variétés, en*

utilisant les métriques du produit tordu et bi-tordu $\mathcal{D}$-homothetique, et en passant par le Théorème (2.3.1), finalement, on obtient deux familles de structures Kählériennes généralisées. On remarque que la construction de cette structure selon Kenichi Sekiya ([58]) est une cas particulière de notre construction, (voir la Remarque (4.2.1), chapitre quatre).
D'un autre côté, le concept de structure presque contact généralisée a été introduit par Aissa Wade et David Iglesias-Ponte ([37], 2005), Ils ont présenté la définition de structure presque de contact généralisée sur M^{2n+1} par la correspondance bijective avec la structure presque complexe généralisée sur $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$, en termes de structure de Dirac. Ensuite a été développé par Aissa Wade et Yat Sun Poon ([56], 2011), dans le but d'unifier les notions de structure presque de contact et de structure presque cosympléctique classiques, dont la variété différentiable M est de dimension $(2n+1)$, avec plein des exemples. Plus tard, par Kenichi Sekiya ([58]), a également donné son essor à cette théorie qui intéresse désormais tout autant les mathématiciens que les physiciens. Il a donné une définition à cette structure par le triplet (Φ, E_+, E_-), où $E_\pm \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$. Dans ce cadre, nous avons donné un résultat sur la construction d'une structure presque contact généralisée par l'utilisation de transformation de cette structure (voir [12], 2017) où nous avons utilisé la déformation homothétique, c'est-à-dire nous avons étendu la notion de transformation homothétique sur les variétés Riemanniennes classiques suivant Tanno ([61], 1968) à la géométrie généralisée. Enfin, on a ajouté quelques propriétés sur les métriques généralisées.
Mots clés : structure presque contact généralisée, structure Kählérienne généralisée, transformation homothétique, structure trans-Sasakienne.

Table des matières

Introduction

0.1 Avant-propos

L*a géométrie de contact* (classique) est la partie de la géométrie differentielle qui étudie les formes et les structures de contact. Elle entretient d'étroits liens avec la *géométrie symplectique*, la *géométrie complexe*, la théotie de feuilletages de codimension 1 et les systemes dynamiques.
La géométrie de contact classique est née de l'étude de la thermodynamique et de l'optique géométrique, donc c'est une branche de la géométrie différentielle qui étudie les variétés de contact, qui sont des variétés différentielles munies d'un champ d'hyperplans des espaces tangents vérifiant certaines propriétés.

Le concept de la ***géométrie généralisée*** est dû à *Nigel Hitchin* ([38], 2003), et il est intéressant dans la théorie physique de la supersymétrie (par exemple, ([72], 2006)).

En géométrie généralisée on étudie non pas le fibré tangent d'une variété différentiable M, qui est noté TM mais plutôt la somme du fibré tangent et du fibré cotangent, que nous noterons par $\mathbb{T}M := TM \oplus T^*M$, ce fibré est appelé le **fibré de *Pontryagin*** (ou, le fibré tangent généralisé) sur la variété M.
Une section du fibré de *Pontryagin* est un couple (X, α) formé par un champ de vecteurs X et une 1-forme différentielle α. Il existe sur l'espace des sections du fibré de *Pontryagin* une forme bilinéaire symétrique non dégénérée (pseudo-métrique), de signature (n, n) (si $n = dimM$), définie par :

$$< X + \alpha, Y + \beta >:= \frac{1}{2}(\alpha(Y) + \beta(X))$$

où $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\alpha, \beta \in \Gamma(T^*M)$.
Theodore James Courant a défini en 1990 une loi de composition bilinéaire antisymétrique (qui ne satisfait pas l'identité de *Jacobi*) sur l'espace des sections du fibré de *Pontryagin*, appelée **crochet de Courant** :

$$[X + \alpha, Y + \eta]_c = [X, Y] + \mathcal{L}_X\eta - \mathcal{L}_Y\alpha - \frac{1}{2}d(\iota_X\eta - \iota_Y\alpha)$$

Pour tous $X+\alpha, Y+\beta \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$,
où : $\mathcal{L}_X$ est la dérivée de Lie dans la direction du champ de vecteur X, et ι_X le produit intérieur.
La géométrie complexe généralisée est une partie de la géométrie généralisée dont la variété différentiable M est de dimension paire $(2n)$. Les structures complexes généralisées ont été introduites par *Nigel Hitchin*, et ensuite développées par ses étudiants *Marco Gualtieri* ([28], 2003) et *Gil Cavalcanti* ([16], 2006), et aussi par *Aissa Wade* avec *David Iglesias-Ponte* ([37], 2005). Ceci nous conduit à un cadre géométrique qui réunit à la fois des structures complexes et symplectiques classiques.
Dans ce cadre, nous allons concentrer notre travail sur **la construction des structures Kählériennes généralisées** ([12], 2017). L'un des objectifs de cette construction est d'explorer d'autres façons de construire ces structures. Là où nous avons construit des variétés Kählériennes généralisées selon deux directions, précisément, à partir des deux variétés classiques, presque de contact métrique (β-Kenmotsu) et presque Kählérienne, par l'utilisation de produit des variétés et la métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothetique ([11],[8]), passant par le Théorème (2.3.1) de *Marco Gualtieri* ([28]) qui est très intéressant.

D'un autre côté, il est naturel de se poser la question : quel est l'analogue à cette structure dans le cas des variétés généralisées de dimension impaire $(2n+1)$ **?** *Aissa Wade* et *David Iglesias-Ponte*, ils ont donné une réponse à cette question, qui est la **structure presque contact généralisée** (voir [37], 2005). Ils ont présenté la définition de structure presque de contact généralisée sur M^{2n+1} par la correspondance bijective avec la structure presque complexe généralisée sur $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$, en termes de **structure de Dirac**.

Puis, en 2011, le concept de structure presque contact généralisée a été introduit par *Aissa Wade* et *Yat Sun Poon* ([56], 2011) dans le but d'unifier les notions de structure presque contact et de structure presque cosympléctique classiques, c'est-à-dire, ils ont obtenu que la structure presque contact généralisée englobe les structures presque contact et cosympléctique classiques. Ils ont donné une définition de structure presque contact généralisée par le triplet (Φ, F, η) (appelé triplet de **Poon-Wade**), tel que $F \in \Gamma(TM)$ est un champs de vecteurs (jouant le rôle du champ de *Reeb* dans la géométrie de contact ordinaire), $\eta \in \Gamma(T^*M)$ une 1-forme différentielle et Φ un endomorphisme sur $TM \oplus T^*M$, cette définition est directement utilisable et de façon indépendante de la définition de structure presque complexe généralisée. Ils ont étudié aussi les conditions d'intégrabilité de ces structures, en termes de certaines **structures de Dirac** $L \subset TM \oplus T^*M$, en plus, ils ont fourni beaucoup des exemples sur cette structure.

Ensuite, en 2012, la structure presque contact généralisée, a également été repris par *Kenichi Sekiya* ([58]), qui a donné son essor à cette théorie qui intéresse désormais tout autant les mathématiciens que les physiciens. Il a donné une définition à cette structure par le triplet (Φ, E_+, E_-). Particulièrement, tout triplet de Poon-Wade (Φ, F, η) donne une structure presque contact généralisée (Φ, E_+, E_-) selon la définition de *Sekiya*, où $E_+ = F$ et $E_- = \eta$, parce que $E_\pm \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$. *Sekiya* a également défini une structure **métrique** presque de contact généralisée, par conséquent, il a défini une structure Sasakienne généralisée du point de vue des structures presque de contact généralisées.

Marco Aldia et *Daniele Grandini*([1], 2014), montrent que toute structure presque contact généralisée sur M peut être levée à une structure presque complexe généralisée sur le cône $C(M) := M \times R$, c'est une autre manière de construction des structures généralisées.

Dans ce cadre, nous avons étudié **la transformation des structures presque contact généralisées** ([12], 2017) où nous avons utilisé **la déformation homothétique**, c'est-à-dire nous avons étendu la notion de transformation homothétique sur les variétés Riemanniennes classiques (voir,*Tanno* [61], 1968) à la géométrie généralisée. Enfin, on a ajouté quelques propriétés sur les métriques généralisées.

0.2 Objectif et plan de travail

L'objectif de ce travail est de construire quelques structures sur la géométrie généralisée par différentes façons de ce qui est déjà connu, parmi ces structures, nous avons construit les variétés suivantes :

⧫ *Premièrement*, la construction des variétés Kählériennes généralisées à partir des variétés métriques presque de contact classiques de dimension impaire (précisément, à partir des variétés β-**Kenmotsu**), par l'utilisation **une fois** le produit des variétés et la métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothetique ($\mathcal{D}$-homothetic bi-warping) ([11],[8]), passant par le **Théorème (2.3.1)** de *Marco Gualtieri* ([28]), qui nous permet de construire une structure Kählérienne généralisée à partir d'une **structure bi-hermitienne** classique. Le premier résultat, nous le démontrons dans le Théorème (4.1.1), ce résultat nous permet de construire une famille des structures Kählériennes généralisées sur $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ à partir d'une structure β-**Kenmotsu** sur M^{2n+1}. (voir section (4.1), chapitre Résultats).

⧫ *Deuxièmement*, la construction des variétés Kählériennes généralisées à partir des variétés presque Kählériennes classiques de dimension paire, par l'utilisation **deux fois** le produit des variétés avec les métriques : de produit tordu (1.5) et de produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothetique (1.8), successivement, passant aussi par le **Théorème (2.3.1)** qui est représente le passage entre les structures bi-hermitiennes classiques et les structures Kählériennes généralisées. Finalement, nous obtenons deux familles des structures Kählériennes généralisées.
La construction de cette structure selon *Kenichi Sekiya* ([58]) est une cas particulière de notre construction, (voir section (4.2), chapitre quatre).

Dans les deux constructions précédentes, une structure Kählérienne généralisée peut être définie de manière équivalente comme un quadruple (g, b, J_+, J_-), où g est une métrique Riemannienne, b est une deux-forme et $J_\pm$ sont des structures presque hermitiennes sur (M, g) satisfaisant une certaine condition de torsion.
En d'autres termes, une structure de Kähler généralisée sur M peut être considérée comme une structure bi-hermitienne satisfaisant une certaine condition de torsion. Les structures de Kähler généralisées ont été introduites et étudiées par *Gualtieri* dans [28]. L'un des objectifs de cette construction est d'explorer d'autres façons de construire des structures de Kähler généralisées à partir des structures classiques.

♦ *Troisièmement*, la construction d'une structure presque de contact généralisée, par l'extension de la notion de **transformation** (précisément, la déformation homothétique) sur les variétés Riemanniennes classiques (voir, *Tanno* [61], 1968) à la géométrie généralisée (précisément, sur les variétés presque contact généralisées). Enfin, on a ajouté quelques propriétés sur les métriques généralisées.

Ce travail à été divisé en quatre chapitres :

• Dans le premier chapitre, le travail a été consacré à l'étude de certaines structures Riemanniennes essentielles, qui ont des relations avec les objectifs de cette thèse. Parmi ces structures : Structure presque Kählérienne, structure presque contact, structure de Kenmotsu et structure trans-Sasakienne, puis la métrique sur une variété produit.
Ces structures, que nous appelons **structures classiques**, ce sont des structures géométriques qui sont étudiées sur le fibré tangent d'une variété différentiable M, qui est noté TM, alors que les structures généralisées sont étudiées sur le fibré tangent généralisé $TM \oplus T^*M$.

• Le deuxième chapitre traité la notion de la géométrie Kählérienne généralisée, où nous avons concentré notre étude sur les structures Kählériennes généralisées à travers la notion des structures complexes généralisées, qui ont été développées par *Marco Gualtieri* ([28], 2003), qui nous conduit à une notion qui unifie les structures presque complexes et les formes symplectiques classiques. Nous arrivons à une correspondance bijective entre les structures complexes généralisées et les couples de la **structure de Dirac** (L^+, L^-) où $L^+, L^- \subset \mathbb{T}M \otimes \mathbb{C}$ sont des sous-espaces isotropes maximaux, tel que $L^+ \cap L^- = \{0\}$ (voir Proposition 2.1.2). La structure de *Dirac* a un rôle important, surtout en termes de l'intégrabilité des structures. Nous avons étudié aussi **la transformation** des structures complexes généralisées à travers l'application exponentielle (de transformation) e^B avec $B \in \Omega^2(M)$ une 2-forme.
Ensuite, nous sommes arrivés à l'un de nos objectifs, c'est qu'on peut construire une structure Kählérienne généralisée à partir d'une **structure bi-hermitienne** classique suivant le Théorème (2.3.1) de *Marco Gualtieri* ([28]). Cette manière de construction nous permet de comprendre certains résultats qui se trouvent dans le dernier chapitre (chapitre : Résultats).

De plus, nous avons donné une étude bien détaillée d'une métrique Riemannienne sur une variété Kählérienne généralisée qui s'appelle **métrique Riemannienne généralisée**, avec plein d'exemples.

• Dans le troisième chapitre, nous avons étudié la notion de la géométrie de contact généralisée où nous avons axé notre étude sur les **structures de contact généralisées**, ces structures sont des extensions naturelles des structures presque de contact et cosymplectique classique, sur le nouveau fibré $\mathbb{T}M = TM \oplus T^*M$, qui est le fibré de *Pontryagin* avec une variété M de dimension impaire $(2n+1)$.
Cette structure de contact généralisée, elle a été introduite dans les travaux de : *Wade Aissa*, *David Iglesias-Ponte*, *Yat Sun Poon*, puis elle a été développé par *Kenitchi Sekiya*, la où il existe un endomorphisme Φ de $TM \oplus T^*M$ et des sections $E_{\pm}$ de $TM \oplus T^*M$ qui sont satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{gathered}\Phi + \Phi^* = 0,\\ 2 < E_+, E_- >= 1 \quad , < E_{\pm}, E_{\pm} >= 0,\\ \Phi \circ \Phi = -id + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+.\end{gathered}$$

Notre objectif dans ce chapitre, est d'étudier la structure presque contact généralisée et l'intégrabilité et puis la construction à partir de quelque structures classique, avec des exemples. En fin de ce chapitre, nous avons donné une étude de la **métrique Riemannienne généralisée** sur une variété presque contact généralisée avec des propriétés et avec plein d'exemples, pour avoir une **transformation homothétique** dans le dernier chapitre (Résultats).

• Finalement, dans le quatrième chapitre (Résultats), nous présentons les résultats que nous avons obtenus.

0.3 Introduction en arabe

Introduction en arabe

مقدمـــة

تمهيـد: يرجع مفهوم الهندسة المعممة الى نايجل هيتشن عام 2003، و هي ذات أهمية في النظرية الفيزيائية للتناظر.

إن الهندسة المعممة لا تدرس على ليف المماس الذي يرمز له TM للمنوعة التفاضلية M، بل تدرس على الفضاء المتكون من المجموع ما بين ليف المماس و ليف مماس التمام، حيث يرمز لهذا الفضاء بما يلي: $TM \oplus TM^*$ ويسمى ليف بوترينق – أو: ليف المماس المعمم- المزود بمجموع ويتني، وكل عنصر من هذا الفضاء الجديد يكتب على شكل ثنائية (X,α) متكونة من حقل شعاعي X و 1-شكل تفاضلي α .

أما فيما يخص الهندسة العقدية المعممة فهي جزء من الهندسة المعممة شريطة أن تكون المنوعات التفاضلية ذات البعد الزوجي (2n)، و في هذا المجال تمكن نايجل هيتشن من تقديم البنى العقدية المعممة و بعد ذلك تم تطويرها من قبل طلابيه: ماركو غالتييري (2003) و جيل كافالكانتي (2006)، حيث أفضت النتائج الى أن هذه البنى العقدية المعممة هي اطار هندسي يجمع بين كل من البنى العقدية و البنى السيمبلكتيك (symplectic) الكلاسيكية.

وفي هذا السياق ركزنا دراستنا على إنشاء بنى كالير المعممة

(structures kählérienne généralisés) ، حيث قمنا بإنشاء منوعات كالير المعممة في اتجاهين، و هذا يعني ، انطلاقا من نوعين من المنوعات الكلاسيكية وهما: مترية تلامسية تقريبا و الأخرى كالير تقريبا، باستخدام ضرب المنوعات مرة واحدة في الانشاء الاول ومرتين في الانشاء الثاني، بالاضافة الى توظيف المتريك ثنائي الالتفاف-تحاكي، و مرورا من خلال نظرية مهمة جدا و التي قدمها ماركو غالتييري (2003) و التي تعتبر نقطة عبور بين الهندسة الكلاسيكية و الهندسة المعممة، حيث اتضح لنا أن انشاء مثل هذه البنى وفقا كينيتشي سيكيا يعتبر حالة خاصة من الانشاء الذي قدمناه.

و أحد الأهداف من هذا العمل هو إكتشاف طرق أخرى لبناء بنى كالير المعممة.

من ناحية أخرى، فمن الطبيعي أن نتساءل ما هي التماثلية للهندسة المعممة على المنوعات ذات البعد الفردي (2n+1) ؟ وقد أجاب على السؤال كل من أيسا واد و ديفيد إغليسياس - بونتي (2005)، و التي هي البنى التلامسية المعممة تقريبا، كما قدموا تعريفا لهذه الاخيرة عن طريق التطابق التقابلي مع البنية العقدية المعممة تقريبا من خلال ضرب المنوعة M^{2n+1} مع $\mathbb{R}$.

ثم، في عام 2011، تم إدخال وتحسين مفهوم البنى التلامسية المعممة تقريبا من قبل آيسا واد و يات صن بون (Aissa Wade, Yat Sun Poon)، حيث أن هذان الآخران استطاعا توحيد المفاهيم بين البنية التلامسية تقريبا و بنية الكوسبلكتك cosympléctique تقريبا، في مفهوم واحد وهو مفهوم البنية التلامسية المعممة تقريبا. حيث قدموا تعريفا للبنية التلامسية المعممة تقريبا و المتمثل في الثلاثية (Φ, F, η) (و التى تسمى الثلاثية بون-واد) والذي يستخدم بشكل مباشر و مستقل عن تعريف البنى العقدية المعممة تقريبا، حيث أن F هو الحقل الشعاعي (و الذي يلعب دور حقل ريب في الهندسة التلامسية العادية)، و η *هو 1-شكل تفاضلي، أما* Φ *فهو* أوندمورفيزم على ليف المماس المعمم $TM \oplus TM^*$ *، و* شملت دراستهم أيضا شروط التكامل لهذه البنى و المتعلقة ببعض بنى ديراك (structures de Dirac).

ثم في عام 2012، تمكن الباحث كينيتشي سيكيا (Kenichi Sekiya) من إعطاء تعريفا رائعا للبنى التلامسية المعممة تقريبا و المتمثل في الثلاثية (Φ, E_+, E_-) أين يمثل Φ أوندمورفيزم و E_+ ، E_- يمثلان عنصرين من ليف المماس المعمم $TM \oplus TM^*$، و بهذا يصبح تعريف **بون-واد** حالة خاصة من تعريف **كينيتشي** . في هذا السياق، قمنا بدراسة التحول على البنى التلامسية المعممة تقريبا (أنظر الفصل الاخير من المذكرة، أو المرجع [11]) حيث وظفنا في عملنا هذا التحول بالتحاكي (transformation homothétique)، وهذا يعني، أننا قمنا بتوسيع مفهوم التحول على منوعات ريمان الكلاسيكية (العادية) إلى المنوعات المعممة (أي على الهندسة المعممة)، بتقنية مماثلة لما قام به العالم تانو على المنوعات العادية (Tanno, 1968).

الهدف و خطة العمل: الهدف من هذا العمل هو انشاء بعض البنى على الهندسة المعممة بطرق تختلف عن ما هو معروف سابقا، و من بين هذه البنى، تم انشاء المنوعات التالية:

- ❖ أولا، انشاء **منوعات كالر المعممة تقريبا** انطلاقا من منوعات تلامسية مترية تقريبا من نوع كلاسيك، و بالضبط من منوعات ترو- سازاكي ذات البعد الفردي، مع استخدام ضرب المنوعات مرة واحدة فقط (une fois) و توظيف كذلك *المترك ثنائي الالتفاف (2n)-تحاكي* للوصول الى المنوعات ثنائ-الهرميسي مرورا بنظرية ماركو غالتييري في انشاء مثل هذا النوع من المنوعات، أين تحصلنا على عائلة من هذا النوع.
- ❖ ثانيا، انشاء **منوعات كالير المعممة تقريبا** انطلاقا من منوعات كالر تقريبا الكلاسيكية ذات البعد الزوجي، مع استخدام ضرب المنوعات مرتين (2 fois) و توظيف كذلك *المترك ثنائي الالتفاف (2n)-تحاكي* للوصول الى المنوعات ثنائ-الهرميسي مرورا بنظرية ماركو غالتييري كذلك.

❖ ثالثا، انشاء **منوعات تلامسية المعممة تقريبا،** بتوسيع مفهوم التحول (déformation homothétique) الى المنوعات التلامسية المعممة تقريبا بتقنية تانو (Tanno)، أي على الهندسة المعممة.

تم تقسيم هذه الأطروحة إلى أربعة فصول:

- في الفصل الأول، تم التطرق الى بعض البنى الريمانية الاساسية والضرورية و التي لها علاقة مع أهداف الاطروحة، ومن بين هذه البني ما يلي: بنى كالير تقريبا، بنى التلامسية تقريبا، بنى كانموتزو و بنى ترو-سزاكي، بالاضافة الى المتريك على منوعة الضرب، و هذه البنى نسميها البنى الكلاسيكية او العادية أي البنى التي تدرس على ليف المماس TM.
- في الفصل الثاني، و الذي خصص لمفهوم هندسة كالر المعممة (géométrie de Kahler généralisée) ، حيث ركزنا دراستنا على بنى كالر المعممة، مرورا بمفهوم البنى العقدية المعممة و التى تم وضعها من قبل ماركو غالتييري (2003)، و هو ما يقودنا الى مفهوم يوحد البنى العقدية تقريبا مع البنى الكوسمبلكتكية العادية. بالاضافة الى التكافؤ التقابلي الحاصل بين البنى العقدية المعممة و ثنائية ديراك (couple de Dirac) و خاصة من حيث تكامل البنى المعممة. و تم التطرق كذلك في هذا الفصل الى التحول على هذه البنى المعممة باستخدام تطبيق الأسية e^B . ثم تطرقنا إلى معرفة نظرية مهمة جدا أنشاءها الباحث ماركو غالتييري (2003) و التى سمحت لنا بانشاء بنى كالير المعممة انطلاقا من بنى ثنائ-الهرمسية (structure bi-hermitienne) الكلاسيكية. هذا الأسلوب من البناء (الإنشاء) يسمح لنا أن نفهم بعض النتائج المهمة التي وجدت في الفصل الأخير (الفصل: النتائج).

وعلاوة على ذلك، أننا قدمنا دراسة مفصلة للغاية عن متريك ريمانيان على متنوعة كالر المعممة.

- في الفصل الثالث، درسنا مفهوم الهندسة التلامسية المعممة، حيث ركزنا دراستنا على البنى التلامسية المعممة، و من بين الباحثين المهتمين بهذا المجال وكان لهم دور كبير في تحديث هذه البنى كل من: آيسا واد ، يات صن بون ، فايزمان ايزو و كينيتشي سيكيا. و الهدف من هذا العمل هو دراسة بنية التلامسية المعممة تقريبا، و التكامل و ثم انشائها انطلاقا من بعض البنى الكلاسيكية ذات البعد الفردي، مع تقديم أمثلة مفصلة.

  بالإضافة كذلك الى دراسة المتريك الريمانيان المعمم على هذه المنوعات المعممة، وذلك لأجل التمهيد للوصول كذلك الى أحد أهدافنا في هذه الاطروحة (الجزء الثالث من الفصل الاخير للنتائج) و المتمثل في تطبيق التحول (transformation) على المنوعات التلامسية المعممة تقريبا بتقنية تانو (Tanno).
- وأخيرا، الفصل الرابع (نتائج البحث)، و الذي يحوي على النتائج التي تم التوصل إليها.

0.4 Résultats obtenus

1 ▶ Structure Kählérienne généralisée à partir de structure trans-Sasakienne :

Proposition 0.4.1.
Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété trans-Sasakienne de type* (α, β) *et* $\mathbb{I}$ *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$*, alors nous obtenons une structure bi-hermitienne* $(\tilde{g}, \tilde{J}_{\pm})$ *sur la variété produit* $\widetilde{M}^{2n+2} = M \times \mathbb{I}$*, défini par :*

$$\tilde{g} = f^2 g + f^2(h^2 - 1)\eta \otimes \eta + dt^2, \tag{1}$$

$$\tilde{J}_{\pm} = \pm\varphi + fh\eta \otimes \partial t - \frac{1}{fh} dt \otimes \xi. \tag{2}$$

où f *et* h *sont deux fonctions sur* $\mathbb{R}$ *avec* $fh \neq 0$

Proposition 0.4.2.
Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété* β*-Kenmotsu où* β *est constante.*
Nous considérons la structure bi-hermitienne $(\tilde{g}, \tilde{J}_{\pm})$ *sur* $\widetilde{M} = M \times \mathbb{R}$ *donnée dans* (4.1) *et* (4.2)*, alors il existe une familles de 2-forme* $\tilde{b}$ *à trois paramètres définie par :*

$$\tilde{b} = \pm\frac{1}{\beta}\sqrt{c - \beta^2 f^4}\ \omega.$$

avec $h(t) = \pm\frac{\sqrt{c-\beta^2 f^4}}{f^2 f'}$*, où* $\boldsymbol{c}$ *est une constante.*

Théorème 0.4.1.
Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété* β*-Kenmotsu où* β *est constante. Pour toute structure bi-hermitienne* $(\tilde{g}, \tilde{J}_{\pm})$ *et 2-forme* $\tilde{b}$ *données dans* (4.1)*,* (4.2) *et* (4.13)*.*
Alors $(\tilde{g}, \tilde{b}, \tilde{J}_{+}, \tilde{J}_{-})$ *définit une famille de* ***structures Kählérienne généralisées*** *sur* $M \times \mathbb{R}$*, où* $\boldsymbol{c}$ *est une constante et* f *et* h *sont deux fonctions sur* $\mathbb{R}$ *avec* $fh \neq 0$ *et* $ff' \neq 0$*.*

Remarque 0.4.1.
Dans la Proposition (4.1.1) *nous pouvons aussi choisir la fonction* h *négative qui défini dans l'équation* (4.12) *alors le signe du 2-forme* $\tilde{b}$ *change.*

Corollaire 0.4.1.
Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété* β*-Kenmotsu où* β *est une constante, il existe une famille à deux-paramètres de structures coKähler généralisées sur* $M \times \mathbb{R}^2$*.*

Proposition 0.4.3.
Toute variété métrique presque contact normale $(M^3, \varphi, \xi, \eta, g)$*, telle que,* $tr_g(\varphi\nabla\xi) = 0$ *et* $div\xi$ *est une constante, donne une* ***famille de structures Kählerienne généralisées*** *de multi-paramètres sur* $M^3 \times \mathbb{R}$*,*
où ∇ *est la connexion de Levi-Civita sur* M^3*.*

2 ▶ Structure Kählerienne généralisée à partir de structure presque Kählerienne :

Soit $(M'^{2n}, J', g', \omega')$ une variété presque Kählerienne, alors on obtient une structure presque de contact métrique $(\overline{\varphi}, \overline{\eta}, \overline{\xi}, \overline{g})$ sur $\overline{M} = M' \times \mathbb{R}$, définit par :

$$\overline{\varphi} = J', \quad \overline{\eta} = dr, \quad \overline{\xi} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \overline{g} = f^2 g' + dr^2, \tag{3}$$

où $f = f(r)$ est une fonction sur $\mathbb{R}$.
Et sur $\widetilde{M}^{2n+2} = \overline{M} \times \mathbb{R} = M' \times \mathbf{R} \times \mathbb{R}$, on obtient deux structures presque complexe et une métrique Riemannienne, définie par :

$$\tilde{J}_{\pm} = \pm\varphi + hk\, dr \otimes \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{hk} dt \otimes \frac{\partial}{\partial r}, \tag{4}$$

$$\tilde{g} = f^2 h^2 g' + h^2 k^2 dr^2 + dt^2, \tag{5}$$

où $h = h(t)$ et $k = k(t)$ sont deux fonctions sur $\mathbb{R}$.

Proposition 0.4.4.
Soit $(M'^{2n}, J', g', \omega')$ une variété presque Kählerienne, alors nous obtenons une structure bi-hermitienne $(\tilde{g}, \tilde{J}_{\pm})$ sur la variété produit $\widetilde{M}^{2n+2} = M'^{2n} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, défini par :

$$\tilde{g} = f^2 h^2 g' + h^2 k^2 dr^2 + dt^2, \tag{6}$$

$$\tilde{J}_{\pm} = \pm\varphi + hk\, dr \otimes \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{hk} dt \otimes \frac{\partial}{\partial r}, \tag{7}$$

où k , h et f sont deux fonctions sur $\mathbb{R}$ avec $hk \neq 0$

Théorème 0.4.2.
Soient $(M'^{2n}, J', g', \omega')$ une variété (presque) Kählerienne, et toute structure bi-hermitienne $(\tilde{g}, \tilde{J}_{\pm})$ sur $M'^{2n} \times \mathbb{R}^2$ donnée dans (4.16) et (4.15).
Alors il existe deux familles de ***structures Kählériennes généralisées*** *de multi-paramètres :*

$$\Big(\tilde{g}, \frac{1}{2}\sqrt{c - h^4}(a\mathrm{e}^{-2r} + b\mathrm{e}^{2r})\omega', \tilde{J}_+, \tilde{J}_-\Big) \tag{8}$$

et

$$\Big(\tilde{g}, (h^2\big(a\cos(2r) + b\sin(2r)\big)\omega', \tilde{J}_+, \tilde{J}_-\Big) \tag{9}$$

sur $M'^{2n} \times \mathbb{R}^2$, où a, b et c sont des constantes.

Remarque 0.4.2.
Particulièrement, la construction de structure Kählérienne généralisée qui fait par ***Kenichi Sekiya*** *dans ([58], 2012) est une cas particulière de notre construction car :*

Lorsque :

$$a = -1,\ b = 0 \ et\ h = r$$

c'est-à-dire équivalent à :

$$h(t) := t,\ \ k(t) := 1\ \ et\ \ f(r) := \sqrt{sin(2r)}$$

Alors d'après le Théorème (4.2.1), on obtient deux ***structures Kählériennes généralisées****, définis comme suit :*

$$\Big(\tilde{g}, \frac{-1}{2}\sqrt{c - r^4}\mathrm{e}^{-2r}\omega', \tilde{J}_+, \tilde{J}_-\Big) \tag{10}$$

et

$$\Big(\tilde{g}, -t^2\cos(2r)\omega', \tilde{J}_+, \tilde{J}_-\Big) \tag{11}$$

où la deuxième structure (11) est une structure de Kenichi Sekiya.

3 ▶ Transformation de structure de contact généralisée :

Proposition 0.4.5.
Soit $(G, \Phi, E_\pm)$ une structure métrique presque de contact généralisée sur M^{2n+1}, défini par :

$$G \equiv (g, b), \quad E_\pm = (\xi_\pm, \eta_\pm) \qquad et \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi & \pi^\sharp \\ \omega^\flat & -\varphi^* \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Alors $(\overline{G}, \overline{\Phi}, \overline{E_\pm})$ est aussi une structure métrique presque contact généralisée sur M, telle que :

$$\overline{G} \equiv (f^2 g, f^2 b), \quad \overline{E_\pm} = (\frac{1}{f}\xi_\pm,\ f\eta_\pm) \quad \text{et} \quad \overline{\Phi} = \begin{pmatrix} \varphi & \frac{1}{f^2}\pi^\sharp \\ f^2\omega^\flat & -\varphi^* \end{pmatrix}, \tag{13}$$

où f est une constante non nulle.

Remarque 0.4.3.
Soient $\mathcal{D}_1 = \Gamma(TM)$ et $\mathcal{D}_2 = \Gamma(T^*M)$.
D'où, nous remarquons que la transformation au-dessus (4.33) est $\mathcal{D}_1$-homothétique et $\mathcal{D}_2$-homothétique, parce que :

$$\overline{G}(A, A) :=< \overline{G}A, A >= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{f^2}|\alpha|^2 - f^2|bX|^2 + f^2|X|^2\Big),$$

où $A = X + \alpha \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$, et $|\ \ |$ signifie la norme sur M.
Si $A \in \mathcal{D}_1$, i.e. $\alpha = 0$, nous avons :

$$\overline{G}(A, A) = f^2 G(A, A),$$

et si $A \in \mathcal{D}_2$*, i.e.* $X = 0$*, nous avons :*

$$\overline{G}(A, A) = \frac{1}{f^2} G(A, A),$$

où,

$$G(A, A) := < GA, A >= \frac{1}{2}\big(|\alpha|^2 - |bX|^2 + |X|^2\big).$$

Donc, nous pouvons appeler cette transformation par ***déformation*** $\mathcal{D}$***-homothétique*** *avec* $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2\}$.

chapter 1

Quelques structures sur la géométrie classique

En mathématique, la géométrie différentielle est l'application des outils du calcul différentiel à l'étude de la géométrie. Les variétés différentielles ou variétés différentiables sont les objets de base de la topologie différentielle et de la géométrie différentielle. Et une variété différentielle se définit d'abord par la donnée d'une variété topologique, espace topologique localement homéomorphe à l'espace $\mathbb{R}^n$, où les homéomorphismes locaux sont appelés cartes et définissent des systèmes de coordonnées locales. **La structure** différentielle est définie en exigeant certaines propriétés de régularité des applications de transition entre les cartes. Cette structure permet par exemple de donner une définition globale de la notion d'application différentiable.

Et une variété Riemannienne est une variété différentielle ayant une structure Riemannienne (souvent appelée métrique Riemannienne) permettant de définir la longueur d'un chemin entre deux points de la variété.

Considérons une variété différentiable M, munie d'une structure Riemannienne g, souvent appelée métrique Riemannienne. Lorsqu'on définit une nouvelle structure géométrique compatible avec cette métrique, on arrive à une nouvelle variété Riemannienne. Cette nouvelle variété conduit ainsi à une autre branche de la géométrie Riemannienne.

On présente la construction des différentes structures en géométrie Riemannienne. Ceci montre comment naissent et se développent certaines branches de la géométrie différentielle.

Ce chapitre comprend les structures essentielles qui seront utilisées pour atteindre les objectifs de cette thèse, parmi ces structures, les suivantes : Structure presque Kählérienne, structure presque contact, structure de Kenmotsu et structure trans-Sasakienne, puis la métrique sur variété produit.
Ces structures, que nous appelons **les structures classiques** (ie : les structures géométriques qui ont étudies sur le fibré tangent d'une variété différentiable M, qui noté TM) par rapport aux structures généralisées (ie :les structures qui ont étudies sur le fibré tangent généralisé qui nous noterons par $\mathbb{T}M := TM \oplus T^*M$).

1.1 Structures presque Kählériennes

La structure Kählérienne est l'un des importants branches de la géométrie différentielle. Elle est constaté de façon indépendante par Erich Kähler en 1933. Et Maintenant cet variétés Kählériennes ont été largement étudiés et des nombreux résultats importants ont été obtenus.

En mathématiques, une variété Kählérienne ou variété de Kähler est une variété différentielle équipée d'une structure unitaire satisfaisant une condition d'intégrabilité. C'est en particulier une variété Riemannienne, une variété symplectique et une variété complexe, ces trois structures étant mutuellement compatibles. Les variétés Kählériennes sont un objet d'étude naturel en géométrie différentielle complexe.

Dans cette section, on va introduire quelques notions nécessaires (variétés complexes , variétés hermitiennes et variétés presque Kählériennes) qui nous permettra de définir les variétés Kählériennes généralisées.
Pour plus de détail, voir [43], [71] et[6].

1.1.1 Structure presque complexe

Définition 1.1.1. *Soit M une variété différentiable de dimension $2n$. Une structure presque complexe J sur M est un endomorphisme sur T_pM, $\forall p \in M$ tel que $J^2 = -I$, où I dénote la transformation identité. Si une telle structure J existe sur M, alors (M, J) est dite une **variété presque complexe**.*

Tenseur de Nijenhuis

Définition 1.1.2. *Soit M une variété presque complexe munie d'une structure presque complexe J. Le tenseur de torsion complexe N est un tenseur de type $(1, 2)$ défini par :*

$$N(X,Y) = 2\{[JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y]\}, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Théorème 1.1.1. *Soit M une variété presque complexe munie d'une structure presque complexe J. M est dite variété complexe si et seulement si $N \equiv 0$*

Pour la preuve voir ([71],p124)

Remarque 1.1.1. *Pour toute structure presque complexe J définie sur une variété de dimension 2 on a, $N(X, Y) = N(X, JX) = 0$.*

Théorème 1.1.2. *[71] Soit M une variété presque complexe munie d'une structure presque complexe J. M est dite variété complexe si et seulement si M admet une connexion linéaire ∇ de torsion T telle que $\nabla J = 0$ et $T = 0$*

Théorème 1.1.3. *[71] Une structure presque-complexe J est intégrable si et seulement si $N = 0$. (Théorème de Newlander-Nirenberg)*

1.1.2 Structures hermitienne

Définition 1.1.3. *Soit M une variété presque complexe munie d'une structure presque complexe J. On appelle métrique hermitienne toute métrique Riemannienne g qui vérifie :*

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \tag{1.1}$$

et nous disons que J et g sont compatibles.

Proposition 1.1.1. *Toute variété Riemannienne (M, g) admet une structure hermitienne*

Preuve . Soit (M, g) une variété Riemannienne, on pose

$$h(X, Y) = g(JX, JY) + g(X, Y), \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

alors,

$$h(JX, JY) = g(X, Y) + g(JX, JY) = h(X, Y), \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

donc h est une métrique hermitienne. ∎

Définition 1.1.4. *Toute variété M presque complexe munie d'une métrique hermitienne est une variété presque hermitienne .*
De plus, si M est une variété complexe alors, elle est hermitienne.

Définition 1.1.5. *Soit M une variété presque hermitienne munie d'une structure presque complexe J et une métrique hermitienne g . On appelle 2-forme fondamentale l'application Ω définie sur M par :*

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Propriétés 1.1.1.

1. *La 2-forme fondamentale Ω est antisymétrique c.à.d $\Omega(X, Y) = -\Omega(Y, X)$.*
2. *$\Omega(JX, JY) = \Omega(X, Y)$.*

Lemme 1.1.1. *Soit M une variété presque hermitienne munie d'une structure presque complexe J et une métrique hermitienne g alors, la connexion Riemannienne ∇ , la deuxième forme fondamentale Ω et la Torsion T satisfont la relation suivante :*

$$2g((\nabla_X J)Y, Z) - g(JX, N(Y, Z))) = 3d\Omega(X, JY, JZ) - 3d\Omega(X, Y, Z)$$

pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

Pour la preuve voir ([43], p148).

Théorème 1.1.4.

