الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen Algérie

جامعة أبي بكر بلقايد
تلمسان الجزائر

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER EN MATHEMATIQUES

Option : Equations différentielles ordinaires

Sujet :

Introduction aux équations différentielles fonctionnelles mixtes EDFM

Candidate : **BENAMEUR Kawther**
Date : 29/05/2017

Membres du Jury :

Présidente :	MERZAGUI Naïma,	Professeur, Université de Tlemcen
Examinateur :	HOUBAD Mekki,	Professeur, Université de Tlemcen
Encadreur :	YEBDRI Mustapha,	Professeur, Université de Tlemcen

Année Universitaire 2016/2017

Dédicaces

Au nom du DIEU le clément et le miséricordieux je dédie ce modeste travail *à* :

Mes chers parents qui ont toujours été dévoué pour que je puisse réaliser ce travail de recherche dans les meilleures conditions.

A mes frères Oussama, Aymen, Yasser, Yassine, Ibrahim, et mes petites soeurs Soundos et Hibat Arrahmen.

A tous les membres de ma famille paternelle et maternelle.

A ma chère professeure TALBI Wafaa qui m'a toujours encouragée *à* poursuivre mes étude.

A mes camarades surtout mes chères amies Salwa.R, Lila.C, Khalida.B, Dalila.M, Asmaa.S, Firdaws.T, Ahlem.B, Nesrine.Z, Imen.C, Souad.R.

A mes collègues de département.

Remerciements

Je remercie en priorité ALLAH qui m'a donné la volonté, la patience, et surtout la santé durant toutes mes années d'étude.

Mes profonds remerciements à mes premiers fans, mes parents pour leur soutien quotidien infaillible, merci à leur enthousiasme débordant qui a été pour moi pilier fondateur de mon action, sans eux je n'aurais jamais pu réaliser ce travail.

J'exprime ma profonde gratitude à mon encadreur Monsieur le Professeur M. YEBDRI pour son aide morale et ses précieux conseils qui m'ont aidée à déterminer ce travail.

Je profite de cette occasion pour remercier tous mes enseignants.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement chacun des membres du jury qui me font le grand honneur d'y participer.

J'exprime également ma gratitude à Monsieur le Chef de Département de Mathématiques Monsieur Mebkhout Benmiloud qui a été toujours disponible pour nous et nous a vraiment aidé dans tous les domaines.

Un grand merci aussi à tous mes collègues et mes amies.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribués d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Dédicaces i

Remerciements ii

Introduction 1

1 Préliminaires 2
- 1.1 Espaces de Banach 2
  - 1.1.1 Le principe de contraction de Banach 3
- 1.2 Rappels sur les équations différentielles fonctionnelles à retard 4
  - 1.2.1 Un aperçu historique sur les équations différentielles fonctionnelles à retard 4
  - 1.2.2 Définitions 5
  - 1.2.3 Théorème d'existence et d'unicité de solution 6
  - 1.2.4 Propriétés 7
  - 1.2.5 Intégration par la méthode des pas 7
  - 1.2.6 L'équation caractéristique 12

2 Introduction aux équations différentielles fonctionnelles mixtes EDFM 14
- 2.1 Théorème d'existence et d'unicité de solutions 14
- 2.2 Intégration par la méthode des pas 19
- 2.3 L'équation caractéristique 29

Introduction

Les équations différentielles fonctionnelles mixtes ont deux types d'arguments : argument retardé et argument avancé, qui ont un comportement différent. Comparativement à l'équation différentielle fonctionnelle à retard, l'équation différentielle fonctionnelle mixte EDFM, n'a pas fait l'objet de beaucoup de recherches mathématiques.

Ces équations ont la caractéristique importante que l'histoire et le statut futur du système ont tous deux influé sur son taux de variation à l'instant présent.

Ce type d'équations possède différentes applications dans différents domaines tel que la physique, la biologie, l'économie, etc...

Dans ce mémoire on présente une introduction concernant les équations différentielles fonctionnelles mixtes EDFM du type suivant

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t-h), u(t+h)), \quad t \in (t_1, t_2).$$

Mon travail est divisé en deux chapitres.

Le *premier chapitre* est introductif. Il porte sur des préliminaires et des rappels concernant les équations différentielles fonctionnelles à retard [6], [9].

Dans le *deuxième chapitre*, on va s'intéresser à l'étude de l'existence et l'unicité de solution d'une équation différentielle fonctionnelle mixte EDFM [2], l'intégration par la méthode des pas [4], [5], ainsi que l'équation caractéristique de l'EDFM.

Préliminaires 1

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et résultats utiles pour la suite de ce mémoire.
Pour plus de détails concernant les résultats cités dans ce chapitre, on peut se référer aux [1], [3], [6] et [9].

1.1 Espaces de Banach

Soit (X, d) un espace mérique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X.

Définition 1.1 *On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si*
$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, n) \in \mathbb{N}^2 \quad (p > N \quad et \quad n > N) \Rightarrow \|x_p - x_n\| < \epsilon.$

Proposition 1.1 *Toute suite convergente est évidemment de Cauchy.*

La réciproque est fausse.

Définition 1.2 *Un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente.*

Définition 1.3 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach.

Définition 1.4 — *On dit qu'une fonction $f : E \longrightarrow E$, est lipschitzienne s'il existe $k \geq 0$ tel que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|,$$

pour tout $x, y \in E$.

La plus petite valeur k satisfaisant cette propriété pour la fonction f est appelée la constante de Lipschitz.

— *Si $k \leq 1$, la fonction f est dite non-expansive .*
— *Si $k < 1$, la fonction f est dite contraction.*

Définition 1.5 *On dit que la fonction f est localement lipschitzienne, si pour tout point x_0 de E il existe un voisinage de x_0 dans lequel f est lipschitzienne dans ce voisinage autrement dit k dépend de x_0.*

Proposition 1.2 *Une fonction lipschitzienne est continue.*

1.1.1 Le principe de contraction de Banach

Théorème 1.1 *[1] Soient $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, $f : E \longrightarrow E$ une contraction, alors f admet un point fixe unique.*

preuve.

i) Existence

Soit k une constante de contraction de la fonction f, et soit x_0 un élément arbitraire mais fixe dans E. On construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E par

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad pour \quad tout \quad n \geq 1. \tag{1.1}$$

On doit prouver que (x_n) est une suite de Cauchy dans E.
Comme f est une contraction, on a

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\|, \quad pour \quad tout \quad n \geq 1. \tag{1.2}$$

Ainsi, on obtient

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n\|x_1 - x_0\|, \quad pour \quad tout \quad n \geq 1. \tag{1.3}$$

Par conséquent, pour tout $m > n$, on utilise l'inégalité triangulaire

$$\begin{array}{rcl}
\|x_n - x_m\| & = & \|x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x_{n+2} + x_{n+2} - ... + x_{m-1} - x_m\| \\
& \leq & \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + ... + \|x_{m-1} - x_m\| \\
& \leq & (k^n + k^{n+1} + .. + k^{m-1})\|x_1 - x_0\| \\
& \leq & k^n(1 + k + .. + k^{m-n-1})\|x_1 - x_0\| \\
& \leq & \dfrac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\| \longrightarrow 0 \quad quand \quad n \longrightarrow +\infty,
\end{array}$$

et donc la suite (x_n) est de Cauchy. Comme E est un espace de Banach, elle converge donc vers une limite $p \in E$, $p = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n$.

En utilisant la continuité de f, on obtient

$$p = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_{n-1}) = f(p),$$

alors f admet un ponit fixe.

ii) Unicité

Supposons qu'il existe deux points fixes p et q de f, alors on a

$$\|p - q\| = \|f(p) - f(q)\| \leq k\|p - q\|,$$

et comme $k < 1$, ceci n'est possible que si $p = q$.

□

1.2 Rappels sur les équations différentielles fonctionnelles à retard

Dans cette partie, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les équations différentielles fonctionnelles à retard, le théorème d'existence et d'unicité des solutions, la méthode des pas, ainsi que quelques propriétés de ces équations.
Pour plus de détails nous nous référons aux livres [6], [9].

1.2.1 Un aperçu historique sur les équations différentielles fonctionnelles à retard

Après la Première Guerre Mondiale, l'utilisation de systèmes de contrôle a conduit à étudier une classe complètement différente de celle des équations différentielle ordinaire, ces équations sont appelées équations différentielles à retard (EDR).
Ces équations décrivent l'évolution (x') d'un phénomène en fonction de son états dans le passé $x(t - r)$, (r un nombre réel strictement positif que, l'on appelle le retard).
Les équations à retard ont été introduites pour modéliser des phénomènes dans lesquels il y'a un décalage temporel entre l'action sur le système et la réponse du système à cette action.
Le retard est rencontré naturellement en biologie, physiologie, économie, dynamique des populations, chimie, etc...
Les équations à retard interviennent dans de nombreux domaines d'applications des mathématiques, et en particulier en biologie.

L'ensemble de solutions d'une équation différentielle linéaire à retard sont de dimension infinie, contrairement aux équations différentielles ordinaires sans retard. La condition initiale d'une équation à retard est définie sur un intervalle, de longueur dépendant du retard .

1.2.2 Définitions

Soit $r > 0$, un réel donné, $t_0 \in \mathbb{R}$. On note par $C := C([t_0 - r, t_0]; \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues définies sur l'intervalle $[t_0 - r, t_0]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

Définition 1.6 *On appelle équation différentielle à retard, une équation de la forme*

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - r)), \quad t \geq t_0, \tag{1.4}$$

où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, une fonction continue.

Remarque 1.1 *Si r = 0 ; l'équation (1.4) devient*

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t)), \quad t \geq t_0,$$

Qui est une équation différentielle ordinaire.

Remarque 1.2 *:*

Connaissant la fonction $x(t)$ sur $[t_0 - r, t_0]$, on peut déterminer la fonction $x(t)$ sur l'intervalle $[t_0, t_0 + r]$.

En effet

si $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [t_0 - r, t_0]$, $\varphi \in C$, l'équation (1.4)

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - r)), \quad t \geq t_0,$$

s'écrit

$$x'(t) = f(t, x(t), \varphi(t - r)), \quad t \in [t_0, t_0 + r],$$

et cette dernière n'est rien d'autre qu'une équation différentielle ordinaire.

Définition 1.7 *Une condition initiale pour l'équation (1.4) est donné par la fonction*

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - r, t_0],$$

où $\varphi \in C$.

Définition 1.8 *On dit que x est une solution de l'équation (1.4) s'il existe $\alpha > 0$ tels que*

i) x définie et continue sur $[t_0 - r, t_0 + \alpha[$.

i) x dérivable sur $[t_0, t_0 + \alpha[$ et satisfait l'équation (1.4) sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \alpha[$.

Définition 1.9 *x est dite solution du problème de Cauchy,*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t-r)), & t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [t_0 - r, t_0], \end{cases} \tag{1.5}$$

s'il existe $\alpha > 0$ tel que x soit solution de l'équation (1.4) sur $[t_0, t_0 + \alpha[$, et

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - r, t_0].$$

Définition 1.10 *On dit que l'équation (1.4) est autonome si la fonction f ne dépend pas de t. On note dans ce cas $f(x)$ au lieu de $f(t, x)$.*

Proposition 1.3 *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$ donné et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, une fonction continue. Une fonction x est solution du problème (1.5) si et seulement si elle est solution du problème suivant*

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x(s), x(s-r))ds, & t \geq t_0. \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [t_0 - r, t_0]. \end{cases} \tag{1.6}$$

1.2.3 Théorème d'existence et d'unicité de solution

Considérons le problème de Cauchy (1.5),

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t-r)), & t \geq t_0. \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [t_0 - r, t_0]. \end{cases}$$

Théorème 1.2 *Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est continue, alors le problème (1.5) admet au moins une solution, si de plus f est localement lipschitzienne par rapport aux deux derniéres variables, alors cette solution est unique.*

Soit x une solution de l'équation (1.4), définie sur l'intervalle $[t_0 - r, \alpha[$, $\alpha > 0$.

Définition 1.11 *On dit que $\tilde{x}$ est un prolongement de x, s'il existe $\beta > \alpha$ tel que $\tilde{x}$ est définie sur $[t_0 - r, \beta[$, coïncide avec x sur $[t_0 - r, \alpha[$ et vérifie l'équation (1.4) sur $[t_0 - r, \beta[$.*

Définition 1.12 *La solution x est dite maximale, si elle n'admet pas de prolongement, i.e. que l'intervalle $[t_0 - r, \alpha[$ est l'intervalle maximal d'existence de la solution x.*

1.2.4 Propriétés

i) Pour résoudre l'équation différentielle à retard (1.4)

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-r)), \quad t \geq t_0,$$

il faut connaître $x(t)$ sur un intervalle $[t_0 - r, t_0]$, de longueur r.

ii) Une équation différentielle à retard linéaire et homogène, peut avoir des solutions oscillantes non triviales, c'est-à-dire des solutions qui s'annulent plusieurs fois, mais elles ne sont pas identiquement nulles.

iii) Deux solutions, d'une équation différentielle à retard peuvent se rencontrer en plusieurs points, sans qu'elles soient égales.

Exemple 1.1 *Soit l'équation différentielle à retard suivante*

$$x'(t) = -x(t - \frac{\pi}{2}),$$

qui admet comme solutions

$$x(t) = \cos(t) \quad et \quad y(t) = \sin(t).$$

On remarque que $x(\frac{\pi}{4}) = y(\frac{\pi}{4})$,mais $x \neq y$.