Soit (M,g,J) une variété hermitienne et ∇ la connexion de Levi-Cevita associé à g . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\nabla J = 0$

(b) $\nabla \Omega = 0$

(c) $N \equiv 0 \quad et \quad d\Omega = 0$

Preuve . Pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, on a

i) $(a) \Longleftrightarrow (b)$

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \Omega)(Y,Z) &= X\Omega(Y,Z) - \Omega(\nabla_X Y, Z) - \Omega(Y, \nabla_X Z) \\
&= Xg(Y,JZ) - g(\nabla_X Y, JZ) - g(Y, J(\nabla_X Z)) \\
&= g(\nabla_X Y, JZ) + g(Y, \nabla_X(JZ)) - g(\nabla_X Y, JZ) - g(Y, J(\nabla_X Z)) \\
&= g(Y, (\nabla_X J)Z).
\end{aligned}$$

ii) $(b) \Longleftrightarrow (c)$

Supposons $\nabla\Omega = 0$ d'aprés le lemme (1.1.1) on a $d\Omega = 0$ et $N \equiv 0$

Inversement, si $d\Omega = 0$ et $N \equiv 0$ d'aprés le lemme (1.1.1), $\nabla J = 0$ donc $\nabla\Omega = 0$

■

1.1.3 Structures Kählériennes

Structures Presque Kählériennes

Définition 1.1.6. *Une variété presque hermitienne (M,g,J) est dite presque Kählérienne si la 2-forme fondamentale Ω est fermée c.à.d. $d\Omega = 0$.*

Proposition 1.1.2. *Pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, on a*

$$d\Omega = 0 \iff g\big((\nabla_X J)Y, Z\big) + g\big((\nabla_Y J)Z, X\big) + g\big((\nabla_Z J)X, Y\big) = 0.$$

pour la preuve utilisons la relation suivante

$$3d\Omega(X,Y,Z) = X(\Omega(Y,Z)) + Y(\Omega(Z,X)) + Z(\Omega(x,Y)) - \Omega([X,Y],Z) - \Omega([Y,Z],X) - \Omega([Z,X],Y)$$

Proposition 1.1.3. *Une variété strictement presque Kählérienne est une variété presque Kählérienne dont la structure presque complexe n'est pas intégrable (c.à.d. $N \neq 0$).*

Structures Kählériennes

Définition 1.1.7. *Soit M une variété presque complexe munie d'une structure presque complexe J .*

La métrique hermitienne g est dite métrique Kählérienne si la 2-forme fondamentale Ω est fermée c.à.d. $d\Omega = 0$.

Définition 1.1.8. *Toute variété presque complexe M munie d'une métrique Kählérienne est dite variété presque Kählérienne.*
De plus, Toute variété complexe M munie d'une métrique Kählérienne est dite variété Kählérienne .

Théorème 1.1.5. *Toute variété presque hermitienne est une variété Kählérienne si et seulement si $\nabla J = 0$.*

Preuve . D'aprés théorème (1.1.4) la preuve est directe. ∎

1.2 Structures presque de contact

La géométrie de contact est la partie de la géométrie différentielle qui étudie les formes et les structures de contact. Elle entretient d'étroits liens avec la géométrie symplectique, la géométrie complexe, la théorie des feuilletages de codimension un et les systèmes dynamiques. La géométrie de contact classique est née de l'étude de la thermodynamique et de l'optique géométrique. Une structure de contact sur une variété est un champ d'hyperplan, c'est-à-dire la donnée en tout point d'un hyperplan dans l'espace tangent.

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques structures qui interviendront dans notre étude, en donnant des exemples pour comprendre les notions et pour manipuler les différents calculs.

Pour plus de détail, voir [13], [5], [6],[71]...

Variétés de contact

Définition 1.2.1. *[4]*
Une variété différentiable M de dimension impair $(2n+1)$ est dite variété de contact si elle existe une 1-forme η globale sur M telle que

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

On dit que M est une variété de contact munie d'une forme de contact η.

Remarque 1.2.1. *En particulier, $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ est un élément de volume de M, de sorte qu'une variété de contact est orientable. Aussi le rang de $d\eta$ est $2n$ sur l'algèbre de Grassmann T_p^*M à chaque point $p \in M$, et donc nous avons un sous-espace de dimension 1, $\{X \in T_pM / d\eta(X, T_pM) = 0\}$, dont $\eta \neq 0$ et qui est complémentaire au sous-espace défini par $\eta = 0$. Par conséquent le choix de ξ_p dans ce sous-espace normalisée par $\eta(\xi_p) = 1$, nous avons un champ de vecteurs globale ξ satisfaisant*

$$d\eta(\xi, X) = 0, \qquad \eta(\xi) = 1.$$

ξ est appelé le champ de vecteur caractéristique ou le champ de Reeb de la structure de contact η. Utilisant la dérivée de Lie on obtient immédiatement,

$$\mathcal{L}_\xi \eta = 0, \qquad \mathcal{L}_\xi d\eta = 0.$$

On note $\mathcal{D}$ la distribution de contact ou sous-fibré défini par le sous-espace $\mathcal{D}_p = \{X \in T_pM : \eta(X) = 0\}$. Grosso modo, le sens de la condition $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$, est que le sous-fibré de contact est aussi loin d'être intégrable que possible, en particulier, $\mathcal{D}$ tourne comme un seul mouvement sur la variété. Pour un sous-fibré défini par une 1-forme η d'être intégrable, il *faut et il suffit que* $\eta \wedge (d\eta)^n \equiv 0$.

Théorème 1.2.1. *[4]*

Soit w *une 1-forme sur une variété différentiable* M^n *et supposons que* $w \wedge (dw)^p \neq 0$ *et* $(dw)^{p+1} \equiv 0$ *sur* M^n. *Ensuite, sur chaque point, il existe un systéme de coordonnées* $(x^1, \ldots, x^p, y^1, y^{n-p})$ *de telle sorte que* $w = dy^{p+1} - \sum_{i=1}^{p} y^i dx^i$. *Ainsi, sur chaque point d'une variété de contact* (M^{2n+1}, η) *il existe des coordonnées* (x^i, y^i, z), $i = 1, \ldots, n$ *telle que*

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i. \tag{1.2}$$

1.2.1 Variétés presque de contact

Définition 1.2.2. *[5]*
Soit M *une variété différentiable de dimension impaire* $(2n+1)$. *On appelle structure presque de contact sur* M *la donnée d'un triplet* (η, ξ, φ) *tel que*

- φ *un champ de tenseur de type* $(1,1)$
- ξ *un champ de vecteurs*
- η *une 1-forme sur* M

vérifiant les conditions suivantes

$$\eta(\xi) = 1, \qquad \varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi.$$

Définition 1.2.3. *[5]*
Une variété de dimension $(2n+1)$ *munie d'une structure presque de contact* (φ, ξ, η) *est une variéte presque de contact.*

Théorème 1.2.2. *[4]*
Soit (φ, ξ, η) *une structure presque de contact ,alors on a les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} \varphi\xi &= 0 \\ \eta \circ \varphi &= 0 \\ rang\varphi &= 2n \end{aligned}$$

Preuve .
1- On a

$$\eta(\xi) = 1, \qquad \varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi.$$

remplacent X par ξ, on trouve :

$$\varphi^2\xi = -\xi + \eta(\xi)\xi = 0 = \varphi(\varphi\xi)$$

Ce qui implique : $\varphi\xi = 0$ ou $\varphi\xi$ est un vecteur propre de φ qui correspond à la valeur 0.
Raisonnement par absurde :
Supposons que $\varphi\xi \neq 0$ on trouve

$$0 = \varphi^2(\varphi\xi) = -\varphi\xi + \eta(\varphi\xi)\xi$$

c'est-à-dire :

$$\eta(\varphi\xi)\xi = \varphi\xi$$

Donc :

$$\eta(\varphi\xi)\xi \neq 0$$

et :

$$\eta(\varphi\xi)\varphi\xi = \varphi^2\xi = 0$$

Contradiction, avec le fait que $\eta(\varphi\xi) \neq 0$ et $\varphi\xi \neq 0$,
donc

$$\varphi\xi = 0$$

2- Maintenant prenant $\varphi\xi = 0$,

$$\begin{aligned}
\eta(\varphi X)\xi &= \varphi^3 X + \varphi X \\
&= \varphi(\varphi^2 X) + \varphi X \\
&= \varphi\big(-X + \eta(X)\xi\big) + \varphi X \\
&= \eta(X)\varphi\xi \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta(\varphi X)\xi = 0 &\Longrightarrow \eta(\varphi X) = 0 \\
&\Longrightarrow \eta \circ \varphi = 0
\end{aligned}$$

3- On a $\varphi\xi = 0$, $\xi \neq 0$ et $rang(\varphi) < 2n+1$
supposons qu'il existe $\overline{\xi}$ tel que $\varphi\overline{\xi} = 0$
alors remplacer X par $\overline{\xi}$ dans $\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi$,
on trouve

$$0 = \varphi^2\overline{\xi} = -\overline{\xi} + \eta(\overline{\xi})\xi \Longrightarrow \overline{\xi} = \eta(\overline{\xi})\xi$$

$\overline{\xi}$ est proportionnel par rapport à ξ

donc on a

$$rang\varphi = 2n$$

■

1.2.2 Variétés métriques presque de contact

Métrique Riemannienne associée à une structure presque de contact

Théorème 1.2.3. *[6]*
Toute variété presque de contact (M, φ, ξ, η) admet une métrique Riemannienne g telle que,

$$g(X, \xi) = \eta(X).$$

Preuve . Soit (M, φ, ξ, η) une variété presque de contact.
Pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, on pose

$$g(X, Y) = h\big(X - \eta(X)\xi, Y - \eta(Y)\xi\big) + \eta(X) \cdot \eta(Y)$$

où h est une métrique Riemannienne sur M^{2n+1}
On remplace Y par ξ on aura

$$\begin{aligned} g(X, \xi) &= h\big(X - \eta(X)\xi, \xi - \eta(\xi)\xi\big) + \eta(X) \cdot \eta(\xi) \\ &= h\big(X - \eta(X)\xi, 0\big) + \eta(X) \\ &= \eta(X) \end{aligned}$$

■

Proposition 1.2.1. *[6]*
Toute variété presque de contact (M, φ, ξ, η) admet une métrique Riemannienne g telle que,

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \tag{1.3}$$

et g dans ce cas dite compatible avec la structure.

Preuve .
Soit h une application définie pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ par
$h(X, Y) = h'(\varphi^2 X, \varphi^2 Y) + \eta(X)\eta(Y)$
où h' est une métrique Riemannienne sur M^{2n+1}
Alors, on a

$$\begin{aligned} h(\xi, X) &= h'(\varphi^2 \xi, \varphi^2 X) + \eta(\xi)\eta(X) \\ &= \eta(X) \end{aligned}$$

on défini g par

$$g(X,Y)=\frac{1}{2}\big(h(X,Y)+h(\varphi X,\varphi Y)+\eta(X)\eta(Y)\big).$$

Donc g est une métrique Riemannienne et :

$$\begin{aligned}
g(\varphi X,\varphi Y) &= \frac{1}{2}\Big(h(\varphi X,\varphi Y)+h\big(-X+\eta(X)\xi,-Y+\eta(Y)\xi\big)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\big(h(\varphi X,\varphi Y)+h(X,Y)-2\eta(X)\eta(Y)+\eta(X)\eta(Y)\big)\\
&= g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y).
\end{aligned}$$

■

Variétés métriques presque de contact

Définition 1.2.4. *[6]*
On appelle une variété métrique presque de contact toute variété presque de contact (M,φ,ξ,η) munie d'une métrique Riemannienne g compatible avec la structure presque de contact sur M.

Notation 1.2.1. *Dans ce cas une variété métrique presque de contact est notée par (M,φ,ξ,η,g).*

Définition 1.2.5. *Pour chaque structure métrique presque de contact (φ,ξ,η,g) sur M on définit la 2-forme fondamental Φ par,*

$$\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y).$$

Proposition 1.2.2. *[5]*
On dit que M^{2n+1} admet une structure métrique presque de contact si il existe une 1-forme différentielle globale η et une 2-forme différentielle globale Φ sur M tel que

$$\eta\wedge\Phi^n\neq 0$$

Proposition 1.2.3. *[5]*
Si M^{2n+1} une variété de contact avec la forme de contact η, alors il existe une structure métrique presque de contact (φ,ξ,η,g) tel que la 2-forme fondamentale Φ est définie par,

$$\Phi=d\eta.$$

Preuve . voir([5], page 26) ■

Théorème 1.2.4. *[5]*
Soit M une variété de contact de dimension $(2n+1)$ munie d'une structure de contact η alors,

il existe une structure métrique presque de contact (φ, ξ, η, g) telle que,

$$g(X, \varphi Y) = d\eta(X, Y).$$

Structure presque de contact normale

Définition 1.2.6. *[60]*
Soient $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta)$ une variété presque de contact et $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ la variété produit où $(X, f\frac{d}{dt})$ un champ de vecteurs sur $M \times \mathbb{R}$ tel que X un champ de vecteurs sur M, f une fonction sur $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ et t système de coordonnée sur $\mathbb{R}$. On définit sur $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ une structure presque complexe J par,

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt})$$

Remarque 1.2.2.
Montrons que J est une structure presque complexe, ie : $J^2 = -I$ - on a

$$\begin{aligned}
J^2(X, f\frac{d}{dt}) &= J\left(J(X, f\frac{d}{dt})\right) \\
&= J\left(\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right) \\
&= \left(\varphi(\varphi X - f\xi) - \eta(X)\xi, \eta(\varphi X - f\xi)\frac{d}{dt}\right) \\
&= \left(\varphi^2 X - \varphi(f\xi) - \eta(X)\xi, (\eta(\varphi X) - \eta(f\xi))\frac{d}{dt}\right) \\
&= \left(\varphi^2 X - f\varphi(\xi) - \eta(X)\xi, -f\eta(\xi)\frac{d}{dt}\right) \\
&= \left(\varphi^2 X - \eta(X)\xi, -f\frac{d}{dt}\right)
\end{aligned}$$

On sait que

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi \Rightarrow -X = \varphi^2 X - \eta(X)\xi$$

donc

$$\begin{aligned}
J^2(X, f\frac{d}{dt}) &= \left(-X, -f\frac{d}{dt}\right) \\
&= -\left(X, f\frac{d}{dt}\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$J^2 = -I$$

Définition 1.2.7.

Soit J une structure presque complexe sur $M^{2n+1}\times\mathbb{R}$, J est intégrable si et seulement si le tenseur de Nijenhuis $N_J(X,Y)=0$. (voir théorème 1.1.1)

Définition 1.2.8. *([5], page 80)*

*Soit (φ,ξ,η,g) une structure métrique presque de contact sur M. On dit que (φ,ξ,η,g) est **normale** si la structure presque complexe J est intégrable.*

Remarque 1.2.3.

On va exprimer la condition de normalité en termes de N_φ le tenseur de Nijenhuis de φ avec :

$$N_\varphi(X,Y)=\varphi^2[X,Y]+[\varphi X,\varphi Y]-\varphi[X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]$$

Puisque N_J est un tenseur de type $(1,2)$, alors il suffit de calculer $N_J\left((X,0),(Y,0)\right)$ et $N_J\left((X,0),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right)$.

On trouve :

$$\begin{aligned}
N_J\left((X,0),(Y,0)\right) &= J^2\left[(X,0),(Y,0)\right]+\left[J(X,0),J(Y,0)\right] \\
&\quad -J\left[(X,0),J(Y,0)\right]-J\left[J(X,0),(Y,0)\right] \\
&= \begin{pmatrix} -\left([X,Y],0\right)+\left([\varphi X,\varphi Y],\left(\varphi X\eta(Y)-\varphi Y\eta(X)\right)\frac{d}{dt}\right) \\ -\left(\varphi\left([X,\varphi Y]\right)-X\eta(Y)\xi,\eta([X,\varphi Y])\frac{d}{dt}\right) \\ -\left(\varphi\left([\varphi X,Y]\right)-Y\eta(X)\xi,\eta([\varphi X,Y])\frac{d}{dt}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -[X,Y]+[\varphi X,\varphi Y]-\varphi\left([X,\varphi Y]\right) \\ -\varphi\left([\varphi X,Y]\right)-\left(X\eta(Y)+Y\eta(X)\right)\xi, \\ \left(\varphi X\eta(Y)-\varphi Y\eta(X)-\eta([X,\varphi Y])-\eta([\varphi X,Y])\right)\frac{d}{dt} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varphi^2[X,Y]+[\varphi X,\varphi Y]-\varphi\left([X,\varphi Y]\right) \\ -\varphi\left([\varphi X,Y]\right)-\left(X\eta(Y)+Y\eta(X)\right)\xi, \\ \left(\varphi X\eta(Y)-\eta([\varphi X,Y])-\varphi Y\eta(X)-\eta([X,\varphi Y])\right)\frac{d}{dt} \end{pmatrix} \\
&= \left(N_\varphi(X,Y)+2d\eta(X,Y),\left(\mathfrak{L}_{\varphi X}\eta(Y)-\mathfrak{L}_{\varphi Y}\eta(X)\right)\frac{d}{dt}\right) \\
&= \left(N^1(X,Y),N^2(X,Y)\right).
\end{aligned}$$

On a aussi,

$$\begin{aligned}
N_J\left((X,0),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right) &= J^2\left[(X,0),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right]+\left[J(X,0),J\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right]\\
&\quad -J\left[(X,0),J\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right]-J\left[J(X,0),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right]\\
&= \left([\xi,\varphi X],\xi\eta(X)\frac{d}{dt}\right)+\left(\varphi([\xi,X]),\eta([\xi,X])\frac{d}{dt}\right)\\
&= \left([\xi,\varphi X]-\varphi([\xi,X]),\xi\eta(X)\frac{d}{dt}-\eta([\xi,X])\frac{d}{dt}\right)\\
&= \left([\xi,\varphi X]-\varphi([\xi,X]),\xi\eta(X)\frac{d}{dt}-\eta([\xi,X])\frac{d}{dt}\right)\\
&= \left((\mathfrak{L}_\xi\varphi)X,(\mathfrak{L}_\xi\eta)X\frac{d}{dt}\right)\\
&= \left(N^{(3)}(X),N^{(4)}(X)\right).
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
N^{(1)}(X,Y) &= N_\varphi(X,Y)+2d\eta(X,Y)\xi\\
N^{(2)}(X,Y) &= (\mathfrak{L}_{\varphi X}\eta)Y-(\mathfrak{L}_{\varphi Y}\eta)X\\
N^{(3)}(X) &= (\mathfrak{L}_\xi\varphi)X\\
N^{(4)}(X) &= (\mathfrak{L}_\xi\eta)X
\end{aligned}$$

Donc : *La structure métrique presque de contact (φ,ξ,η,g) est* ***normale*** *si*

$$N^{(1)}=N^{(2)}=N^{(3)}=N^{(4)}=0.$$

Théorème 1.2.5. *[71]*
Soit (M,φ,ξ,η) une variété presque de contact si $N^1=0$ alors,

$$N^{(2)}=N^{(3)}=N^{(4)}=0$$

Exemple 1.2.1.

Soit $S^3\subset\mathbb{R}^4$ et $X=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.
Prenons la paramétrisation suivante :

$$X=\begin{cases} x &= cos\alpha \;\; cos\beta \;\; cos\gamma\\ y &= cos\alpha \;\; cos\beta \;\; sin\gamma\\ z &= cos\alpha \;\; sin\beta\\ t &= sin\alpha\end{cases}$$

et utilisons le produit scalaire

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle,$$

nous trouvons la matrice associée à la métrique Riemannienne g

$$(g_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons définir la 1*-forme* η *comme suit :*

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} x^i dy^i - y^i dx^i \Leftrightarrow \eta = xdy - ydx + zdt - tdz.$$

Avec la paramétrisation ci-dessus on a

$$\eta = \left(\sin \beta, -\cos \alpha \sin \alpha \cos \beta, \cos^2 \alpha \cos^2 \beta\right).$$

Remarquer que

$$\eta \wedge d\eta = -2 \cos^2 \alpha \cos \beta d\alpha \wedge d\beta \wedge d\gamma \neq 0$$

c.à.d. la variété est de contact.
Calculons le champ de vecteur ξ*, Posons*

$$\xi = \xi_1 \partial_\alpha + \xi_2 \partial_\beta + \xi_3 \partial_\gamma$$

et sachons que $g(X, \xi) = \eta(X)$ *on peut avoir*

$$\xi = \begin{pmatrix} \sin \beta \\ -\tan \alpha \cos \beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

et nous pouvons facilement voir que $\eta(\xi) = 1$

Calculons maintenant l'endomorphisme φ*, nous avons*

$$\begin{cases} g(X, \varphi Y) = d\eta(X, Y) \\ 2d\eta(X, Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y]) \end{cases}$$

c.à.d.

$$g(X,\varphi Y)=\frac{1}{2}\big(X\eta(Y)-Y\eta(X)-\eta([X,Y])\big)$$

localement l'équation précédente donne,

$$\varphi_j^k=\frac{1}{2}g^{ki}\Big(\partial_i\big(\eta(\partial_j)\big)-\partial_i\big(\eta(\partial_j)\big)\Big)$$

d'où la matrice associé à φ est donnée par

$$(\varphi_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}=\begin{pmatrix} 0 & -\cos^2\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\alpha\cos^2\beta \\ \cos\beta & 0 & -\cos\beta\sin\beta \\ \tan\alpha & \tan\beta & 0 \end{pmatrix},$$

et on peut vérifier que

$$\varphi^2=-I+\eta\otimes\xi.$$

Donc, (S^3,φ,ξ,η,g) est une variété métrique de contact et nous pouvons vérifier que

$$\eta\circ\varphi=0,\qquad \varphi\xi=0,\qquad g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y).$$

Vérifions maintenant que la structure (φ,ξ,η) est normale. on a

$$N\left(X,Y\right)=N_{\varphi}\left(X,Y\right)+2d\eta\left(X,Y\right)\xi,$$

l'expression locale du $N(X,Y)$ peut s'écrire sous la forme,

$$N_{kj}^i=\varphi_k^h(\partial_h\varphi_j^i-\partial_j\varphi_h^i)-\varphi_j^h(\partial_h\varphi_k^i-\partial_k\varphi_h^i)+\eta_k(\partial_j\xi^i)-\eta_j(\partial_k\xi^i)$$

et avec des calculs simples on peut vérifier que $N_{kj}^i=0$ pour tous $i,j,k\in\{1,2,3\}$.

Lemme 1.2.1. *([6], p 82)*

Pour une structure métrique presque de contact (φ,ξ,η,g), la dérivée covariante de φ est donnée par,

$$\begin{aligned}2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) &= 3d\Phi(X,\varphi Y,\varphi Z)-3d\Phi(X,Y,Z)+g\big(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\big)\\ &+ N^{(2)}(Y,Z)\eta(X)+2d\eta(\varphi Y,X)\eta(Z)-2d\eta(\varphi Z,X)\eta(Y)\end{aligned}$$

Preuve . Rappelons que la connexion Riemannienne ∇ de g donnée par

$$\begin{aligned}2g(\nabla_XY,Z) &= Xg(Y,Z)+Yg(X,Z)-Zg(X,Y)\\ &\quad +g([X,Y],Z)+g([Z,X],Y)-g([Y,Z],X)\end{aligned}$$

et que la formule de d sur la 2-forme Φ est

$$\begin{aligned} d\Phi(X,Y,Z) &= \frac{1}{3}\big(X\Phi(Y,Z)+Y\Phi(Z,X)+Z\Phi(X,Y) \\ &\quad -\Phi([X,Y],Z)-\Phi([Z,X],Y)-\Phi([Y,Z],X)\big). \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} 2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) &= 2g(\nabla_X\varphi Y,Z)+2g(\nabla_X Y,\varphi Z) \\ &= Xg(\varphi Y,Z)+\varphi Yg(X,Z)-Zg(X,\varphi Y) \\ &\quad +g([X,\varphi Y],Z)+g([Z,X],\varphi Y)-g([\varphi Y,Z],X) \\ &\quad +Xg(Y,\varphi Z)+Yg(X,\varphi Z)-\varphi Zg(X,Y) \\ &\quad +g([X,Y],\varphi Z)+g([\varphi Z,X],Y)-g([Y,\varphi Z],X) \end{aligned}$$

sachant que

$$\begin{aligned} 2d\eta(\varphi Y,X) &= \varphi Y\big(\eta(X)\big)-X\big(\eta(\varphi Y)\big)-\eta\big([\varphi Y,X]\big) \\ N^{(1)}(Y,Z) &= N_\varphi(Y,Z)+2d\eta(Y,Z)\,\xi \\ &= \varphi^2[Y,Z]+[\varphi Y,\varphi Z]-\varphi([Y,\varphi Z])-\varphi([\varphi Y,Z])+2d\eta(Y,Z)\,\xi \\ N^{(2)}(Y,Z) &= (\mathfrak{L}_{\varphi Y}\eta)\,Z-(\mathfrak{L}_{\varphi Z}\eta)\,y \\ &= -\eta([Y,\varphi Z])+\varphi Y\eta(Z)-Z\eta(\varphi Y)-\eta([\varphi Y,Z])-\varphi Z\eta(Y) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) &= 3d\Phi(X,\varphi Y,\varphi Z)-3d\Phi(X,Y,Z)+g\big(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\big) \\ &\quad +N^{(2)}(Y,Z)\eta(X)+2d\eta(\varphi Y,X)\eta(Z)-2d\eta(\varphi Z,X)\eta(Y). \end{aligned}$$

■

1.2.3 Variétés cosymplectique et coKähler

Structure cosymplectique :

Les variétés cosymplectiques ont été introduits par Libermann (voir [44], [45]).

Définition 1.2.9. *[18]*
*Une **structure presque cosymplectique** sur une variété M de dimension impaire $2n+1$ est une paire (η,ω), où η est une 1-forme et ω est une 2-forme telle que $\eta\wedge\omega^n\neq 0$ (i.e. forme de volume) sur M. Cette structure est dite **cosymplectique** si η et ω sont fermés.*

Si (η,ω) est une structure presque cosymplectique sur M, le triple (M,η,ω) est considéré comme une variété presque cosymplectique.

Structure coKähler :

Historiquement, les variétés coKähler ont été définies par Blair dans [4].

Définition 1.2.10. *[18]*
Une variété ***presque coKähler*** *est une variété métrique presque contact* $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *de telle sorte que la 2-forme fondamentale* ω *et la 1-forme* η *sont fermés (i.e.* $d\omega = 0 \quad et$ $d\eta = 0$*).*
Si, en plus, la structure presque contact est normale, on dit que M *est une variété* ***coKähler****.*

Remarque 1.2.4.
Soient $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété presque de contact métrique et* ω *la 2-forme fondamentale.*
On peut distinguer les classes suivantes, on dit que :
• M *est cosymplectique si* $d\omega = d\eta = 0$ *(i.e,* ω *et* η *sont fermées),*
• M *est coKähler si elle est normale et cosymplectique.*

Théorème 1.2.6. *[54]*
Soient $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété presque de contact de dimension* $(2n+1)$ *et* ∇ *la connexion de Levi-Cevita sur* M*. Alors on a :*

$$M \;\; est \;\; coKhler \iff pour\ tous \;\; X, Y \in \mathfrak{X}(M) : (\nabla_X \varphi)Y = 0$$

Preuve .
Supposons que M une variété coKähler $\big($i.e. $d\Phi = 0, d\eta = 0$, et (φ, ξ, η) est normale$\big)$

$$\begin{array}{rcl} (\varphi, \xi, \eta) \;\; est \;\; normale & \Longrightarrow & N^{(1)} = 0 \\ & \Longrightarrow & N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0 \end{array}$$

suivant le lemme (1.2.1), pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ on a,

$$\begin{array}{rcl} 2g\big((\nabla_X \varphi)Y, Z\big) & = & 3d\Phi(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) \\ & & +g\big(N^{(1)}(Y, Z), \varphi X\big) + N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) \\ & & +2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \\ & = & 0, \end{array}$$

donc

$$(\nabla_X \varphi)Y = 0$$

Pour l'inverse, supposons $(\nabla_X\varphi)Y = 0$ on a,

$$\begin{aligned}
3d\Phi(X,Y,Z) &= X\Phi(Y,Z) + Y\Phi(Z,X) + Z\Phi(X,Y) - \Phi([X,Y],Z) - \Phi([Z,X],Y) - \Phi([Y,Z],X) \\
&= g(\nabla_X Y,\varphi Z) + g(Y,\nabla_X\varphi Z) + g(\nabla_Y Z,\varphi X) + g(Z,\nabla_Y\varphi X) + g(\nabla_Z X,\varphi Y) \\
&\quad + g(X,\nabla_Z\varphi Y) - g(\nabla_X Y - \nabla_Y X,\varphi Z) - g(\nabla_Z X - \nabla_X Z,\varphi Y) \\
&\quad - g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y,\varphi X) \\
&= 0
\end{aligned}$$

alors $d\Phi = 0$
et $[\varphi,\varphi](X,Y) = 0 \Longrightarrow N^{(1)}(X,Y) = 2d\eta(X,Y)\xi$
Maintenant

$$\begin{aligned}
N^{(2)}(Y,\xi) &= (\mathfrak{L}_{\varphi Y}\eta)(\xi) \\
&= -\eta\big([\varphi Y,\xi]\big) \\
&= -g(\xi,\nabla_{\varphi Y}\xi - \nabla_\xi\varphi Y) \\
&= g(\xi,\varphi\nabla_\xi Y) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

dans le lemme (1.2.1) posons $Z = \xi$, on obtient $d\eta(\varphi Y, X) = 0, \quad \forall X, Y$
d'où $d\eta = 0$ i.e. $N^{(1)} = 0$ donc M est coKähler. ∎

Proposition 1.2.4.
Soit (M,φ,ξ,η,g) une variété coKähler.
Alors pour tous $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$, on a : $(\nabla_X\omega)(Y,Z) = 0$.
où ω 2-forme fondamentale.

Preuve . On a

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\omega)(Y,Z) &= X\omega(Y,Z) - \omega(\nabla_X Y,Z) - \omega(Y,\nabla_X Z) \\
&= Xg(Y,\varphi Z) - g(\nabla_X Y,\varphi Z) - g(Y,\varphi\nabla_X Z) \\
&= g(\nabla_X Y,\varphi Z) + g(Y,\nabla_X\varphi Z) - g(\nabla_X Y,\varphi Z) - g(Y,\varphi\nabla_X Z) \\
&= g\big(Y,(\nabla_X\varphi)Z\big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

d'ou

$$(\nabla_X\omega)(Y,Z) = 0.$$

∎

1.3 Structure de Kenmotsu

1.3.1 Variété Sasakienne

Définition 1.3.1. *[6]*

Soient (M, φ, ξ, η) une variété presque de contact et Φ la 2-forme fondamentale. On dit que M est une variété Sasakienne si $\Phi = d\eta$ et la triplet (φ, ξ, η) est normale.

Théorème 1.3.1. *[6]*

Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variéré métrique presque de contact, M est une variété de Sasaki si et seulement si

$$(\nabla_X \varphi) Y = g(X, Y) \xi - \eta(Y) X$$

pour tous champs de vecteurs $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Preuve .

$(\Longrightarrow)$Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Sasaki alors

$$\Phi = d\eta, \qquad N^{(1)} = 0, \qquad N^2 = 0$$

Utilisant le lemme (1.2.1) avec $\Phi = d\eta$ on a

$$\begin{aligned} 2g\big((\nabla_X\varphi)Y, Z\big) &= g\big(N^{(1)}(Y,Z), \varphi X\big) + 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \\ \Longleftrightarrow g\big((\nabla_X\varphi)Y, Z\big) &= d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \quad \textit{car} \quad N^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

puisque

$$d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

alors

$$\begin{aligned} g((\nabla_X\varphi) Y, Z) &= g(\varphi Y, \varphi X)\eta(Z) - g(\varphi Z, \varphi X)\eta(Y) \\ &= g(Y, X)\eta(Z) - g(X, Z)\eta(Y) \\ &= g\big(g(Y,X)\xi, Z\big) - g\big(\eta(Y)X, Z\big) \\ &= g\big(g(Y,X)\xi - \eta(Y)X, Z\big) \end{aligned}$$

d'ou

$$(\nabla_X \varphi) Y = g(X, Y) \xi - \eta(Y) X$$

$(\Longleftarrow)$Soit (φ, ξ, η, g) une structure métrique de contact avec

$$(\nabla_X \varphi) Y = g(X, Y) \xi - \eta(Y) X$$

remplacent Y par ξ on obtient

$$\begin{aligned}(\nabla_X\varphi)\,\xi = \eta\,(Y)\,\xi - X &\iff \nabla_X\varphi\xi - \varphi\nabla_X\xi = \eta\,(Y)\,\xi - X\\ &\iff \nabla_X\xi = -\varphi X.\end{aligned}$$

on a

$$d\eta\,(X,Y) = \frac{1}{2}\,(g\,(\nabla_X\xi, Y) - g\,(\nabla_Y\xi, X)) = g\,(X, \varphi Y)$$

et on sait que

$$\begin{aligned}N_\varphi(X,Y) &= \varphi^2[X,Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]\\ &= \varphi^2(\nabla_X Y - \nabla_Y X) + (\nabla_{\varphi X}\varphi Y - \nabla_{\varphi Y}\varphi X)\\ &\quad -\varphi(\nabla_{\varphi X}Y - \nabla_Y\varphi X) - \varphi(\nabla_X\varphi Y - \nabla_{\varphi Y}X)\\ &= \varphi^2(\nabla_X Y - \nabla_Y X) + (\nabla_{\varphi X}\varphi)Y + \varphi\nabla_{\varphi X}Y - (\nabla_{\varphi Y}\varphi)X - \varphi\nabla_{\varphi Y}X\\ &\quad -\varphi\nabla_{\varphi X}Y + \varphi(\nabla_Y\varphi)X + \varphi^2\nabla_Y X - \varphi(\nabla_X\varphi)Y - \varphi^2(\nabla_X Y) + \varphi\nabla_{\varphi Y}X\\ &= (\nabla_{\varphi X}\varphi)Y - (\nabla_{\varphi Y}\varphi)X + \varphi(\nabla_Y\varphi)X - \varphi(\nabla_X\varphi)Y\\ &= g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X - g(\varphi Y, X)\xi + \eta(X)\varphi Y\\ &\quad +\varphi g(Y,X)\xi - \varphi\eta(X)Y - \varphi g(X,Y)\xi + \varphi\eta(Y)X\\ &= -2g(X, \varphi Y)\xi\\ &= -2d\eta\,(X,Y)\,\xi\end{aligned}$$

donc

$$N(X,Y) = N_\varphi\,(X,Y) + 2d\eta\,(X,Y)\,\xi = 0$$

alors la structure (φ, ξ, η, g) est de Sasaki. ■

Exemples 1.3.1.

(1) La sphère d'unité S^{2n+1} munie de la structure canonique (φ, ξ, η, g) est une variété Sasakienne,(voir l'exemple 1.2.1). Ensuite, par la déformation de Tanno [61] on a la structure :

$$\eta' = a\eta, \qquad \xi' = \frac{1}{a}\xi, \qquad \phi' = \phi, \qquad g' = ag + a(a-1)\eta\otimes\eta, \qquad a \in \mathbb{R}^+.$$

Alors nous pouvons obtenir une variété Sasakienne $(S_a^{2n+1}, \phi', \xi', \eta', g')$, ([5], p 99).

(2) E.Blair [8] a donné un exemple important d'une variété Sasakienne sur $\mathbb{R}^{2n+1}$.

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \delta_{ij}+y^iy^j & 0 & -y^i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -y^j & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & y^j & 0 \end{pmatrix}, \\ \xi &= 2\left(\frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad \eta = \frac{1}{2}(dz - y^i dx). \end{aligned}$$

1.3.2 Variété de Kenmotsu

Définition 1.3.2. *Soient* (M, φ, ξ, η) *une variété presque de contact et* Φ *la 2-forme fondamentale. On dit que* M *est de Kenmotsu si* η *est fermée (c.à.d.* $d\eta = 0$*),* $d\Phi = 2\Phi \wedge \eta$ *et la triplet* (φ, ξ, η) *est normale.*

Théorème 1.3.2. *[41] Soient* $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété presque de contact de dimension* $(2n+1)$ *et* ∇ *la connexion de Levi-Cevita sur* M*. On dit que* M *est de Kenmotsu si et seulement si pour tous* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*,*

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X.$$

De plus, on a la notion la plus générale d'une structure β-Kenmotsu, qui peut être définie par

$$(\nabla_X \varphi)Y = \beta\big(g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\big),$$

où β est une constante non nulle.

Exemple 1.3.1. *[8] Soit* (x, y, z) *les coordonnées cartésiennes sur* $\mathbb{R}^3$ *on pose*

$$\eta = dz, \quad \xi = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \Phi = -2e^{2z} dx \wedge dy, \quad g = e^{2z}(dx^2 + dy^2) + dz^2.$$

Alors, la variété $(\mathbb{R}^3, \varphi, \eta, \xi, g)$ *est une variété de Kenmotsu.*

1.4 Structure trans-Sasakienne

1.4.1 Variété trans-Sasakienne

Définition 1.4.1. *[52], [48],[49] Soient* $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété métrique presque de contact et* Φ *la 2-forme fondamentale. On dit que* M *est trans-Sasakienne si et seulement si elle est normale et*

$$d\eta = \alpha\Phi, \quad d\Phi = 2\beta\Phi \wedge \eta, \tag{1.4}$$

où $\alpha = \frac{1}{2n}\delta\Phi(\xi)$ *et* $\beta = \frac{1}{2n}div\xi$ *sont des fonctions différentiables sur* M *et* $\delta\Phi$ *est la codifférentielle de* Φ *(la divergence)(voir [49], page 17) définie par :*

$$\delta\Phi(X) = -\sum_{i=1}^{2n}\Big((\nabla_{e_i}\Phi)(e_i, X) + (\nabla_{\varphi e_i}\Phi)(\varphi e_i, X)\Big) - (\nabla_\xi\Phi)(\xi, X),$$

avec $\{e_1, ..., e_n, \varphi e_1, ..., \varphi e_n, \xi\}$ *une* φ*-base locale d'un ouvert quelconque de* M*.*

Théorème 1.4.1. *[6]*
Soient $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété presque de contact de dimension* $(2n+1)$ *et* ∇ *la connexion de Levi-Cevita sur* M*. On dit que* M *est trans-Sasakienne si et seulement si pour tous* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*,*

$$(\nabla_X\varphi)Y = \alpha\big(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\big) + \beta\big(g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\big)$$

où α *et* β *sont des fonctions différentiables sur* M*, et on dit aussi que la structure trans-Sasakienne est de type* (α, β)*.*

En particulier, la structure est normale en plus,
- si $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, la structure est dite **Sasakienne**,
- si $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ et $\beta = 0$, la structure est dite α**-Sasakienne**,
- si $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, la structure est dite de **Kenmotsu**,
- si $\alpha = 0$, et $\beta \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ la structure est dite β**-Kenmotsu**,
- si $\alpha = \beta = 0$, la structure est dite **cosymplectique**.