1.2.5 Intégration par la méthode des pas

Pour simplifier les calculs nous considérons $t_0 = 0$.

Alors le problème de Cauchy (1.5) devient

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t-r)), & t \geq 0. \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-r, 0]. \end{cases} \tag{1.7}$$

i) La résolution sur $[0,r]$;

Soit $t \in [0,r]$, alors $t-r \in [-r,0]$ et de la on a

$$x(t-r) = \varphi(t-r),$$

et le problème de Cauchy (1.7) devient

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \varphi(t-r)), & t \in [0,r], \\ x(0) = \varphi(0), \end{cases}$$

d'aprés la proposition (1.3) l'équation $x'(t) = f(t, x(t), \varphi(t-r)), \quad t \in [0,r]$, s'écrit sous la forme intégrale suivante

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(s, x(s), \varphi(s-r))ds, \quad t \in [0,r],$$

donc, la solution sur $[0,r]$, qu'on notera $x_1(t)$ est donnée par

$$x_1(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(s, x(s), \varphi(s-r))ds, \quad t \in [0,r]. \tag{1.8}$$

ii) La résolution sur $[r,2r]$;

On refait l'opération sur $[r,2r]$, en considérant comme condition initiale $x(t) = x_1(t)$ sur $[0,r]$.

Soit $t \in [r,2r]$, alors $t-r \in [0,r]$ et de la on a

$$x(t-r) = x_1(t-r),$$

et le problème de Cauchy (1.7) devient

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x_1(t-r)), & t \in [r,2r], \\ x(r) = x_1(r), \end{cases}$$

l'équation $x'(t) = f(t, x(t), x_1(t-r)), \quad t \in [r,2r]$,
s'écrit sous la forme intégrale suivante

$$x(t) = x_1(r) + \int_r^t f(s, x(s), x_1(s-r))ds, \quad t \in [r,2r], \tag{1.9}$$

donc, la solution sur $[r,2r]$, qu'on notera $x_2(t)$ est donnée par

$$x_2(t) = x_1(r) + \int_r^t f(s, x(s), x_1(s-r))ds, \quad t \in [r,2r], \tag{1.10}$$

et ainsi de suite.

Cette méthode s'appelle la méthode des pas.

Exemple 1.2 *On propose l'exemple suivant, sur lequel on va appliquer l'intégration par la méthode des pas.*

Soit le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t-r), \quad t \geq 0, & (1) \\ x(t) = 1, \qquad t \in [-r, 0], & (2) \end{cases} \tag{1.11}$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

Intégrons l'équation (1) sur $[0, 3r]$ *;*

i) La résolution sur $[0, r]$ *;*

soit $t \in [0, r]$, *alors* $t - r \in [-r, 0]$, *et de la on a*

$$x(t-r) = 1,$$

et le problème de Cauchy (1.11) devient

$$\begin{cases} x'(t) = a, \quad t \in [0, r], \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

l'équation $x'(t) = a$, *s'écrit pour* $t \in [0, r]$ *sous la forme intégrale suivante*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a ds, \tag{1.12}$$

il s'en suit que

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + \int_0^t a du \\ &= 1 + at, \end{aligned}$$

donc la solution sur $[0, r]$, *qu'on notera* $x_1(t)$ *est donnée par*

$$x_1(t) = 1 + at, \quad t \in [0, r].$$

ii) La résolution sur $[r, 2r]$ *;*

On refait l'opération sur $[r, 2r]$, *en considérant comme condition initiale* $x(t) = x_1(t)$ *sur* $[0, r]$.

Soit $t \in [r, 2r]$*, alors* $t - r \in [0, r]$ *et de la on a*

$$x(t-r) = x_1(t-r),$$

et le problème de Cauchy (1.11) devient

$$\begin{cases} x'(t) = ax_1(t-r), & t \in [r, 2r], \\ x(r) = x_1(r), \end{cases}$$

l'équation $x'(t) = ax_1(t-r)$*, s'écrit pour* $t \in [r, 2r]$ *sous la forme intégrale suivante*

$$x(t) = x_1(r) + \int_r^t ax_1(s-r)ds, \tag{1.13}$$

en posant $u = s - r$ *; on obtient*

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + ar + \int_0^{t-r} ax_1(u)du \\ &= 1 + ar + \int_0^{t-r} a(1+au)du \\ &= 1 + ar + a[u + a\frac{u^2}{2}]_0^{t-r} \\ &= 1 + ar + a[t - r + a\frac{(t-r)^2}{2}] \\ &= 1 + ar + a[t - r + a\frac{t^2 - 2rt + r^2}{2}] \\ &= 1 + ar + \frac{a}{2}[2t - 2r + at^2 - 2art + ar^2] \\ &= 1 + ar + \frac{a}{2}[at^2 + 2(1-ar)t + ar^2 - 2r] \\ &= \frac{a}{2}[at^2 + 2(1-ar)t + ar^2 - 2r + \frac{2}{a} + 2r] \\ &= \frac{a}{2}[at^2 + 2(1-ar)t + ar^2 + \frac{2}{a}], \end{aligned}$$

la solution sur $[r, 2r]$*, qu'on notera* $x_2(t)$ *est donnée par*

$$x_2(t) = \frac{a}{2}[at^2 + 2(1-ar)t + ar^2 + \frac{2}{a}], \quad t \in [r, 2r].$$

iii) La résolution sur [2r, 3r] ;

On considère, comme condition initiale $x(t) = x_2(t)$ *sur* $[r, 2r]$*.*

Soit $t \in [2r, 3r]$, alors $t-r \in [r, 2r]$ et de la on a

$$x(t-r) = ax_2(t-r),$$

et le problème de Cauchy (1.11) devient

$$\begin{cases} x'(t) = ax_2(t-r), \quad t \in [2r, 3r], \\ x(2r) = x_2(2r), \end{cases}$$

l'équation $x'(t) = ax_2(t-r)$, s'écrit pour $t \in [2r, 3r]$ sous la forme intégrale suivante

$$x(t) = x_2(2r) + \int_{2r}^{t} ax_2(s-r)ds, \tag{1.14}$$

en posant $u = s - r$; on obtient

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_2(2r) + \int_{r}^{t-r} ax_2(u)du \\
&= x_2(2r) + \int_{r}^{t-r} a[\frac{a}{2}[au^2 + 2(1-ar)u + ar^2 + \frac{2}{a}]]du \\
&= x_2(2r) + \int_{r}^{t-r} \frac{a^2}{2}[au^2 + 2(1-ar)u + ar^2 + \frac{2}{a}]du \\
&= x_2(2r) + \frac{a^2}{2}[a\frac{u^3}{3} + 2(1-ar)\frac{u^2}{2} + (ar^2 + \frac{2}{a})u]_r^{t-r} \\
&= x_2(2r) + \frac{a^2}{2}[a\frac{(t-r)^3}{3} + (1-ar)(t-r)^2 + (ar^2 + \frac{2}{a})(t-r)] \\
&\quad -\frac{a^2}{2}[a\frac{r^3}{3} + (1-ar)r^2 + (ar^2 + \frac{2}{a})r] \\
&= x_2(2r) + \frac{a^2}{2}[a\frac{t^3 - 3rt^2 + 3r^2t - r^3}{3} + (1-ar)(t^2 - 2rt + r^2) \\
&\quad + (ar^2 + \frac{2}{a})(t-r)] - \frac{a^2}{2}[a\frac{r^3}{3} + (1-ar)r^2 + (ar^2 + \frac{2}{a})r] \\
&= x_2(2r) + \frac{a^2}{2}[a\frac{t^3 - 3rt^2 + 3r^2t - r^3}{3} + (1-ar)t^2 \\
&\quad + (ar^2 - 2r + \frac{2}{a} + 2ar^2)t] \\
&\quad +\frac{a^2}{2}[r^2 - ar^3 - ar^3 - \frac{2}{a}r - a\frac{r^3}{3} - r^2 + ar^3 - ar^3 - \frac{2}{a}r],
\end{aligned}$$

Ceci nous donne

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_2(2r) + \frac{a^2}{2}[a\frac{t^3-3rt^2+3r^2t-r^3}{3} + (1-ar)t^2 + (3ar^2-2r+\frac{2}{a})t] \\
&\quad + \frac{a^2}{2}[-2ar^3 - \frac{4}{a}r - a\frac{r^3}{3}] \\
&= x_2(2r) + \frac{a^3}{6}[t^3 + (\frac{3}{a} - 3r - 3r)t^2 + (3r^2+9r^2 - \frac{6}{a}r + \frac{6}{a^2})t \\
&\quad - r^3 - 6r^3 - \frac{12}{a^2}r - r^3] \\
&= x_2(2r) + \frac{a^3}{6}[t^3 + (\frac{3}{a} - 6r)t^2 + (12r^2 - \frac{6}{a}r + \frac{6}{a^2})t - 8r^3 - \frac{12}{a^2}r] \\
&= \frac{a}{2}[a(2r)^2 + 4(1-ar)r + ar^2 + \frac{2}{a}] \\
&\quad + \frac{a^3}{6}[t^3 + 3(\frac{1}{a} - 2r)t^2 + 6(2r^2 - \frac{1}{a}r + \frac{1}{a^2})t - 8r^3 - \frac{12}{a^2}r],
\end{aligned}$$

la solution sur $[2r, 3r]$, *qu'on notera* $x_3(t)$ *est donnée par*

$$\begin{aligned}
x_3(t) &= \frac{a}{2}[a(2r)^2 + 4(1-ar)r + ar^2 + \frac{2}{a}] + \frac{a^3}{6}[t^3 + 3(\frac{1}{a} - 2r)t^2 \\
&\quad + 6(2r^2 - \frac{1}{a}r + \frac{1}{a^2})t - 8r^3 - \frac{12}{a^2}r], \quad t \in [2r, 3r].
\end{aligned}$$

Donc par la méthode des pas l'équation (1) admet les solutions suivantes sur les différents intervalles.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-r, 0], \\ x_1(t), & t \in [0, r], \\ x_2(t), & t \in [r, 2r], \\ x_3(t), & t \in [2r, 3r], \end{cases}$$

où $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ *sont les solutions trouvées ci-dessus.*

1.2.6 L'équation caractéristique

Considérons l'équation différentielle fonctionnelle linéaire à retard suivante

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t-r), \tag{1.15}$$

où $A, B \in \mathbb{R}$.

La fonction $x(t) = e^{\lambda t}$ est solution de (1.15) si et seulement si on a

$$\lambda e^{\lambda t} - Ae^{\lambda t} - Be^{\lambda(t-r)} = 0.$$

Ceci implique que

$$\lambda - A - Be^{-\lambda r} = 0.$$

Définition 1.13 *i) La fonction h donnée par*

$$h(\lambda) = \lambda - A - Be^{-\lambda r}, \tag{1.16}$$

est appelée fonction caractéristique de l'équation différentielle linéaire à retard (1.15) ; c'est un quasi-polynôme, c'est-à-dire un polynôme en λ, et en $e^{-\lambda}$.

ii) L'équation

$$h(\lambda) = \lambda - A - Be^{-\lambda r} = 0, \tag{1.17}$$

est nommée l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle linéaire à retard (1.15).

Remarques

i) L'équation caractéristique (1.17) peut *ê*tre aussi définie comme l'équation obtenue à partir de l'équation différentielle fonctionnelle linéaire à retard (1.15) en recherchant une solution non triviale de la forme $e^{\lambda t}c$, o*ù* c est une constante.

ii) Les valeurs λ sont connues sous le nom de valeurs caractéristiques, ou valeurs propres, de (1.15).

Exemple 1.3 *Soit l'équation différentielle fonctionnelle linéaire à retard suivante*

$$x'(t) = 2x(t) + 4x(t-1).$$

La fonction caractéristique est donnée par

$$h(\lambda) = \lambda - 2 - 4e^{-\lambda}.$$

Le Lemme suivant donne l'existence de solutions de l'équation (1.15).

Lemme 1.1 *[6] S'il existe une suite (λ_j) de solutions de l'équation (1.15) tel que $|\lambda_j| \to \infty$, quand $j \to \infty$, alors*

$$Re(\lambda_j) \to -\infty,$$

il existe un nombre réel α tel que toute solution de (1.15) satisfait $Re(\lambda) > \alpha$ et il existe un nombre fini de solutions tel que $a < |\lambda| < b$.

Introduction aux équations différentielles fonctionnelles mixtes EDFM

2

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité de solution d'une équation différentielle fonctionnelle mixte EDFM, l'intégration par la méthode des pas, ainsi que l'équation caractéristique de cette équation.

Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [2], [4], [5], [7] et [8].

2.1 Théorème d'existence et d'unicité de solutions

Soit l'équation différentielle fonctionnelle mixte EDFM suivante

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t-h), u(t+h)), \quad t \in (t_1, t_2), \tag{2.1}$$

avec $f \in C([t_1, t_2] \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ (l'espace de Banach des fonctions continues en $[t_1, t_2] \times \mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$) , $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $h > 0$.
Premièrement, on clarifie ce que signifie une solution d'une équation différentielle fonctionnelle mixte EDFM.

Définition 2.1 *Une solution de l'équation (2.1) est une fonction*

i) continue sur $[t_1 - h, t_2 + h]$.

ii) dérivable sur $[t_1, t_2]$ *et satisfait l'équation (2.1) sur l'intervalle* $[t_1, t_2]$.

Soit le problème à valeur initiale suivant

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t), u(t-h), u(t+h)), & t \in (t_1, t_2), \\ u(t) = \psi_1(t), & t \in [t_1 - h, t_1], \\ u(t) = \psi_2(t), & t \in [t_2, t_2 + h], \end{cases} \tag{2.2}$$

avec $\psi_1 \in C([t_1 - h, t_1]; \mathbb{R})$, $\psi_2 \in C([t_2, t_2 + h]; \mathbb{R})$.