Proposition 1.4.1. *[6] Soit* $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété trans-Sasakienne. Pour tous* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$*,*

$$\nabla_X\xi = -\alpha\varphi X + \beta(X - \eta(X)\xi),$$
$$(\nabla_X\eta)Y = -\alpha g(\varphi X, Y) + \beta\big(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\big),$$
$$(\nabla_X\Phi)(Y,Z) = \alpha\big(g(X,Z)\eta(Y) - g(X,Y)\eta(Z)\big) - \beta\big(g(X,\varphi Z)\eta(Y) - g(X,\varphi Y)\eta(Z)\big).$$

Remarque 1.4.1. *D'après la proposition 1.4.1 on peut trouver :*

$$(\nabla_X\Phi)(Y,\xi) = -\alpha, \qquad (\nabla_X\eta)X = -\beta.$$

Pour X *orthogonal à* ξ *et* $g(X,X) = 1$*, on a*

$$\delta\Phi(\xi) = 2n\alpha, \qquad \delta\eta = -2n\beta.$$

Exemple 1.4.1. *[6] Soit* (x, y, z) *les coordonnées cartésiennes sur* $\mathbb{R}^3$ *on pose*

$$\xi = \frac{\partial}{\partial_z}, \qquad \eta = dz - ydx$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -y & 0 \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} e^z + y^2 & 0 & -y \\ 0 & e^z & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilisant

$$\delta\Phi(X) = -\sum_{i=1}^{2n} \Big((\nabla_{e_i}\Phi)(e_i, X) + (\nabla_{\varphi e_i}\Phi)(\varphi e_i, X) \Big) - (\nabla_{\xi}\Phi)(\xi, X),$$

et

$$\delta\eta = -\sum_{i=1}^{2n} \Big((\nabla_{e_i}\eta)e_i + (\nabla_{\varphi e_i}\eta)\varphi e_i \Big),$$

on trouve

$\delta\Phi(\xi) = -e^{-z}$, $\delta\eta = -1$ *et* $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est une variété trans-Sasakienne de type* $(-\frac{1}{2}e^{-z}, \frac{1}{2})$.

1.5 Métriques sur variété Riemannienne produit

Dans ce chapitre, nous allons rappeler la notion d'une variété Riemannienne produit, ainsi quelques types de métrique Riemannienne citons la métrique diagonale, la métrique produit tordu et la métrique produit tordu $\mathcal{D}$-homothetique.

Nous nous intéressons à une généralisation de tels dernier métrique produit appelé métrique produits bi-tordu $\mathcal{D}$-homothetique ($\mathcal{D}$-homothetic bi-warping) (voir [11, 8]).

1.5.1 Métrique diagonale sur variété produit

Définition 1.5.1. *Si (M_1, g_1) et (M_2, g_2) sont deux variétés Riemanniennes de dimension n_1 et n_2 respectivement, alors le tenseur $g = \pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2$ est une **métrique Riemannienne diagonale** sur $M_1 \times M_2$ telle que*

$$\begin{aligned} g((X_1,0),(Y_1,0)) &= g_1(X_1,Y_1)\circ\pi_1 \\ g((0,X_2),(0,Y_2)) &= g_2(X_2,Y_2)\circ\pi_2 \\ g((X_1,0),(0,X_2)) &= 0 \end{aligned}$$

pour tout $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ et $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$.
avec les projections canoniques : $\pi_1 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1$ et $\pi_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2$.

la matrice associé à g s'écrie sur cette forme,

$$\begin{pmatrix} (g_{1_{ij}}) & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & (g_{2_{ab}}) \end{pmatrix}$$

Définition 1.5.2.
*La variété Riemannienne $(M_1 \times M_2, g)$ est **dite variété Riemannienne produit**.*

Proposition 1.5.1. *Soient M_1 et M_2 deux variétés, alors pour tout $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ on a :*

$$T_{(x_1,x_2)} M_1 \times M_2 \cong T_{x_1} M_1 \times T_{x_2} M_2 \,.$$

1.5.2 Métrique tordu sur variété produit

Définition 1.5.3. *Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés Riemanniennes de dimensions n_1 et n_2 respectivement, et f une fonction strictement positive sur M_1.*
*Le **produit tordu** noté $M_1 \times_f M_2$ est définie comme étant la variété produit $M_1 \times M_2$ munie de la métrique $\tilde{g}$, donné par :*

$$\tilde{g} = \pi_1^* g_1 + (f \circ \pi_1)^2 \pi_2^* g_2 \,, \tag{1.5}$$

Le couple $(M_1 \times_f M_2, \tilde{g})$ s'appelle ***variété Riemannienne produit tordu*** *et f s'appelle* ***la fonction de distorsion*** *du produit tordu .*

Autres types de métriques tordu

Définition 1.5.4.
Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés Riemanniennes. On défini sur la variété produit $\overline{M} = M_1 \quad {}_{f_2}\times_{f_1} M_2$ la métrique par :

$$\overline{g} = f_2^2 g_1 + f_1^2 g_2$$

alors,
- Si $f_1 \in C^\infty(M_1)$ et $f_2 = 1$ on dit que $\overline{g}$ est une métrique produit tordu.
- Si $f_1 \in C^\infty(\overline{M})$ et $f_2 = 1$ on dit que $\overline{g}$ est une métrique tordu généralisé.
- Si $f_1 \in C^\infty(M_1)$ et $f_2 \in C^\infty(M_2)$ on dit que $\overline{g}$ est une métrique tordu doublé.
- Si $f_1, f_2 \in C^\infty(\overline{M})$ on dit que $\overline{g}$ est une métrique tordu doublée généralisée.

1.5.3 Métrique tordu $\mathcal{D}$-homothetique

En géométrie classique (Euclidien), une homothétie est une application ponctuelle caractérisée par un point invariant appelé centre et un réel appelé rapport. Par l'homothétie de centre O et de rapport k, le point M est transformé en un point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$.

En d'autres termes, l'homothétie laisse O fixe et envoie le point M sur un point M' situé sur la droite (OM) par un agrandissement ou une réduction de rapport k. L'homothétie correspond donc à un changement d'échelle des figures, c'est à dire L'**homothétie** est une **transformation** géométrique qui permet d'agrandir ou de réduire une figure selon un rapport d'homothétie k et un centre O.

Dans cette section, nous donnons les définitions de la métrique tordu $\mathcal{D}$-homothétique et la métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique sur la variété produit $\tilde{M} = M' \times M$

Pour plus détails voir ([11],[8]).

1.5.4 Déformation $\mathcal{D}$-homothetique

Définition 1.5.5. *[61], [8]*

*La notion de la **déformation $\mathcal{D}$-homothétique** ou déformation $2n$-homothétique sur une variété métrique de contact $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ a été introduite par **Tanno** [61] où $\mathcal{D}$ est la distribution définie par $\eta = 0$. Donc pour une structure métrique de contact (φ, ξ, η, g) et une constante positive a, la déformation donnée par :*

$$\overline{\varphi} = \varphi, \qquad \overline{\eta} = a\eta, \qquad \overline{\xi} = \frac{1}{a}\xi, \qquad \overline{g} = ag + a(a-1)\eta \otimes \eta, \tag{1.6}$$

est aussi une structure métrique de contact, ($\overline{g}$ appelé métrique $\mathcal{D}$-homothétique).

Par même principe, pour une structure métrique presque de contact (φ, ξ, η, g), la déformation

$$\overline{\varphi} = \varphi, \qquad \overline{\eta} = \lambda\eta, \qquad \overline{\xi} = \frac{1}{\lambda}\xi, \qquad \overline{g} = \alpha^2 g + \beta^2 \eta \otimes \eta,$$

est aussi une structure métrique presque de contact si $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$ (condition de compatibilité) où α, β et λ sont des constantes non nulles.
Posons $\alpha^2 = a^2$ et $\beta^2 = a^2(b^2-1)$ où $\lambda = ab \neq 0$, on a la déformation

$$\overline{\varphi} = \varphi, \qquad \overline{\eta} = ab\eta, \qquad \overline{\xi} = \frac{1}{ab}\xi, \qquad \overline{g} = a^2 g + a^2(b^2-1)\eta \otimes \eta. \tag{1.7}$$

Ce qui permet à G.Beldjilali et M.Belkhelfa de poser la définition suivante (voir [11]) :

1.5.5 Métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothetique

Définition 1.5.6. *[11]*
*Soient (M'^m, g') une variété Riemannienne et $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique presque de contact. La métrique **bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique** sur $\tilde{M} = M' \times M$ est définie par*

$$\tilde{g} = g' + f^2 g + f^2(h^2-1)\eta \otimes \eta. \tag{1.8}$$

où f et h sont deux fonctions différentiables sur M' vérifiant $fh \neq 0$ partout.
De plus, le couple $(\tilde{M}, \tilde{g})$ s'appelle variété Riemannienne produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique.

Remarques 1.5.1.
- *En particulier, si $h = \pm 1$ alors on a une métrique produit tordu et si $h = \pm f$ nous obtenons une métrique produit tordu $\mathcal{D}$-homothétique de **Blair** [8] .*
- *Dans le cas où $M' = \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique presque de contact. On défini sur le produit $\tilde{M} = \mathbb{I} \times M$ La métrique **bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique** $\tilde{g}$ par,*

$$\tilde{g} = dt^2 + f^2 g + f^2(h^2-1)\eta \otimes \eta. \tag{1.9}$$

Les champs de vecteurs sur $\mathbb{I} \times M^{2n+1}$ sont donnés par $(a\partial_t, X)$ oú X est un champs de vecteurs sur M^{2n+1}, t la coordonnée de $\mathbb{I}$ (avec $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$) et f, h deux fonctions sur $\mathbb{I}$ telle que

$fh \neq 0$.

chapter 2

Géométrie Kählérienne généralisée

En géométrie généralisée on travail non pas sur le fibré tangent d'une variété différentiable M, qui noté TM mais plutôt sur la somme du fibré tangent et du fibré cotangent, que nous noterons par $\mathbb{T}M := TM \oplus T^*M$, ce fibré est appelé le fibré de *Pontryagin* ou le fibré tangent généralisé sur la variété M avec la somme de *Whitney* $TM \oplus T^*M$ des fibrés tangent et cotangent. En ce qui concerne la géométrie complexe généralisée est une partie de la géométrie généralisée dont la variété différentiable M est de dimension $2n$, où nous allons concentrer notre étude sur les **structures Kählériennes généralisées**.

Les structures complexes généralisées ont été introduites par *Nigel Hitchin*, et ensuite développées par ses étudiants *Marco Gualtieri* ([28], 2003) et *Gil Cavalcanti* ([16], 2006). Ceci nous conduit à une notion qui unifie les structures presque complexes et les formes symplectiques classique.
Nous remarquons que les structures complexes généralisées sont en correspondance biunivoque avec les couples de **structures de *Dirac***. Nous allons étudier aussi la transformation de ces structures à travers d'une application exponentielle de transformation.

Dans ce chapitre, nous serons baser aussi sur la construction d'une structure Kählérienne généralisée à partir d'une **structure bi-hermitienne** classique suivant le **Théorème** de *Marco Gualtieri* ([28]).

Afin, nous arrivons à définie une métrique Riemannienne sur une variété Kählérienne généralisée qui s'appelle **métrique Riemannienne généralisée**, avec plein des exemples bien détaillés.

2.0.6 Introduction :

Soit M une variété différentiable de dimension n.
Nous considérons le fibré $\mathbb{T}M := TM \oplus T^*M$ muni de deux opérations suivantes :

1.) Une **pseudo-métrique** naturelle bilinéaire symétrique et non dégénérée de signature (n, n) définie par :

$$< X + \alpha, Y + \beta >= \frac{1}{2}(i_X\beta + i_Y\alpha).$$

$X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\alpha, \beta \in \Gamma(T^*M)$

2.) Un **crochet de Courant** qui définie par la formule suivante :

$$[X + \alpha, Y + \beta]_c = [X, Y] + \mathfrak{L}_X\beta - \mathfrak{L}_Y\alpha - \frac{1}{2}d(i_X\beta - i_Y\alpha).$$

Pour tous $X + \alpha, Y + \beta \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$,
où : $\mathfrak{L}_X$ est la dérivé de Lie dans la direction du champ de vecteur X, et i_X est le produit intérieur.

Remarques 2.0.2.

- *Remarquons que sur les champs vectoriels, le* ***crochet de Courant*** $[.,.]_c$ *se réduit au crochet Lie* $[.,.]$, *en d'autres termes, si,* $\pi : TM \oplus T^*M \longrightarrow TM$ *est la projection naturelle :*

$$\pi([A, B]_c) = [\pi(A), \pi(B)], \tag{2.1}$$

pour tous $A, B \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$.
D'autre part, sur les 1-formes, le crochet de Courant est nul.
Le crochet de Courant n'est pas un crochet de Lie, puisqu'il ne satisfait pas l'identité de Jacobi.

- *L'opération* $<,>$ *n'est pas une métrique Riemannienne (voir la Remarque 4.3.1).*

2.1 Structures presque complexes généralisées

les structures presque complexes généralisées sont des extensions naturelle des structures presque complexes et symplectiques classiques. Elles ont introduites dans les travaux de : , *Nigel Hitchin, Marco Gualtieri ...*

Définition 2.1.1. *[28] Soit M une variété différentiable de dimension $2n$.*
Une structure presque complexe généralisée sur M est la donnée d'un endomorphisme $\mathcal{J}$ de $\mathbb{T}M$ tel que :

i) $\mathcal{J}^2 = -Id$

ii) $\mathcal{J}$ *préserve la pseudo-métrique* $< .,. >$ *c'est à dire :* $(\mathcal{J}^* + \mathcal{J} = 0)$.
tel que :
$< \mathcal{J}A, B >=< A, \mathcal{J}^*B >$, *pour tout :* $A = X + \alpha \in \Gamma(\mathbb{T}M), et \quad B = Y + \eta \in \Gamma(\mathbb{T}M)$

Définition 2.1.2. *[70]*

L'endomorphisme $\mathcal{J}$:$TM \oplus T^*M \longrightarrow TM \oplus T^*M$ *peut être représentée par une matrice dont les quatre bloc carrés sont :* $\varphi, \pi^\sharp, \theta^\flat, -\varphi^*$, *c'est à dire*

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \varphi & \pi^\sharp \\ \theta^\flat & -\varphi^* \end{pmatrix}$$

tels que ces applications sont définis comme suit :

1) $\varphi : TM \longrightarrow TM$, *champ de tenseur de type* $(1,1)$ *tel que :*

$\varphi^* : T^*M \longrightarrow T^*M$, *avec :* $\varphi^*\alpha = \alpha \circ \varphi$

(c'est à dire : $(\varphi^*\alpha)(X) = \alpha(\varphi(X))$ $\forall X \in \mathrm{T}M$ *et* $\forall \alpha \in \mathrm{T}^*M$.*)*

2) π *un champ bivecteure sur* M *tel que :*

$\pi^\sharp : T^*M \longrightarrow TM$, *avec :* $\beta(\pi^\sharp\alpha) = \pi(\alpha, \beta)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{T}^*M$.

3) θ *2-forme différentiable sur* M *tel que :*

$\theta^\flat : TM \longrightarrow T^*M$, *avec :* $(\theta^\flat X)(Y) = \theta(X, Y)$, $\forall X, Y \in \mathrm{T}M$.

vérifiant des conditions suivante :

1. $\varphi^2 + \pi^\sharp\theta^\flat = -Id$

2. $\varphi\pi^\sharp = \pi^\sharp\varphi^*$

3. $\theta^\flat\varphi = \varphi^*\theta^\flat$

Remarques 2.1.1.
- Les structures presque complexes généralisées va définie sur les variétés de dimension paire.
- Sur le fibré vectoriel complexifie $(TM \oplus T^*M)_{\mathbb{C}}$, *On a pour* $\mathcal{J}$ *deux valeurs propres :*$+i, -i$.
Nous allons définir des fibrés vectoriel complexes suivantes :

$$L^+ = \{X + \alpha \in (TM \oplus T^*M)_{\mathbb{C}} : \mathcal{J}(X + \alpha) = i(X + \alpha)\}$$
$$L^- = \{X + \alpha \in (TM \oplus T^*M)_{\mathbb{C}} : \mathcal{J}(X + \alpha) = -i(X + \alpha)\}$$

tel que L^+ *est* $+i$*-fibré propre et* L^- *est* $-i$*-fibré propre.*
Nous avons une décomposition naturelle :

$$(TM \oplus T^*M)_{\mathbb{C}} := L^+ \oplus L^-$$

2.1.1 Application de transformation

Définition 2.1.3. *[28]*
Soit $B \in \Omega^2(M)$ Une 2-forme.
L'application linéaire e^B est définit par :

$$\begin{array}{rcl} e^B : TM \oplus T^*M & \longrightarrow & TM \oplus T^*M \\ X + \xi & \longrightarrow & X + \xi + \iota_X B \end{array}$$

tel que ι_X le produit intérieure.
On peut définie cette application par une matrice : $e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix}$

Lemme 2.1.1. *[9]*

$$< X + \xi, Y + \eta > = < X + \xi + \iota_X B, Y + \eta + \iota_Y B >, \qquad \forall X, Y \in TM \ , \forall \xi, \eta \in T^*M.$$

Preuve .
pour $X, Y \in TM$ et pour $\xi, \eta \in T^*M$

$$\begin{aligned} < X + \xi + \iota_X B, Y + \eta + \iota_Y B > &= \frac{1}{2}(\xi(Y) + \iota_X B(Y) + \eta(X) + \iota_Y B(X)) \\ &= \frac{1}{2}(\xi(Y) + B(Y, X) + \eta(X) + B(X, Y)) \\ &= \frac{1}{2}(\xi(Y) + B(Y, X) + \eta(X) - B(Y, X)) \\ &= \frac{1}{2}(\xi(Y) + \eta(X)) \\ &= < X + \xi, Y + \eta > \end{aligned}$$

■

2.1.2 Exemples

Exemple 2.1.1. *[24]*
Une structure presque complexe J sur M définit la structure presque complexe généralisée

$$\mathcal{J}_J = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J^* \end{pmatrix}$$

où J^* est l'adjoint de J,
(ie : $J^* : T^*M \longrightarrow T^*M$ avec : $J^*(\alpha)(X) = \alpha J(X) \qquad \forall X \in \mathrm{T}M$ et $\forall \alpha \in \mathrm{T}^*M$).

Vérification

Première condition :

$\mathcal{J}_J^2 = -Id$?
On a

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{J}_J^2 & = & \mathcal{J}_J\mathcal{J}_J \\
& = & \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J^* \end{pmatrix} \\
& = & \begin{pmatrix} J^2 & 0 \\ 0 & (J^*)^2 \end{pmatrix} \\
& = & \begin{pmatrix} -Id & 0 \\ 0 & -Id \end{pmatrix} \ \ car \ \ (J^*)^2(\alpha) = J^*J^*(\alpha) = J^*(\alpha J) = \alpha J^2 = -\alpha \\
& = & -Id
\end{array}$$

Car :
J est une structure presque complexe (c'est à dire :$J^2 = -I$).
J^* est une l'application adjoint de J (c'est à dire :$(J^*)^2 = -I$).

Deuxième condition :

$\mathcal{J}_J + \mathcal{J}_J^* = 0$?
Cherchons à $\mathcal{J}_J^*$ l'adjoint de $\mathcal{J}_J$.
On a : $\mathcal{J}_J = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J^* \end{pmatrix}$
Soit $A = X + \xi \in \mathbb{T}M, \qquad B = Y + \eta \in \mathbb{T}M\,;$

$$\mathcal{J}_J A = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} JX \\ -J^*\xi \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl}
\langle \mathcal{J}_J A, B\rangle & = & \langle JX - J^*\xi, Y + \eta\rangle \\
& = & \frac{1}{2}(-J^*\xi(Y) + \eta(JX)) \\
& = & \frac{1}{2}(\xi(-JY) + J^*\eta(X)) \\
& = & < X + \xi, -JY + J^*\eta > \\
& = & < X + \xi, \begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & J^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ \eta \end{pmatrix} > \\
& = & \langle A, \mathcal{J}_J^* B\rangle
\end{array}$$

tel que $\mathcal{J}_J^* = \begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & J^* \end{pmatrix} = -\mathcal{J}_J$

Alors $\mathcal{J}_J + \mathcal{J}_J^* = 0.$
Donc la structure presque complexe J sur M définit une structure presque complexe généralisée $\mathcal{J}_J$.

Exemple 2.1.2. *[24]*
Une structure presque symplectique ω sur M définit la structure presque complexe généralisée

$$\mathcal{J}_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérification

Premiere condition :

$\mathcal{J}_J^2 = -Id?$
Rappelons que une structure presque symplectique ω est non dégénérée,c'est à dire l'inverse ω^{-1} existe .
On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\omega^2 &= \mathcal{J}_\omega \mathcal{J}_\omega \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\omega^{-1}\omega & 0 \\ 0 & -\omega\omega^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -Id & 0 \\ 0 & -Id \end{pmatrix} \\
&= -Id.
\end{aligned}$$

Deuxième condition :

$\mathcal{J}_\omega + \mathcal{J}_\omega^* = 0?$
cherchons à $\mathcal{J}_\omega^*$ l'adjoint de $\mathcal{J}_\omega$.
On a : $\mathcal{J}_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$

Soit $A = X + \xi \in \mathbb{T}M, \qquad B = Y + \eta \in \mathbb{T}M.$

On a : $\qquad \mathcal{J}_\omega A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^{-1}\xi \\ \omega X \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
< \mathcal{J}_\omega A, B > &= < -\omega^{-1}\xi + \omega X, Y + \eta > \\
&= \frac{1}{2}(\omega X(Y) + \eta(-\omega^{-1}\xi)) \\
&= \frac{1}{2}(-\omega Y(X) + \xi(\omega^{-1}\eta)) \\
&= < X + \xi, \omega^{-1}\eta - \omega Y > \\
&= < X + \xi, \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-1} \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ \eta \end{pmatrix} > \\
&= < A, \mathcal{J}_\omega^* B >
\end{aligned}$$

tel que $\mathcal{J}_\omega^* = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-1} \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} = -\mathcal{J}_\omega$

Alors $\mathcal{J}_\omega + \mathcal{J}_\omega^* = 0$.
Donc la structure presque symplectique ω sur M définit la structure presque complexe généralisée $\mathcal{J}_\omega$.

Exemple 2.1.3. *[24]*
Toute 2-forme B sur M définit l'application orthogonale suivante :

$$\begin{aligned}
e^B : TM \oplus T^*M &\longrightarrow TM \oplus T^*M \\
X + \xi &\longrightarrow X + \xi + \iota_X B
\end{aligned}$$

Si $\mathcal{J}$ est une structure presque complexe généralisée sur M alors $e^{-B}\mathcal{J}e^B$ est aussi.

Vérification

Soit $\mathcal{J}$ est une structure presque complexe généralisée i.e : $\mathcal{J}^2 = -Id$ et $\mathcal{J}^* + \mathcal{J} = 0$.

Premiere condition :

$(e^{-B}\mathcal{J}e^B)^2 = -id$?
On a

$$\begin{aligned}
(e^{-B}\mathcal{J}e^B)^2 &= (e^{-B})^2\mathcal{J}^2(e^B)^2 \\
&= (e^{-B})^2(-Id)(e^B)^2 \\
&= -e^{-2B}e^{2B} \\
&= -Id
\end{aligned}$$

deuxième condition :

$(e^{-B}\mathcal{J}e^{B}) + (e^{-B}\mathcal{J}e^{B})^* = 0?$
cherchons à $(e^{-B}\mathcal{J}e^{B})^*$ l'adjoint de $(e^{-B}\mathcal{J}e^{B})$.
on trouve :

$$\begin{aligned} < e^{-B}\mathcal{J}e^{B}(X+\xi), Y+\eta > &= < \mathcal{J}e^{B}(X+\xi), e^{B}(Y+\eta) > \\ &= < e^{B}(X+\xi), \mathcal{J}^* e^{B}(Y+\eta) > \\ &= < e^{B}(X+\xi), -\mathcal{J}e^{B}(Y+\eta) > \\ &= < X+\xi, -e^{-B}\mathcal{J}e^{B}(Y+\eta) > \\ &= < X+\xi, (e^{-B}\mathcal{J}e^{B})^*(Y+\eta) >, \end{aligned}$$

alors $(e^{-B}\mathcal{J}e^{B}) + (e^{-B}\mathcal{J}e^{B})^* = 0$.
Donc $e^{-B}\mathcal{J}e^{B}$ est une structure presque complexe généralisée sur M.

Proposition 2.1.1. *[28]*
Une variété différentiable M admet une structure presque complexe généralisée si et seulement si elle est de dimension pair.

Proposition 2.1.2. *[28]*
Une structure presque complexe généralisée $\mathcal{J}$ sur M équivalent à donner des sous-espaces isotropes maximaux $L^+, L^- \subset \mathbb{T}M \otimes \mathbb{C}$ tel que $L^+ \cap L^- = \{0\}$.

Preuve . [28]
Si $\mathcal{J}$ est une structure presque complexe généralisée, alors soit L^+ son $+i$-espace propre à $(TM \oplus T^*M)$.
si $A, B \in L^+$, $< A, B > = < \mathcal{J}A, \mathbb{J}B >$ par orthogonalité et $< \mathcal{J}A, \mathcal{J}B > = < iA, iB > = - < A, B >$, implique que $< A, B > = 0$.
Par conséquent, L^+ est isotrope et demi-dimensionnel, c'est à dire isotrope maximal.
Aussi L^+ est le $+i$-espace propre de $\mathcal{J}$ donc $L^+ \cap L^- = \{0\}$.
Réciproquement : étant donné comme il suffit de définir $\mathcal{J}$ à la multiplication de i sur L^+ et par $(-i)$ sur L^-.
Cette transformation réel définit alors une structure presque complexe généralisée sur M. ■

2.1.3 L'intégrabilité de structure presque complexe généralisée

Définition 2.1.4. *[28]*
Une structure presque complexe généralisée $\mathcal{J}$ sur M est intégrable si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. *Le tenseur de Nijenhuis $N_{\mathcal{J}}$ définit par :*

$$N_{\mathcal{J}}(e_1, e_2) = [\mathcal{J}e_1, \mathcal{J}e_2]_c + \mathcal{J}^2[e_1, e_2]_c - \mathcal{J}[\mathcal{J}e_1, e_2]_c - \mathcal{J}[e_1, \mathcal{J}e_2]_c \quad \forall e_1, e_2 \in \Gamma(TM \oplus T^\star M)$$

est nul sur $\mathbb{T}M$

2. *L'une des sous-espace propre* $L^{\pm}$ *de* $\mathcal{J}$ *dans* $\mathbb{T}M \otimes \mathbb{C}$ *associée à la valeur propre* $\pm i$*, est stable par crochet de Courant.*

Définition 2.1.5. *[28]*
Toute structure presque complexe généralisée intégrable sur M*, alors elle est simplement appelée* ***une structure complexe généralisée.***

Définition 2.1.6. *[28]*
Toute structure presque complexe généralisée intégrable sur M *dont les fibrés associent* L^+ *et* L^- *sont simultanément stable par le crochet de Courant. Alors, cette structure est appelée* ***la structure complexe généralisée forte.***

Exemple 2.1.4.
Soit ω *une structure symplectique sur* M*. Alors :*

$$\mathcal{J}_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix} : TM \oplus T^*M \longrightarrow TM \oplus T^*M$$

est une structure complexe généralisée, tel que :

$$L^{\pm} = \{X \mp i\iota_X\omega \mid X \in TM_{\mathbb{C}}\}$$

Vérification
▶ *Vérifiant que l'espace propre de* $\mathbb{J}_\omega$ *dans* $\mathbb{T}M \otimes \mathbb{C}$ *associé à la valeur propre* i *est donné par :*

$$L^{+} = \{X - i\iota_X\omega \mid X \in TM_{\mathbb{C}}\}$$

On a : i *est une valeur propre de* $\mathcal{J}_\omega$ *c'est à dire l'espace propre de* $\mathcal{J}_\omega$ *dans* $\mathbb{T}M \otimes \mathbb{C}$ *associé à la valeur propre* i *est définie par :*

$$L^{+} = \{(X+\alpha) \in \mathbb{T}M \mid \mathcal{J}_\omega(X+\alpha) = i(X+\alpha)\}$$

tel que $X+\alpha$ *est une vecteurs propre de* $\mathcal{J}_\omega$ *associée à la valeur propre* i*.*

$$\begin{aligned} L^{+} &= \{(X+\alpha) \in \mathbb{T}M \mid \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iX \\ i\alpha \end{pmatrix}\} \\ &= \{(X+\alpha) \in \mathbb{T}M \mid \begin{pmatrix} -\omega^{-1}\alpha \\ \omega X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iX \\ i\alpha \end{pmatrix}\} \\ &= \{(X+\alpha) \in \mathbb{T}M \mid X = i\omega^{-1}\alpha, \alpha = -i\omega X\} \\ &= \{X - i\omega X \mid X \in TM_{\mathbb{C}}\} \end{aligned}$$

▶ *Vérifiant que* L^+ *est stable par le crochet de courant* $[.,.]_C$.
Rappelons que : $\pounds_{[X,Y]}\alpha = \pounds_X\pounds_Y\alpha - \pounds_Y\pounds_X\alpha$, *et* $\iota_{[X,Y]}\alpha = \pounds_X\iota_Y\alpha - \iota_Y\pounds_X\alpha$.
Soit $X - i\iota_X\omega$, $Y - i\iota_Y\omega \in L^+$;

$$\begin{aligned}
[X - i\iota_X\omega, Y - i\iota_Y\omega]_C &= [X,Y] + \pounds_X(-i\iota_Y\omega) - \pounds_Y(-i\iota_X\omega) - \frac{1}{2}d(\iota_X(-i\iota_Y\omega) - \iota_Y(-i\iota_X\omega)) \\
&= [X,Y] - i\pounds_X(\iota_Y\omega) + i\pounds_Y(\iota_X\omega) + \frac{i}{2}d(\iota_X\iota_Y\omega - \iota_Y\iota_X\omega) \\
&= [X,Y] - i\pounds_X\iota_Y\omega + i\pounds_Y\iota_X\omega + id\iota_X\iota_Y\omega \\
&= [X,Y] - i\pounds_X\iota_Y\omega + i(\pounds_Y\iota_X\omega + d\iota_X\iota_Y\omega) \\
&= [X,Y] - i\pounds_X\iota_Y\omega + i(d\iota_Y\iota_X\omega + \iota_Y d\iota_X\omega + d\iota_X\iota_Y\omega) \\
&= [X,Y] - i\pounds_X\iota_Y\omega + i\iota_Y d\iota_X\omega \\
&= [X,Y] - i\pounds_X\iota_Y\omega + i\iota_Y(d\iota_X\omega + \iota_Y d\omega) \\
&= [X,Y] - i\pounds_X\iota_Y\omega + i\iota_Y\pounds_X\omega \\
&= [X,Y] - i(\pounds_X\iota_Y\omega - \iota_Y\pounds_X\omega) \\
&= [X,Y] - i\iota_{[X,Y]}\omega.
\end{aligned}$$

car :ω *est fermé c'est à dire* $d\omega = 0$ *Alors pour toute* $X - i\iota_X\omega$,$Y - i\iota_Y\omega \in L$, $[X - i\iota_X\omega, Y - i\iota_Y\omega]_C \subset L$
donc $\mathcal{J}_\omega$ *est une structure complexe généralisée.*

Exemple 2.1.5.
Une structure presque complexe généralisée

$$\mathcal{J}_J = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J^\star \end{pmatrix}$$

est intégrable si et seulement si la structure presque complexe J *sur* M *est intégrable*

Vérification

$$
\begin{aligned}
N_{\mathcal{J}_J}(X+\alpha, Y+\eta) &= [\mathcal{J}_J(X+\alpha), \mathcal{J}_J(Y+\eta)]_c + (\mathcal{J}_J)^2[X+\alpha, Y+\eta]_c - \mathcal{J}_J[\mathcal{J}_J(X+\alpha), Y+\eta]_c \\
&- \mathcal{J}_J[X+\alpha, \mathcal{J}_J(Y+\eta)]_c \\
&= [\begin{pmatrix} JX \\ -J^\star\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} JY \\ -J^\star\eta \end{pmatrix}]_c - [\begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y \\ \eta \end{pmatrix}]_c - \mathcal{J}_J[\begin{pmatrix} JX \\ -J^\star\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y \\ \eta \end{pmatrix}]_c \\
&- \mathcal{J}_J[\begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} JY \\ -J^\star\eta \end{pmatrix}]_c \\
&= [JX, JY] + \mathcal{L}_{JX}(-J^\star\eta) - \mathcal{L}_{JY}(-J^\star\alpha) - \frac{1}{2}d(-J^\star\eta(JX) + J^\star\alpha(JY)) \\
&- [X,Y] - \mathcal{L}_X\eta + \mathcal{L}_Y\alpha + \frac{1}{2}d(\eta(X) - \alpha(Y)) \\
&- J[JX,Y] + J^\star(\mathcal{L}_{JX}\eta - \mathcal{L}_Y(-J^\star\alpha) - \frac{1}{2}d(\eta(JX) + J^\star\alpha(Y))) \\
&- J[X,JY] + J^\star(\mathcal{L}_X(-J^\star\eta) - \mathcal{L}_{JY}\alpha - \frac{1}{2}d(-J^\star\eta(X) - \alpha(JY))) \\
&= [JX,JY] - [X,Y] - J[X,JY] - J[X,JY] + \mathcal{L}_{J\alpha}(-J^\star\eta) + J^\star\mathcal{L}_X(-J^\star\eta) - \mathcal{L}_{JY}(- \\
&- J^\star\mathcal{L}_Y(-J^\star\alpha) - \frac{1}{2}d(-\eta J(JX) + \alpha J(JY)) - \frac{1}{2}d(\eta(X) - \alpha(Y)) - \mathcal{L}_X\eta + J^\star\mathcal{L}_{JX}\eta - \\
&- J^\star\mathcal{L}_{JY}\alpha - \frac{1}{2}d(\eta(JX)) - \frac{1}{2}d(J^\star\alpha(Y)) - \frac{1}{2}d(-J^\star\eta(X)) - \frac{1}{2}d(\alpha(JY)) \\
&= -\frac{J^\star}{2}(d(\eta(JX)) + d(\alpha J(Y) + d(-\eta J(X)) + d(\alpha(JY)) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

D'où une structure presque complexe généralisée $\mathcal{J}_J$ est intégrable ssi la structure presque complexe J est intégrable, dans ce cas on dit que $\mathcal{J}_J$ est une structure complexe généralisée.

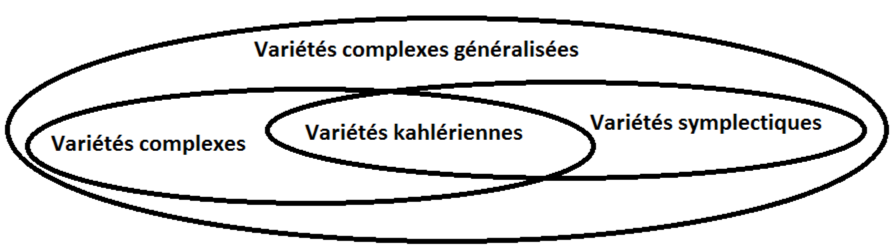


FIGURE 2.1 – Construction des variétés complexes généralisées [46].

2.2 Structures de Dirac

2.2.1 Structures presque de Dirac

Définition 2.2.1. *[68]*
Une structure presque de Dirac sur M est un sous-fibré L du fibré vectoriel $TM \oplus T^{\star}M$ qui est isotrope maximal par rapport à $< .,. >$ ie :

1. $dimL = dimM = 2n$
2. $< e_1, e_2 >= 0 \quad \forall e_1, e_2 \in \Gamma(L)$

Définition 2.2.2. *[68]*
Une structure presque de Dirac $L \subset TM \oplus T^{\star}M$ est appelé une structure de Dirac sur M si l'espace $\Gamma(L)$ des sections différentiables est stable pour le crochet de Courant.

Le Jacobien (The Jacobiator) est un opérateur tri linéaire qui mesure le défaut (le non-respect) de satisfaire l'identité de Jacobi :

$$Jac(A, B, C) = [[A, B]_c, C]_c + [[B, C]_c, A]_c + [[C, A]_c, B]_c, \tag{2.2}$$

où $A, B, C \in C^{\infty}(TM \oplus T^{*}M)$. Le Jacobien peut être considéré comme la dérivée d'un l'opérateur Nijenhuis :

Proposition 2.2.1. *[28]*

$$Jac(A, B, C) = d(N_{ij}(A, B, C))$$

où N_{ij} est l'opérateur Nijenhuis :

$$N_{ij}(A, B, C) = \frac{1}{3}(< [A, B]_c, C > + < [B, C]_c, A > + < [C, A]_c, B >)$$

avec $< .,. >$ le produit scalaire sur $TM \oplus T^{*}M$ qui présenté dans la section précédente.