Définition 2.2 *u est dite solution du problème à valeur initiale (2.2), si u solution de l'équation (2.1) sur $[t_1 - h, t_2 + h]$ et vérifie*

$$u(t) = \psi_1(t), \quad t \in [t_1 - h, t_1]. \tag{2.3}$$

$$u(t) = \psi_2(t), \quad t \in [t_2, t_2 + h]. \tag{2.4}$$

Le but de cette section est de trouver les conditions d'existence et d'unicité de solution du problème (2.2).

Soit u une solution du problème (2.2) qui s'écrit sous la forme intégrale suivante

$$u(t) = \begin{cases} \psi_1(t), & t \in [t_1 - h, t_1]. \\ \psi_1(t_1) + \displaystyle\int_{t_1}^{t} f(s, u(s), u(s-h), u(s+h))ds, & t \in [t_1, t_2]. \\ \psi_2(t), & t \in [t_2, t_2 + h]. \end{cases} \tag{2.5}$$

On définit l'opérateur A par

$$\begin{aligned} A : C[t_1 - h, t_2 + h] &\longrightarrow C[t_1 - h, t_2 + h] \\ u &\mapsto A(u), \end{aligned}$$

avec

$$A(u)(t) = \begin{cases} \psi_1(t), & t \in [t_1 - h, t_1], \\ \psi_1(t_1) + \int_{t_1}^{t} f(s, u(s), u(s-h), u(s+h))ds, & t \in [t_1, t_2], \\ \psi_2(t), & t \in [t_2, t_2 + h], \end{cases}$$

et $C[t_1 - h, t_2 + h]$ l'espace de Banach muni de la norme de la convergence uniforme, $\|.\|$.

Remarque 2.1 *On remarque que si A admet un point fixe alors ce point est solution du problème (2.2).*

Théorème 2.1 *[8] Supposons que*

1. *Il existe $L_f > 0$ telle que*

$$\|f(t, x_1, y_1, z_1) - f(t, x_2, y_2, z_2)\| \leq L_f(\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| + \|z_1 - z_2\|),$$

pour tout $t \in [t_1, t_2], \quad x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2.$

2. $6L_f(t_2 - t_1) < 1.$

Alors le problème (2.2) admet une solution unique.

preuve. Pour monter l'existence et l'unicité de solution, on applique "le principe de contraction de Banach" (voir le théorème (1.1)).

On a pour $t \in [t_1, t_2]$

$$\begin{aligned}
|A(u)(t) - A(v)(t)| &= \Big|\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t}[f(s,u(s),u(s-h),u(s+h)) \\
&\quad - f(s,v(s),v(s-h),v(s+h))]ds\Big| \\
&\leq \int_{t_1}^{t}|f(s,u(s),u(s-h),u(s+h)) \\
&\quad - f(s,v(s),v(s-h),v(s+h))|ds \\
&\leq \int_{t_1}^{t} L_f(\|u-v\| + \|u-v\| + \|u-v\|)ds \\
&\leq 3L_f\int_{t_1}^{t}\|u-v\|ds \\
&\leq 3L_f\|u-v\|(t-t_1) \\
&\leq 3L_f\|u-v\|(t_2-t_1).
\end{aligned}$$

Alors

$$\|A(u) - A(v)\| \leq 3L_f\|u-v\|(t_2-t_1), \tag{2.6}$$

avec L_f constante de Lipschitz de la fonction f.

On a aussi pour $t \in [t_1 - h, t_1] \cup [t_2, t_2 + h], |A(u)(t) - A(v)(t)| = 0.$

Alors A est Lipschitzienne avec une constante de Lipschitz $L_A = 3L_f(t_2 - t_1)$.

Comme $3L_f(t_2 - t_1) < 1$, l'opérateur A est contractant.

Par le principe de contraction de Banach l'opérateur A admet un point fixe unique, et par la remarque (2.1) ce point fixe est une solution du problème (2.2).
□

Exemple 2.1 *On considère les fonctions f, ψ_1 et ψ_2 définies par*

$$f(t,u(t),u(t-h),u(t+h)) = u(t) + u(t-1) + u(t+1), t \in I = [t_1,t_2] \subset \mathbb{R},$$

$$\psi_1(t) = 1, \quad t \in [t_1 - 1, t_1],$$

$$\psi_2(t) = t, \quad t \in [t_2, t_2 + 1].$$

On obtient donc le problème suivant

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) + u(t-1) + u(t+1), & t \in I = [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}, \\ u(t) = 1, & t \in [t_1 - 1, t_1], \\ u(t) = t, & t \in [t_2, t_2 + 1], \end{cases} \tag{2.7}$$

Soit u une solution du problème (2.7), qui s'écrit sous la forme intégrale suivante

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_1 - 1, t_1]. \\ 1 + \displaystyle\int_{t_1}^{t} [u(s) + u(s-1) + u(s+1)] ds, & t \in [t_1, t_2]. \\ t, & t \in [t_2, t_2 + 1]. \end{cases} \tag{2.8}$$

On définit l'opérateur A par

$$\begin{aligned} A : C([t_1 - 1, t_2 + 1]) &\longrightarrow C([t_1 - 1, t_2 + 1]) \\ u &\mapsto A(u), \end{aligned}$$

avec

$$A(u)(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_1 - 1, t_1], \\ 1 + \displaystyle\int_{t_1}^{t} [u(s) + u(s-1) + u(s+1)] ds, & t \in [t_1, t_2], \\ t, & t \in [t_2, t_2 + 1], \end{cases}$$

et $C([t_1 - 1, t_2 + 1])$ l'espace de Banach muni de la norme de la convergence uniforme, $\|.\|$.

On a d'après le théorème (2.1)

i) $f(t, u(t), u(t-h), u(t+h)) = u(t) + u(t-1) + u(t+1)$ est lipschitzienne, avec $L_f = 1$ constante de Lipschitz.

En effet,

$\forall t \in [t_1, t_2], \quad x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2,$ *on a*

$$\begin{aligned} \|f(t, x_1, y_1, z_1) - f(t, x_2, y_2, z_2)\| &= \|(x_1 + y_1 + z_1) - (x_2 + y_2 + z_2)\| \\ &= \|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) + (z_1 - z_2)\| \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| + \|z_1 - z_2\|. \end{aligned}$$

ii) A est lipschitzienne .