Preuve .
Pour prouver ce résultat, nous introduisons le crochet Dorfman par l'opération $\circ$ sur $\mathbb{T}M$ qui n'est pas antisymétrie, mais il est antisymétrie pour le crochet de Courant :
$(X + \alpha) \circ (Y + \eta) = [X, Y] + \mathcal{L}_X \eta - \iota_Y d\alpha$
La différence entre les deux crochet est donnée par :

$$[A, B]_c \quad = \quad A \circ B - d < A, B > \tag{2.3}$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned}
[A,B]_c &= A\circ B - d < A,B > \\
&= [X,Y] + \mathcal{L}_X\eta - \iota_Y d\alpha - \frac{1}{2}(d\iota_Y\alpha + d\iota_X\eta) \\
&= \frac{1}{2}(2[X,Y] + 2\mathcal{L}_X\eta - 2\iota_Y d\alpha - d\iota_Y\alpha - d\iota_X\eta) \\
&= \frac{1}{2}([X,Y] + \mathcal{L}_X\eta - \iota_Y d\alpha - ([Y,X] + \mathcal{L}_Y\alpha - \iota_X d\eta)) \\
&= \frac{1}{2}(A\circ B - B\circ A)
\end{aligned}$$

L'avantage du crochet Dorfman est qu'il satisfait la règle Leibniz :

$$A\circ(B\circ C) = (A\circ B)\circ C + B\circ(A\circ C)$$

qui est facilement prouvé, on pose : $A = X+\alpha,\ B = Y+\eta,\ C = Z+\beta \in \mathbb{T}M$

$$\begin{aligned}
(A\circ B)\circ C + B\circ(A\circ C) &= [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]] + \mathcal{L}_{[X,Y]}\beta - \iota_Z d(\mathcal{L}_X\eta - \iota_Y d\alpha) \\
&+ \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X\beta - \iota_Z d\alpha) - \iota_{[X,Y]}d\eta \\
&= [X,[Y,Z]] + \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y\beta - \mathcal{L}_X\iota_Z d\eta - \mathcal{L}_Y\iota_Z d\alpha + \iota_Z d\iota_Y d\alpha \\
&= [X,[Y,Z]] + \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y\beta - \iota_Z d\eta) - \iota_{[Y,Z]}d\alpha \\
&= A\circ(B\circ C)
\end{aligned}$$

On note maintenant que :

$$\begin{aligned}
[[A,B]_c,C]_c &= [A,B]_c\circ C - d < [A,B]_c, C > \\
&= (A\circ B - d < A,B >)\circ C - d < [A,B]_c, C > \\
&= (A\circ B)\circ C - d < [A,B]_c, C >
\end{aligned}$$

où nous pouvons utilisé le fait que $\mu\circ C = 0$, lorsque μ est une 1-forme fermée.
Enfin, nous exprimons le Jacobien (Jacobiator) comme suit (c.p. : indique les permutations

cycliques) :

$$\begin{aligned}
Jac(A,B,C) &= [[A,B]_c,C]_c + c.p. \\
&= \frac{1}{4}((A\circ B)\circ C - C\circ(A\circ B) - (B\circ A)\circ C + C\circ(B\circ A) + c.p.) \\
&= \frac{1}{4}(A\circ(B\circ C) - B\circ(A\circ C) - C\circ(A\circ B) - B\circ(A\circ C) + A\circ(B\circ C) + C\circ(B\circ A) - \\
&= \frac{1}{4}(A\circ(B\circ C) - B\circ(A\circ C) + c.p.) \\
&= \frac{1}{4}([[A,B]_c C]_c + d < [A,B]_c, C > + c.p.) \\
&= \frac{1}{4}(Jac(A,B,C) + 3d(N_{ij}(A,B,C)))
\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$Jac(A,B,C) = d(N_{ij}(A,B,C))$$

∎

Proposition 2.2.2. *[28]*
Soit L un sous-fibrés vectoriel de $\mathbb{T}M$ qui est isotrope maximale. Alors, les propriétés suivant sont équivalent :

1. *L est stable (involutive)*
2. *$(N_{ij})_{|L} = 0$*
3. *$Jac_{|L} = 0$*

Preuve . Si L est stable alors il est claire que $(N_{ij})_{|L} = 0$, et puisque :

$$Jac(A,B,C) = d(N_{ij}(A,B,C))$$

ce qui implique que $Jac_{|L} = 0$.
Reste à démontrer est que $Jac_{|L} = 0$, implique que L est stable :
Supposons que $Jac_{|L} = 0$, mais L n'est pas stable. Alors, $\exists A,B,C \in \Gamma(L)$ tel que :

$$< [A,B]_c, C > \neq 0$$

Alors, $\forall f \in C^\infty(M)$

$$0 = Jac(A,B,fC) = d(N_{ij}(A,B,fC)) = \frac{1}{3} < [A,B]_c, C > df$$

est une contradiction, alors L est stable. ∎

2.2.2 Exemples sur les structures de Dirac

Exemple 2.2.1.
Considérons l'automorphisme de $TM \oplus T^{\star}M$ définie par :

$$\mathcal{J}_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

Les fibrés propres correspond à les valeurs-propres $\lambda = \mp 1$ sont TM et $T^{\star}M$.
Vérification
Cherchons les fibrés propres correspond à les valeurs propres $\lambda = \pm 1$:

$$\begin{aligned} L^+ &= \{X + \alpha / \mathcal{J}_0(X + \alpha) = X + \alpha\} \\ &= \{X + \alpha / X - \alpha = X + \alpha\} \\ &= \{X / X \in TM\} \\ &= \Gamma(TM) \\ L^- &= \{X + \alpha / \mathcal{J}_0(X + \alpha) = -(X + \alpha)\} \\ &= \{X + \alpha / X - \alpha = -X - \alpha\} \\ &= \{\alpha / \alpha \in T^{\star}M\} \\ &= \Gamma(T^{\star}M) \end{aligned}$$

On a :

1. $dim L^+ = 2n$
2. $\forall e_1, e_2 \in \Gamma(L^+) \quad < e_1, e_2 >= 0$

Alors, L^+ est une structure presque de Dirac.
De plus :

$$[e_1, e_2]_c = [e_1, e_2] \subset \Gamma(TM) \forall e_1, e_2 \in \Gamma(L^+)$$

Donc, L^+ est une structure de Dirac (même chose pour L^-).

Exemple 2.2.2.
Considérons le fibré automorphisme de $TM \oplus T^{\star}M$ définie par :

$$\mathcal{J}_\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

tel que :ω est une structure symplectique, les sous-fibrés :

$$L^{\pm} = \{X \pm \iota_X \omega / X \in TM\}$$

sont des structures de Dirac.
Vérification : *cherchons les fibrés propres correspond à les valeurs propres $\lambda = \pm 1$:*

$$\begin{aligned}
L^+ &= \{X+\alpha \in \mathbb{T}M / \mathcal{J}_\omega(X+\alpha) = X+\alpha\} \\
&= \{X+\alpha \in \mathbb{T}M / \begin{pmatrix} \omega^{-1}\alpha \\ \omega X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix}\} \\
&= \{\begin{pmatrix} X \\ \omega X \end{pmatrix} / X \in TM\} \\
&= \{X + \iota_X\omega / X \in TM\} \\
L^- &= \{X+\alpha \in \mathbb{T}M / \mathcal{J}_\omega(X+\alpha) = -(X+\alpha)\} \\
&= \{X+\alpha \in \mathbb{T}M / \begin{pmatrix} \omega^{-1}\alpha \\ \omega X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X \\ -\alpha \end{pmatrix}\} \\
&= \{\begin{pmatrix} X \\ -\omega X \end{pmatrix} / X \in TM\} \\
&= \{X - \iota_X\omega / X \in TM\}
\end{aligned}$$

1. *On a :*
   (a) $dimL^+ = 2n$
   (b) $\forall e_1, e_2 \in \Gamma(L^+)$

$$\begin{aligned}
< e_1, e_2 > &= < X + \iota_X\omega, Y + \iota_Y\omega > \\
&= \frac{1}{2}(\omega(Y,X) + \omega(X,Y)) \\
&= \frac{1}{2}(\omega(Y,X) - \omega(Y,X)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Alors, L^+ est une structure presque de Dirac.
De plus :

$$\begin{aligned}
[X + \iota_X\omega, Y + \iota_Y\omega]_c &= [X,Y] + \mathcal{L}_X\iota_Y\omega - \mathcal{L}_Y\iota_X\omega + \frac{1}{2}d(-\iota_X\omega(Y) + \iota_Y\omega(X)) \\
&= [X,Y] + \mathcal{L}_X\iota_Y\omega - \mathcal{L}_Y\iota_X\omega - d\iota_X\iota_Y\omega \\
&= [X,Y] + \mathcal{L}_X\iota_Y\omega - d\iota_Y\iota_X\omega - \iota_Y d\iota_X\omega + d\iota_X\iota_Y\omega \\
&= [X,Y] + \mathcal{L}_X\iota_Y\omega - \iota_Y d\iota_X\omega \qquad (car: \ d\omega = 0) \\
&= [X,Y] + \mathcal{L}_X\iota_Y\omega - \iota_Y(d\iota_X\omega + \iota_X d\omega) \\
&= [X,Y] + \mathcal{L}_X\iota_Y\omega - \iota_Y\mathcal{L}_X\omega \\
&= [X,Y] + \iota_{[X,Y]}\omega \subset L^+
\end{aligned}$$

Donc, L^+ est une structure de Dirac.

2. *On a :*

(a) $dimL^- = 2n$
(b) $\forall e_1, e_2 \in \Gamma(L^-)$

$$\begin{aligned} < e_1, e_2 > &= < X - \iota_X\omega, Y - \iota_Y\omega > \\ &= \frac{1}{2}(-\omega(Y,X) - \omega(X,Y)) \\ &= \frac{1}{2}(\omega(X,Y) - \omega(X,Y)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Alors, L^- *est une structure presque de Dirac.*
De plus :

$$\begin{aligned} [X - \iota_X\omega, Y - \iota_Y\omega]_c &= [X,Y] + \mathcal{L}_X(-\iota_Y\omega) - \mathcal{L}_Y(-\iota_X\omega) + \frac{1}{2}d(\iota_X\omega(Y) - \iota_Y\omega(X)) \\ &= [X,Y] - \mathcal{L}_X\iota_Y\omega + \mathcal{L}_Y\iota_X\omega + d\iota_X\iota_Y\omega \\ &= [X,Y] - \mathcal{L}_X\iota_Y\omega + d\iota_Y\iota_X\omega + \iota_Y d\iota_X\omega + d\iota_X\iota_Y\omega \\ &= [X,Y] - \mathcal{L}_X\iota_Y\omega + \iota_Y d\iota_X\omega \qquad (car: \ d\omega = 0) \\ &= [X,Y] - \mathcal{L}_X\iota_Y\omega + \iota_Y(d\iota_X\omega + \iota_X d\omega) \\ &= [X,Y] - \mathcal{L}_X\iota_Y\omega + \iota_Y\mathcal{L}_X\omega \\ &= [X,Y] - \iota_{[X,Y]}\omega \subset L^- \end{aligned}$$

Donc, L^- *est une structure de Dirac.*

Exemple 2.2.3.
Considérons le fibré automorphisme de $TM \oplus T^\star M$ *définie par :*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -P^\star \end{pmatrix}$$

tel que :P *est une structure para-complexe (i.e.* P *:*$TM \longrightarrow TM$ *avec* $P^2 = Id_{TM},\ P \neq \pm Id$ *et les deux espaces propres,* $Ker(Id \pm P)$ *ont le même rang et sont involutives)*

le ±1*-sous-espace propre* $L^\pm$ *de* $\mathbb{P}$ *est donnée par :*

$$L^\pm = Ker(P \mp Id) \oplus Ann(Ker(P \mp Id))$$

sont des structures de Dirac.

Vérification

▶ *Vérifiant que l'espace propre de* $\mathbb{P}$ *dans* $\mathbb{T}M \otimes \mathbb{C}$ *associée à la valeur propre* 1 *est donné par :*

$$L^+ = Ker(P - Id) \oplus Ann(Ker(P - Id))$$

On a : 1 *est une valeur propre de* $\mathbb{P}$ *c'est à dire l'espace propre de* $\mathbb{P}$ *dans* $\mathbb{T}M \otimes \mathbb{C}$ *associé à la valeur propre* i *est définie par :*

$$L^{+} = \{X + \alpha \in \mathbb{T}M | \mathbb{P}(X + \alpha) = X + \alpha\}$$

tel que $X + \alpha$ *est une vecteurs propre de* $\mathbb{P}$ *associée à la valeur propre* 1.
On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+\alpha) &= X + \alpha \\
\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -P^{\star} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} PX \\ -P^{\star}\alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$i.e \qquad \begin{cases} PX = & X \\ -P^{\star}\alpha = & \alpha \end{cases}$$

$$i.e \qquad \begin{cases} P = & Id \\ P\alpha = & \alpha \end{cases}$$

$$i.e \qquad \begin{cases} P - Id = & 0 \\ (P - Id)\alpha = & 0 \end{cases}$$

Donc l'espace propre de $\mathbb{P}$ *dans* $\mathbb{T}M \otimes \mathbb{C}$ *associé à la valeur propre* $+1$ *est donné par :*

$$L^{+} = Ker(P - Id) \oplus Ann(Ker(P - Id))$$

est une structure de Dirac.
▶ *Vérifiant que l'espace propre de* $\mathbb{P}$ *dans* $\mathbb{T}M \otimes \mathbb{C}$ *associé à la valeur propre* 1 *est donné par :*

$$L^{-} = Ker(P + Id) \oplus Ann(Ker(P + Id))$$

On a : -1 *est une valeur propre de* $\mathbb{P}$ *c'est à dire l'espace propre de* $\mathbb{P}$ *dans* $\mathbb{T}M \otimes \mathbb{C}$ *associé à la valeur propre* -1 *est définie par :*

$$L^{-} = \{X + \alpha \in \mathbb{T}M | \mathbb{P}(X + \alpha) = -X - \alpha\}$$

tel que $X+\alpha$ est une vecteurs propre de $\mathbb{P}$ associée à la valeur propre -1.
On a :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}(X+\alpha) & = & -X-\alpha \\ \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -P^\star \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -X \\ -\alpha \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} PX \\ -P^\star\alpha \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -X \\ -\alpha \end{pmatrix}\end{array}$$

$$i.e \qquad \begin{cases} PX = & -X \\ \quad -P^\star\alpha = & -\alpha \end{cases}$$

$$i.e \qquad \begin{cases} P = & -Id \\ -\alpha P = & -\alpha \end{cases}$$

$$i.e \qquad \begin{cases} P+Id = & 0 \\ \alpha(P+Id) = & 0 \end{cases}$$

Donc l'espace propre de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{T}M\otimes\mathbb{C}$ associé à la valeur propre -1 est donné par :

$$L^- = Ker(P+Id)\oplus Ann(Ker(P+Id))$$

est une structure de Dirac.

2.3 Structures Kählériennes généralisées

Soit $\mathcal{J}_J$, $\mathcal{J}_\omega$ les structures complexes généralisées issus d'une structure complexe J et symplectique ω (voir les exemples (2.1.1) et (2.1.2)). On voit que la condition que $g := -\omega(.,J.)$ soit symétrique est équivalente à $\mathcal{J}_J\mathcal{J}_\omega = \mathcal{J}_\omega\mathcal{J}_J$, et la condition $g>0$ équivalente à $< -\mathcal{J}_J\mathcal{J}_\omega.,.> > 0$. Ces observations mènent à la définition suivante due à *M. Gualtieri.*

Définition 2.3.1. *[28]*
Une ***structure (presque) Kählérienne généralisée*** *sur M est une paire $(\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2)$ de structures (presque) complexes généralisées qui sont commutent (ie :$\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2\mathcal{J}_1$) et telles que* $\mathbf{G} = -\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2$ *est une métrique définie positive sur $\mathbb{T}M$ (ie : la forme bilinéaire $< -\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2.,.>$ est définie positive), qui appelé la métrique de Kähler généralisée.*

Exemple 2.3.1.
Soit (M,J,ω,g) une structure kählérienne classique, c'est-à-dire une structure complexe J, une structure symplectique ω et une métrique Riemannienne g telles qu'on ait le diagramme commutatif :de telle sorte que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "g"] & T^\star M \\ & TM \arrow[ul, "J"] \arrow[u, "\omega"'] \end{tikzcd}$$

La métrique Riemannienne g sur TM s'étend en une métrique sur $\mathbb{T}M$. En identifiant $\mathbb{T}M$ et $\mathbb{T}^\star M$ grâce à la pseudo-métrique $< .,. >$, la métrique g peut être vue comme un endomorphisme : $G = \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \\ g & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{T}M$. Comme $\mathcal{J}_J\mathcal{J}_\omega = \mathcal{J}_\omega\mathcal{J}_J = -G$, la paire $(\mathcal{J}_J, \mathcal{J}_\omega)$ est une structure Kählérienne généralisée sur $\mathbb{T}M$

Vérification :

1. $\mathcal{J}_J\mathcal{J}_\omega = \mathcal{J}_\omega\mathcal{J}_J$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_J\mathcal{J}_\omega &= \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J^\star \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -J\omega^{-1} \\ -J^\star\omega & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-1}J^\star \\ \omega J & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{J}_\omega\mathcal{J}_J \end{aligned}$$

Alors $(\mathcal{J}_J, \mathcal{J}_\omega)$ est une structure Kählérienne généralisée sur $\mathbb{T}M$

2. $G =?$

$$\begin{aligned} G &= -\mathcal{J}_J\mathcal{J}_\omega \\ &= \begin{pmatrix} 0 & J\omega^{-1} \\ J^\star\omega & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \\ g & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple 2.3.2.

De toute structure Kählérienne généralisée$(\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2)$, et tout B $2-$forme fermé :
$((\mathcal{J}_1)^B(\mathcal{J}_2)^B) = (e^B\mathcal{J}_1e^{-B}, e^B\mathcal{J}_2e^{-B})$ *est une structure Kählérienne généralisée*

Application :

$((\mathcal{J}_J)^B, (\mathcal{J}_\omega)^B) = (e^B\mathcal{J}_Je^{-B}, e^B\mathcal{J}_\omega e^{-B})$ *est une structure Kählérienne généralisée tel que :*

$$\mathcal{J}_J = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J^\star \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

Vérification :

1. $(\mathcal{J}_J)^B(\mathcal{J}_\omega)^B = (\mathcal{J}_\omega)^B(\mathcal{J}_J)^B$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{J}_J)^B(\mathcal{J}_\omega)^B &= \begin{pmatrix} J & 0 \\ BJ+J^\star B & -J^\star \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega^{-1}B & -\omega^{-1} \\ \omega+B\omega^{-1}B & -B\omega^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J\omega^{-1}B & -J\omega^{-1} \\ (BJ+J^\star B)\omega^{-1}B - J^\star(\omega+B\omega^{-1}B) & -(BJ+J^\star B)\omega^{-1} + J^\star(B\omega^{-1}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J\omega^{-1}B & -J\omega^{-1} \\ BJ\omega^{-1}B + J^\star B\omega^{-1}B - J^\star\omega - J^\star(B\omega^{-1}B) & -BJ\omega^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J\omega^{-1}B & -J\omega^{-1} \\ BJ\omega^{-1}B - J^\star\omega & -BJ\omega^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\omega^{-1}J^\star B & \omega^{-1}J^\star \\ \omega J - B\omega^{-1}J^\star B & B\omega^{-1}J^\star \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \omega^{-1}BJ - \omega^{-1}BJ - \omega^{-1}J^\star B & \omega^{-1}J^\star \\ \omega J + (B\omega^{-1}B)J - B\omega^{-1}(BJ) - B\omega^{-1}J^\star B & B\omega^{-1}J^\star \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \omega^{-1}BJ - \omega^{-1}(BJ+J^\star B) & \omega^{-1}J^\star \\ (\omega+B\omega^{-1}B)J - B\omega^{-1}(BJ+J^\star B) & B\omega^{-1}J^\star \end{pmatrix} \\
&= (\mathcal{J}_\omega)^B(\mathcal{J}_J)^B
\end{aligned}$$

2. $G^B =?$

On a : $g^{-1} = J\circ\omega^{-1} \quad g = \omega\circ J$

$$\begin{aligned}
G^B &= -(\mathcal{J}_J)^B(\mathcal{J}_\omega)^B \\
&= -\begin{pmatrix} J\omega^{-1}B & -J\omega^{-1} \\ (BJ+J^\star B)\omega^{-1}B - J^\star(\omega+B\omega^{-1}B) & -(BJ+J^\star B)\omega^{-1} + J^\star(B\omega^{-1}) \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} J\omega^{-1}B & -J\omega^{-1} \\ BJ\omega^{-1}B + J^\star B\omega^{-1}B - J^\star\omega - J^\star B\omega^{-1}B & -BJ\omega^{-1} - J^\star B\omega^{-1} + J^\star B\omega^{-1} \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} J\omega^{-1}B & -J\omega^{-1} \\ BJ\omega^{-1}B - J^\star\omega & -BJ\omega^{-1} \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} g^{-1}B & -g^{-1} \\ -\omega J + BJ\omega^{-1}B & -BJ\omega^{-1} \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} g^{-1}B & -g^{-1} \\ -g + Bg^{-1}B & -Bg^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -g^{-1}B & g^{-1} \\ g - Bg^{-1}B & Bg^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc : $-G^B = (\mathcal{J}_J)^B(\mathcal{J}_\omega)^B = (\mathcal{J}_\omega)^B(\mathcal{J}_J)^B$

2.3.1 Propriétés sur la métrique de Kähler généralisée

Remarque 2.3.1. *[28]*
Le dernier exemple donne une indication de la forme générale d'une métrique Kähler généralisée. Soit $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ *est une structure Kähler généralisée avec la métrique* $\mathbf{G}' = -\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2$ *:*

$$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} A & g^{-1} \\ \sigma & A^\star \end{pmatrix}$$

où g, σ *sont des métrique Riemannienne sur la variété, et* A *est un endomorphisme de* TM*. Si nous définissons la 2-forme* $B = -gA$*, nous pouvons écrire :*

$$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} -g^{-1}B & g^{-1} \\ g - Bg^{-1}B & Bg^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \\ g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -B & 1 \end{pmatrix}$$

On voit par cet argument que toute métrique Kähler généralisée est uniquement déterminé par une métrique Riemannienne g *conjointement avec un* $2-$*forme* B*. Nous pouvons également voir* g *et* B *comme suit : Sur le* $+1$*-fibré propre* C^+ *de* $\mathbf{G}'$*, le pseudo-métrique* $< .,. >$ *est définie positive, et puisque le fibré tangent est isotrope,* C^+ *peut être exprimée comme le graphique d'une application linéaire définie positive de* TM *à* $T^\star M$*.*

Proposition 2.3.1. *[28]*
$C^{\pm}$ *est le graphe de* $B \pm g : TM \longrightarrow T^\star M$*.*

Preuve . On a :

$$\begin{aligned}
C^+ &= \{(X,\alpha) | \mathbf{G}'(X+\alpha) = X + \alpha\} \\
&= \{(X,\alpha) | \begin{pmatrix} -g^{-1}B & g^{-1} \\ g - Bg^{-1}B & Bg^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix}\} \\
&= \{(X,\alpha) | \begin{pmatrix} -g^{-1}BX + g^{-1}\alpha \\ gX - Bg^{-1}BX + Bg^{-1}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix}\} \\
&= \{(X,\alpha) | \begin{pmatrix} (Id + g^{-1}B)X = g^{-1}\alpha \\ gX - Bg^{-1}BX + Bg^{-1}\alpha \end{pmatrix}\} \\
&= \{(X,\alpha) | \begin{pmatrix} (g+B)X = \alpha \\ gX - Bg^{-1}BX + Bg^{-1}\alpha \end{pmatrix}\} \\
&= \{(X, (g+B)X) | X \in TM\}
\end{aligned}$$

De même, on trouve : $C^- = \{(X + (B-g)X) | X \in TM\}$ ■

Relation avec la géométrie bi-hermitienne

Marco Gualtieri ([28], 2003), à conclu que ces structures Kählériennes généralisées $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ sont intimement liées à un autre type de structures qui sont les structures **bi-hermitiennes** classiques (J_+, J_-, g), où il a atteint un théorème très intéressant :

Théorème 2.3.1. *[28] [58]*
Une structure Kählérienne généralisée $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ est équivalent à une structure bi-Hermitienne $(g, b, J_\pm)$ qui satisfit la condition suivant :

$$d\omega_\pm\big(J_\pm X, J_\pm Y, J_\pm Z\big) = \pm db(X, Y, Z), \tag{2.4}$$

où $\omega_\pm = g(X, J_\pm Y)$, pour touts champs de vecteurs $X, Y, Z.$, et g est une métrique Riemannienne classique et b une 2-forme différentielle sur M.

Théorème 2.3.2. *([28], p81)*
Une structure Kählérienne généralisée (g, b, J_+, J_-) est intégrable si et seulement si les structures presque complexes $J_\pm$ sont intégrables.

Proposition 2.3.2. *[28]*
Il existe une correspondance bijective autre une métrique Riemannienne généralisée G sur M et la paire (g, b), où g est une métrique Riemannienne classique et b une 2-forme différentielle sur M.

Proposition 2.3.3.

1. $(\mathbf{G}')^2 = Id$
2. $(\mathbf{G}')^\star = \mathbf{G}'$
3. $(\mathbf{G}'\mathcal{J})^2 = -Id$
4. $\mathbf{G}'\mathcal{J} = \mathcal{J}\mathbf{G}'$

Preuve .

1.

$$\begin{aligned} G^2 &= \begin{pmatrix} g^{-1}g & 0 \\ 0 & gg^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \\ &= Id \end{aligned}$$

Alors, $(\mathbf{G}')^2 = (e^B G e^{-B})^2 = Id$

2. On a :

$$\begin{aligned}
< G(X+\alpha),(Y+\beta) > &= < \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \\ g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y \\ \beta \end{pmatrix} > \\
&= < \begin{pmatrix} g^{-1}\alpha \\ gX \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y \\ \beta \end{pmatrix} > \\
&= \frac{1}{2}(gX(Y) + \beta(g^{-1}\alpha)) \\
&= \frac{1}{2}(g(Y)(X) + \alpha(g^{-1}\beta)) \\
&= < \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g^{-1}\beta \\ gY \end{pmatrix} > \\
&= < X+\alpha, G(Y+\beta) >
\end{aligned}$$

D'ou : $G = G^{\star}$

3. $\mathbf{G}'\mathcal{J} = \mathcal{J}\mathbf{G}'$?
On a :$(\mathbf{G}'\mathcal{J})^2 = -Id$ Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}'\mathcal{J} &= -(\mathbf{G}'\mathcal{J})^{-1} \\
&= -\mathcal{J}^{-1}(\mathbf{G}')^{-1} \\
&= -\mathcal{J}^{\star}(\mathbf{G}')^{\star} \\
&= \mathcal{J}\mathbf{G}'
\end{aligned}$$

Donc : $\mathbf{G}'\mathcal{J} = \mathcal{J}\mathbf{G}'$

■

Définition 2.3.2. *[63]*
Soit ϕ un endomorphisme de $\mathbb{T}M$ donnée par : $(\phi)_{V_{\pm}} = \pm Id$, on définit ***une métrique Riemannienne généralisée*** *G par : $G(e_1,e_2) =< \phi e_1, e_2 >$, cette métrique caractérisées par les conditions : $\phi^2 = Id$, $< \phi e_1, \phi e_2 > = < e_1, e_2 >$.*

Remarque 2.3.2. *[63]*
G est équivalent à un couple (g,b), où g est une métrique Riemannienne habituelle sur M, et $b \in \Omega^2(M)$. Cette équivalence donné :

$$V_{\pm} = \{(X,(b \pm g)^{\flat}X)/X \in TM\}$$

tel que : $G_{V_{\pm}} = \pm < .,. >$ Alors, il existe deux isomorphismes entre $V_{\pm}$ et TM,

$$\tau_{\pm} : V_{\pm} \longrightarrow TM,$$

tel que : $\tau_{\pm}(X,(b \pm g)^{\flat}X) = X$.

Définition 2.3.3. *[63]*
*Soit $\mathcal{J}$ une structure sur une variété Riemannienne généralisée (M, G) est **compatible** avec G si :*

$$G(\mathcal{J}e_1, \mathcal{J}e_2) = G(e_1, e_2)$$

c'est-à-dire : $\phi \circ \mathcal{J} = \mathcal{J} \circ \phi$, où ϕ est définit par :

$$G((X, \alpha), (Y, \eta)) =< \phi(X, \alpha), (Y, \eta) >$$

*la paire (G, J) est une **structure presque hermitienne généralisée**.*

chapter 3

Géométrie de contact généralisée

La géométrie de contact généralisée est une partie de la géométrie généralisée, dont la variété différentiable M est de dimension $(2n+1)$. Le concept de structure presque contact généralisée a été introduit par Aissa Wade et David Iglesias-Ponte ([37], 2005), puis par *Aissa Wade* et *Yat Sun Poon* ([56], 2010) dans le but d'unifier les notions de structure presque contact et de structure presque cosympléctique classique, et ensuite par *Kenitchi Sekiya* ([58], 2012).

Dans ce chapitre, nous avons étudiés la notion de la géométrie de contact généralisée où nous avons concentré notre étude sur les **structures presque de contact généralisées**, avec des propriétés et des exemples, ensuite, l'intégrabilité et puis la construction à partir de quelques structures classiques.
En fin de ce chapitre, nous avons donné une étude de la **métrique Riemannienne généralisée** sur une variété presque de contact généralisée avec des propriétés, en plus la nation de structure coKahler généralisée, en cours de préparation pour bien connaitre la transformation homothétique sur la structure presque contact généralisée, qui nous avons fait dans le dernier chapitre (résultats).

3.1 Structures presque de contact généralisées

les structures presque de contact généralisées sont des extensions naturelle des structures presque de contact et cosymplectique classiques.

Définition 3.1.1. *[58]*
Une structure presque contact généralisée sur une variété différentielle M de dimension impair, est une triplet (Φ, E_+, E_-), où Φ est un endomorphisme de $TM \oplus T^*M$ et $E_\pm$ sont des sections de $TM \oplus T^*M$ qui satisfait :

$$\Phi + \Phi^* = 0, \tag{3.1}$$

$$2 < E_+, E_- >= 1 \quad , < E_\pm, E_\pm >= 0, \tag{3.2}$$

$$\Phi \circ \Phi = -id + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+. \tag{3.3}$$

Soit $E_\pm = \xi_\pm + \eta_\pm$ où $\xi_\pm$ sont des champs de vecteurs et $\eta_\pm$ sont 1-formes.
Alors nous avons :

$$\Phi \circ \Phi = -id + \begin{pmatrix} \eta_+ \otimes \xi_- + \eta_- \otimes \xi_+ & \xi_+ \otimes \xi_- + \xi_- \otimes \xi_+ \\ \eta_+ \otimes \eta_- + \eta_- \otimes \eta_+ & \xi_+ \otimes \eta_- + \xi_- \otimes \eta_+ \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme fibré Φ :$TM \oplus T^*M \longrightarrow TM \oplus T^*M$ peut être représentée par une matrice dont les quatre bloc carrés sont : φ, $\pi^\sharp$, θ^b, $-\varphi^*$,
c'est à dire

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi & \pi^\sharp \\ \theta^b & -\varphi^* \end{pmatrix}$$

tels que ces applications sont définis comme suit :

1.) $\varphi : TM \longrightarrow TM$, (1,1)-tenseur.
2.) $\pi^\sharp : T^*M \longrightarrow TM$, avec : $\beta(\pi^\sharp\alpha) = \pi(\alpha, \beta)$, $\forall \alpha, \beta$ 1-formes et π un champ bivecteur.
3.) $\theta^b : TM \longrightarrow T^*M$, avec : $(\theta^b X)(Y) = \theta(X, Y)$, $\forall X, Y \in TM$ et θ 2-forme sur M.
4.) $\varphi^* : T^*M \longrightarrow T^*M$, avec : $\alpha \circ \varphi = \varphi^*\alpha$ (ie : $(\varphi^*\alpha)(X) = \alpha(\varphi(X))$ $\forall X \in TM$ et $\forall \alpha \in T^*M$.

Lemme 3.1.1. *[58]*
Soit $(\Phi, E_\pm)$ une structure presque de contact généralisée.
Alors nous avons l'identité suivante :

$$\Phi(E_\pm) = 0$$

Preuve . Comme $\Phi + \Phi^* = 0$, nous avons :

$$< \Phi E_+, E_+ >=< E_+, -\Phi E_+ >= - < \Phi E_+, E_+ >$$

donc $< \Phi E_+, E_+ >= 0$.
Alors nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\Phi)^2(E_+) &= (\Phi \circ \Phi)(E_+) \\ &= (-id + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+)(E_+) = 0 \\ 0 &= \Phi \circ (\Phi \circ \Phi)(E_+) = (\Phi \circ \Phi) \circ \Phi(E_+) \\ &= -\Phi E_+ + 2 < E_+, \Phi E_+ > E_- + 2 < E_-, \Phi E_+ > E_+ \\ &= -\Phi E_+ + 2 < E_-, \Phi E_+ > E_+. \end{aligned}$$

nous obtenons également :

$$0 = \Phi \circ (\Phi \circ \Phi) \circ \Phi(E_+) = -\Phi^2 E_+ + 2 < E_-, \Phi E_+ > \Phi E_+ = 2 < E_-, \Phi E_+ > \Phi E_+.$$

D'apres qui precedent nous avons :

$$\Phi E_+ = 0$$

par la même chose, nous obtenons :

$$\Phi E_- = 0.$$

■

Lemme 3.1.2. *[32]*
Soit $(\Phi, E_\pm)$ une structure presque de contact généralisée.
Alors nous avons l'identité suivante :

$$< E_\pm, \Phi(X+\alpha) >= 0, \qquad pour\ \ \forall (X+\alpha) \in TM \oplus T^*M$$

Preuve . On a : $\Phi^* + \Phi = 0$ et $\Phi E_\pm = 0$
donc :

$$< \Phi(X+\alpha), E_\pm >= - < (X+\alpha), \Phi E_\pm) >= 0$$

■

Lemme 3.1.3.
Soit $(\Phi, E_\pm)$ une structure presque de contact généralisée.
Alors nous avons l'identité suivante :

$$\Phi^3 + \Phi = 0$$

Preuve . on a :

$$\begin{aligned} \Phi^3(A) &= \Phi^2(\Phi(A)) \\ &= -\Phi(A) + 2 < E_+, \Phi(A) > E_- + 2 < E_-, \Phi(A) > E_+ \\ &= -\Phi(A). \end{aligned}$$

car : $< E_+, \Phi(A) >= 0$
Donc $\Phi^3 + \Phi = 0.$

■

Lemme 3.1.4. *[58]*
Soit $(\Phi, E_\pm)$ une structure presque de contact généralisée et B une 2-forme.
Alors $(\tilde{\Phi}, \widetilde{E}_\pm) = (e^B \Phi e^{-B}, e^B E_\pm)$ est une structure presque contact généralisée,
avec $E_\pm = \xi_\pm + \eta_\pm$ et $e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix}$

Preuve . Comme (Φ, E_+, E_-) est une structure presque de contact généralisée alors les conditions sont vérifiées :

1. $\Phi + \Phi^* = 0$
2. $\langle E_+, E_+\rangle = \langle \xi_+ + \eta_+, \xi_+ + \eta_+\rangle = \eta_+(\xi_+) = 0$
   $\langle E_-, E_-\rangle = \langle \xi_- + \eta_-, \xi_- + \eta_-\rangle = 0$
   $\langle E_-, E_+\rangle = \langle \xi_- + \eta_-, \xi_+ + \eta_+\rangle = \frac{1}{2}(\eta_-(\xi_+) + \eta_+(\xi_-)) = \frac{1}{2}$
3. $\Phi^2 = \Phi \circ \Phi = -Id + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+$

$$\Phi^2 = \begin{pmatrix} \varphi & \pi^\sharp \\ \theta^b & -\varphi^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi & \pi^\sharp \\ \theta^b & -\varphi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^2 + \pi^\sharp\theta^b & \varphi\pi^\sharp - \pi^\sharp\varphi^* \\ \theta^b\varphi - \varphi^*\theta^b & \theta^b\pi^\sharp + (\varphi^*)^2) \end{pmatrix}$$

$$\Phi^2 = \begin{pmatrix} \varphi^2 + \pi^\sharp\theta^b & 0 \\ 0 & (\varphi^*)^2 + \theta^b\pi^\sharp \end{pmatrix}$$

$$E_+ \otimes E_- = (\eta_+, \xi_+) \otimes \begin{pmatrix} \xi_- \\ \eta_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_+ \otimes \xi_- & \xi_+ \otimes \xi_- \\ \eta_+ \otimes \eta_- & \xi_+ \otimes \eta_- \end{pmatrix}$$

$$E_- \otimes E_+ = (\eta_-, \xi_-) \otimes \begin{pmatrix} \xi_+ \\ \eta_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_- \otimes \xi_+ & \xi_- \otimes \xi_+ \\ \eta_- \otimes \eta_+ & \xi_- \otimes \eta_+ \end{pmatrix}$$

$$-Id + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+ = \begin{pmatrix} -Id + \eta_+ \otimes \xi_- + \eta_- \otimes \xi_+ & \xi_+ \otimes \xi_- + \xi_- \otimes \xi_+ \\ \eta_+ \otimes \eta_- + \eta_- \otimes \eta_+ & -Id + \xi_+ \otimes \eta_- + \xi_- \otimes \eta_+ \end{pmatrix}$$

Nous obtenons :

$$(I) : \quad \begin{cases} -Id + \eta_+ \otimes \xi_- + \eta_- \otimes \xi_+ = \varphi^2 + \pi^\sharp\theta^b \\ \xi_+ \otimes \xi_- + \xi_- \otimes \xi_+ = 0 \\ \eta_+ \otimes \eta_- + \eta_- \otimes \eta_+ = 0 \\ -Id + \xi_+ \otimes \eta_- + \xi_- \otimes \eta_+ = (\varphi^*)^2 + \theta^b\pi^\sharp \end{cases}$$

Maintenant on va montrer que $(\tilde{\Phi}, \widetilde{E}_\pm) = (e^B\Phi e^{-B}, e^B E_\pm)$ est une structure presque contact généralisée.

1. $\tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}^* = 0 \Longleftrightarrow \langle \tilde{\Phi}A, B\rangle = -\langle A, \tilde{\Phi}B\rangle$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}A, B\rangle &= \langle e^B\Phi e^{-B}A, B\rangle \\ &= \langle \Phi e^B A, e^B B\rangle \\ &= -\langle e^B A, \Phi e^B B\rangle \\ &= -\langle A, e^{-B}\Phi e^B B\rangle \\ &= -\langle A, \tilde{\Phi}B\rangle \end{aligned}$$

2. $\langle \widetilde{E_+}, \widetilde{E_+} \rangle = \langle e^B E_+, e^B E_+ \rangle = \langle E_+, E_+ \rangle = 0$

   $\langle \widetilde{E_-}, \widetilde{E_-} \rangle = \langle e^B E_-, e^B E_- \rangle = \langle E_-, E_- \rangle = 0$

   et même que $\langle \widetilde{E_+}, \widetilde{E_-} \rangle = \frac{1}{2}$

3. $\widetilde{\Phi}^2 = \widetilde{\Phi} \circ \widetilde{\Phi} = -I + \widetilde{E_+} \otimes \widetilde{E_-} + \widetilde{E_-} \otimes \widetilde{E_+}$?

   $\widetilde{\Phi}^2 = \widetilde{\Phi} \circ \widetilde{\Phi} = (e^B \Phi e^{-B}) \circ (e^B \Phi e^{-B})$ on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi} &= e^B \Phi e^{-B} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & \pi^\sharp \\ \theta^b & -\varphi^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -B & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varphi & \pi^\sharp \\ -B\varphi + \theta^b & -B\pi^\sharp - \varphi^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varphi + \pi^\sharp B & \pi^\sharp \\ -B\varphi + \theta^b - B\pi^\sharp B - \varphi^* B & -B\pi^\sharp - \varphi^* \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\widetilde{\Phi}^2 = \begin{pmatrix} \varphi + \pi^\sharp B & \pi^\sharp \\ -B\varphi + \theta^b - B\pi^\sharp B - \varphi^* B & -B\pi^\sharp - \varphi^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi + \pi^\sharp B & \pi^\sharp \\ -B\varphi + \theta^b - B\pi^\sharp B - \varphi^* B & -B\pi^\sharp - \varphi^* \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\Phi}^2 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Calculons les termes A,B,C,D :

$$\begin{cases}
A = (\varphi + \pi^\sharp B)(\varphi + \pi^\sharp B) + \pi^\sharp(-B\varphi + \theta^b - B\pi^\sharp B - \varphi^* B) \\
A = \varphi^2 + \varphi\pi^\sharp B + \pi^\sharp B\varphi + \pi^\sharp B\pi^\sharp B - \pi^\sharp B\varphi + \pi^\sharp\theta^b - \pi^\sharp B\pi^\sharp B - \pi^\sharp\varphi^* B \\
A = \varphi^2 + \pi^\sharp\theta^b \\
B = (\varphi + \pi^\sharp B)\pi^\sharp + \pi^\sharp(-B\pi^\sharp - \varphi^*) \\
B = \varphi\pi^\sharp + \pi^\sharp B\pi^\sharp - \pi^\sharp B\pi^\sharp - \pi^\sharp\varphi^* = 0 \\
C = (-B\varphi + \theta^b - B\pi^\sharp B - \varphi^* B)(\varphi + \pi^\sharp B) + (-B\pi^\sharp - \varphi^*)(-B\varphi + \theta^b - B\pi^\sharp B - \varphi^* B) = 0 \\
D = (-B\varphi + \theta^b - B\pi^\sharp B - \varphi^* B)\pi^\sharp + (-B\pi^\sharp - \varphi^*)(-B\pi^\sharp - \varphi^*) \\
D = -B\varphi\pi^\sharp + \theta^b\pi^\sharp - B\pi^\sharp B\pi^\sharp - \varphi^* B\pi^\sharp + B\pi^\sharp B\pi^\sharp + B\pi^\sharp\varphi^* + \varphi^* B\pi^\sharp + (\varphi^*)^2 \\
D = (\varphi^*)^2 + \theta^b\pi^\sharp
\end{cases}$$

Donc :

$$\widetilde{\Phi}^2 = \begin{pmatrix} \varphi^2 + \pi^\sharp\theta^b & 0 \\ 0 & \varphi^2 + \theta^b\pi^\sharp \end{pmatrix}$$

on a : $E_+, E_- \in TM \oplus T^*M$

tel que : $E_+ = \xi_+ + \eta_+$ *et* $E_- = \xi_- + \eta_-$

$$\widetilde{E_+} = e^B E_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_+ \\ \eta_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_+ \\ B\xi_+ + \eta_+ \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{E_-} = e^B E_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_- \\ \eta_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_- \\ B\xi_- + \eta_- \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{E_+} \otimes \widetilde{E_-} = \begin{pmatrix} (B\xi_+ + \eta_+) \otimes \xi_- & \xi_+ \otimes \xi_+ \\ (B\xi_+ + \eta_+) \otimes (B\xi_- + \eta_-) & \xi_+ \otimes (B\xi_- + \eta_-) \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{E_-} \otimes \widetilde{E_+} = \begin{pmatrix} (B\xi_- + \eta_-) \otimes \xi_+ & \xi_- \otimes \xi_+ \\ (B\xi_- + \eta_-) \otimes (B\xi_+ + \eta_+) & \xi_- \otimes (B\xi_+ + \eta_+) \end{pmatrix}$$

On a : $-I + \widetilde{E_+} \otimes \widetilde{E_-} + \widetilde{E_-} \otimes \tilde{E_+} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$

Donc on obtient :

$$\begin{cases} A' = -I + (B\xi_+ + \eta_+) \otimes \xi_- + (B\xi_- + \eta_-) \otimes \xi_+ = \varphi^2 + \pi^\sharp \theta^b \\ B' = \xi_+ \otimes \xi_- + \xi_- \otimes \xi_+ = 0 \\ C' = (B\xi_+ + \eta_+) \otimes (B\xi_- + \eta_-) + (B\xi_- + \eta_-) \otimes (B\xi_+ + \eta_+) = 0 \\ D' = -I + \xi_+ \otimes (B\xi_- + \eta_-) + \xi_- \otimes (B\xi_+ + \eta_+) = (\varphi^*)^2 + \theta^b \pi^\sharp \end{cases}$$

Alors d'après les conditions (I), on trouve que : $\widetilde{\Phi}^2 = -I + \widetilde{E_+} \otimes \widetilde{E_-} + \widetilde{E_-} \otimes \tilde{E_+}$

Donc, la structure $(e^B \Phi e^{-B}, e^B E_\pm)$ est une structure presque de contact généralisée. ∎

3.1.1 Exemples

Exemple 3.1.1.

Soit (φ, ξ, η) une structure presque contact.

Alors nous avons une structure presque contact généralisée, qui définie par suit :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\varphi^* \end{pmatrix}, \quad E_+ = \eta, \quad E_- = \xi$$

où $(\varphi^* \alpha)(X) := \alpha(\varphi X)$, pour touts $X \in TM$, et $\alpha \in T^*M$.

Vérification

1.) $\Phi + \Phi^* = 0 \;\Leftrightarrow\; < \Phi A, B >= - < A, \Phi B >$

$$\begin{aligned}
< \Phi A, B > &= \langle \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\varphi^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y \\ \beta \end{pmatrix} \rangle \\
&= \langle \varphi(x) - \varphi^*(\alpha), Y + \beta \rangle \\
&= \frac{1}{2}(i_{\varphi(X)}\beta + i_Y(-\varphi^*\alpha)) \\
&= \frac{1}{2}(\beta\varphi(X) + (-\varphi^*\alpha)Y) \\
&= -\frac{1}{2}(-\varphi^*(\beta(X)) + \alpha(\varphi Y)) \\
&= -\langle X + \alpha, \begin{pmatrix} \varphi(Y) \\ -\varphi^*\beta \end{pmatrix} \rangle \\
&= -\langle X + \alpha, \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\varphi^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ \beta \end{pmatrix} \rangle \\
&= -\langle A, \Phi(B) \rangle
\end{aligned}$$

2.) $\langle E_+, E_+ \rangle = \langle \eta, \eta \rangle = 0$
$\langle E_-, E_- \rangle = \langle \xi, \xi \rangle = 0$
$\langle E_-, E_+ \rangle = \langle \xi, \eta \rangle = \frac{1}{2}$

3.) $\Phi^2 = \Phi \circ \Phi = -Id + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+$?

$$\Phi^2 = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\varphi^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\varphi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^2 & 0 \\ 0 & (\varphi^*)^2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi^2(A) = \begin{pmatrix} \varphi^2 & 0 \\ 0 & (\varphi^*)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^2(X) \\ (\varphi^*)^2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X + \eta(X)\xi \\ -\alpha + \alpha(\xi)\eta \end{pmatrix}$$

Et par d'autre façon :

$$-Id + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+ = \;?$$

tel que : $E_+ \otimes E_- = \begin{pmatrix} \eta \otimes \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $E_- \otimes E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi \otimes \eta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow -Id + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+ = \begin{pmatrix} -I + \eta \otimes \xi & 0 \\ 0 & -I + \xi \otimes \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -I + \eta \otimes \xi & 0 \\ 0 & -I + \xi \otimes \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X + \eta(X)\xi \\ -\alpha + \alpha(\xi)\eta \end{pmatrix}$$

Donc on obtient : $\Phi^2 = -Id + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+$

Exemple 3.1.2. *[56]*
Une variété M de dimension (2n+1) est une variété de contact s'il existe une 1-forme η tel que : $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$, partout sur M,
une 1-forme η est appelé un forme de contact.
Alors, il existe un unique champ de vecteurs ξ satisfaisant les conditions :

$$\iota_\xi d\eta = 0, \quad \eta(\xi) = 1,$$

ce champ de vecteurs est appelé le champ de Reeb de forme de contact η.
Comme η est un forme de contact, l'application :

$$\rho(X) := \iota_X d\eta - \eta(X)\eta$$

est un isomorphisme du fibré tangent à fibré cotangent.
Nous définissons un bi-vecteurs π par :

$$\pi(\alpha, \beta) := d\eta(\rho^{-1}(\alpha), \rho^{-1}(\beta)),$$

alors nous avons une structure presque contact généralisée :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ d\eta & 0 \end{pmatrix}, \quad E_+ = \eta, \quad E_- = \xi$$

Lemme 3.1.5. *[56]*
Si $\rho(X) = \alpha$ et $\pi^\sharp(\alpha) = -X + \eta(X)\xi$ alors les équations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \pi^\sharp(\eta) = & 0 \\ \pi^\sharp(i_X\theta) = & -X + \eta(X)\xi \end{cases}$$

comme ρ est isomorphisme alors : $\rho^{-1}(\alpha) = -\pi^\sharp(\alpha)$

vérification :

1.) $\Phi + \Phi^* = 0, \quad \Phi^* = -\Phi \ \Leftrightarrow \ <\Phi A, B> = -<A, \Phi B>$

$$\begin{aligned}
<\Phi A, B> &= \langle \begin{pmatrix} 0 & \pi^\sharp \\ d\eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y \\ \beta \end{pmatrix} \rangle \\
&= \langle \pi^\sharp(\alpha) + d\eta(X), Y + \beta \rangle \\
&= \frac{1}{2}(i_{\pi^\sharp(\alpha)}\beta + i_Y(d\eta(X)) \\
&= \frac{1}{2}(\beta\pi^\sharp(\alpha) + (d\eta(X))Y) \\
&= -\frac{1}{2}((d\eta(Y))X + \alpha(\pi^\sharp(\beta)) \\
&= -\langle X + \alpha, \begin{pmatrix} \pi^\sharp(B) \\ -d\eta(Y) \end{pmatrix} \rangle \\
&= -\langle \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pi^\sharp \\ d\eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ \beta \end{pmatrix} \rangle \\
&= -\langle A, \Phi(B) \rangle
\end{aligned}$$

2.) $\langle E_+, E_+ \rangle = \langle \eta, \eta \rangle = 0$
$\langle E_-, E_- \rangle = \langle \xi, \xi \rangle = 0$
$\langle E_-, E_+ \rangle = \langle \xi, \eta \rangle = \frac{1}{2}$

3.)Montrons que :

$$\Phi^2 = \Phi \circ \Phi = -Id + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+ ?$$

$$\Phi^2 = \begin{pmatrix} 0 & \pi^\sharp \\ d\eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \pi^\sharp \\ d\eta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^\sharp d\eta & 0 \\ 0 & d\eta\pi^\sharp \end{pmatrix}$$

on a : $E_+ \ E_- \in TM \oplus T^*M$ tel que $E_+ = \eta \quad E_- = \xi$

$$E_+ \otimes E_- = \begin{pmatrix} \eta \otimes \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_- \otimes E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi \otimes \eta \end{pmatrix}$$

$$-Id + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+ = \begin{pmatrix} -I + \eta \otimes \xi & 0 \\ 0 & -I + \xi \otimes \eta \end{pmatrix}$$

on va vérifier les équations suivantes :

$$\begin{cases} \pi^\sharp d\eta = -I + \eta \otimes \xi \ . \quad . \quad .(1) \\ d\eta\pi^\sharp = -I + \xi \otimes \eta \ . \quad . \quad .(2) \end{cases}$$

Notons : $\theta^b(X) = \theta(X) = d\eta(X) \ . \quad . \quad .(*)$
on obtenons :

$$\begin{cases} \pi^\sharp\theta^b = -I + \eta \otimes \xi \\ \theta^b\pi^\sharp = -I + \xi \otimes \eta \end{cases}$$

Utilisons le lemme précédent :

(a) Montrons d'abord que : $\quad \pi^\sharp\theta^b = -X + \eta(X) \otimes \xi \ ?$
Nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \theta^b(X) & = & \theta(X) \\ \rho(X) & = & \theta(X) - \eta(X)\eta \\ \pi^\sharp\theta^b = \pi^\sharp(\rho(X) + \eta(X)\eta) & = & \pi^\sharp(\rho(X)) + \pi^\sharp(\eta(X)\eta) \ \ car \ \ (\pi^\sharp(\eta)) = 0 \\ & = & \pi^\sharp(\alpha) \\ & = & -X + \eta(X) \otimes \xi \ \ (d'aprslemme) \end{array}$$

Donc (1) est vérifiée.

(b) montrons la deuxième relation :

$$\begin{array}{rcl} \theta^b(\pi^\sharp\alpha) & = & \theta(-\rho^{-1}(\alpha)) \ \ (car\theta = d\eta) \\ & = & -\rho\rho^{-1}(\alpha) + \eta(-\rho^{-1}(\alpha))\eta \\ & = & -\alpha - \eta(-\rho^{-1}(\alpha))\eta \\ & = & -\alpha - \eta(X)\eta \end{array}$$

on a :

$$\theta(X) = \rho(X) + \eta(X)\eta$$

Appliquant ξ :

$$\begin{array}{rcl} \theta(X)(\xi) & = & \rho(X)(\xi) + \eta(X) \\ 0 & = & \alpha(\xi) + \eta(X) \\ \eta(X) & = & -\alpha(\xi) \end{array}$$

Donc :

$$\theta^b(\pi^\sharp\alpha) \ = \ -\alpha + \alpha(\xi)\eta$$

d'où la structure est une structure presque de contact généralisée.

3.1.2 Fibrés vectoriels de structure presque de contact généralisée

Par définition d'une structure presque contact généralisée, nous avons :

$$\Phi^3 + \Phi = 0.$$

Ainsi, [58], Φ à trois valeurs propres : $0, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$.
Le noyau de Φ est donnée par :

$$L_{E_+} \oplus L_{E_-}$$

où $L_{E_\pm}$ sont des sous-fibrés généré par : $E_\pm = \xi_\pm + \eta_\pm$, respectivement.
Nous définissons :

$$E^{(1,0)} = \{X + \alpha - \sqrt{-1}\Phi(X+\alpha)/X \in TM, \alpha \in T^*M, < X + \alpha, E_\pm >= 0\}$$

$$E^{(0,1)} = \{X + \alpha + \sqrt{-1}\Phi(X+\alpha)/X \in TM, \alpha \in T^*M, < X + \alpha, E_\pm >= 0\}$$

Alors $E^{(1,0)}$ est $+\sqrt{-1}$-fibré propre et $E^{(0,1)}$ est $-\sqrt{-1}$-fibré propre.

Nous considérons les quatre fibrés vectoriels complexes, différentes, suivantes :

$$L^+ := L_{E_+} \oplus E^{(1,0)}, \qquad \overline{L^+} := L_{E_+} \oplus E^{(0,1)}$$

$$L^- := L_{E_-} \oplus E^{(0,1)}, \qquad \overline{L^-} := L_{E_-} \oplus E^{(1,0)}$$

Lemme 3.1.6. *[56] Les fibrés $E^{(1,0)}$, $E^{(0,1)}$, $L^\pm$, $\overline{L^\pm}$ sont isotropes par rapport au pairing symétrique $< -, - >$.*

Preuve . Soit A, B sont des sections de $E^{(1,0)}$.
Par définition, nous avons $< A, E_\pm >= 0$.
Il obtient par $\Phi + \Phi^* = 0$, que :

$$< \Phi A, \Phi B >=< \sqrt{-1}A, \sqrt{-1}B >= - < A, B >$$

$$< \Phi A, \Phi B >=< A, -\Phi^2 B >=< A, B > .$$

Par conséquent $E^{(1,0)}$ est isotrope.
De même que, $E^{(0,1)}, L^\pm, \overline{L^\pm}$ sont isotrope, car $< E_\pm, E_\pm >= 0$.

■

3.2 Structure presque de contact généralisée selon A.Wade et Y.S.Poon :

Dons cette partie on veut voir la structure presque contact généralisée et quelque propriétés selon Y.S.Poon et A.Wade, c'est-à-dire dons le cas où $E_+ = F$ et $E_- = \eta$, avec F est un champs de vecteurs et η est une 1-forme (voir [56]).

Définition 3.2.1. *[56]*
Une structure presque de contact généralisée sur une variété différentiable M de dimension impair $(2n+1)$ se compose d'un endomorphisme fibré :
Φ *:$TM \oplus T^*M \longrightarrow TM \oplus T^*M$, et une section $F + \eta \in TM \oplus T^*M$*
telle que :

- $\Phi + \Phi^* = 0,$ *(pour $< \Phi A, B >=< A, \Phi^* B >, \quad \forall A, B \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$.)*
- $\eta(F) = 1,$ *(où F : champ de vecteur et η $1-forme$)*
- $\Phi(F) = 0,$
- $\Phi(\eta) = 0,$
- $\Phi \circ \Phi = -I + F \odot \eta,$

telle que pour tous $(X + \alpha) \in TM \oplus T^*M$, on a :
$(F \odot \eta)(X + \alpha) := \eta(X)F + \alpha(F)\eta.$

- La paire $(\Phi, F + \eta)$ est équivalente à une autre paire $(\Phi', F' + \eta')$ s'il existe une fonction f non nulle sur la variété M, tel que : $\Phi' = \Phi$, $\eta' = f\eta$, $F' = \frac{1}{f}F$, $f \neq 0$.

Définition 3.2.2. *[56]*
L'endomorphisme fibré Φ :$TM \oplus T^*M \longrightarrow TM \oplus T^*M$ peut être représentée par une matrice dont les quatre bloc carrés sont : φ, $\pi^\sharp$, θ^b, $-\varphi^*$,
c'est à dire

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi & \pi^\sharp \\ \theta^b & -\varphi^* \end{pmatrix}$$

tels que ces applications sont définis comme suit :

1. *) $\varphi : TM \longrightarrow TM$, (1,1)-tenseur.*
2. *) $\pi^\sharp : T^*M \longrightarrow TM$, avec : $\beta(\pi^\sharp\alpha) = \pi(\alpha, \beta)$, $\forall \alpha, \beta$ 1-formes et π un champ bivecteur.*
3. *) $\theta^b : TM \longrightarrow T^*M$, avec : $(\theta^b X)(Y) = \theta(X, Y)$, $\forall X, Y \in TM$ et θ 2-forme sur M.*
4. *) $\varphi^* : T^*M \longrightarrow T^*M$, avec : $\alpha \circ \varphi = \varphi^*\alpha$ (ie : $(\varphi^*\alpha)(X) = \alpha(\varphi(X))$ $\forall X \in TM$ et $\forall \alpha \in T^*M$.*

- Donc une structure presque contact généralisée n'est rien d'autre qu'une classe d'équivalence de quintuplet $(\varphi, \pi, \theta, F, \eta)$,
vérifiant des conditions de compatibilité suivante :

1. $\theta^b \varphi = \varphi^* \theta^b$

2. $\varphi \pi^\sharp = \pi^\sharp \varphi^*$

3. $\varphi^2 + \pi^\sharp \theta^b = -I + F \otimes \eta$

4. $(\varphi^*)^2 + \theta^b \pi^\sharp = -I + \eta \otimes F$

5. $\eta \circ \varphi = \varphi^* \eta = 0$

6. $\eta \circ \pi^\sharp = \pi^\sharp \eta = 0$

7. $i_F \varphi = 0$

8. $i_F \theta = 0$

9. $i_F \eta = 1$

3.2.1 Les fibrés vectoriels complexifier :

- Considérons une structure presque de contact généralisée sur M représentée par $(\Phi, F + \eta)$.

Soit L_F et L_η sont des fibrés vectoriel de rang 1 engendrés par F et η.
Sur le fibré vectoriel complexifie $(TM \oplus T^*M)_{\mathbb{C}}$, on a pour Φ trois valeurs propres : 0, $+i$, $-i$, nous allons définir des fibrés vectoriel complexifier suivantes :

$$E^{(1,0)} = \{e - i\Phi(e)/e \in ker\eta \oplus kerF\}$$
$$E^{(0,1)} = \{e + i\Phi(e)/e \in ker\eta \oplus kerF\}$$

tel que $L_F \oplus L_\eta$ est le 0-fibré propre (0-eigenbundle),
et $E^{(1,0)}$ est $+i$-fibre propre, et $E^{(0,1)}$ est $-i$-fibré propre.
Nous avons une décomposition naturelle :

$$(TM \oplus T^*M)_{\mathbb{C}} = L_F \oplus L_\eta \oplus E^{(1,0)} \oplus E^{(0,1)}.$$

Cette décomposition ne dépend pas d'un choix de ses représentant d'une classe d'équivalence de structure généralisée.
On définie quatre fibrés vectoriel complexes qui sont jouer des rôles différents :

$$L^+ := L_F \oplus E^{(1,0)}, \qquad \overline{L^+} := L_F \oplus E^{(0,1)}$$
$$L^- := L_\eta \oplus E^{(0,1)}, \qquad \overline{L^-} := L_\eta \oplus E^{(1,0)}$$

3.3 L'intégrabilité de structure presque de contact généralisée :

Définition 3.3.1. *[56]*
Toute structure presque de contact généralisée $(\Phi, E_{\pm})$ sur M dont l'une des sous fibrés associes $L^{\pm}$ est ***intégrable*** *(Courant involutive)(c'est à dire, l'une des espaces $L^{\pm}$ est stable (fermé) par le crochet de Courant), alors $(\Phi, E_{\pm})$ est simplement appelée une* ***structure de contact généralisée****.*
De plus si les deux $L^{\pm}$ sont simultanément intégrables alors la structure de contact généralisée $(\Phi, E_{\pm})$ est dite ***forte****.*

Lemme 3.3.1. *[32]*
Soit $(M, (\Phi, E_{\pm}))$ une structure presque de contact généralisée.
On dit que Φ est ***forte*** *si est seulement si $[L^+, E^{(1,0)}]_c \subset E^{(1,0)}$ et $[L^-, E^{(1,0)}]_c \subset E^{(1,0)}$*

Preuve . Supposons que Φ est forte :
soit $X + \alpha + r_1 E_+ \in L^+$ tel que $(X + \alpha) \in E^{(1,0)}$ et $r_1 \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.
Et soit $(Y + \beta) \in E^{(1,0)}$.
Lorsque Φ est forte alors :

$$[X + \alpha + r_1 E_+, Y + \beta]_c = W + p + r_2 E_+ \; pour \; (W + p) \in E^{(1,0)}, \; et \; r_2 \in C^{\infty}(\mathbb{R})$$

D'où,

$$\begin{aligned} \Phi([X + \alpha + r_1 E_+, Y + \beta]_c) &= \Phi(W + p + r_2 E_+) \\ &= \sqrt{-1}(W + p) \in E^{(1,0)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi^2([X + \alpha + r_1 E_+, Y + \beta]_c) &= \Phi(-1(W + p)) \\ &= -(W + p) \in E^{(1,0)} \end{aligned}$$

Mais nous avons aussi que :

$$\begin{aligned} \Phi^2([X + \alpha + r_1 E_+, Y + \beta]_c) &= -[X + \alpha + r_1 E_+, Y + \beta]_c + E_+ \otimes E_-([X + \alpha + r_1 E_+, Y + \beta]_c) \\ &+ E_- \otimes E_+([X + \alpha + r_1 E_+, Y + \beta]_c) \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$E_+ \otimes E_-([X + \alpha + r_1 E_+, Y + \beta]_c) = 0$$

et

$$-[X+\alpha+r_1E_+, Y+\beta]_c + E_- \otimes E_+([X+\alpha+r_1E_+, Y+\beta]_c) \in E^{(1,0)}$$

Donc

$$-(W+p+r_2E_+) + \langle E_-, W+p+r_2E_+\rangle E_+ \in E^{(1,0)}$$

D'où

$$-(W+p) - \frac{1}{2}r_2E_+ \in E^{(1,0)}$$

Donc :

$$r_2 = 0, \qquad et \;\; [X+\alpha+r_1E_+, Y+\beta]_c \in E^{(1,0)}$$

Ceci est exigé.
La même chose pour $[L^-, E^{(1,0)}]_c \subset E^{(1,0)}$

Pour l'autre direction, les hypothèses $[L^+, E^{(1,0)}]_c \subset E^{(1,0)}$ et $[L^-, E^{(1,0)}]_c \subset E^{(1,0)} \Rightarrow \Phi$ forte.

■

Exemple 3.3.1.
$(\mathbb{R}^{2n+1}, (\theta, \pi, \varphi, E_+, E_-))$ *est une structure de contact généralisée, avec* $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi & \pi^\sharp \\ \theta^b & -\varphi^* \end{pmatrix}$,
telle que :

- $\theta = \Sigma_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i \qquad 2-forme\;\; \theta(x,y) = dx_1 \wedge dy_1 + ... + dx_n \wedge dy_n \qquad d\theta = 0.$
- $\pi(\alpha,\beta) = \theta(b^{-1}(\alpha), b^{-1}(\beta)), \qquad \forall \alpha, \beta \in T^*M.$
  avec : $b(x) = i_y\theta - \eta(y)\eta$ *un isomorphisme.*
- $\varphi \equiv 0.$
- $E_+ = F = \partial x_0,$ *telle que* $(x_0, x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n)$ *coordonnés cartésiennes.*
- $E_- = \eta = dx_0.$

Vérification : Montrons que $(\mathbb{R}^{2n+1}, (E_+, E_-, \Phi))$ est une structure presque de contact généralisée.

1. $\Phi + \Phi^* = 0 \Leftrightarrow \langle \Phi A, B\rangle = -\langle A, \Phi B\rangle$?

$$\begin{aligned}
< \Phi A, B > &= \langle \begin{pmatrix} \pi^\sharp\alpha \\ \theta^b X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y \\ \beta \end{pmatrix} \rangle \\
&= \frac{1}{2}[\theta^b(X)(Y) + \beta(\pi^\sharp\alpha)] \\
&= \frac{1}{2}[-\theta^b(Y)(X) - \alpha(\pi^\sharp\beta)] \\
&= -\frac{1}{2}[\theta^b(Y)(X) + \alpha(\pi^\sharp\beta)] \\
&= \langle \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^\sharp\beta \\ \theta^b(Y) \end{pmatrix} \rangle \\
&= -\langle A, \Phi B\rangle
\end{aligned}$$

Donc :

$$\Phi + \Phi^* = 0$$

2.) $\langle E_+, E_+\rangle = \langle \partial x_0, \partial x_0\rangle = 0$

$\langle E_-, E_-\rangle = 0$

$\langle E_+, E_-\rangle = \langle \partial x_0, dx_0\rangle = \frac{1}{2}$

3.) $\Phi^2 = \Phi \circ \Phi = -Id + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+$?

$$E_+ \otimes E_- = (0, \partial x_0) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ dx_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \partial x_0 \otimes dx_0 \end{pmatrix}$$

$$E_- \otimes E_+ = (dx_0, 0) \otimes \begin{pmatrix} \partial x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_0 \otimes \partial x_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-Id + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+ = \begin{pmatrix} -I + dx_0 \otimes \partial x_0 & 0 \\ 0 & -I + \partial x_0 \otimes dx_0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi^2 = \Phi \circ \Phi = \begin{pmatrix} 0 & \pi^\sharp \\ \theta^b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \pi^\sharp \\ \theta^b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^\sharp\theta^b & 0 \\ 0 & \theta^b\pi^\sharp \end{pmatrix}$$

Vérifiant les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \pi^\sharp\theta^b = -I + dx_0 \otimes \partial x_0 \ . \quad . \quad .(1) \\ \theta^b\pi^\sharp = -I + \partial x_0 \otimes dx_0 \ . \quad . \quad .(2) \end{cases}$$

$\pi^\sharp\theta^b = -I + dx_0 \otimes \partial x_0$?
On a : $\quad \pi^\sharp\theta^b : TM \to T^*M \to TM \;\; et \;\; (\pi^\sharp\theta^b)(X) = \pi^\sharp(\theta^b(X))$

On pose :

$$X = X^i\partial x_i + Y^i\partial y_i + X_0\partial x_0$$

$$\begin{aligned} (-I + dx_0 \otimes \partial x_0)(X) &= -X^i\partial x_i - Y^i\partial y_i - X_0\partial x_0 + X_0\partial x_0 \\ &= -X^i\partial x_i - Y^i\partial y_i \end{aligned}$$

$\pi^\sharp\theta^b = ?$
Comme $\theta^b(X) \in T^*M$ donc on peut écrire :

$$\theta^b(X) \;=\; x^i dx_i + \alpha^i dy_i + \beta dx_0$$

Calculons x^i :

$$\begin{aligned} x^i &= \theta^b(X)(\partial x_i) \\ &= \theta(X, \partial x_i) \\ &= \theta(X^i\partial x_i + Y^i\partial y_i + X_0\partial x_0, \partial x_i) \\ &= \theta(X^i\partial x_i, \partial x_i) + \theta(Y^i\partial y_i, \partial x_i) + \theta(X_0\partial x_0, \partial x_i) \\ &= X^i\theta(\partial x_i, \partial x_i) + Y^i\theta(\partial y_i, \partial x_i) + X_0\theta(\partial x_0, \partial x_i) \end{aligned}$$

Comme $\quad \theta = \Sigma_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i = \frac{1}{2}\Sigma_{i=1}^n(dx_i \otimes dy_i - dy_i \otimes dx_i)$ alors :

$$\begin{aligned} x^i &= Y^i\theta(\partial y_i, \partial x_i) \\ &= Y^i(\frac{1}{2}(-1)) \\ &= -\frac{1}{2}Y^i \end{aligned}$$

Calculons α^i :

$$\begin{aligned}
\alpha^i &= \theta^b(X)(\partial y_i) \\
&= \theta(X, \partial y_i) \\
&= X^i\theta(\partial x_i, \partial y_i) + Y^i\theta(\partial y_i, \partial y_i) + X_0\theta(\partial x_0, \partial y_i) \\
&= X^i(\frac{1}{2}) + Y^i(0) + X_0(0) \\
\alpha^i &= \frac{1}{2}X^i
\end{aligned}$$

Calculons β :

$$\begin{aligned}
\beta &= \theta^b(X)(\partial x_0) \\
&= \theta(X, \partial x_0) \\
&= X^i\theta(\partial x_i, \partial x_0) + Y^i\theta(\partial y_i, \partial x_0) + X_0\theta(\partial x_0, \partial x_0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc : $\theta^b(X) = -\frac{1}{2}Y^i dx_i + \frac{1}{2}X^i dy_i$
Maintenant on calcule : $\pi^\sharp(\theta^b(X))$
comme $\pi^\sharp(\theta^b(X)) \in TM$ on suppose que :

$$\pi^\sharp(\theta^b(X)) = Z^i\partial x_i + W^i\partial y_i + V\partial x_0$$

calculons Z^i

$$\begin{aligned}
Z^i &= \partial x_i(\pi^\sharp(\theta^b(X))) \\
&= \pi(\theta^b(X), \partial x_i)) \\
&= \theta(b^{-1}(\theta^b(X)), b^{-1}\partial x_i)
\end{aligned}$$

Pour b^{-1} ?
on a : $b : TM \to T^*M$ avec $b(Y) = i_Y\theta - \eta(y)\eta = \theta(y) - \eta(Y)\eta$

$$\begin{aligned}
(b(Y))(Z) &= \theta(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z) \\
&= -\theta(Z, Y) - \eta(Z)\eta(Y)
\end{aligned}$$

Comme $\{\partial x_i, \partial y_i, \partial x_0\}$ base des champs, alors :

$$\begin{aligned} b(\partial x_i) &= \theta(\partial x_i) - \eta(\partial x_i)\eta \\ &= \theta(\partial x_i) - dx_0(\partial x_i)dx_0 \\ &= \theta(\partial x_i) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{cases} b(\partial x_i)(\partial x_j) = & \theta(\partial x_i, \partial x_j) = 0 \\ b(\partial x_i)(\partial y_j) = & \theta(\partial x_i, \partial y_j) = \frac{1}{2}\delta_{ij} \\ b(\partial x_i)(\partial x_0) = & \theta(\partial x_i, \partial x_0) - dx_0(\partial x_i)dx_0(\partial x_0) = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} b(\partial x_i) &= 0dx_i + \frac{1}{2}\delta_{ij}dy_i + 0dx_0 \\ &= \frac{1}{2}dy_i \end{aligned}$$

Par même méthode, on trouve :

$$\begin{cases} b(\partial y_i) = -\frac{1}{2}dx_i \\ b(\partial x_0) = -dx_0 \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} b(\partial x_i) = \frac{1}{2}dy_i \\ b(\partial y_i) = -\frac{1}{2}dx_i \\ b(\partial x_0) = -dx_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} b^{-1}(dy_i) = 2\partial x_i \\ b^{-1}(dx_i) = -2\partial y_i \\ b^{-1}(dx_0) = -\partial x_0 \end{cases}$$

maintenant on continuer de calculer les composantes de $\pi^\sharp(\theta^b(X))$:

(a) Z^i?

$$
\begin{aligned}
Z^i &= dx_i(\pi^\sharp\theta^b(X)) \\
&= \pi(\theta^b(X), dx_i) \\
&= \theta(b^{-1}(\theta^b(X)), b^{-1}dx_i) \\
&= \theta(-\frac{1}{2}Y^i b^{-1}(dx_i) + \frac{1}{2}X^i b^{-1}(dy_i), b^{-1}(dx_i)) \\
&= \theta(Y^i\partial y_i + X^i\partial x_i, -2\partial y_i) \\
&= (-2)Y^i\theta(\partial y_i, \partial y_i) + (-2)X^i\theta(\partial x_i, \partial y_i) \\
&= -X^i
\end{aligned}
$$

(b) W^i?

$$
\begin{aligned}
W^i &= dy_i(\pi^\sharp\theta^b(X)) \\
&= \pi(\theta^b(X), dy_i) \\
&= \theta(b^{-1}(\theta^b(X)), b^{-1}dy_i) \\
&= \theta(b^{-1}(-\frac{1}{2}Y^i(dx_i) + \frac{1}{2}X^i(dy_i)), b^{-1}(dy_i)) \\
&= \theta(-\frac{1}{2}Y^i b^{-1}dx_i + \frac{1}{2}X^i b^{-1}(dy_i), b^{-1}(dy_i)) \\
&= \theta(Y^i\partial y_i + X^i\partial x_i, 2\partial x_i) \\
&= 2Y^i\theta(\partial y_i, \partial x_i) + 2X^i\theta(\partial x_i, \partial x_i) \\
&= -Y^i
\end{aligned}
$$

(c) V?

$$
\begin{aligned}
V &= dx_0(\pi^\sharp\theta^b(X)) \\
&= \pi(\theta^b(X), dx_0) \\
&= \theta(b^{-1}(\theta^b(X)), b^{-1}(dx_0)) \\
&= \theta(-\frac{1}{2}Y^i b^{-1}dx_i + \frac{1}{2}X^i b^{-1}(dy_i), b^{-1}(dx_0)) \\
&= \theta(Y^i\partial y_i + X^i\partial x_i, -2\partial y_i) \\
&= -Y^i\theta(\partial y_i, \partial x_0) - X^i\theta(\partial x_i, \partial x_0) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Donc : $\pi^\sharp(\theta^b(X)) = -X^i\partial x_i - Y^i\partial y_i$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}(-I + dx_0 \otimes \partial x_0)(X) &= (-I + dx_0 \otimes \partial x_0)(X^i \partial x_i + Y^i \partial y_i + X_0 \partial x_0)\\ &= -X^i \partial x_i - Y^i \partial y_i - X_0 \partial x_0 + dx_0(X_0 \partial x_0)\partial x_0\\ &= -X^i \partial x_i - Y^i \partial y_i\end{aligned}$$

D'où :

$$\pi^\sharp \theta^b = -I + dx_0 \otimes \partial x_0$$

Maintenant on vérifiant que : $\theta^b \pi^\sharp = -I + E_- \otimes E_+$?

$$(\theta^b \pi^\sharp)(\alpha) = \theta^b(\pi^\sharp(\alpha))$$

et

$$(-I + E_- \otimes E_+)(\alpha) = -\alpha + E_-(\alpha)E_+ = -\alpha + \alpha(\partial x_0)dx_0$$

avec : $\alpha \in T^*M$

donc on pose :

$$\alpha = \alpha_i dx_i + \bar{\alpha}_i dy_i + \alpha_0 dx_0$$

tel que : $\alpha_i, \bar{\alpha}_i, \alpha_0$ sont les composantes de α

On a

$$\begin{aligned}(-I + \partial x_0 \otimes dx_0)(\alpha) &= -\alpha + \alpha(\partial x_0)dx_0\\ &= -\alpha_i dx_i - \bar{\alpha}_i dy_i - \alpha_0 dx_0 + \alpha_0 dx_0\\ &= -\alpha_i dx_i - \bar{\alpha}_i dy_i\end{aligned}$$

d'autre part :

$$\theta^b(\pi^\sharp(\alpha))(\partial x_i) = \theta(\pi^\sharp \alpha, \partial x_i)$$

Calculons $\pi^\sharp \alpha$:

On a $\pi^\sharp : T^*M \to TM$ et $\alpha \in T^*M$

$$\begin{aligned}
dx_i(\pi^\sharp\alpha) &= \pi(\alpha, dx_i) \\
&= \theta(b^{-1}(\alpha), b^{-1}(dx_i)) \\
&= \theta(\alpha_i b^{-1}(dx_i) + \bar{\alpha}_i b^{-1}(dy_i) + \alpha_0 b^{-1}(dx_0), b^{-1}(dx_0)) \\
&= \theta(\alpha_i(-2\partial y_i) + \bar{\alpha}_i(2\partial x_i) + \alpha_0(-\partial x_0), -2\partial y_i) \\
&= 4\alpha_i\theta(\partial y_i, \partial y_i) - 4\bar{\alpha}_i\theta(\partial x_i, \partial y_i) + 2\alpha_0\theta(\partial x_0, \partial y_i) \\
&= -2\bar{\alpha}_i \\
dy_i(\pi^\sharp\alpha) &= \pi(\alpha, dy_i) \\
&= \theta(b^{-1}(\alpha), b^{-1}(dy_i)) \\
&= \theta(\alpha_i b^{-1}(dx_i) + \bar{\alpha}_i b^{-1}(dy_i) + \alpha_0 b^{-1}(dx_0), b^{-1}(dy_i)) \\
&= -4\alpha_i\theta(\partial y_i, \partial x_i) + 4\bar{\alpha}_i\theta(\partial x_i, \partial x_i) - 2\alpha_0\theta(\partial x_0, \partial x_i) \\
&= 2\alpha_i \\
dx_0(\pi^\sharp\alpha) &= \pi(\alpha, dx_0) \\
&= \theta(b^{-1}(\alpha), b^{-1}(dx_0)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc :

$$\pi^\sharp\alpha = -2\bar{\alpha}_i\partial x_i + 2\alpha_i\partial y_i$$

$\theta^b(\pi^\sharp(\alpha)) =?$

$$\begin{aligned}
\theta^b(\pi^\sharp(\alpha))(\partial x_i) &= \theta(\pi^\sharp\alpha, \partial x_i) \\
&= \theta(-2\bar{\alpha}_i\partial x_i + 2\alpha_i\partial y_i, \partial x_i) \\
&= -2\bar{\alpha}_i\theta(\partial x_i, \partial x_i) + 2\alpha_i\theta(\partial y_i, \partial x_i) \\
&= -\alpha_i \\
\theta^b(\pi^\sharp(\alpha))(\partial y_i) &= \theta(\pi^\sharp\alpha, \partial y_i) \\
&= \theta(-2\bar{\alpha}_i\partial x_i + 2\alpha_i\partial y_i, \partial y_i) \\
&= -2\bar{\alpha}_i\theta(\partial x_i, \partial y_i) + 2\alpha_i\theta(\partial y_i, \partial y_i) \\
&= -\bar{\alpha}_i \\
\theta^b(\pi^\sharp\alpha)(\partial x_0) &= \theta(\pi^\sharp\alpha), \partial x_0) \\
&= \theta(-2\bar{\alpha}_i\partial x_i + 2\alpha_i\partial y_i, \partial x_0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc :

$$\theta^b(\pi^\sharp\alpha) = -\alpha_i dx_i - \bar{\alpha}_i dy_i$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}(-I+\partial x_0\otimes dx_0)(\alpha) &= -\alpha+\alpha(\partial x_0)dx_0\\ &= -\alpha_i dx_i-\bar{\alpha}_i dy_i\end{aligned}$$

d'où

$$\theta^b\pi^\sharp=-I+\partial x_0\otimes dx_0$$

Donc :

$$\Phi^2=-I+E_+\otimes E_-+E_-\otimes E_+$$

Alors : $(\mathbb{R}^{2n+1},(E_+,E_-,\Phi))$ est une structure presque de contact généralisée