En effet

$$
\begin{aligned}
|A(u)(t) - A(v)(t)| &= |\int_{t_1}^{t} [(u(s) + u(s-1) + u(s+1)) \\
&\quad - (v(s) + v(s-1) + v(s+1))]ds| \\
&= |\int_{t_1}^{t} [(u(s) - v(s)) + (u(s-1) - v(s-1)) \\
&\quad + (u(s+1)) - v(s+1))]ds| \\
&\leq \int_{t_1}^{t} |(u(s) - v(s)) + (u(s-1) - v(s-1)) \\
&\quad + (u(s+1)) - v(s+1))|ds \\
&\leq \int_{t_1}^{t} (|u(s) - v(s)| + |u(s-1) - v(s-1)| \\
&\quad + |u(s+1)) - v(s+1)|)ds \\
&\leq \int_{t_1}^{t} (\|u-v\| + \|u-v\| + \|u-v\|)ds \\
&\leq 3\|u-v\|(t-t_1) \\
&\leq 3\|u-v\|(t_2-t_1),
\end{aligned}
$$

donc

$$\|A(u) - A(v)\| \leq 3\|u-v\|(t_2-t_1).$$

On a aussi pour $t \in [t_1 - 1, t_1] \cup [t_2, t_2 + 1], |A(u)(t) - A(v)(t)| = 0.$
Alors A *est Lipschitzienne avec une constante de Lipschitz* $L_A = 3(t_2 - t_1).$

Donc on a

1. *Il existe* $L_f > 0$ $(L_f = 1)$ *tel que*

$$\|f(t, x_1, y_1, z_1) - f(t, x_2, y_2, z_2)\| \leq L_f(\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| + \|z_1 - z_2\|),$$

   pour tout $t \in [t_1, t_2]$, $\quad x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2.$

2. *Si on suppose que* $3(t_2 - t_1) < 1$,

alors d'après le théorème (2.1) le problème (2.7) admet une solution unique.

2.2 Intégration par la méthode des pas

Dans cette section on construit la solution d'une équation différentielle fonctionnelle mixte EDFM, en utilisant la méthode des pas, qui fournit une formule itérative, on peut se référer aux [4],[5] et [7].

Considérons l'équation différentielle fonctionnelle linéaire mixte EDFM suivante

$$u'(t) = au(t) + bu(t-1) + cu(t+1), \quad t \in I = [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.2 *On remarque que*

— *pour $c = 0$ on obtient une équation différentielle à retard*

$$u'(t) = au(t) + bu(t-1),$$

— *pour $b = 0$ on obtient une équation différentielle à argument avancé*

$$u'(t) = au(t) + cu(t+1),$$

— *pour $b = c = 0$ on obtient une équation différentielle ordinaire*

$$u'(t) = au(t).$$

Proposition 2.1 *Pour la transformation*

$$x(t) = e^{-at}u(t), \tag{2.10}$$

l'équation différentielle fonctionnelle mixte EDFM (2.9) s'écrit

$$x'(t) = Ax(t+1) + Bx(t-1), \tag{2.11}$$

avec $\quad A = ce^{a}, \quad B = be^{-a}.$

Preuve. on a

$$\begin{aligned}
x'(t) &= -ae^{-at}u(t) + e^{-at}u'(t) \\
&= -ae^{-at}u(t) + e^{-at}[au(t) + bu(t-1) + cu(t+1)] \\
&= -ae^{-at}u(t) + ae^{-at}u(t) + be^{-at}u(t-1) + ce^{-at}u(t+1) \\
&= ce^{-at}u(t+1) + be^{-at}u(t-1) \\
&= ce^{-at}e^{a(t+1)}x(t+1) + be^{-at}e^{a(t-1)}x(t-1) \\
&= ce^{a}x(t+1) + be^{-a}x(t-1) \\
&= Ax(t+1) + Bx(t-1).
\end{aligned}$$

□

Alors par la substitution (2.10), on a transformée (2.9) en une équation de la forme

$$x'(t) = Ax(t+1) + Bx(t-1), \quad t \in [t_1, t_2].$$

Cette équation s'écrit sous la forme

$$Ax(t+1) = x'(t) - Bx(t-1),$$

alors

$$x(t+1) = \frac{1}{A}x'(t) - \frac{B}{A}x(t-1),$$

et donc

$$x(t) = \frac{1}{A}x'(t-1) - \frac{B}{A}x(t-2),$$

c'est-à-dire

$$x(t) = \alpha x'(t-1) + \beta x(t-2), \quad t \in [t_1+1, t_2+1], \tag{2.12}$$

avec $\alpha = \frac{1}{A}$, $\beta = \frac{-B}{A}$, *et* $A \neq 0$.

Pour simplifier les calculs on prend $t_1 = 0, t_2 = T-1$, avec $T \in \mathbb{N}$.

L'équation (2.12) devient

$$x(t) = \alpha x'(t-1) + \beta x(t-2), \quad t \in [1, T]. \tag{2.13}$$

Remarque 2.3 *Il résulte de cette équation que pour trouver la solution $x(t)$ sur l'intervalle $[m, m+1]$ il faut connaître sa valeur sur l'intervalle $[m-2, m]$, avec m un entier positif.*

Contrairement aux équations différentielles ordinaires, la donnée d'un point caractérisant les conditions initiales ne suffit donc pas pour trouver une solution, il faut y ajouter une infinité de points appartenant au segment $[m-2, m]$.
C'est-à-dire qu'il est nécessaire de spécifier une condition initiale de la forme $x(t) = \varphi(t)$ pour $t \in [m-2, m]$, où $\varphi(t)$ est une fonction continue .

La méthode est dite "Méthode des pas".

Donc pour déterminer la solution sur l'intervalle $[1, 2]$, il est nécessaire de le connaître sur l'intervalle $[-1, 1]$.

On définie alors $x(t)$ pour $t \in [-1,1]$ par

$$x(t) = \varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & t \in [-1,0], \\ \varphi_2(t), & t \in [0,1], \end{cases} \tag{2.14}$$

avec la fonction φ est prise initialement dans l'espace $C([-1,1])$.

Prenant (2.13) comme un problème de Cauchy avec les conditions initiales $x(t) = \varphi(t), t \in [-1,1]$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x(t) = \alpha x'(t-1) + \beta x(t-2), \quad t \in [1,T]. \\ x(t) = \varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & t \in [-1,0]. \\ \varphi_2(t), & t \in [0,1]. \end{cases} \end{cases}$$

i) La résolution sur $[1,2]$;

Pour $t \in [1,2]$, on a

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha x'(t-1) + \beta x(t-2) \\ &= \alpha \varphi_2'(t-1) + \beta \varphi_1(t-2) \\ &= \alpha \varphi'(t-1) + \beta \varphi(t-2), \end{aligned}$$

pour que cette équation soit correcte, il faut que φ soit de classe $C^1([-1,1])$, donc la solution sur $[1,2]$, qu'on notera $x_1(t)$ est donnée par

$$x_1(t) = \alpha \varphi'(t-1) + \beta \varphi(t-2), \quad t \in [1,2]. \tag{2.15}$$

On refait l'opération sur$[2,3]$, et d'après la remarque (2.3), il faut connaitre x sur $[0,2]$.