Reste à démontrer que cette structure est intégrable (i.e est une structure de contact généralisée)

On sait que :

$$(TM\oplus T^*M)_\rfloor=L_{E_+}\oplus E^{(1,0)}\oplus L_{E_-}\oplus E^{(0,1)}$$

avec :

$$L^+=L_{E_+}\oplus E^{(1,0)}\quad et\quad L_{E_+}=\lambda E_+$$

$$L^-=L_{E_-}\oplus E^{(0,1)}\quad et\quad L_{E_-}=\lambda E_-$$

et :

$$E^{(1,0)}=\{A=X+\alpha/\Phi A=iA\}=\{e-i\Phi(e)/<e,E\pm>=0\}$$

$$L^+=L_{E_+}\oplus E^{(1,0)}=\{\lambda E_++e-i\phi(e)/\lambda\in C,\langle e,E_+\rangle=0\}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0&\pi^\sharp\\ \theta^b&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}iX\\ i\alpha\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\pi^\sharp\alpha\\ \theta^b(X)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}iX\\ i\alpha\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\pi^\sharp(\alpha)=iX\\ \theta^b(X)=i\alpha\end{cases}\Rightarrow\qquad\begin{cases}-i\pi^\sharp(\alpha)=X\\ -i\theta^b(X)=\alpha\end{cases}$$

Donc :

$$E^{(1,0)}=\{X-i\theta^b(X)/X\in TM\}$$

et d'après la formule de $\theta^b(X)$ on obtient :

$$\begin{aligned}E^{(1,0)} &= \{X^i\partial x_i+Y^i\partial y_i+X_0\partial x_0-i(-\frac{1}{2}Y^idx_i)+\frac{1}{2}X^idy_i)\ \ /X=X^i\partial x_i+Y^i\partial y_i+X_0\partial x_0\}\\ E^{(1,0)} &= \{X^i\partial x_i+Y^i\partial y_i+i\frac{1}{2}Y^idx_i-i\frac{1}{2}X^idy_i\quad /X=X^i\partial x_i+Y^i\partial y_i\in TM\}\\ &= \{X^i(\partial x_i-i\frac{1}{2}dy_i)+Y^i(\partial y_i+i\frac{1}{2}dx_i)\quad /\forall X^i,Y^i\in TM\}\end{aligned}$$

Donc :

$$E^{(1,0)} = \langle \partial x_i - i\frac{1}{2}dy_i, \partial y_i + i\frac{1}{2}dx_i \rangle$$

Alors :

$$\begin{aligned}
L^+ &= L_{E_+} \oplus E^{(1,0)} \\
&= \langle E_+, \partial x_i - i\frac{1}{2}dy_i, \partial y_i + i\frac{1}{2}dx_i \rangle \\
&= \langle \partial x_0, \partial x_i - i\frac{1}{2}dy_i, \partial y_i + i\frac{1}{2}dx_i \rangle = \langle A, B \rangle
\end{aligned}$$

Si on pose :

$$A = \partial x_i - i\frac{1}{2}dy_i \quad et \quad B = \partial y_i + i\frac{1}{2}dx_i$$

On vérifier que le crochet de Courant est stable par L^+, il suffit de vérifier que : $[E_+, A]_c, [E_+, B]_c, [E_+, E_+]_c,$ $[A, A]_c, [B, B]_c, [A, B]_c$ sont stables dans L^+

$$\begin{aligned}
[E_+, A]_c &= [\partial x_0, \partial x_i - i\frac{1}{2}dy_i]_c \\
&= [\partial x_0, \partial x_i - i(\frac{1}{2}dy_i)]_c \\
&= [\partial x_0, \partial x_i - i\theta^b dx_i]_c \\
&= [\partial x_0, \partial x_i - i(i_{\partial x_i}\theta)]_c \\
&= [\partial x_0, \partial x_i] + \pounds_{\partial x_i}(-i(i_{\partial x_i}\theta)) - \pounds_{\partial x_i}0 - \frac{1}{2}d[(-i(i_{\partial x_i}\theta))(\partial x_0) - 0(\partial x_0)] \\
&= [\partial x_0, \partial x_i] - i\pounds_{\partial x_i}(i_{\partial x_i}\theta) + \frac{1}{2}id(i_{\partial x_0}(i_{\partial x_i}\theta)) \\
&= [\partial x_0, \partial x_i] - i\pounds_{\partial x_i}(i_{\partial x_i}\theta) - \frac{1}{2}d(i_{\partial x_i}(i_{\partial x_0}\theta)) \\
&= [\partial x_0, \partial x_i] - i\pounds_{\partial x_i}(i_{\partial x_i}\theta) \\
&= [\partial x_0, \partial x_i] - i(i_{[\partial x_0, \partial x_i]}\theta + i_{\partial x_i}\pounds_{\partial x_0}\theta) \\
&= [\partial x_0, \partial x_i] - ii_{[\partial x_0, \partial x_i]}\theta \\
&= [\partial x_0, \partial x_i] - i\theta^b([\partial x_0, \partial x_i]) \\
&= [\partial x_0, \partial x_i] - i\Phi[\partial x_0, \partial x_i] \in E^{(1,0)} \subset L^+
\end{aligned}$$

et par même méthode :

$$\begin{aligned}
[E_+, B]_c &= [\partial x_0, \partial y_i + i\frac{1}{2}dx_i]_c \\
&= [\partial x_0, \partial y_i - i(-\frac{1}{2}dx_i)]_c \\
&= [\partial x_0, \partial y_i - i\theta^b \partial y_i]_c \\
&= [\partial x_0, \partial y_i] - i\theta^b([\partial x_0, \partial y_i]) \\
&= [\partial x_0, \partial y_i] - i\Phi[\partial x_0, \partial y_i] \in E^{(1,0)} \subset L^+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[A,B]_c &= [\partial x_i - i\frac{1}{2}dy_i, \partial y_i + i\frac{1}{2}dx_i]_c \\
&= [\partial x_i - i\theta^b(\partial x_i), \partial y_i - i\theta^b(\partial y_i)]_c \\
&= [\partial x_i - i(i_{\partial x_i}\theta), \partial y_i - i(i_{\partial y_i}\theta)]_c \\
&= [\partial x_i, \partial y_i] - i(i_{[\partial x_i, \partial y_i]}\theta) \subset L^+
\end{aligned}$$

$$[E_+, E_+]_c = [\partial x_0, \partial x_0]_c \subset L^+$$

$$\begin{aligned}
[A,A]_c &= [\partial x_i - i\frac{1}{2}dy_i, \partial x_i - i\frac{1}{2}dy_i]_c \\
&= [\partial x_i - i\theta^b(\partial x_i), \partial x_i - i\theta^b(\partial x_i)]_c \\
&= [\partial x_i - i(i_{\partial x_i}\theta), \partial x_i - i(i_{\partial x_i}\theta)]_c \\
&= [\partial x_i, \partial x_i] - i(i_{[\partial x_i, \partial x_i]}\theta) \subset L^+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[B,B]_c &= [\partial y_i + i\frac{1}{2}dx_i, \partial y_i + i\frac{1}{2}dx_i]_c \\
&= [\partial y_i - i\theta^b(\partial y_i), \partial y_i - i\theta^b(\partial y_i)]_c \\
&= [\partial y_i - i(i_{\partial y_i}\theta), \partial y_i - i(i_{\partial y_i}\theta)]_c \\
&= [\partial y_i, \partial y_i] - i(i_{[\partial y_i, \partial y_i]}\theta) \subset L^+
\end{aligned}$$

Donc L^+ est intégrable (i.e : L^+ stable par le crochet de Courant).

Alors $(\mathbb{R}^{2n+1}, (\theta, \pi, \varphi, E_+, E_-))$ est une structure de contact généralisée.

3.3.1 Structure métrique presque contact généralisée

Une structure métrique presque contact sur M est (g, φ, ξ, η), où (φ, ξ, η) est une structure presque contact et g est la métrique Riemannienne qui satisfaits :

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

pour $\forall X, Y \in TM$.
Kenichi Sekiya ([58], 2012) a défini une structure métrique presque de contact généralisée, comme suit :

Définition 3.3.2. *[58] Soit $(\Phi, E_\pm)$ est une structure presque contact généralisée. Si $G : TM \oplus T^*M \longrightarrow TM \oplus T^*M$ est une **métrique Riemannienne généralisée** qui satisfait :*

$$-\Phi G \Phi = G - E_+ \otimes E_+ - E_- \otimes E_- \tag{3.4}$$

alors $(G, \Phi, E_\pm)$ est une ***structure métrique presque contact généralisée****.*
On dit que G compatible avec Φ.

Exemple 3.3.2.
Soit $(\mathbb{R}^3, (\varphi, \xi, \eta, g))$ une variété métrique presque de contact classique, telle que :

$$(\varphi_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}$$

$$(g_{ij}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\eta = \frac{1}{2}\big(dz - y\,dx\big) = \frac{1}{2}\big(-y, 0, 1\big), \qquad et \qquad \xi = 2\,\partial z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nous montrons que $(\mathbb{R}^3, (\Phi, E_\pm, G))$ est une variété métrique presque de contact généralisée,
telle que : $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\varphi^* \end{pmatrix}$, $E_+ = \xi$, $E_- = \eta$, *et* $G = \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \\ g & 0 \end{pmatrix}$
(voir l'exemple (3.1.1)).

- $\Phi + \Phi^* = 0$ **?**

Premièrement, on calcul $\varphi^* = ?$
on sait que φ^* définie par :

$$(\varphi^*\alpha)(X) := \alpha(\varphi(X)) \tag{3.5}$$

Supposons que $\{\partial x, \partial y, \partial z\}$ (resp. $\{dx, dy, dz\}$) est une base locale (resp. base dual) sur $\mathbb{R}^3$, posons,

$$\varphi^* = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

Et d'après l'égalité (3.5), on conclure que :
$(\varphi^* dx)(\partial x) = dx(\varphi \partial x)$
c'est a dire : $(\varphi^* dx)(\partial x) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (\partial x) = (a\,dx + d\,dy + g\,dz)(\partial x) = a$

et

$$dx(\varphi\partial x) = dx\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = dx\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Donc, $a = 0.$

On applique la même méthode sur :

$(\varphi^* dy)(\partial y) = dy(\varphi\partial y)$

$(\varphi^* dz)(\partial z) = dz(\varphi\partial z)$

$(\varphi^* dx)(\partial y) = dx(\varphi\partial y)$

$(\varphi^* dx)(\partial z) = dx(\varphi\partial z)$

$(\varphi^* dy)(\partial x) = dy(\varphi\partial x)$

$(\varphi^* dy)(\partial z) = dy(\varphi\partial z)$

$(\varphi^* dz)(\partial x) = dz(\varphi\partial x)$

$(\varphi^* dz)(\partial y) = dz(\varphi\partial y)$

finalement, on trouve les composantes de φ^* : $\varphi^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Maintenant, supposons que : $\begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\partial x \\ b\partial y \\ c\partial z \\ edx \\ fdy \\ kdz \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} Y \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\partial x \\ t\partial y \\ v\partial z \\ hdx \\ ldy \\ ndz \end{pmatrix}$

d'où, $\Phi(X,\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\partial x \\ b\partial y \\ c\partial z \\ edx \\ fdy \\ kdz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\partial y \\ -a\partial x \\ yb\partial y \\ fdy \\ -edx - kydz \\ 0 \end{pmatrix}$

la même chose pour $\Phi(Y,\beta) =?$

Après les calcules on trouve : $< \Phi(X,\alpha), (Y,\beta) >= - < (X,\alpha), \Phi(Y,\beta) >$

Donc

$$\Phi + \Phi^* = 0.$$

- $< E_\pm, E_\pm >= 0$ et $< E_+, E_- >= \dfrac{1}{2}$
- Montrons que $\Phi^2 = -I + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+$?

On trouve $$\Phi^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'autre part, on trouve $$E_+ \otimes E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } E_- \otimes E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où, $$-I + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\Phi^2 = -I + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+$$

Alors $(\mathbb{R}^3, (\Phi, E_\pm))$ est une variété presque contact généralisée.

- Maintenant on cherche la métrique Riemannienne généralisée G :

$G := \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \\ g & 0 \end{pmatrix}$ telle que g^{-1} la métrique inverse de g.

Supposons que : $$g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ n & h & k \end{pmatrix}$$

D'où, $$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ n & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Après des calcules simple, on trouve : $$g^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4y \\ 0 & 4 & 0 \\ 4y & 0 & 4y^2+4 \end{pmatrix}$$

Donc, on trouve l'endomorphisme G, défini par :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4y & 0 & 4y^2+4 \\ \frac{1+y^2}{4} & 0 & \frac{-y}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-y}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors, on obtient la **métrique Riemannienne généralisée** $H :=< G.,. >$, définie par :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1+y^2}{8} & 0 & \frac{-y}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-y}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2y & 0 & 2(y^2+1) \end{pmatrix}$$

où $H_{ij} = H(\partial_i, \partial_j) :=< G(\partial_i), \partial_j >$ avec $\partial_i \in \{\partial x, \partial y, \partial z, dx, dy, dz\}$,
par exemple :

$$\begin{aligned} H_{11} &= H(\partial_1, \partial_1) \\ &= < G\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > \\ &= < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1+y^2}{4} \\ 0 \\ \frac{-y}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >= \frac{1+y^2}{8}. \end{aligned}$$

Alors $(\mathbb{R}^3, (\Phi, E_\pm, H))$ est une variété métrique presque de contact généralisée.

Lemme 3.3.2. *[31] Soit $(\Phi, E_\pm, G)$ est une structure métrique presque contact généralisée dans M alors les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $G(E_\pm) = E_\mp$
2. $G\Phi = \Phi G$
3. $G(E^{(1,0)}) = E^{(1,0)}$
4. $(e^B \Phi e^{-B}, e^B E_+, e^B G e^{-B})$ *est une structure métrique presque contact généralisée tel que B est une 2-forme différentielle.*

Preuve . Si $(\Phi, E_\pm, G)$ est une structure métrique presque de contact généralisée.

1.) Montrons que $G(E_\pm) = E_\mp$ on a :

$$\begin{array}{rcl} -\Phi G \Phi(E_+) & = & 0 \\ -\Phi G \Phi(E_+) & = & G(E_+) - E_+ \otimes E_+(E_+) - E_- \otimes E_-(E_+) \\ & = & G(E_+) - E_- \end{array}$$

d'où $G(E_+) = E_-$, la même chose pour $G(E_-) = E_+$.

2.) $G\Phi = \Phi G$?

$$\begin{array}{rcl} -\Phi G \Phi & = & G - E_+ \otimes E_+ - E_- \otimes E_- \\ -\Phi^2 G \Phi & = & \Phi G \\ G\Phi - E_+ \otimes E_- \circ G\Phi - E_- \otimes E_+ \circ G\Phi & = & \Phi G \\ G\Phi - \langle E_+, G\Phi \rangle E_- - \langle E_-, G\Phi \rangle E_+ & = & \Phi G \end{array}$$

On a : $\Phi \circ E_+ = 0$ et $\langle A, \Phi E_\pm \rangle = 0$ et $G^* = G$
alors :

$$G\Phi = \Phi G$$

3.) $G(E^{(1,0)}) = E^{(1,0)}$?
vérifiant que : $E^{(1,0)} \subset G(E^{(1,0)})$

Soit $Y + \beta \in E^{(1,0)} \Rightarrow Y + \beta = X + \alpha - \sqrt{-1}\Phi(X + \alpha)$
pour $(X + \alpha) \in TM \oplus T^*M$ tel que $\langle X + \alpha, E_\pm \rangle = 0$.

Par (i) et $G^* = G$ on obtient :

$$\langle G(X+\alpha), E_\pm \rangle = 0$$

donc :

$$G(X+\alpha) - \sqrt{-1}\Phi G(X+\alpha) \in E^{(1,0)}.$$

Par l'application de $G^2 = Id$ et $\Phi G = G\Phi$:
on trouve que :

$$Y + \beta \in G(E^{(1,0)})$$

Vérifiant que : $G(E^{(1,0)}) \subset E^{(1,0)}$
Soit $Y + \beta \in G(E^{(1,0)})$ alors $Y + \beta = G(X + \alpha - \sqrt{-1}\Phi(X+\alpha))$
pour $(X+\alpha) \in TM \oplus T^*M$ tel que

$$\langle X+\alpha, E_\pm \rangle = 0$$

on pose

$$0 = \langle X+\alpha, E_\pm \rangle = \langle X+\alpha, G(E_\mp) \rangle = \langle G(X+\alpha), E_\mp \rangle$$

comme $G = G^*$, alors :

$$G(X + \alpha - \sqrt{-1}\Phi G(X+\alpha)) \in E^{(1,0)}$$

et comme $\Phi G = G\Phi$, on a :

$$Y + \beta \in E^{(1,0)}$$

d'où

$$G(E^{(1,0)}) = E^{(1,0)}$$

4.) $(e^B\Phi e^{-B}, e^B E_\pm, e^B G e^{-B})$ est une structure métrique presque de contact généralisée ?

   (a) $(e^B\Phi e^{-B}, e^B E_\pm)$ est une structure presque de contact généralisée (voir le Lemme (3.1.4)).

   (b) Maintenant, on montrons que $e^B G e^{-B}$ est une métrique Riemannienne généralisée compatible avec $e^B\Phi e^{-B}$ et les sections $e^B E_\pm$, c.à.d montrons que :

$$\begin{aligned} -e^B\Phi G\Phi e^{-B} &= e^B G e^{-B} - e^B E_+ \otimes e^B E_+ - e^B E_- \otimes e^B E_- \\ e^B G e^{-B} - e^B(E_+ \otimes E_+)e^{-B} - e^B(E_- \otimes E_-)e^{-B} &= e^B G e^{-B} - e^B E_+ \otimes e^B E_+ - e^B E_- \otimes e^B E_- \end{aligned}$$

donc on doit vérifier que :

$$e^B(E_+ \otimes E_+)e^{-B} = e^B E_+ \otimes e^B E_+$$

Soit $A \in TM \oplus T^*M$ d'où :

$$\begin{array}{rcl} (e^B E_+ \otimes e^B E_+)(A) & = & \langle e^B E_+, A\rangle e^B E_+ \quad . \quad . \quad (1) \\ (e^B (E_+ \otimes E_+) e^{-B})(A) & = & e^B (E_+ \otimes E_+) e^{-B} A \\ & = & e^B \langle E_+, e^{-B} A\rangle E_+ \\ & = & e^B \langle e^B E_+, A\rangle E_+ \\ & = & \langle e^B E_+, A\rangle e^B E_+ \quad . \quad . \quad (2) \end{array}$$

Donc de (1) et (2) on obtient :

$$-e^B \Phi G \Phi e^{-B} = e^B G e^{-B} - e^B E_+ \otimes e^B E_+ - e^B E_- \otimes e^B E_-$$

d'où, la structure $(e^B \Phi e^{-B}, e^B E_+, e^B G e^{-B})$ est une structure métrique presque de contact généralisée

■

Proposition 3.3.1. *[58]*
Si $(G, \Phi, E_\pm)$ est une structure métrique presque contact généralisée alors nous avons que $(G, G\Phi = \Phi G, GE_\pm = E_\mp)$ est également une structure métrique presque contact généralisée.

Preuve .

1. Montrons que $(G\Phi = \Phi G, GE_\pm = E_\mp)$ est une structure presque de contact généralisée
   (a) Montrons que $G\Phi + G^*\Phi^* = 0$
   on a $G = G^*$ et $\Phi = -\Phi^*$
   d'où

$$\begin{array}{rcl} G\Phi & = & -G^*\Phi^* \\ G\Phi + G^*\Phi^* & = & 0 \end{array}$$

   (b) $\langle GE_+, GE_+\rangle = \langle E_-, E_-\rangle = 0$
   $\langle GE_+, GE_-\rangle = \langle E_-, E_+\rangle = \frac{1}{2}$
   (c) $(G\Phi)^2 = G\Phi \circ G\Phi = G\Phi \circ \Phi G = -Id + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+$?

D'après le Lamme (3.3.2), on a :

$$\begin{array}{rcl}(G\Phi)^2 & = & G\Phi \circ G\Phi \\ & = & G\Phi \circ \Phi G \\ & = & G\Phi^2 G \\ & = & G(-Id + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+)(G) \\ & = & -G^2 + 2\langle E_+, G\rangle GE_- + 2\langle E_-, G\rangle GE_+ \\ & = & -Id + 2\langle GE_+, Id\rangle E_+ + 2\langle GE_-, Id\rangle E_- \quad car \;\; G^2 = Id \\ & = & -Id + E_- \otimes E_+ + E_+ \otimes E_-\end{array}$$

Donc : $(G\Phi)^2 = G\Phi \circ G\Phi = G\Phi \circ \Phi G = -Id + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+$.

D'où la structure $(G\Phi = \Phi G, GE_\pm = E_\mp)$ est une structure presque de contact généralisée

2. vérifions que G est une métrique Riemannienne généralisée qui compatible avec cette structure :
   c.à.d

$$-G\Phi \;\; G \;\; G\Phi = G - E_+ \otimes E_+ - E_- \otimes E_- \;\; ?$$

$$\begin{array}{rcl}-G\Phi \;\; G \;\; G\Phi & = & -\Phi G\Phi \qquad car \;\; G\Phi = \Phi G \\ & = & G - E_+ \otimes E_+ - E_- \otimes E_-\end{array}$$

   donc $(G, G\Phi = \Phi G, GE_\pm = E_\mp)$ est une structure métrique presque de contact généralisée.

■

3.4 Structure coKähler généralisée

Rappelons qu'une structure presque contact (φ, ξ, η) sur une variété M de dimension impair est appelée *normale* si la structure presque complexe associée sur $M \times \mathbb{R}$ est intégrable. *Ralph R. Gomez* et *Janet Talvacchia* dans [32], ils ont prouvé que le produit de deux structures presque contact généralisées $(M_i, \Phi_i, E^i_\pm)$, $i = 1, 2$ est une structure complexe généralisée si et seulement si chaque Φ_i est **forte** (strong) (i.e. L^+ et L^- sont stables par le crochet de Courant) et $[E^i_\pm, E^i_\mp]_c = 0$, ainsi, conformément à la notion classique de structure presque contact normale.

Définition 3.4.1. *[32]*
Une structure presque contact généralisée $(M, \Phi, E_\pm)$ est une structure de contact généralisée ***normale*** *si Φ est forte et $[E_+, E_-]_c = 0$.*

Si nous prenons M pour avoir une *structure de contact généralisée normale* et pour que $\mathbb{R}$ ait la structure de contact généralisée normale trivial ($\Phi = 0, E_+ = dt, E_- = \partial t$), alors le cône $M \times \mathbb{R}$ admet une structure complexe généralisée (voir [32]).

Une structure métrique presque contact sur M^{2n+1} est une structure presque de contact (φ, ξ, η) avec une métrique Riemannienne g qui satisfait $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta Y)$. Kenichi Sekiya [58] a défini une structure *métrique* presque de contact généralisée comme une structure presque de contact généralisée $(\Phi, E_\pm)$ avec une métrique Riemannienne généralisée G qui satisfait

$$-\Phi G \Phi = G - E_+ \otimes E_+ - E_- \otimes E_-$$

Lemme 3.4.1. *[32]*
Soit $(\Phi, E_\pm, G)$ une structure métrique presque de contact généralisée sur M^{2n+1}.
Alors $(e^B \Phi e^{-B}, e^B E_+, e^B G e^{-B})$ est une structure métrique presque de contact généralisée tel que B est une 2-forme différentielle. De plus, cette structure est forte si $(\Phi, E_\pm)$ est forte.

Rappelons qu'une **structure presque coKähler** sur M^{2n+1} classique est une structure métrique presque de contact (φ, ξ, η, g) sur M, tel que la 2-forme fondamentale $\omega(X, Y) := g(X, \varphi Y)$ et la 1-forme η sont fermés (i.e. $d\omega = d\eta = 0$) [18]. Si en plus, la structure métrique presque de contact est normale, alors (φ, ξ, η, g) est une **structure coKähler** sur M, (voir la Définition 1.2.10).

Définition 3.4.2. *[31]*
*Une **structure coKähler généralisée** est une structure métrique de contact généralisée normale $(\Phi, E_\pm, G)$ tel que $G\Phi$ est également forte (strong).*

Remarque 3.4.1. *[31]*
♦ *Les sections associées à $G\Phi$ sont $GE_\pm = E_\mp$ et donc automatiquement on obtient que $[[E_\pm, E_\mp]] = 0$ pour la structure métrique de contact généralisée associée à $G\Phi$.*
Par conséquent, nous aurions pu définir une structure coKähler comme une structure métrique de contact généralisée $(M, \Phi, E_\pm, G)$ telle que les deux $(M, \Phi, E_\pm, G)$ et $(M, G\Phi, E_\mp, G)$ sont normaux.
♦ *Si $(\Phi, E_\pm, G)$ est une structure métrique de contact généralisée normale alors par définition, Φ est forte.*

Rappelons qu'une structure de Kähler sur M induite une structure de Kähler généralisée sur M.

Proposition 3.4.1. *[31]*
Toute variété coKähler est une variété coKähler généralisée.

Preuve . Voir [31] p 8. ■

Lemme 3.4.2. *[32]*
Soit $(\Phi, E_{\pm})$ *une structure presque contact généralisée, alors* Φ *est fort si et seulement si* $[L^{+}, E^{(1,0)}]_c \in E^{(1,0)}$ *et* $[L^{-}, E^{(1,0)}]_c \in E^{(1,0)}$.

Théorème 3.4.1. *[31]*
Produit de deux variétés coKähler généralisées admet une variété de Kähler généralisée.

Preuve . Voir [31] p 9. ∎

chapter 4

Résultats

Dans ce chapitre qui est la partie principale de ce travail, nous présentons les résultats que nous avons obtenu, d'où, nous nous adressons à les points suivants :

Premièrement, la construction des variétés Kählériennes généralisées à partir des variétés presque contact métrique classiques (précisément, à partir des variétés trans-Sasakiennes), par l'utilisation **une fois** le produit des variétés, passant par le Théorème (2.3.1) de Marco Gualtieri [28], où on peut construire une structure Kählérienne généralisée à partir d'une **structure bi-hermitienne** classique.

Deuxièmement, la construction des variétés Kählériennes généralisées à partir des variétés presque Kählériennes classiques, par l'utilisation **deux fois** le produit des variétés, passant aussi par le Théorème (2.3.1) de Marco Gualtieri [28].

Troisièmement, nous avons fait, l'extension de la notion de transformation (précisément, la déformation homothétique) sur les variétés Riemanniennes classiques (voir,Tanno [61], 1968) à la géométrie généralisée (précisément, sur les variétés presque contact généralisées).

Quatrièmement, nous avons adressé quelques propriétés sur les métriques généralisées, où nous somme arrivé a définie une nouvelle métrique Riemannienne classique $g - bg^{-1}b$ sur une variété Riemannienne (M, g), où b une 2-forme, et g^{-1} est la métrique inverse de g.

4.0.1 Introduction sur la construction des variétés Kählériennes généralisées

Soit M une variété différentiable de dimension paire avec son fibré tangent généralisé $TM \oplus T^*M$. La structure de Kähler généralisée sur M est une paire de structures complexes généralisées qui sont compatibles, en ce sens qu'ils définissent une métrique définie positif sur $TM \oplus T^*M$. Une telle structure peut également être définie de manière équivalente comme un quadruple (g, b, J_+, J_-), où g est une métrique Riemannienne, b est un deux-forme et $J_\pm$ sont des structures presque hermitiennes sur (M, g) satisfaisant une certaine condition de torsion.

En d'autres termes, une structure de Kähler généralisée sur M peut être considérée comme une structure bi-hermitien satisfaisant une certaine condition de torsion. Les structures de Kähler généralisées ont été introduits et étudiés par Gualtieri dans [28]. L'un des objectifs de ce travail est d'explorer d'autres façons de construire des structures de Kähler généralisées.

Dans ce cadre les résultats de notre étude peuvent être divisés en deux parties. Dans la première partie, nous construisons des structures de Kähler généralisées à partir des variétés métriques de contact classique de dimension impaire (précisément, à partir des variétés trans-Sasakiennes), et en utilisant la construction (métrique) de bi-tordu $\mathcal{D}$-homothetique ($\mathcal{D}$-homothetic bi-warping) (voir [11, 8]). Le premier résultat, nous le démontrons dans le Théorème (4.1.1), ce résultat nous permet de construire des variétés Kählériennes généralisées à partir d'une variété β-**Kenmotsu**. Dans la deuxième partie, nous construisons des structures de Kähler généralisées à partir des variétés presque Kählériennes de dimension paire, par l'utilisation deux fois le produit des variétés, avec les métriques : tordu (1.5) et bi-tordu $\mathcal{D}$-homothetique (1.8), successivement, passant par le Théorème (2.3.1) de Marco Gualtieri [28], on obtient deux familles de structures Kählériennes généralisées.

4.1 Structure Kählérienne généralisée à partir de structure trans-Sasakienne

Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété trans-Sasakienne de type (α, β) et $\mathbb{I}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, alors nous obtenons deux structures presque complexes et une métrique Riemannienne sur le produit $\widetilde{M}^{2n+2} = M \times \mathbb{I}$, qui sont défini par :

$$\tilde{g} = f^2 g + f^2(h^2 - 1)\eta \otimes \eta + dt^2, \tag{4.1}$$

$$\tilde{J}_{\pm} = \pm\varphi + fh\eta \otimes \partial t - \frac{1}{fh} dt \otimes \xi. \tag{4.2}$$

où f et h sont deux fonctions sur $\mathbb{R}$ avec $fh \neq 0$, et $\tilde{g}$ une métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique (voir (1.9)). Les champs de vecteurs sur $\mathbb{I} \times M^{2n+1}$ sont donnés par $(a\partial_t, X)$ oú X est un champs de vecteurs sur M^{2n+1}, t la coordonnée de $\mathbb{I}$ (avec $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$). Donc, nous obtenons la Proposition suivante :

Proposition 4.1.1.
Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété trans-Sasakienne de type (α, β) et $\mathbb{I}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, alors nous obtenons une structure bi-hermitienne $(\tilde{g}, \tilde{J}_{\pm})$ sur la variété produit $\widetilde{M}^{2n+2} = M \times \mathbb{I}$, défini par :

$$\tilde{g} = f^2 g + f^2(h^2 - 1)\eta \otimes \eta + dt^2, \tag{4.3}$$

$$\tilde{J}_{\pm} = \pm\varphi + fh\eta \otimes \partial t - \frac{1}{fh} dt \otimes \xi. \tag{4.4}$$

où f et h sont deux fonctions sur $\mathbb{R}$ avec $fh \neq 0$

Preuve . La structure $(\tilde{g}, \tilde{J}_+)$ est hermitienne si elle vérifier les conditions suivantes (utilisant (1.1)) :

$$\tilde{J}_+^2 \tilde{X} = -\tilde{X} \qquad et \qquad \tilde{g}(\tilde{J}_+\tilde{X}, \tilde{J}_+\tilde{Y}) = \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}),$$

avec $\tilde{X} = (a\partial t, X)$ et $\tilde{Y} = (a\partial t, Y)$ deux champs de vecteurs sur $\mathbb{I} \times M$
et $\tilde{J}_+$ s'écrie sur l'espace tangent de $M^{2n+1} \times \mathbb{I}$ par :

$$\tilde{J}_+(a\frac{\partial}{\partial t}, X) = \Big(fh\eta(X)\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ \varphi X - \frac{a}{fh}\xi\Big), \tag{4.5}$$

Après les calcules, ces deux conditions sont satisfait, donc on peut avoir que les deux structures $(\tilde{g}, \tilde{J}_+)$ et $(\tilde{g}, \tilde{J}_-)$ sont hermitiennes. ∎

Maintenant, notre objectif principal dans cette construction est de trouver une paire (f, h) des fonctions définies sur certains intervalle fixe $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ pour laquelle, il existe une 2-forme $\tilde{b}$ tel que $(\tilde{g}, \tilde{b}, \tilde{J}_+, \tilde{J}_-)$ définit une **structure Kählérienne généralisée** suivant le Théorème (2.3.1) de Marco Gualtieri, avec l'utilisation du produit sur les variétés une fois.
Nous devons écrire les 2-formes fondamentales $\tilde{\omega}_{\pm}$ de structure bi-hermitienne $(\tilde{g}, \tilde{J}_{\pm})$, par

définition suivante :

$$\tilde{\omega}_{\pm}\Big(\big(X, a\frac{\partial}{\partial t}\big), \big(Y, b\frac{\partial}{\partial t}\big)\Big) = \tilde{g}\Big(\big(X, a\frac{\partial}{\partial t}\big), \tilde{J}_{\pm}\big(Y, b\frac{\partial}{\partial t}\big)\Big),$$

pour tous $\big(X, a\frac{\partial}{\partial t}\big), \big(Y, b\frac{\partial}{\partial t}\big)$ champs de vecteurs sur $\widetilde{M}^{2n+2} = M \times \mathbb{I}$.

D'où,

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_{\pm}((X, a\partial_t), (Y, b\partial_t)) &= \tilde{g}((X, a\partial_t), \tilde{J}_{\pm}(Y, b\partial_t)) \\
&= \tilde{g}((X, a\partial_t), (\pm\varphi Y - \frac{b}{fh}\xi, fh\eta(Y)\partial_t)) \\
&= f^2 g(X, \pm\varphi Y - \frac{b}{fh}\xi) + f^2(h^2-1)\eta(X)\eta(\pm\varphi Y - \frac{b}{fh}\xi) + dt(a\partial_t)dt(fh\eta(Y)\partial_t)) \\
&= f^2 g(X, \pm\varphi Y) + f^2 g(X, -\frac{b}{fh}\xi) + f^2(h^2-1)\eta(X)\eta(-\frac{b}{fh}\xi) + afh\eta(Y) \\
&= \pm f^2\omega(X, Y) - f\frac{b}{h}g(X, \xi) + f^2(h^2-1)\eta(X)(-\frac{b}{fh})\eta(\xi) + afh\eta(Y) \\
&= \pm f^2\omega(X, Y) - f\frac{b}{h}\eta(X) - \frac{fb}{h}(h^2-1)\eta(X) + afh\eta(Y) \\
&= \pm f^2\omega(X, Y) - fhb\eta(X) + afh\eta(Y) \\
&= \pm f^2\omega(X, Y) + fh(a\eta(Y) - b\eta(X)) \\
&= \pm f^2\omega(X, Y) + fh(2dt \wedge \eta)((X, a\partial_t), (Y, b\partial_t)) \\
&= \pm f^2\omega(X, Y) + 2fh\ (dt \wedge \eta)((X, a\partial_t), (Y, b\partial_t))
\end{aligned}$$

Donc, on obtient les 2-forme fondamentales $\tilde{\omega}_{\pm}$ de $(\tilde{g}, \tilde{J}_{\pm})$ en fonction de la 2-forme fondamentale ω de (φ, ξ, η, g) :

$$\tilde{\omega}_{\pm} = \pm f^2\omega + 2fh\ dt \wedge \eta. \tag{4.6}$$

d'où,

$$d\tilde{\omega}_{\pm} = \pm 2ff'dt \wedge \omega \pm f^2 d\omega - 2fh\ dt \wedge d\eta. \tag{4.7}$$

En utilisant la définition (1.4.1) de structure trans-Sasakienne de type (α, β), précisément les conditions (1.4) (c'est-a-dire pour, $d\eta = \alpha\omega$ et $d\omega = 2\beta(\omega \wedge \eta)$ où α et β sont des fonctions différentiables sur M), nous obtenons :

$$d\tilde{\omega}_{\pm} = \pm 2ff'dt \wedge \omega \pm 2\beta f^2\omega \wedge \eta - 2\alpha fh\ dt \wedge \omega \tag{4.8}$$

donc, pour $\tilde{J}_{\pm} = (\pm\varphi - \frac{1}{fh} dt \otimes \xi \;, fh\, \eta \otimes \partial t)$, on a :

$$\begin{aligned}
d\tilde{\omega}_{\pm}(\tilde{J}_{\pm}., \tilde{J}_{\pm}., \tilde{J}_{\pm}.) &= \pm 2ff' dt(\tilde{J}_{\pm}) \wedge \omega(\tilde{J}_{\pm}, \tilde{J}_{\pm}) \pm 2\beta f^2 \omega(\tilde{J}_{\pm}, \tilde{J}_{\pm}) \wedge \eta(\tilde{J}_{\pm}) - 2\alpha fh\, dt(\tilde{J}_{\pm}) \wedge \omega(\tilde{J}_{\pm}, \tilde{J}_{\pm}) \\
&= \pm 2ff'\big(fh\eta\big) \wedge \omega \pm 2\beta f^2 \omega \wedge \big(-\frac{1}{fh} dt\big) - 2\alpha fh\big(fh\eta\big) \wedge \omega \\
&= \pm 2f\Big(ff'h\,\eta - \frac{\beta}{h}\, dt\Big) \wedge \omega - 2\alpha f^2 h^2 \eta \wedge \omega.
\end{aligned}$$

car $\omega(\tilde{J}_{\pm}, \tilde{J}_{\pm}) = \omega$.

Nous remarquons que pour $\alpha = 0$, nous avons :

$$d\tilde{\omega}_{\pm}(\tilde{J}_{\pm}., \tilde{J}_{\pm}., \tilde{J}_{\pm}.) = \pm 2f\Big(ff'h\eta - \frac{\beta}{h}\, dt\Big) \wedge \omega,$$

supposons que :

$$d\tilde{\omega}_{\pm}(\tilde{J}_{\pm}., \tilde{J}_{\pm}., \tilde{J}_{\pm}.) = \pm d\tilde{b}(.,.,.) \tag{4.9}$$

où $\tilde{b}$ est une 2-forme sur $M \times \mathbb{I}$.
c'est-a-dire, on a :

$$d\tilde{b} = 2f\Big(ff'h\eta - \frac{\beta}{h}\, dt\Big) \wedge \omega \tag{4.10}$$

l'équation (4.10) ça donne :

$$\tilde{b} = \frac{1}{\beta} f^2 f' h\, \omega$$

de telle sorte que le système suivant doit être satisfait :

$$\begin{cases} \Big(f^2 f' h\Big)' = -2\beta^2 \frac{f}{h} \\ d\beta = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Maintenant, supposons que β est une constante non nulle, alors la dernière condition est triviale.
Si en plus, nous fixons la fonction bornée f telle que $f^2 f' \neq 0$ alors il existe deux fonctions h satisfaisant le système (4.11), plus précisément, on obtient :

$$h(t) = \pm \frac{\sqrt{c - \beta^2 f^4}}{f^2 f'}, \tag{4.12}$$

où c est une constante suffisamment grande de telle sorte que $c - \beta^2 f^4 \geq 0$ sur l'intervalle I.