ii) La résolution sur $[2,3]$;

Pour $t \in [2,3]$, on a

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha x'(t-1) + \beta x(t-2) \\ &= \alpha \frac{d}{dt}(\alpha \varphi_2'(t-2) + \beta \varphi_1(t-3)) + \beta \varphi_2(t-2) \\ &= \alpha^2 \varphi_2''(t-2) + \alpha\beta \varphi_1'(t-3) + \beta \varphi_2(t-2) \\ &= \alpha^2 \varphi''(t-2) + \alpha\beta \varphi'(t-3) + \beta \varphi(t-2), \end{aligned}$$

de même, pour que cette équation soit correcte, il faut que φ soit de classe $C^2([-1,1])$, et la solution sur $[2,3]$, qu'on notera $x_2(t)$ est donnée par

$$x_2(t) = \alpha^2 \varphi''(t-2) + \beta \varphi(t-2) + \alpha\beta \varphi'(t-3), \quad t \in [2,3]. \tag{2.16}$$

iii) La résolution sur $[3,4]$;

Pour $t \in [3,4]$, on a

$$\begin{aligned}
x(t) &= \alpha x'(t-1) + \beta x(t-2) \\
&= \alpha \frac{d}{dt}(\alpha^2 \varphi_2''(t-3) + \beta\varphi_2(t-3) + \alpha\beta\varphi_1'(t-4)) \\
&\quad + \beta(\alpha\varphi_2'(t-3) + \beta\varphi_1(t-4)) \\
&= \alpha^3\varphi_2'''(t-3) + \alpha\beta\varphi_2'(t-3) + \alpha^2\beta\varphi_1''(t-4) + \alpha\beta\varphi_2'(t-3) + \beta^2\varphi_1(t-4) \\
&= \alpha^3\varphi_2'''(t-3) + 2\alpha\beta\varphi_2'(t-3) + \alpha^2\beta\varphi_1''(t-4) + \beta^2\varphi_1(t-4) \\
&= \alpha^3\varphi'''(t-3) + 2\alpha\beta\varphi'(t-3) + \alpha^2\beta\varphi''(t-4) + \beta^2\varphi(t-4),
\end{aligned}$$

pour que cette équation soit correcte, il faut que φ soit de classe $C^3([-1,1])$, et la solution sur $[3,4]$, qu'on notera $x_3(t)$ est donnée par

$$x_3(t) = \alpha^3\varphi'''(t-3) + 2\alpha\beta\varphi'(t-3) + \alpha^2\beta\varphi''(t-4) + \beta^2\varphi(t-4), \quad t \in [3,4]. \tag{2.17}$$

iv) La résolution sur $[4,5]$;

Pour $t \in [4,5]$, on a

$$\begin{aligned}
x(t) &= \alpha x'(t-1) + \beta x(t-2) \\
&= \alpha \frac{d}{dt}(\alpha^3\varphi_2'''(t-4) + 2\alpha\beta\varphi_2'(t-4) + \alpha^2\beta\varphi_1''(t-5) + \beta^2\varphi_1(t-5)) \\
&\quad + \beta(\alpha^2\varphi_2''(t-4) + \beta\varphi_2(t-4) + \alpha\beta\varphi_1'(t-5)) \\
&= \alpha^4\varphi_2^{(4)}(t-4) + 2\alpha^2\beta\varphi_2''(t-4) + \alpha^3\beta\varphi_1'''(t-5) + \alpha\beta^2\varphi_1'(t-5) \\
&\quad + \alpha^2\beta\varphi_2''(t-4) + \beta^2\varphi_2(t-4) + \alpha\beta^2\varphi_1'(t-5) \\
&= \alpha^4\varphi_2^{(4)}(t-4) + 3\alpha^2\beta\varphi_2''(t-4) + \alpha^3\beta\varphi_1'''(t-5) \\
&\quad + 2\alpha\beta^2\varphi_1'(t-5) + \beta^2\varphi_2(t-4) \\
&= \alpha^4\varphi^{(4)}(t-4) + 3\alpha^2\beta\varphi''(t-4) + \alpha^3\beta\varphi'''(t-5) \\
&\quad + 2\alpha\beta^2\varphi'(t-5) + \beta^2\varphi(t-4),
\end{aligned}$$

pour que cette équation soit correcte, il faut que φ soit de classe $C^4([-1,1])$, et la solution sur $[4,5]$, qu'on notera $x_4(t)$ est donnée par

$$x_4(t) = \alpha^4\varphi^{(4)}(t-4) + 3\alpha^2\beta\varphi''(t-4) + \alpha^3\beta\varphi'''(t-5) + 2\alpha\beta^2\varphi'(t-5) + \beta^2\varphi(t-4), \tag{2.18}$$

$t \in [4,5]$.

et ainsi de suite.

Du fait que, dans chaque intervalle, la solution $x(t)$ est exprimée par des dérivées d'ordre croissant de la fonction φ, il faut prendre φ dans $C^\infty([-1,1])$.

A partir des expressions ci-dessus pour la solution $x(t)$, il s'ensuit que cette solution s'écrit sous les formules itératives suivantes, où l est un nombre entier

— Sur l'intervalle $[2l-1, 2l]$,

$$x(t) = \sum_{k=0}^{l-1} \gamma_{l,2k}\alpha^{2k}\beta^{l-k}\varphi^{(2k)}(t-2l) + \sum_{k=0}^{l-1} \gamma_{l,2k+1}\alpha^{2k+1}\beta^{l-k-1}\varphi^{(2k+1)}(t-(2l-1)). \tag{2.19}$$

— Sur l'intervalle $[2l, 2l+1]$,

$$x(t) = \sum_{k=0}^{l} \delta_{l,2k}\alpha^{2k}\beta^{l-k}\varphi^{(2k)}(t-2l) + \sum_{k=0}^{l-1} \delta_{l,2k+1}\alpha^{2k+1}\beta^{l-k}\varphi^{(2k+1)}(t-(2l+1)), \tag{2.20}$$

où $\gamma_{v,w}$ et $\delta_{v,w}$,$v, w \in \mathbb{N}$ sont défini pour $l \geq 1$ et $v \leq 2l-1$ comme suit

$$\gamma_{l,2k} = \sum_{i=0}^{k} \gamma_{l-k-1+i,2i} + \sum_{i=0}^{k-1} \delta_{l-k-1+i,2i+1}. \tag{2.21}$$

$$\gamma_{l,2k+1} = \sum_{i=0}^{k} \gamma_{l-k-1+i,2i} + \sum_{i=0}^{k-1} \delta_{l-k-1+i,2i+1}. \tag{2.22}$$

$$\delta_{l,2k} = \gamma_{l+1,2k}. \tag{2.23}$$

$$\delta_{l,2k+1} = \gamma_{l,2k+1}. \tag{2.24}$$

On peut montrer que $\gamma_{l,0} = 1, \gamma_{l,2l-1} = 1, \gamma_{l,2l-2} = 1, \delta_{l,0} = 1,$
$\delta_{l,2l-1} = 1, \delta_{l,2l} = 1$, et établir les relations suivantes

$$\gamma_{l,2k-1} + \gamma_{l,2k} = \gamma_{l+1,2k}. \tag{2.25}$$

$$\gamma_{l+1,2k} + \gamma_{l,2k+1} = \gamma_{l+1,2k+1}. \tag{2.26}$$

On note que $\gamma_{v,w} = \delta_{v,w} = 0$ pour $v < 0$ et que $\gamma_{l,w} = \delta_{l,w} = 0$ pour $w > 2l-1$, (voir [4],[5] et [7]).