Ainsi, après avoir utilisé l'expression (4.12), la 2-forme $\tilde{b}$ devient :

$$\tilde{b} = \pm \frac{1}{\beta} \sqrt{c - \beta^2 f^4} \; \omega. \tag{4.13}$$

Donc, nous pouvons obtenir la Proposition suivante :

Proposition 4.1.2.
Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété β-Kenmotsu où β est constante.
Nous considérons la structure bi-hermitienne $(\tilde{g}, \tilde{J}_+, \tilde{J}_-)$ sur $\widetilde{M} = M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ donnée dans (4.1) et (4.2), alors il existe une famille des 2-formes $\tilde{b}$ qui sont vérifié la condition (4.9), définies par :

$$\tilde{b} = \pm \frac{1}{\beta} \sqrt{c - \beta^2 f^4} \; \omega.$$

*avec $h(t) = \pm \frac{\sqrt{c - \beta^2 f^4}}{f^2 f'}$, où **c** est une constante.*

Puis, utilisons le Théorème (2.3.1) de Marco Gualtieri, nous obtenons le premier théorème principal suivant :

Théorème 4.1.1.
Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété β-Kenmotsu où β est constante. Pour toute structure bi-hermitienne $(\tilde{g}, \tilde{J}_\pm)$ et 2-forme $\tilde{b}$ données dans (4.1), (4.2) et (4.13).
*Alors $(\tilde{g}, \tilde{b}, \tilde{J}_+, \tilde{J}_-)$ définit une famille de **structures Kählérienne généralisées** sur $M \times \mathbb{R}$, où **c** est une constante et f et h sont deux fonctions sur $\mathbb{R}$ avec $fh \neq 0$ et $ff' \neq 0$.*

Remarques 4.1.1.

1. *Dans la Proposition (4.1.1) nous pouvons aussi choisir la fonction h négative qui défini dans l'équation (4.12) alors le signe du 2-forme $\tilde{b}$ change.*
2. *Pour les conditions complémentaire de structure trans-Sasakienne, on a utilisé dans cette thèse que $d\eta = \alpha\omega \quad$ et $\quad d\omega = 2\beta(\omega \wedge \eta)$, mais dans notre Article [12] on a utilisé $d\eta = \alpha\omega \quad$ et $\quad d\omega = \beta(\omega \wedge \eta)$.*

Rappelons la Proposition suivante de Gomez et Talvacchia ([31], 2015) :

Proposition 4.1.3. *[31]*
Soient $(M, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, G_M)$ est une variété Kählérienne généralisée, et $(N, \Phi_1, E^N_\pm, G_N)$ est une variété coKähler généralisée.
Alors $M \times N$ admet une structure coKähler généralisée.

Donc, cette Proposition, nous permet de présenter le corollaire suivant :

Corollaire 4.1.1.
Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété β-Kenmotsu où β est une constante, alors il existe une famille à deux-paramètres de structures coKähler généralisées sur $M \times \mathbb{R}^2$

Preuve .
Appliquer le Théorème (4.1.1), nous obtenons une structure de Kähler généralisée $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ sur $\widetilde{M} = M \times \mathbb{R}$, et nous identifions $G = -\mathcal{J}_1 \circ \mathcal{J}_2$ avec sa paire correspondante (g, b), où g est une métrique de Riemann et b une 2-forme, on utilisons la structure presque de contact standard classique $(\varphi_{\mathbb{R}} = 0, \partial t, dt)$ sur $\mathbb{R}$ (i.e. est une structure coKähler sur $\mathbb{R}$), et d'après la Proposition (3.4.1) ça devient une structure coKähler généralisée sur $\mathbb{R}$, donc par l'application du Proposition (4.1.3), on obtient une structure coKähler généralisée sur $\overline{M} = \widetilde{M} \times \mathbb{R}$, avec $\overline{\Phi} = \mathcal{J}_1$ et $\overline{G} \equiv (g + dt^2, b)$, $E_+ = (0, dt)$ et $E_- = (\frac{\partial}{\partial t}, 0)$. ■

Rappelons la Proposition suivante de Juan Carlos Marrero [48], où il a donné une classification de structure trans-Sasakienne sur une variété de dimension ≥ 5 :

Proposition 4.1.4. *[48]*
Une variété trans-Sasakienne de dimension ≥ 5 *est soit une variété* α*-Sasakienne,* β*-Kenmotsu ou cosymplectique.*

D'après les Propositions (1) et (2) de *Zbigniew Olszak* dans ([53], 1986), il a conclu que, pour toute variété métrique presque contact normale de 3-dimensionnelle $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, on obtient :

$$(\nabla_X \varphi)Y = \frac{1}{2} tr_g(\varphi \nabla \xi)\Big(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\Big) + \frac{1}{2} div\xi \Big(g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\Big),$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita sur M.
C'est à dire (suivant le Théorème 1.4.1) :
toute variété métrique presque contact normale $(M^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une **variété trans-Sasakienne** de type (α, β), où α et β sont les fonctions donnés par :

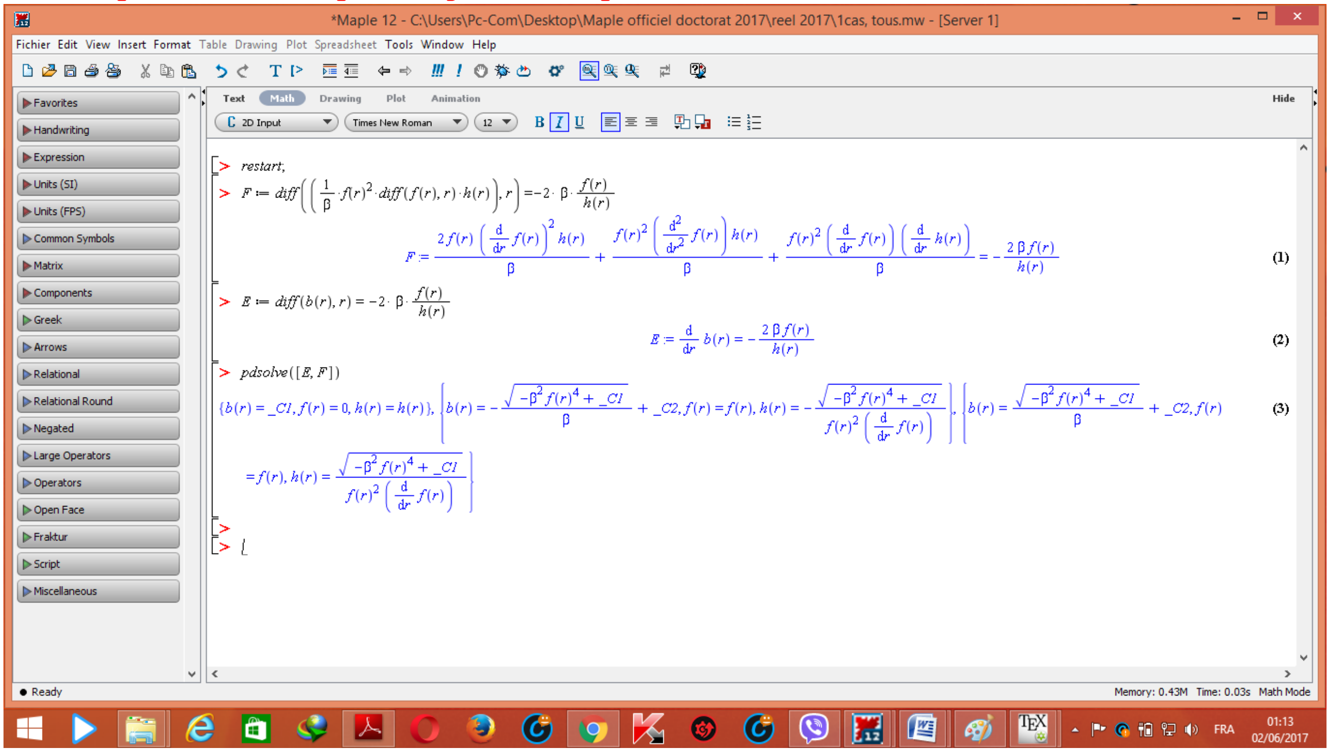
$$\alpha = \frac{1}{2} tr_g(\varphi \nabla \xi) \quad et \quad \beta = \frac{1}{2} div\xi = \frac{1}{2} tr_g(\nabla \xi)$$

pour plus détail voir [6], [35], [53].
En utilisant le Théorème (4.1.1,) nous obtenons la Proposition suivante :

Proposition 4.1.5.
Toute variété métrique presque contact normale $(M^3, \varphi, \xi, \eta, g)$*, telle que,* $tr_g(\varphi \nabla \xi) = 0$ *et* $div\xi$ *est une constante, donne une* ***famille des structures Kählerienne généralisées*** *de multi-paramètres sur* $M^3 \times \mathbb{R}$*,*
où ∇ *est la connexion de Levi-Civita sur* M^3*.*

Structure Kahlerienne généralisée a partir de structure Trans-Sasakienne :

> Quelques Calculs par logiciel Maple :



4.2 Structure Kählerienne généralisée à partir de structure Kählerienne

Soit $(M'^{2n}, J', g', \omega')$ une variété **presque Kählerienne**.
Nous définissons une **structure métrique presque de contact** (φ, η, ξ, g) sur $M = M' \times \mathbb{R}_r$, donnée par :

$$\varphi = J', \quad \eta = dr, \quad \xi = \frac{\partial}{\partial r}, \quad g = f^2 g' + dr^2, \tag{4.14}$$

où $f = f(r)$ est une fonction sur $\mathbb{R}_r$.

Ensuite, nous définissons deux **structures presque complexes** $(\tilde{J}_+, \tilde{J}_-)$ et une métrique Riemannienne $\tilde{g}$ sur $\widetilde{M}^{2n+2} = M \times \mathbb{R}_t = M' \times \mathbb{R}_r \times \mathbb{R}_t$, comme suit :

$$\tilde{J}_\pm = \pm\varphi + hk\, dr \otimes \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{hk} dt \otimes \frac{\partial}{\partial r}, \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= h^2 g + h^2(k^2 - 1)\eta \otimes \eta + dt^2 \\ &= f^2 h^2 g' + h^2 dr^2 + h^2 k^2 dr^2 - h^2 dr^2 + dt^2 \\ &= f^2 h^2 g' + h^2 k^2 dr^2 + dt^2 \end{aligned}$$

C'est-à-dire,

$$\tilde{g} = f^2 h^2 g' + h^2 k^2 dr^2 + dt^2 \tag{4.16}$$

où $h = h(t)$ et $k = k(t)$ sont deux fonctions sur $\mathbb{R}_t$, avec $hk \neq 0$, et $\tilde{g}$ une métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique sur $\widetilde{M}^{2n+2}$ (voir (1.9)).
Alors $(\tilde{g}, \tilde{J}_\pm)$ est une **structure bi-hermitienne** sur $\widetilde{M}^{2n+2}$.
Donc, nous obtenons la Proposition suivante :

Proposition 4.2.1.
Soit $(M'^{2n}, J', g', \omega')$ une variété presque Kählerienne, alors nous obtenons une structure bi-hermitienne $(\tilde{g}, \tilde{J}_\pm)$ sur la variété produit $\widetilde{M}^{2n+2} = M'^{2n} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, défini par :

$$\tilde{g} = f^2 h^2 g' + h^2 k^2 dr^2 + dt^2, \tag{4.17}$$

$$\tilde{J}_\pm = \pm\varphi + hk\, dr \otimes \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{hk} dt \otimes \frac{\partial}{\partial r}, \tag{4.18}$$

où k , h et f sont des fonctions sur $\mathbb{R}$ avec $hk \neq 0$

Notre objectif dans cette construction est de trouver (f, h, k) des fonctions définies sur $\mathbb{R}$

pour laquelle, il existe une 2-forme $\tilde{b}$ tel que $(\tilde{g}, \tilde{b}, \tilde{J}_+, \tilde{J}_-)$ définit une **structure Kählérienne généralisée** suivant le Théorème (2.3.1) de Marco Gualtieri par l'utilisation **deux fois** le produit sur les variétés.

Donc, nous devons écrire les 2-formes fondamentales $\tilde{\omega}_\pm$ de structure bi-hermitienne $(\tilde{g}, \tilde{J}_\pm)$, par définition suivante :

$$\tilde{\omega}_\pm\Big((X, a\frac{\partial}{\partial r}, b\frac{\partial}{\partial t}), (Y, a'\frac{\partial}{\partial r}, b'\frac{\partial}{\partial t})\Big) = \tilde{g}\Big((X, a\frac{\partial}{\partial r}, b\frac{\partial}{\partial t}), \tilde{J}_\pm(Y, a'\frac{\partial}{\partial r}, b'\frac{\partial}{\partial t})\Big),$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_\pm\Big((X, \alpha\partial r, \beta\partial t), (Y, a\partial r, b\partial t)\Big) &= \tilde{g}\Big((X, \alpha\partial r, \beta\partial t), \tilde{J}_\pm(Y, a\partial r, b\partial t)\Big) \\
&= \tilde{g}\Big((X, \alpha\partial r, \beta\partial t), (\pm J^{'}Y, -\frac{b}{hk}\partial r, ahk\partial t)\Big) \\
&= h^2 g\Big((X, \alpha\partial r), (\pm J^{'}Y, -\frac{b}{hk}\partial r)\Big) \\
&+ h^2(k^2-1)\eta(X, \alpha\partial r)\eta(J^{'}Y, -\frac{b}{hk}\partial r) + dt(\beta\partial t)dt(ahk\partial t) \\
&= h^2[f^2 g^{'}(X, \pm JY) + dr(\alpha\partial r)dt(-\frac{b}{hk}\partial r)] \\
&+ h^2(k^2-1)(\alpha)(-\frac{b}{hk}) + (\beta)(ahk) \\
&= \pm h^2 f^2 \omega^{'}(X, Y) - \frac{h\alpha b}{k} - \alpha bhk + \frac{h\alpha b}{k} + \beta ahk \\
&= \pm h^2 f^2 \omega^{'}(X, Y) + hk(a\beta - \alpha b) \\
&= \pm h^2 f^2 \omega^{'}\Big(X, Y\Big) + 2hk\ dt \wedge dr\Big((\alpha\partial r, \beta\partial t), (a\partial r, b\partial t)\Big) \\
&= \Big(\pm f^2 h^2 \omega' - 2hk\ dr \wedge dt\Big)\Big((X, \alpha\partial r, \beta\partial t), (Y, a\partial r, b\partial t)\Big)
\end{aligned}$$

Donc, on obtient :

$$\tilde{\omega}_\pm = \pm f^2 h^2 \omega' - 2hk\ dr \wedge dt.$$

Ainsi, nous trouvons :

$$d\tilde{\omega}_\pm = \pm 2f^2 hh' dt \wedge \omega' \pm 2ff'h^2 dr \wedge \omega'.$$

Et pour $\tilde{J}_\pm = \Big(\pm \varphi; -\frac{1}{hk}\frac{\partial}{dt} \otimes \frac{\partial}{\partial r}; hk\frac{\partial}{dr} \otimes \frac{\partial}{\partial t}\Big)$, on obtient :

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}_\pm(\tilde{J}_\pm., \tilde{J}_\pm., \tilde{J}_\pm.) &= \pm 2f^2hh'\, dt(\tilde{J}_{\pm.}) \wedge \omega'(\tilde{J}_\pm., \tilde{J}_\pm.) \pm 2ff'h^2\, dr(\tilde{J}_\pm.) \wedge \omega'(\tilde{J}_\pm., \tilde{J}_\pm.) \\ &= \pm 2f^2hh'(hkdr) \wedge \omega' \pm 2ff'h^2(\frac{-1}{hk}dt) \wedge \omega' \\ &= \Big(\pm 2f^2h^2h'k\, dr \mp 2ff'\frac{h}{k}\, dt\Big) \wedge \omega' \end{aligned}$$

Donc,

$$d\tilde{\omega}_\pm(\tilde{J}_\pm., \tilde{J}_\pm., \tilde{J}_\pm.) = \pm\Big(2f^2h^2h'k\, dr - 2ff'\frac{h}{k}\, dt\Big) \wedge \omega' \tag{4.19}$$

Posons que :

$$d\tilde{\omega}_\pm(\tilde{J}_\pm., \tilde{J}_\pm., \tilde{J}_\pm.) = \pm d\, \tilde{b}(., ., .) \tag{4.20}$$

où $\tilde{b}$ est une 2-forme sur $\widetilde{M}^{2n+2}$.
c'est-a-dire, on a :

$$d\tilde{b} = (2f^2h^2h'k\, dr - 2ff'\frac{h}{k}\, dt) \wedge \omega' \tag{4.21}$$

maintenant, on va voir, l'existence de $\tilde{b}$.

Directement, nous voyons que $d\tilde{b}$ est exacte si et seulement si :

$$(*) : \left\{ \begin{array}{l} d(ff') = 2f^2, \\ d(h^2h'k) = -2\frac{h}{k}, \end{array} \right. \qquad ou \qquad (**) : \left\{ \begin{array}{l} d(-ff') = 2f^2, \\ d(h^2h'k) = 2\frac{h}{k}. \end{array} \right. \tag{4.22}$$

Premièrement, d'après $(*)$ on obtient les deux équations différentielles ordinaires (EDO) suivantes :

$$f'^2 + ff'' - 2f^2 = 0, \tag{4.23}$$

$$2k^2h'^2 + hh''k^2 + k'kh'h + 2 = 0. \tag{4.24}$$

La solution $f(r)$ de la première EDO (4.23) est :

$$f(r) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a\mathrm{e}^{-2r} - b\mathrm{e}^{2r}},$$

où a et b sont deux constantes.
Pour la deuxième EDO, nous observons que pour toute fonction $k(t)$ qui vérifie :

$$k(t) = \pm\frac{\sqrt{c - h(t)^4}}{h'(t)h(t)^2},$$

est une solution de l'équation différentielle (4.24), où $c > 0$ (suffisamment grand).
Dans ces conditions, l'équation (4.21) donne :

$$d\tilde{b} = d\Big(\frac{1}{2}\sqrt{c-h^4}(ae^{-2r} + be^{2r})\omega'\Big).$$

C'est-à-dire :

$$d\omega_\pm(\tilde{J}_\pm., \tilde{J}_\pm., \tilde{J}_\pm.) = \pm d\Big(\frac{1}{2}\sqrt{c-h^4}(ae^{-2r} + be^{2r})\omega'\Big).$$

Donc, elle existe la 2-forme $\tilde{b}$ qui vérifie l'équation 4.20, définit par :

$$\tilde{b} = \frac{1}{2}\sqrt{c-h^4}(ae^{-2r} + be^{2r})\omega'$$

Deuxièmement, à partir de $(**)$, on obtient les deux équations différentielles ordinaires (EDO) suivantes :

$$f'^2 + ff'' + 2f^2 = 0, \tag{4.25}$$

$$2k^2h'^2 + hh''k^2 + k'kh'h - 2 = 0. \tag{4.26}$$

La solution $f(r)$ de la première EDO (4.25) est :

$$f(r) = \pm\sqrt{-a\sin(2r) + b\cos(2r)},$$

où a et b sont deux constantes.
Pour la deuxième EDO, nous observons que chaque fonction $k(t)$ qui vérifie :

$$k(t) = \pm\frac{1}{h'(t)}$$

est une solution de l'équation différentielle (4.26).
Dans ces conditions, l'équation (4.19) donne :

$$d\tilde{b} = d\Big(h^2\big(a\cos(2r) + b\sin(2r)\big)\omega'\Big).$$

C'est-à-dire :

$$d\omega_\pm(\tilde{J}_\pm., \tilde{J}_\pm., \tilde{J}_\pm.) = \pm d\Big(h^2\big(a\cos(2r) + b\sin(2r)\big)\omega'\Big).$$

Donc, elle existe autre 2-forme $\tilde{b}$ qui vérifie l'équation 4.20, donné par :

$$\tilde{b} = h^2\big(a\cos(2r) + b\sin(2r)\big)\omega'$$

Alors, d'après le Théorème (2.3.1) de Marco Gualtieri, on obtient deux structures Kählériennes généralisées :

$$\Big(\tilde{g}, \frac{1}{2}\sqrt{c-h^4}(a\mathrm{e}^{-2r}+b\mathrm{e}^{2r})\omega', \tilde{J}_+, \tilde{J}_-\Big) \tag{4.27}$$

et

$$\Big(\tilde{g}, (h^2\big(a\cos(2r)+b\sin(2r)\big)\omega', \tilde{J}_+, \tilde{J}_-\Big) \tag{4.28}$$

Finalement, on peut énoncer le Théorème suivant :

Théorème 4.2.1.
Soient $(M'^{2n}, J', g', \omega')$ une variété (presque) Kählerienne, et toute structure bi-hermitienne $(\tilde{g}, \tilde{J}_\pm)$ sur $M'^{2n}\times\mathbb{R}^2$ donnée dans (4.16) et (4.15).
Alors il existe deux familles de ***structures Kähleriennes généralisées*** *de multi-paramètres :*

$$\Big(\tilde{g}, \frac{1}{2}\sqrt{c-h^4}(a\mathrm{e}^{-2r}+b\mathrm{e}^{2r})\omega', \tilde{J}_+, \tilde{J}_-\Big) \tag{4.29}$$

et

$$\Big(\tilde{g}, (h^2\big(a\cos(2r)+b\sin(2r)\big)\omega', \tilde{J}_+, \tilde{J}_-\Big) \tag{4.30}$$

sur $M'^{2n}\times\mathbb{R}^2$, où a, b et c sont des constantes.

Remarque 4.2.1.
Particulièrement, la construction de structure Kählérienne généralisée qui fait par ***Kenichi Sekiya*** *dans ([58], 2012) est une cas particulière de notre construction car :*
Lorsque :

$$a=-1,\ b=0 \textit{ et } h=t$$

c'est-à-dire équivalent à :

$$h(t):=t,\ \ k(t):=1\ \ \textit{et}\ \ f(r):=\sqrt{sin(2r)}$$

Alors d'après le Théorème (4.2.1), on obtient deux ***structures Kählériennes généralisées****, définis comme suit :*

$$\Big(\tilde{g}, \frac{-1}{2}\sqrt{c-r^4}\mathrm{e}^{-2r}\omega', \tilde{J}_+, \tilde{J}_-\Big) \tag{4.31}$$

et

$$\Big(\tilde{g}, -t^2\cos(2r)\omega', \tilde{J}_+, \tilde{J}_-\Big) \tag{4.32}$$

où la deuxième structure (4.32) est une structure de Kenichi Sekiya.

> Structure Kahlerienne généralisée a partir de structure presque Kahlérienne :

> **Calculs Maple pour la deuxième construction (Système (*)) :**

> # ***Résolution du système (1), f= ?***

> *restart*;

> $E := (diff(f(r), r))^2 + diff(diff(f(r), r), r) \cdot f(r) - 2 \cdot f(r)^2 = 0$

$$E := \left(\frac{d}{dr} f(r)\right)^2 + \left(\frac{d^2}{dr^2} f(r)\right) f(r) - 2 f(r)^2 = 0$$

> $dsolve(E, f(r))$

$$f(r) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{-2 e^{2r} \left(e^{4r} \_C1 - \_C2\right)}}{e^{2r}}, f(r) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-2 e^{2r} \left(e^{4r} \_C1 - \_C2\right)}}{e^{2r}}$$

>

> # ***Résolution du système (1), k= ?***

> *restart*;

> $F := 2 \cdot k(t)^2 \cdot (diff(h(t), t))^2 + diff(diff(h(t), t), t) \cdot h(t) \cdot k(t)^2 + diff(k(t), t) \cdot k(t) \cdot diff(h(t), t) \cdot h(t) + 2 = 0$

$$F := 2 k(t)^2 \left(\frac{d}{dt} h(t)\right)^2 + \left(\frac{d^2}{dt^2} h(t)\right) h(t) k(t)^2 + \left(\frac{d}{dt} k(t)\right) k(t) \left(\frac{d}{dt} h(t)\right) h(t) + 2 = 0$$

> $dsolve(F, k(t))$

$$k(t) = \frac{\sqrt{-h(t)^4 + \_C1}}{h(t)^2 \left(\frac{d}{dt} h(t)\right)}, k(t) = -\frac{\sqrt{-h(t)^4 + \_C1}}{h(t)^2 \left(\frac{d}{dt} h(t)\right)}$$

> # ***Résolution du système (1), β = ?***

> *restart*; $f(r) := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{a \cdot e^{-2 \cdot r} - b \cdot e^{2 \cdot r}}$; $k(t) := -\frac{\sqrt{c - h(t)^4}}{h(t)^2 \left(\frac{d}{dt} h(t)\right)}$

$$k := t \rightarrow -\frac{\sqrt{c - h(t)^4}}{h(t)^2 \left(\frac{d}{dt} h(t)\right)} \qquad f := r \rightarrow \frac{\sqrt{a\, e^{-2r} - b\, e^{2r}}}{\sqrt{2}}$$

> $G := diff(\beta(t, r), r) = 2 \cdot h(t)^2 \cdot diff(h(t), t) \cdot f(r)^2 \cdot k(t)$

$$G := \frac{\partial}{\partial r} \beta(t, r) = -\left(a\, e^{-2r} - b\, e^{2r}\right) \sqrt{c - h(t)^4}$$

> $H := diff(\beta(t, r), t) = -\frac{2 \cdot h(t) \cdot f(r) \cdot diff(f(r), r) \cdot 1}{k(t)}$

$$H := \frac{\partial}{\partial t} \beta(t, r) = \frac{1}{2} \frac{h(t)^3 \left(-2 a\, e^{-2r} - 2 b\, e^{2r}\right) \left(\frac{d}{dt} h(t)\right)}{\sqrt{c - h(t)^4}}$$

> $pdsolve([G, H], \beta(t, r))$

$$\left\{\beta(t, r) = \frac{1}{2} \left(a\, e^{-2r} + b\, e^{2r}\right) \sqrt{c - h(t)^4} + \_C1\right\}$$

> Structure Kahlerienne généralisée a partir de structure presque Kahlérienne:

> **Calculs Maple pour la deuxième construction (Système (**)) :**

> #` `***Résolution du système* (2), *f* = ?**

> *restart*;

> $E := (diff(f(r), r))^2 + diff(diff(f(r), r), r) \cdot f(r) + 2 \cdot f(r)^2 = 0$

$$E := \left(\frac{d}{dr} f(r)\right)^2 + \left(\frac{d^2}{dr^2} f(r)\right) f(r) + 2 f(r)^2 = 0$$

> $dsolve(E, f(r))$

$$f(r) = \sqrt{-\_C1 \sin(2r) + \_C2 \cos(2r)}, f(r) = -\sqrt{-\_C1 \sin(2r) + \_C2 \cos(2r)}$$

> #` `***Résolution du système* (2), *k* = ?**

> *restart*;

> $F := 2 \cdot k(t)^2 \cdot (diff(h(t), t))^2 + diff(diff(h(t), t), t) \cdot h(t) \cdot k(t)^2 + diff(k(t), t) \cdot k(t) \cdot diff(h(t), t) \cdot h(t) - 2 = 0$

$$F := 2\, k(t)^2 \left(\frac{d}{dt} h(t)\right)^2 + \left(\frac{d^2}{dt^2} h(t)\right) h(t)\, k(t)^2 + \left(\frac{d}{dt} k(t)\right) k(t) \left(\frac{d}{dt} h(t)\right) h(t) - 2 = 0$$

> $dsolve(F, k(t))$

$$k(t) = \frac{\sqrt{h(t)^4 + \_C1}}{h(t)^2 \left(\frac{d}{dt} h(t)\right)}, k(t) = -\frac{\sqrt{h(t)^4 + \_C1}}{h(t)^2 \left(\frac{d}{dt} h(t)\right)}$$

> #` `***Résolution du système* (2), β = ?**

> *restart*; $f(r) := \sqrt{-a \cdot \sin(2 \cdot r) + b \cdot \cos(2 \cdot r)}$; $k(t) := \dfrac{1}{\left(\frac{d}{dt} h(t)\right)}$

$$f := r \to \sqrt{-a \sin(2r) + b \cos(2r)}$$

$$k := t \to \frac{1}{\frac{d}{dt} h(t)}$$

> $G := diff\big(\beta(t, r), r\big) = 2 \cdot h(t)^2 \cdot diff(h(t), t) \cdot f(r)^2 \cdot k(t)$

$$G := \frac{\partial}{\partial r} \beta(t, r) = 2\, h(t)^2 \left(-a \sin(2r) + b \cos(2r)\right)$$

> $H := diff\big(\beta(t, r), t\big) = -\dfrac{2 \cdot h(t) \cdot f(r) \cdot diff(f(r), r) \cdot 1}{k(t)}$

$$H := \frac{\partial}{\partial t} \beta(t, r) = -h(t) \left(-2 a \cos(2r) - 2 b \sin(2r)\right) \left(\frac{d}{dt} h(t)\right)$$

> $pdsolve\big([G, H], \beta(t, r)\big)$

$$\left\{\beta(t, r) = h(t)^2 a \cos(2r) + h(t)^2 b \sin(2r) + \_C1\right\}$$

> ....

C'est-à-dire : $(g, h^2(a \cos(2r) + b \sin(2r))w', J_+, J_-)$ est une structure Kählérienne généralisée.

> # Structure Kahlerienne généralisée a partir de structure Kahlérienne:

># Calculs Maple pour la deuxième construction où on peut voir le cas de Kenichi Sekiya (le cas particulier de notre travail) :

>

> $restart; h(t) := t; f(r) := \sqrt{\sin(2\cdot r)}; k(t) := 1$

$$h := t \rightarrow t$$

$$f := r \rightarrow \sqrt{\sin(2\,r)}$$

$$k := t \rightarrow 1$$

> $G := diff\left(\beta(t,r), r\right) = 2\cdot\ h(t)^2 \cdot diff\left(h(t), t\right)\cdot f(r)^2 \cdot k(t)$

$$G := \frac{\partial}{\partial r}\ \beta(t,r) = 2\,t^2 \sin(2\,r)$$

> $H := diff\left(\beta(t,r), t\right) = -\frac{2\cdot\ h(t)\cdot f(r)\cdot diff\left(f(r), r\right)\cdot 1}{k(t)}$

$$H := \frac{\partial}{\partial t}\ \beta(t,r) = -2\,t\cos(2\,r)$$

> $pdsolve([G, H])$

$$\left\{\beta(t,r) = -t^2\cos(2\,r) + \_C1\right\}$$

>

....

C'est-à-dire :

$(g, -t^2\ \cos(2r)w', J_+, J_-)$ **est une Structure Kählérienne généralisée.**

4.3 Transformation de variété presque contact généralisée

Soit $(M^{2n+1}, G, \Phi, E_\pm)$ une variété métrique presque de contact généralisée.
On peut identifier une métrique Riemannienne généralisée G avec la paire (g, b) d'une métrique Riemannienne classique g et 2-forme b sur M.
On écrit :

$$E_\pm = (\xi_\pm, \eta_\pm) \qquad et \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi & \pi^\sharp \\ \omega^\flat & -\varphi^* \end{pmatrix},$$

pour plus détails voir la Définition (3.1.1).
Supposons que $b \neq 0$, on peut transformer la structure métrique presque contact généralisée $(G, \Phi, E_\pm)$ à une structure de même nature $(\mathrm{e}^b G \mathrm{e}^{-b}, \mathrm{e}^b \Phi \mathrm{e}^{-b}, \mathrm{e}^b E_\pm)$ sur M, (voir Lemme (3.3.2)).
Et aussi à une structure $(G, G\Phi = \Phi G, GE_\pm = E_\mp)$ qu'est également une structures métrique presque de contact généralisée sur M (voir la Proposition 3.3.1).

Maintenant, nous donnerons une nouvelle définition de transformation sur les structures métriques presque contact généralisée, alors selon les notations ci-dessus, une transformation de structure métrique presque contact généralisée $(G, \Phi, E_\pm)$ sur M est donnée par :

$$\overline{G} \equiv (f^2 g, f^2 b), \quad \overline{E_\pm} = (\frac{1}{f}\xi_\pm,\ f\eta_\pm) \quad \text{et} \quad \overline{\Phi} = \begin{pmatrix} \varphi & \frac{1}{f^2}\pi^\sharp \\ f^2\omega^\flat & -\varphi^* \end{pmatrix}, \tag{4.33}$$

où f est une constante non nulle.

Remarque 4.3.1.
Soient $\mathcal{D}_1 = \Gamma(TM)$ et $\mathcal{D}_2 = \Gamma(T^*M)$.
D'où, nous remarquons que la transformation au-dessus (4.33) est $\mathcal{D}_1$-homothétique et $\mathcal{D}_2$-homothétique, parce que :

$$\overline{G}(A, A) :=< \overline{G}A, A >= \frac{1}{2}\big(\frac{1}{f^2}|\alpha|^2 - f^2|bX|^2 + f^2|X|^2\big),$$

où $A = X + \alpha \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$, et $|\ \ |$ signifie la norme sur M.
Si $A \in \mathcal{D}_1$, i.e. $\alpha = 0$, nous avons :

$$\overline{G}(A, A) = f^2 G(A, A),$$

et si $A \in \mathcal{D}_2$, i.e. $X = 0$, nous avons :

$$\overline{G}(A, A) = \frac{1}{f^2} G(A, A),$$

où,

$$G(A,A) :=< GA, A >= \frac{1}{2}\big(|\alpha|^2 - |bX|^2 + |X|^2\big).$$

Donc, nous pouvons appeler cette transformation par ***déformation $\mathcal{D}$-homothétique*** *avec $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2\}$.*

Finalement, on peut annoncer la Proposition suivante :

Proposition 4.3.1.
Soit $(G, \Phi, E_\pm)$ une structure métrique presque de contact généralisée sur M^{2n+1}, défini par :

$$G \equiv (g, b), \quad E_\pm = (\xi_\pm, \eta_\pm) \qquad et \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi & \pi^\sharp \\ \omega^\flat & -\varphi^* \end{pmatrix}. \tag{4.34}$$

Alors $(\overline{G}, \overline{\Phi}, \overline{E_\pm})$ est aussi une structure métrique presque contact généralisée sur M, telle que :

$$\overline{G} \equiv (f^2 g, f^2 b), \quad \overline{E_\pm} = (\frac{1}{f}\xi_\pm,\ f\eta_\pm) \quad \text{et} \quad \overline{\Phi} = \begin{pmatrix} \varphi & \frac{1}{f^2}\pi^\sharp \\ f^2\omega^\flat & -\varphi^* \end{pmatrix}, \tag{4.35}$$

où f est une constante non nulle.

Preuve .
Soit $(M, G, \Phi, E_\pm)$ une variété presque contact métrique généralisée, qui satisfait les conditions (3.5), (3.3) et (3.2).
Par des calculs simples, nous avons :

$$< E_\pm, E_\pm >= \eta_\pm(\xi_\pm) = 0, \tag{4.36}$$

$$< E_+, E_- >= \frac{1}{2}[\eta_+(\xi_-) + \eta_-(\xi_+)] = \frac{1}{2}, \tag{4.37}$$

$$\big(\Phi\circ\Phi = -I + E_+\otimes E_- + E_-\otimes E_+\big) \Rightarrow \begin{cases} \varphi^2 + \pi^\sharp(\omega^\flat) = -I + \eta_+\otimes\xi_- + \eta_-\otimes\xi_+, \\ \omega^\flat(\varphi) - \varphi^*(\omega^\flat) = \eta_+\otimes\eta_- + \eta_-\otimes\eta_+, \\ \varphi(\pi^\sharp) - \pi^\sharp(\varphi^*) = \xi_+\otimes\xi_- + \xi_-\otimes\xi_+ \\ \omega^\flat(\pi^\sharp) + (\varphi^*)^2 = -I + \xi_+\otimes\eta_- + \xi_+\otimes\eta_+ \end{cases} \tag{4.38}$$

Par définition de la structure de transformation dans (4.33), nous avons :

$$\begin{aligned} < \overline{\Phi}(X+\alpha), Y+\beta > &= \frac{1}{2}[(f^2\omega^\flat(X) - \varphi^*(\alpha))(Y) + \beta(\varphi(X) + \frac{1}{f^2}\pi^\sharp(\alpha))] \\ &= \frac{-1}{2}[(f^2\omega^\flat(Y)(X) - \varphi^*\beta(X) + \alpha(\varphi(Y) + \frac{1}{f^2}\alpha(\pi^\sharp(\beta))] \\ &= - < X+\alpha, \overline{\Phi}(Y+\beta) >, \end{aligned}$$

où $X+\alpha, Y+\beta \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$, alors $\overline{\Phi} + \overline{\Phi}^* = 0$.

D'après (4.36) et (4.37) on obtient :

$$< \overline{E_\pm}, \overline{E_\pm} >= 0, \quad \text{and} \quad < \overline{E_+}, \overline{E_-} >= \frac{1}{2},$$

de plus, nous avons :

$$\overline{\Phi} \circ \overline{\Phi} = \begin{pmatrix} \varphi^2 + \pi^\sharp(\omega^\flat) & \frac{1}{f^2}\varphi(\pi^\sharp) - \frac{1}{f^2}\pi^\sharp(\varphi^*) \\ f^2\omega^\flat(\varphi) - f^2\varphi^*(\omega^\flat) & \omega^\flat(\pi^\sharp) + (\varphi^*)^2 \end{pmatrix},$$

et

$$-I + \overline{E_+} \otimes \overline{E_-} + \overline{E_-} \otimes \overline{E_+} = \begin{pmatrix} -I + \eta_+ \otimes \xi_- + \eta_- \otimes \xi_+ & \frac{1}{f^2}[\xi_+ \otimes \xi_- + \xi_- \otimes \xi_+] \\ f^2[\eta_+ \otimes \eta_- + \eta_- \otimes \eta_+] & -I + \xi_+ \otimes \eta_- + \xi_+ \otimes \eta_+ \end{pmatrix}.$$

En utilisant (4.38), nous obtenons :

$$\overline{\Phi} \circ \overline{\Phi} = -I + \overline{E_+} \otimes \overline{E_-} + \overline{E_-} \otimes \overline{E_+}.$$

Donc $(\overline{\Phi}, \overline{E_\pm})$ est une structure presque contact généralisée sur M.
Comme $(M, G, \Phi, E_\pm)$ est une structure presque contact métrique généralisée, et d'après (3.4), nous avons :

$$-\Phi G \Phi = G - E_+ \otimes E_+ - E_- \otimes E_- \tag{4.39}$$

Après des calcules, on obtient :

$$\begin{cases} \varphi g^{-1} b\varphi - \varphi g^{-1}\omega^\flat - \pi^\sharp g\varphi + \pi^\sharp b g^{-1} b\varphi - \pi^\sharp b g^{-1}\omega^\flat \\ \qquad\qquad = -g^{-1}b - \eta_+ \otimes \xi_+ - \eta_- \otimes \xi_- \\ \omega^\flat g^{-1} b\varphi - \omega^\flat g^{-1}\omega^\flat + \varphi^* g\varphi - \varphi^* b g^{-1} b\varphi + \varphi^* b g^{-1}\omega^\flat \\ \qquad\qquad = g - bg^{-1}b - \eta_+ \otimes \eta_+ - \eta_- \otimes \eta_- \\ \varphi g^{-1} b\pi^\sharp + \varphi g^{-1}\varphi^* - \pi^\sharp g\pi^\sharp + \pi^\sharp b g^{-1} b\pi^\sharp + \pi^\sharp b g^{-1}\varphi^* \\ \qquad\qquad = g^{-1} - \xi_+ \otimes \xi_+ - \xi_- \otimes \xi_- \\ \omega^\flat g^{-1} b\pi^\sharp + \omega^\flat g^{-1}\varphi^* + \varphi^* g\pi^\sharp - \varphi^* b g^{-1} b\pi^\sharp - \varphi^* b g^{-1}\varphi^* \\ \qquad\qquad = bg^{-1} - \xi_+ \otimes \eta_+ - \xi_- \otimes \eta_- \end{cases} \tag{4.40}$$

Une métrique Riemannienne généralisée $\overline{G}$ de structure de transformation est donnée par :

$$\begin{aligned} \overline{G} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f^2 b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{f^2}g^{-1} \\ f^2 g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f^2 b & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -g^{-1}b & \frac{1}{f^2}g^{-1} \\ -f^2 b g^{-1} b + f^2 g & bg^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$-\overline{\Phi} \quad \overline{G} \quad \overline{\Phi} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{4.41}$$

où

$A = \varphi g^{-1} b\varphi - \varphi g^{-1}\omega^\flat + \pi^\sharp b g^{-1} b\varphi - \pi^\sharp g\varphi - \pi^\sharp b g^{-1}\omega^\flat$

$B = \frac{1}{f^2}[\varphi g^{-1} b\pi^\sharp + \varphi g^{-1}\varphi^* + \pi^\sharp b g^{-1} b\pi^\sharp - \pi^\sharp g\pi^\sharp + \pi^\sharp b g^{-1}\varphi^*]$

$C = f^2[\omega^\flat g^{-1} b\varphi - \omega^\flat g^{-1}\omega^\flat - \varphi^* b g^{-1} b\varphi + \varphi^* g\varphi + \varphi^* b g^{-1}\omega^\flat]$

$D = \omega^\flat g^{-1} b\pi^\sharp + \omega^\flat g^{-1}\varphi^* - \varphi^* b g^{-1} b\pi^\sharp + \varphi^* g\pi^\sharp - \varphi^* b g^{-1}\varphi^*$

D'un autre côté :

$\overline{G} - \overline{E_+} \otimes \overline{E_+} - \overline{E_-} \otimes \overline{E_-} =$

$$= \begin{pmatrix} -g^{-1}b - \eta_+ \otimes \xi_+ - \eta_- \otimes \xi_- & \frac{1}{f^2}[g^{-1} - \xi_+ \otimes \xi_+ - \xi_- \otimes \xi_-] \\ f^2[-bg^{-1}b + g - \eta_+ \otimes \eta_+ - \eta_- \otimes \eta_-] & bg^{-1} - \xi_+ \otimes \eta_+ - \xi_- \otimes \eta_- \end{pmatrix}.$$

En utilisant (4.40), nous obtenons :

$$-\overline{\Phi} \quad \overline{G} \quad \overline{\Phi} = \overline{G} - \overline{E_+} \otimes \overline{E_+} - \overline{E_-} \otimes \overline{E_-} \quad \text{and} \quad \overline{G}(\overline{E_\pm}) = \overline{E_\mp}.$$

Donc, $(M, \overline{G}, \overline{\Phi}, \overline{E_\pm})$ est une variété métrique presque contact généralisée. ■

4.3.1 Propriétés sur les métriques généralisées

Remarques 4.3.1.

1. ► *L'opération* $g :=< .,. >$ *n'est pas une métrique Riemannienne (i.e. n'est pas définie positif). Et on peut écrire cette pseudo métrique* g *sur cette forme :*

$$g := dx_i \odot \partial x_i$$

telle que : $\{\partial x_i\}$ *(resp.* $\{dx_i\}$*) une base locale (resp. base dual) sur* M*,*
et

$$dx_i \odot \partial x_i := \frac{1}{2}[dx_i \otimes \partial x_i + \partial x_i \otimes dx_i]$$

2. ► $g^{'} :=< G.,. >$ *est une métrique Riemannienne généralisée, tel que :*

$$G = \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \\ g & 0 \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

Et on peut écrire cette métrique Riemannienne généralisée $g^{'}$ *par une autre formule suivante, pour évité les calcules sur les matrices :*

$$g^{'} := \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}g^{-1}$$

où : g *une métrique Riemannienne classique et* g^{-1} *la métrique inverse de* g*.*

3. ► $< \mathbf{G}^{'}.,. >$ *est une métrique Riemannienne généralisée tel que (transformation de* G*) :*

$$\mathbf{G}^{'} = e^{b}Ge^{-b} \tag{4.43}$$

où b *est une 2-forme différentielle et* g *est une métrique Riemannienne classique sur* M*.*

Vérification :

(1) ► (I) Soient $X+\alpha, Y+\beta, Z+\eta \in \mathbb{T}M$

1. $< .,. >$ symétrique :

$$\begin{aligned} < X+\alpha, Y+\beta > &= \frac{1}{2}(\alpha(Y)+\beta(X)) \\ &= \frac{1}{2}(\beta(X)+\alpha(Y)) \\ &= < Y+\beta, X+\alpha > \end{aligned}$$

2. $< .,. >$ bilinéaire : soit $k \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} < k(X+\alpha)+(Y+\beta), Z+\eta > &= \frac{1}{2}((k\alpha+\beta)(Z)+\eta(kX+Y)) \\ &= \frac{1}{2}(k\alpha(Z)+\beta(Z)+\eta kX+\eta(Y)) \\ &= \frac{k}{2}(\alpha(Z)+\eta(X))+\frac{1}{2}(\beta(Z)+\eta(Y)) \\ &= k < X+\alpha, Z+\eta > + < Y+\beta, Z+\eta > \end{aligned}$$

3. $< .,. >$ n'est pas définie : $< X+\alpha, X+\alpha >= \alpha(X) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X+\alpha = 0 \\ X = 0, \alpha \neq 0 \\ \alpha = 0, X \neq 0. \end{cases}$
4. $< .,. >$ n'est pas positive :
   $< .,. >$ est positive ssi :$< X+\alpha, X+\alpha >> 0$
   Contre-exemple :

$$< 2\partial x - dx, 2\partial x - dx >= \frac{1}{2}(-dx(2\partial x) - dx(2\partial x)) = -2 < 0$$

5. $< .,. >$ non dégénérée : $\forall (Y+\beta) \in \mathbb{T}M < X+\alpha, Y+\beta >= \frac{1}{2}(\alpha(Y)+\beta(X)) = 0 \Rightarrow X+\alpha = 0$

Donc $< .,. >$ est une pseudo-métrique.

(II) Soient $A = X+\alpha,\ B = Y+\beta \in \mathbb{T}M$
localement, $X = X^i\partial x_i$, $Y = Y^i\partial x_i$, $\alpha = \alpha^i dx_i$, $\beta = \beta^i dx_i$

$$g(A,B) = \big(dx_i \odot \partial x_i\big)(X+\alpha, Y+\beta) = \frac{1}{2}\big[\beta(X)+\alpha(Y)\big] =< X+\alpha, Y+\beta >$$

(2) ► (I) Soient $X+\alpha, Y+\beta, Z+\eta \in \mathbb{T}M$

a) $< G.,. >$ symétrique :

$$\begin{aligned}
< G(X+\alpha), Y+\beta > &= < \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \\ g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y \\ \beta \end{pmatrix} > \\
&= < \begin{pmatrix} g^{-1}\alpha \\ gX \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y \\ \beta \end{pmatrix} > \\
&= \frac{1}{2}(\beta g^{-1}\alpha + g(X,Y)) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha g^{-1}\beta + g(X,Y)) \\
&= < \begin{pmatrix} g^{-1}\beta \\ gY \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix} > \\
&= < \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \\ g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix} > \\
&= < G(Y+\beta), X+\alpha >
\end{aligned}$$

b) $< G.,. >$ bilinéaire : soit $k \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
< G(k(X+\alpha)+(Y+\beta)), Z+\eta > &= < \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \\ g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} kX+Y \\ k\alpha+\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z \\ \eta \end{pmatrix} > \\
&= < \begin{pmatrix} g^{-1}(k\alpha+\beta) \\ g(kX+Y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z \\ \eta \end{pmatrix} > \\
&= < \begin{pmatrix} kg^{-1}\alpha+g^{-1}\beta) \\ kgX+gY) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z \\ \eta \end{pmatrix} > \\
&= < kG(X+\alpha)+G(Y+\beta), Z+\eta > \\
&= k < G(X+\alpha), Z+\eta > + < G(Y+\beta), Z+\eta >
\end{aligned}$$

c) $< G.,. >$ est définie :

$$\begin{aligned}
< G(X+\alpha), X+\alpha >= 0 &\Rightarrow < \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \\ g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix} >= 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}(\alpha g^{-1}\alpha + g(X,X)) = 0 \\
&\Rightarrow X+\alpha = 0
\end{aligned}$$

d) $< G.,. >$ est positif :

$$< G(X+\alpha), X+\alpha >= \frac{1}{2}(\alpha g^{-1}\alpha + g(X,X)) \ > 0$$

avec $X+\alpha \neq 0$

e) $< G.,. >$ non dégénéré : $\forall\, Y+\beta \in \mathbb{T}M$,

$$< G(X+\alpha), Y+\beta >= 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(\beta g^{-1}\alpha + g(X,Y)) = 0 \Rightarrow X+\alpha = 0$$

Donc : $g^{'} :=< G.,. >$ est une métrique Riemannienne généralisée.

(II) Soient $A = X+\alpha,\ B = Y+\beta \in \mathbb{T}M$
localement, $X = X^i\partial x_i$, $Y = Y^i\partial x_i$, $\alpha = \alpha^i dx_i$, $\beta = \beta^i dx_i$
après des calcules simples on trouve :

$$\begin{array}{rcl} g^{'}(A,B) & := & < GA, B > \\ & = & \frac{1}{2}g(X,Y) + \frac{1}{2}g^{-1}(\alpha,\beta) \end{array}$$

(3) ► Montrons que $< \mathbf{G}^{'}.,. >$ est une métrique Riemannienne généralisée tel que :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{G}^{'} & = & e^b G e^{-b} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \\ g & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} -g^{-1}b & g^{-1} \\ g - bg^{-1}b & bg^{-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

★ Méthode 1 :

1. $< \mathbf{G}^{'}.,. >$ symétrique :

$$\begin{array}{rcl} < \mathbf{G}^{'}(X+\alpha), Y+\beta > & = & < e^b G e^{-b}(X+\alpha), Y+\beta > \\ & = & < G e^{-b}(X+\alpha), e^{-b}(Y+\beta) > \\ & = & < e^{-b}(X+\alpha), G e^{-b}(Y+\beta) > \\ & = & < X+\alpha, e^b G e^{-b}(Y+\beta) > \\ & = & < \mathbf{G}^{'}(Y+\beta), X+\alpha > \end{array}$$

2. $< \mathbf{G}^{'}.,. >$ bilinéaire : soit $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} < \mathbf{G}^{'}(k(X+\alpha)+(Y+\beta)), Z+\eta > & = & < k\mathbf{G}^{'}(X+\alpha) + \mathbf{G}^{'}(Y+\beta), Z+\eta > \\ & = & k < \mathbf{G}^{'}(X+\alpha), Z+\eta > + < \mathbf{G}^{'}(Y+\beta), Z+\eta > \end{array}$$

car : G, e^b et e^{-b} sont linéaires, donc $\mathbf{G}^{'} = e^b G e^{-b}$ est linéaire.

3. $<\mathbf{G}^{'}.,.>$ est défini :

$$\begin{aligned} <\mathbf{G}^{'}(X+\alpha),X+\alpha>=0 &\Rightarrow <e^{b}Ge^{-b}(X+\alpha),X+\alpha>=0\\ &\Rightarrow <Ge^{-b}(X+\alpha),e^{-b}(X+\alpha)>=0\\ &\Rightarrow X+\alpha=0 \end{aligned}$$

car : $<G.,.>$ est une métrique Riemannienne (voir (4.42)).

4. $<\mathbf{G}^{'}.,.>$ positive : pour $\forall\ (X+\alpha)\neq 0$

$$\begin{aligned} <\mathbf{G}^{'}(X+\alpha),X+\alpha> &= <e^{b}Ge^{-b}(X+\alpha),X+\alpha>\\ &= <Ge^{-b}(X+\alpha),e^{-b}(X+\alpha)>>0 \end{aligned}$$

5. $<\mathbf{G}^{'}.,.>$ non dégénéré : $\forall\ Y+\beta\in\mathbb{T}M$

$$\begin{aligned} <\mathbf{G}^{'}(X+\alpha),Y+\beta>=0 &\Rightarrow \frac{1}{2}(\beta g^{-1}\alpha+g(X,Y))=0\\ &\Rightarrow X+\alpha=0 \end{aligned}$$

★ Méthode 2 :

1. $<\mathbf{G}^{'}.,.>$ symétrique :

$$\begin{aligned} <\mathbf{G}^{'}(X+\alpha),Y+\beta> &= <\begin{pmatrix} -g^{-1}b & g^{-1}\\ g-bg^{-1}b & bg^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X\\ \alpha\end{pmatrix},\begin{pmatrix} Y\\ \beta\end{pmatrix}>\\ &= <\begin{pmatrix} -g^{-1}bX+g^{-1}\alpha\\ gX-bg^{-1}bX+bg^{-1}\alpha\end{pmatrix},\begin{pmatrix} Y\\ \beta\end{pmatrix}>\\ &= \frac{1}{2}(g(X,Y)-bg^{-1}bXY+bg^{-1}\alpha Y-\beta g^{-1}bX+\beta g^{-1}\alpha)\\ &= \frac{1}{2}(g(Y,X)-bg^{-1}bYX+bg^{-1}\beta X-\alpha g^{-1}bY+\alpha g^{-1}\beta)\\ &= <\begin{pmatrix} -g^{-1}bY+g^{-1}\beta\\ gY-bg^{-1}bY+bg^{-1}\beta\end{pmatrix},\begin{pmatrix} X\\ \alpha\end{pmatrix}>\\ &= <\begin{pmatrix} -g^{-1}b & g^{-1}\\ g-bg^{-1}b & bg^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y\\ \beta\end{pmatrix},\begin{pmatrix} X\\ \alpha\end{pmatrix}>\\ &= <\mathbf{G}^{'}(Y+\beta),X+\alpha> \end{aligned}$$

car :$g-bg^{-1}b$ est une métrique Riemannienne (voir le Lemme (4.3.1)).

2. $<\mathbf{G}^{'}.,.>$ bilinéaire :soit $k\in\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} <\mathbf{G}^{'}(k(X+\alpha)+(Y+\beta)),Z+\eta> &= <k\mathbf{G}^{'}(X+\alpha)+\mathbf{G}^{'}(Y+\beta),Z+\eta>\\ &= k<\mathbf{G}^{'}(X+\alpha),Z+\eta>+<\mathbf{G}^{'}(Y+\beta),Z+\eta> \end{aligned}$$

car : G, e^b et e^{-b} sont linéaires, donc $\mathbf{G}^{'} = e^bGe^{-b}$ est linéaire.

3. $< \mathbf{G}^{'}.,. >$ défini :

$$\begin{aligned} < \mathbf{G}^{'}(X+\alpha), X+\alpha >= 0 \ &\Rightarrow \ < \begin{pmatrix} -g^{-1}b & g^{-1} \\ g-bg^{-1}b & bg^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix} >= 0 \\ &\Rightarrow \ \frac{1}{2}(g(X,X) - bg^{-1}bXX + bg^{-1}\alpha X - \alpha g^{-1}bX + \alpha g^{-1}\alpha) = 0 \\ &\Rightarrow \ \frac{1}{2}(g(X,X) - bg^{-1}bXX + \alpha g^{-1}\alpha) = 0 \\ &\Rightarrow \ \frac{1}{2}(g-bg^{-1}b)(X,X) + \alpha g^{-1}\alpha = 0 \\ &\Rightarrow \ X+\alpha = 0 \end{aligned}$$

car : $g - bg^{-1}b$ est une métrique Riemannienne et g^{-1} la métrique inverse de g (voir le Lemme (4.3.1)).

4. $< \mathbf{G}^{'}.,. >$ positive :

$$< \mathbf{G}^{'}(X+\alpha), X+\alpha >= \frac{1}{2}(g-bg^{-1}b)(X,X) + \alpha g^{-1}\alpha) > 0$$

5. $< \mathbf{G}^{'}.,. >$ non dégénéré : pour $\forall\, Y+\beta \in \mathbb{T}M$

$$\begin{aligned} < \mathbf{G}^{'}(X+\alpha), Y+\beta >= 0 \ &\Rightarrow \ < \begin{pmatrix} -g^{-1}b & g^{-1} \\ g-bg^{-1}b & bg^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y \\ \beta \end{pmatrix} >= 0 \\ &\Rightarrow \ < \begin{pmatrix} -g^{-1}bX + g^{-1}\alpha \\ gX - bg^{-1}bX + bg^{-1}\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y \\ \beta \end{pmatrix} >= 0 \\ &\Rightarrow \ \begin{cases} -g^{-1}bX + g^{-1}\alpha = 0 \\ gX - bg^{-1}bX + bg^{-1}\alpha = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \ \begin{cases} bX = \alpha \\ gX = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \ X+\alpha = 0 \end{aligned}$$

Donc : $< \mathbf{G}^{'}.,. >$ est une **métrique Riemannienne généralisée**.

Nous avons conclu que, pour que $< \mathbf{G}^{'}.,. >$ doit être une métrique Riemannienne généralisée, il faut que $g - bg^{-1}b$ soit une métrique Riemannienne classique.

Donc, nous obtenons le Lemme suivant :

Lemme 4.3.1.
Soit (M, g) une variété Riemannienne, et b une 2-forme différentielle sur M.

Alors

$$g - bg^{-1}b \tag{4.44}$$

*est une **métrique Riemannienne**, où g^{-1} est la métrique inverse de g.*

Preuve . Soient b 2-forme et g une métrique Riemannienne classique sur M.

Localement, on a :

$$\begin{array}{rcl} (bg^{-1}b)(X,Y) & = & (b_{ij})(g^{kl})(b_{pq})(X,Y) \\ & = & {}^tX(b_{ij})(g^{kl})(b_{pq})Y \\ & = & -{}^tX^t(b_{ij})(g^{kl})(b_{pq})Y \\ & = & -{}^t((b_{ij})X)(g^{kl})(b_{pq})Y \\ & = & -g^{-1}((b_{ij})X,(b_{pq})Y) \\ & = & -g^{-1}(b(.,X),(b.,Y)) \end{array}$$

ici, $(b_{ij})X = \sum_{ij} b_{ji}X^i dx^j = b(.,X)$ avec (b_{ij}) (resp. (g^{kl})) est la matrice associe à b (resp. à g^{-1}).
D'où :

$$\begin{array}{rcl} (g - bg^{-1}b)(X,Y) & = & g(X,Y) - bg^{-1}b(X,Y) \\ & = & g(X,Y) - ((bg^{-1}b)X)Y \\ & = & g(X,Y) - (bg^{-1}b(.,X))Y \\ & = & g(X,Y) - (b(g^{-1}(.,b(.,X)))Y \\ & = & g(X,Y) - (b(.,g^{-1}(.,b(.,X))))Y \\ & = & g(X,Y) - b(Y,g^{-1}(.,b(.,X))) \\ & = & g(X,Y) - g^{-1}(dx_i,b(.,X))b(Y,\partial_i) \\ & = & g(X,Y) + g^{-1}(dx_i,b(.,X))b(\partial_i,Y) \\ & = & g(X,Y) + g^{-1}(b(\partial_i,Y)dx_i,b(.,X)) \\ & = & g(X,Y) + g^{-1}(b(.,Y),b(.,X)) \\ & = & g(X,Y) + g^{-1}(b(.,X),b(.,Y)) \\ & = & g(X,Y) + g^{-1}(b(X,.),b(Y,.)) \end{array}$$

Avec :

1. $b(X) = b(.,X)$

2. $g^{-1}(\omega) = g^{-1}(., \omega)$
3. $g^{-1}(., b(., X)) = g^{-1}(dx_i, b(., X))\partial_i$
4. $b(., Y) = b(\partial_i, Y)dx_i$
5. $b(Y, \partial_i) = -b(\partial_i, Y)$

Alors :

$$(g - bg^{-1}b)(X, Y) = g(X, Y) + g^{-1}(b(., X), b(., Y))$$

1. bilinéaire, car g, g^{-1} et b sont bilinéaires.
2. symétrique, car g, g^{-1} sont symétriques.
3. définie positive, car :
   $g(X, X) \geq 0$ et $g^{-1}(b(., X), b(., X)) \geq 0 \Rightarrow g(X, X) + g^{-1}(b(., X), b(., X)) \geq 0$
   et
   $$g(X, X) + g^{-1}(b(., X), b(., X)) = 0 \Rightarrow g(X, X) = 0 \Rightarrow X = 0$$

   Donc : $g - bg^{-1}b$ est une métrique Riemannienne.

■

4.4 Conclusion et perspective

Dans les exemples usuelles $\mathcal{J}_J$ et $\mathcal{J}_\omega$ des structures complexes généralisées issus d'une structure complexe J et d'une structure symplectique ω, respectivement (voir les exemples (2.1.1) et (2.1.2)). On voit que la condition de $g := -\omega(.,J.)$ soit symétrique est équivalente à $\mathcal{J}_J\mathcal{J}_\omega = \mathcal{J}_\omega\mathcal{J}_J$, et la condition $g > 0$ équivalente à $< -\mathcal{J}_J\mathcal{J}_\omega.,. >> 0$. Ces observations mènent à la définition (2.3.1) de structure Kählérienne généralisée qui a été due par *Marco Gualtieri* [28], cette définition représente par une paire de structures complexes généralisées $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ telles que $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2\mathcal{J}_1$ et la forme bilinéaire $< -\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2.,. >$ est définie positive. Puis, Gualtieri à conclu que ces structures Kählériennes généralisées sont intimement liées à un autre type de structures qui sont les structures bi-hermitiennes classiques (J_+, J_-, g), où il a atteint un théorème très intéressant (2.3.1), ce théorème représente le passage entre les structures bi-hermitiennes classiques (J_+, J_-, g) et les structures Kählériennes généralisées, par l'existence d'une 2-forme b qui satisfait la condition (2.4) dans ce théorème, c'est-à-dire, une structure Kählérienne généralisée peut être définie de manière équivalente comme un quadruple (g, b, J_+, J_-), où g est une métrique Riemannienne, b est une deux-forme et $J_\pm$ sont des structures presque hermitiennes sur (M, g) satisfaisant une certaine condition de torsion.

Donc pour notre travail, nous sommes arrivé à plus loin que cela, où notre théorèmes (4.1.1) et (4.2.1) représentes le passage entre les structures classiques sur une variété différentiable M de quelle que soit la dimension (géométrie classique) vers une structure Kählérienne généralisée sur une variété de dimension paire (géométrie généralisée), avec l'utilisation le produit des variétés.

La continuité de notre travail (perspective) est représente dans ce qui suit :

1 ▶ Nous pouvons aussi continue de la même manière à construire une famille des structures Sasakiennes généralisées par l'utilisation de la correspondance antre ces structures et les structures Kählériennes généralisées selon Kinichi Sekiya ([58], 2012).

2 ▶ Construction et classification de structure de contact généralisées sur des **groupes de Lie** :

(a) Si nous avons un groupe de Lie G de dimension $2n$ munie d'une structure complexe généralisée dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet un centre $Z(\mathfrak{g})$ qui est de dimension 1, avec une extension centrale d'algèbre de Lie. Alors nous pouvons construire une structure de contact généralisée sur $\mathfrak{g} \times \mathbb{R}$.

(b) Nous allons étudié la classification des structures de contact généralisées invariantes sur les groupes de Lie de dimension petit (i.e. 3 et 5).

(c) Nous pouvons voir aussi, s'il existe une correspondance bi-univoque entre les structures de contact généralisées invariantes sur un groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension impaire et les couples $(\mathfrak{l}, \omega)$ dits $\mathfrak{g}$-admissibles.

Bibliographie

[1] M. Aldia, D. Grandinib, Generalized contact geometry and T-duality, Journal of Geometry and Physics 92 (2015) 78 ?93

[2] V. Apostolov and M. Gualtieri, Generalized Kähler manifolds, commuting complex structures, and split tangent bundles, Comm. Math. Phys. no.**2**, (2007) 561-575.

[3] D. V. Alekseevsky and C. Medori and A. Tomassini, Homogeneous para-Kähler Einstein manifolds, Uspechi Mat. Nauk, vol. 64, n1(385), Russian 2009.

[4] D. E. Blair, The theory of quasi-Sasakian structures, J. Diff. Geometry 1 (1967), 331-345.

[5] D. E. Blair, Contact manifolds in Riemannian geometry, Lecture notes in Mathematics, Springer (1976).

[6] D. E. Blair, Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, Progress in Mathematics Vol. 203, Birkhauser, Boston, 2002.

[7] D. E. Blair, J. A. Oubiña, Conformal and related changes of metric on the product of two almost contact metric manifolds, Publ. Mat. **34** (1), 199-207 (1990).

[8] D. E. Blair, $\mathcal{D}$-homothetic warping, Publications de l'institut mathématique, Nouvelle série, tome **94** (108) , 47-54 (2013).

[9] J. Bland, Survey of generalized contact structures. 53D10(2010).

[10] J. K. Beem, P. E. Th. G. Powell, Warped product manifolds in relativity, history of science, pp. 41-56, North-Holland, Amsterdam-New York, 1982.

[11] G. Beldjilali, M. Belkhelfa, Kählerian structures and $\mathcal{D}$-homothetic Bi-warping, J. Geom. Symmetry Phys. 42 (2016), 1-13.

[12] H. Bouzir, G. Beldjilali, M. Belkhelfa and A. Wade, Generalized Kählerian Manifolds and Transformation of Generalized Contact Structures, Archivum Mathematicum, Tomus 53 (2017), 35-48.

[13] C.P. Boyer, K. Galicki, and P. Matzeu, On Eta-Einstein Sasakian Geometry, Comm.Math. Phys.,**262** (2006), pp. 177-208.

[14] H. Bursztyn, G.R. Cavalcanti, and M. Gualtieri, Reduction of Courant algebroids and generalized complex structures, Adv. Math. 211 no.**2**, (2007) 726-765.

[15] C. P. Boyer and K. Galicki, Sasakian geometry, University of New Mexico, Albuquerque, N.M. 87131, 2007.

[16] G. R. Cavalcanti, Introduction to generalized complex geometry, university of Oxford, 2006.

[17] H. Bursztyn, G.R. Cavalcanti, and M.Gualtieri, Generalized Kähler and hyper-Kähler quotients, in Poisson geometry in mathematics and physics, vol.**450** of Contemp. Math, pp.61-77, RI, 2008.

[18] B. Cappelletti-Montano, A. De Nicola, AND I. Yudin, A Survey on cosymplectic geometry, arXiv :1305.3704v3 [math.DG] 21 Nov 2013.

[19] M. Crainic, Generalized complex structures and Lie brackets, Bull. Braz. Math. Soc., New Series 42 (2011) 559 ?578 ; e-print : arXiv :math/0412097.

[20] A. Cannas Da Silva, Symplectic géometry. (H.D.G, vol 2) september 2004.

[21] G. R. Cavalcanti, Introduction to generalized complex geometry, university of Oxford, 2006.

[22] V. Cruceanu, P. Fortuny and P. M. Gadea : A survey on paracomplex geometry, 1996.

[23] S. Dragomir et L. Ornea, Locally Conformal Kähler Geometry, Birkhauser, Boston, 1998.

[24] G. Deschemps, Espace des twisteurs d'une variété quaternionique généralisée. arXiv :1401.5605v3[Math,DG](4/01/2014).

[25] G. Deschemps, Espace des twisteurs des structures complexes généralisées. Arxiv :209.5870v3 [Math,DG](18/02/2015).

[26] G. Deschamps, Espace des twisteurs d'une variété quaternionique Kähler généralisée, arXiv :1401.5605v4 [math.DG] 2016.

[27] J. Davidov and O. Mushkarov, Twistor spaces of generalized complex structures. J. Geom. Phys. 56, 1623-1636 (2006).

[28] M. Gualtieri, Generalized complex geometry. Ph.D. thesis, St Johns college, University of Oxford, arXiv : math/0401221, 107 pages (2003).

[29] M. Gualtieri, Generalized Kähler geometry. arXiv :1007.3485v1 [math.DG] 20 Jul 2010.

[30] M. Gualtieri, Generalized complex geometry, Ann. Math. 174 (2011) 75 ?123 ; e-print :arXiv :math/0703298.

[31] R. Gomez and J. Talvacchia, Generalized coKähler geometry and an applicaton to generalized Kähler structures.(6 juin 2015).

[32] R. R. Gomez and J. Talvacchia, On products of generalized geometries. Geom. Dedicata 175 (2015), 211-218.

[33] R. Goto, Deformations of generalized complex and generalized Kähler structures, J. Differential Geom. **84** (2010), 525-560

[34] R. Goto, Unobstructed K-deformations of generalized complex structures and bi-Hermitian structures, Adv. Math. **231** (2012), 1041-1067

[35] J. Inoguchi, A note on almost contact Riemannian 3-manifolds II, https ://doi.org/10.4134/BKMS.b150772, pISSN : 1015-8634 / eISSN : 2234-3016

[36] D. Iglesias-Ponte and A. Wade, Integration of Dirac-Jacobi structures, J. Phys. A : Math. Gen. 39 (2006).

[37] D. Iglesias-Ponte and A. Wade, Contact manifolds and generalized complex structures. Journal of Geometry and Physics 53 (2005).

[38] N. Hitchin, Generalized Calabi-Yau manifolds. Q. J. Math. 54, 281-308 (2003).

[39] N. Hitchin, Instantons, Poisson structures and generalized Kähler geometry, Comm. Math. Phys. **265** no.1, (2006) 131-164.

[40] N. Hitchin, Bihermitian metrics on del Pezzo surfaces, J. Symplectic Geom. 5 no.**1**, (2007) 1-8.

[41] K. Kenmotsu, A class of almost contact Riemannian manifolds, J. Tohoku Math, **24** (1972), 93-103.

[42] S. Kobayashi et K. Nomuzu, foundations of Differential Geometry, Vol. I, Interscience and Wiley, New York, 1963.

[43] S. Kobayashi et K. Nomuzu, foundations of Differential Geometry, Vol. II, Interscience and Wiley, New York, 1969.

[44] P. Libermann, Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et des structures de contact, colloque G'eom. Diff. Globale (Bruxelles, 1958), Centre Belge Rech. Math., Louvain, 1959, pp. 37 ?59.

[45] P. Libermann, Sur quelques exemples de structures pfaffiennes et presque cosymplectiques, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 60(1962), 153 ?172.

[46] U. Lindströmab, M. Ročekc, R. Von Unged, and M. Zabzine : Generalized Kähler geometry and manifest $N = (2, 2)$ supersymmetric nonlinear sigma-models, arxiv :hep-th/0411186v2, 9 may 2005.

[47] Y. Lin and S. Tolman, Symmetries in generalized Kähler geometry, Comm. Math. Phys. **268** no.1, (2006) 199-222.

[48] J. C. Marrero, The local structure of trans-Sasakian manifolds, Annali di Matematica Pura ed Applicata 1992, Volume **162**, Issue 1, pp 77-86.

[49] T. T. Matamba, Induced structures on the product of Riemannian manifolds. International Electronic Journal of Geometry, V 4 No. 1 pp. 15-25 (2011).

[50] S. Mahdi, Une introduction relativement compacte aux Algèbre de Lie. Université de Paris X.(Décembre 2005).

[51] T. Masson, Géométrie différentielle,groupe et algèbre de Lie, fibrés et connexions. Laboratoire de Physique Théorique, Université Paris XI, France.Version du 19 décembre 2001.

[52] J. A, Oubi$\tilde{n}$a, J. A., New classes of almost contact metric structures. Publ. Math. Debrecen, **32**(1985), 187-193.

[53] Z. Olszak, Normal almost contact metric manifolds of dimension three. Annales Plonici Mathematici XLVII (1986)

[54] Z. Olszak, Almost cosymplectic manifolds with Kählérian leaves, Tensor N. S. 46(1987), 117-124.

[55] Z. Olszak et Weyl, Pseudo symmetric and bnd bochner pseudo symmetric Kählerian manifolds of dimention4.2013.

[56] Y. S. Poon and Aïssa Wade, Generalized contact structures, J.Lond. Math. Soc.(2)83 (2011), no.2, 333-352.

[57] Y. S. Poon and Aïssa Wade, Approaches to generalize Contact Structures, pure and applied mathematic quarterly, v6, n2, 603-622, 2010.

[58] K. Sekiya, Generalized almost contact structures and generalized Sasakian structures, Osaka J. Math. **52**(2012) 303-306.

[59] S. S. Shukla and U. Shankar Verma, Paracomplex paracontact pseudo-Riemannian submersions,7 may 2014.

[60] S. Tanno, Almost complex structures in boundle spaces over almost contact manifolds. J. Math Soc. Japan 17 (1965), 167-186.

[61] S. Tanno, The topology of contact Riemannian manifolds, Illinois J. Math, 12 (1968), 700-717.

[62] S. Tanno, The automorphism groups of almost contact Riemannian Manifolds, Tohoku Math. Journ., 21 (1969), 21-38.

[63] I. Vaisman, Dirac structures on generalized Riemannian manifolds, arXiv :1105.5908v1 [math.D] 30 may 2011.

[64] I. Vaisman, Reduction and submanifolds of generalized complex manifolds, arXiv : Math/0511013v2 [math.DG] 19 dec 2005.

[65] I. Vaisman, Generalized CRF-structures, Geom Dedicata 133 (2008), 129-154.

[66] I. Vaisman, From generalized Káhler to generalized Sasakian structure, J. Geom. Symmetry Phys. **18** (2010), 63-86

[67] I. Vaisman, Generalized para-Kähler manifolds, arXiv :1503.01251v2 [math.DG] 20 Apr 2015

[68] A. Wade, Dirac structures and paracomplex manifolds, 29 mars 2004.

[69] A. Wade, Conformal Dirac Structures, Lett. Math. Phys. 53 (2000), 331-348.

[70] A. Wade, Transveres geometry and generalized complex structures. pp.139-149 (2010).

[71] K. Yano, M. Kon, Structures on manifolds, Series in Pure Math., Vol **3**, World Sci.,1984.

[72] M. Zabzine, Lectures on Generalized Complex Geometry and Supersymmetry. Archivum Mathematicum (Supplement) 42 (2006).

ملخص. يرجع مفهوم الهندسة المعممة الى ***نايجل هيتشن*** عام 2003، و هي ذات أهمية في النظرية الفيزيائية. إن الهندسة المعممة لا تدرس على ليف المماس الذي يرمز له TM للمنوعة التفاضلية M ، بل تدرس على الفضاء المتكون من المجموع ما بين ليف المماس و ليف مماس التمام، حيث يرمز لهذا الفضاء : $TM \oplus TM^*$ ويسمى ليف ***بوترينق*** المزود بمجموع ***ويتني***. أما فيما يخص هندسة كالير المعممة فهي جزء من الهندسة المعممة. أحد أهداف هذا العمل هو استكشاف طرق أخرى لبناء منوعات كالير المعممة تقريبا، و في هذه الحالة، نتائجنا يمكن تقسيمها إلى جزئيين. الجزء الاول، هو أننا بنينا هذه المنوعات انطلاقا من منوعات بتا- كانموتسو (كلاسيكية) ذات البعد الفردي مع استخدام ضرب المنوعات مرة واحدة، مرورا بنظرية **ماركو غالتييري**. في الجزء الثاني، قمنا بإنشاء منوعات كالير المعممة تقريبا، انطلاقا من منوعات كالير تقريبا (الكلاسيكية) ذات البعد الزوجي، وذلك باستخدام ضرب المنوعات مرتين، مما يعطينا عائلتين من هذه المنوعات. بشأن نتائج أخرى يمكننا إنشاء منوعات تلامسية معممة تقريبا عن طريق استخدام التحول على هذه المنوعات حسب تقنية **تانو** (1968).
الكلمات المفتاحية. البنى التلامسية المعممة تقريبا، بنى كالير المعممة تقريبا، تحول التحاكي، بنية ترو- سازاكي.

Résumé. Le concept de la géométrie généralisée est dû à *Nigel Hitchin*, et elle est intéressante dans la théorie de la physique. En géométrie généralisée on étudie non pas le fibré tangent d'une variété différentiable, mais plutôt la somme du fibré tangent et du fibré cotangent, ce qu'on appel le fibré de *Pontryagin* (ou le fibré tangent généralisé) avec la somme de *Whitney*. La géométrie Kählérienne généralisée est une partie de la géométrie généralisée. L'un des objectifs de ce travail est d'explorer d'autres façons de construire des *variétés de Kähler généralisées*, dans ce contexte, nous avons construit ce type de structures par deux façons différentes. Dans la première, nous construisons ces variétés à partir des variétés beta–Kenmotsu classiques, de dimension impaire, par l'utilisation une fois le produit des variétés, passant par un Théorème de *Marco Gualtieri*. Dans la deuxième, nous avons construit des variétés de Kähler généralisées à partir des variétés presque de Kähler classiques de dimension paire, utilisant deux fois le produit des variétés, on obtient deux familles des structures Kählériennes généralisées. Nous remarquons que, la construction de cette structure selon *Kenichi Sekiya* est une cas particulière de notre construction. D'autre résultats concernant la construction de *structure presque contact généralisée*, peut être obtenus par l'utilisation de transformation de cette structure suivant la technique de *Tanno* (1968).
Mots clés. Structure presque de contact généralisée, structure presque kählérienne généralisée, déformation homothétique, structure trans-sasakienne.

Abstract. The concept of generalized geometry is due to *Nigel Hitchin*, and it is interesting in the theory of physics. In generalized geometry we study not on the tangent bundle of a differentiable manifold, but on the sum of the tangent bundle and the cotangent bundle, what we call the bundle of *Pontryagin* (or the generalized tangent bundle) with the sum of *Whitney*. Generalized Kählerian geometry is a part of generalized geometry, one of the objectives of this work is to explore other ways of constructing generalized Kähler manifold, in this case, our results can be divided into two parts. In the first, we build these manifolds from the beta-Kenmotsu manifolds (classical), and using the product of the manifolds one time, let us go through a *Marco Gualtieri* Theorem. In the second part, we constructed generalized Kähler manifolds from the almost Kähler manifolds (classical), using the product of the manifolds two times, which gives us two families of generalized Kähler manifolds. We note that the construction of this structure according to *Kenichi Sekiya* is a special case of our construction. Other results concerning the construction of generalized almost contact structure by the use of transformation of this structure following *Tanno* (1968).
Key Words. Generalized almost contact structure, generalized almost Kählerian structure, homothetic transformation, trans-Sasakian structure.