En utilise la substitution (2.10) on trouve les solutions de (2.9),

— Sur l'intervalle $[2l-1, 2l]$,

$$u(t) = e^{at}[\sum_{k=0}^{l-1} \gamma_{l,2k}\alpha^{2k}\beta^{l-k}\varphi^{(2k)}(t-2l) + \sum_{k=0}^{l-1} \gamma_{l,2k+1}\alpha^{2k+1}\beta^{l-k-1}\varphi^{(2k+1)}(t-(2l-1))]. \tag{2.27}$$

— Sur l'intervalle $[2l, 2l+1]$,

$$u(t) = e^{at}[\sum_{k=0}^{l} \delta_{l,2k}\alpha^{2k}\beta^{l-k}\varphi^{(2k)}(t-2l) + \sum_{k=0}^{l-1} \delta_{l,2k+1}\alpha^{2k+1}\beta^{l-k}\varphi^{(2k+1)}(t-(2l+1))]. \tag{2.28}$$

preuve. On démontre les expressions (2.19) et (2.20) par récurrence.

Etape 1) $l = 1$, c'est-à-dire, $t \in [1, 2]$ et $t \in [2, 3]$.

Pour $t \in [1, 2]$ on a trouvé

$$x(t) = x_1(t) = \alpha\varphi'(t-1) + \beta\varphi(t-2),$$

et d'aprés la formule (2.19) on a

$$\sum_{k=0}^{0} \gamma_{1,2k}\alpha^{2k}\beta^{1-k}\varphi^{(2k)}(t-2) + \sum_{k=0}^{0} \gamma_{1,2k+1}\alpha^{2k+1}\beta^{-k}\varphi^{(2k+1)}(t-1)$$
$$= \gamma_{1,0}\beta\varphi(t-2) + \gamma_{1,1}\alpha\varphi'(t-1),$$

en utilise $\gamma_{1,0} = \gamma_{1,1} = 1$ on obtient

$$\begin{aligned} \gamma_{1,0}\beta\varphi(t-2) + \gamma_{1,1}\alpha\varphi'(t-1) &= \beta\varphi(t-2) + \alpha\varphi'(t-1) \\ &= x(t). \end{aligned}$$

Pour $t \in [2, 3]$ on a trouvé

$$x(t) = x_2(t) = \alpha^2\varphi''(t-2) + \beta\varphi(t-2) + \alpha\beta\varphi'(t-3),$$

et d'après la formule (2.20) on a

$$\sum_{k=0}^{1} \delta_{1,2k}\alpha^{2k}\beta^{1-k}\varphi^{(2k)}(t-2) + \sum_{k=0}^{0} \delta_{1,2k+1}\alpha^{2k+1}\beta^{1-k}\varphi^{(2k+1)}(t-3) =$$
$$\delta_{1,0}\beta\varphi(t-2) + \delta_{1,2}\alpha^2\varphi''(t-2) + \delta_{1,1}\alpha\beta\varphi'(t-3),$$

en utilise $\delta_{1,0} = \delta_{1,2} = \delta_{1,1} = 1$ on obtient

$$\begin{aligned} \delta_{1,0}\beta\varphi(t-2) + \delta_{1,2}\alpha^2\varphi''(t-2) + \delta_{1,1}\alpha\beta\varphi'(t-3) &= \beta\varphi(t-2) + \alpha^2\varphi''(t-2) \\ &\quad + \alpha\beta\varphi'(t-3) \\ &= x(t), \end{aligned}$$

donc les formules (2.19) et (2.20) sont vérifiée pour $l = 1$.

Etape 2) Supposons que les formules (2.19) et (2.20) sont vrai à l'ordre l, c'est-à-dire $x(t)$ est donnée par (2.19) sur $[2l-1, 2l]$, et par (2.20) sur $[2l, 2l+1]$, et montrons qu'elles sont vrai à l'ordre $l+1$ grâce à l'hypothèse de récurrence, c'est-à-dire pour $t \in [2l+1, 2l+2]$ et pour $t \in [2l+2, 2l+3]$.

D'abord, on montre la formule (2.19) dans l'intervalle $[2l+1, 2l+2]$, c'est-à-dire on montre que

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{l} \gamma_{l+1,2k}\alpha^{2k}\beta^{l+1-k}\varphi^{(2k)}(t-(2l+2)) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{l} \gamma_{l+1,2k+1}\alpha^{2k+1}\beta^{l-k}\varphi^{(2k+1)}(t-(2l+1)), \end{aligned} \tag{2.29}$$

$t \in [2l+1, 2l+2]$.

Or (2.12) donne $x(t) = \alpha x'(t-1) + \beta x(t-2)$.

Ainsi pour $t \in [2l+1, 2l+2]$, on a :

$t-1 \in [2l, 2l+1]$, et la formule (2.20) donne

$$\begin{aligned} x(t-1) &= \sum_{k=0}^{l} \delta_{l,2k}\alpha^{2k}\beta^{l-k}\varphi^{(2k)}(t-1-2l) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{l-1} \delta_{l,2k+1}\alpha^{2k+1}\beta^{l-k}\varphi^{(2k+1)}(t-1-(2l+1)). \end{aligned}$$

$t-2 \in [2l-1, 2l]$ et la formule (2.19) donne

$$\begin{aligned} x(t-2) &= \sum_{k=0}^{l-1} \gamma_{l,2k}\alpha^{2k}\beta^{l-k}\varphi^{(2k)}(t-2-2l) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{l-1} \gamma_{l,2k+1}\alpha^{2k+1}\beta^{l-k-1}\varphi^{(2k+1)}(t-2-(2l-1)), \end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha x'(t-1) + \beta x(t-2) \\ &= \alpha \frac{d}{dt}[\sum_{k=0}^{l} \delta_{l,2k}\alpha^{2k}\beta^{l-k}\varphi^{(2k)}(t-1-2l) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{l-1} \delta_{l,2k+1}\alpha^{2k+1}\beta^{l-k}\varphi^{(2k+1)}(t-2l-2)] \\ &\quad + \beta[\sum_{k=0}^{l-1} \gamma_{l,2k}\alpha^{2k}\beta^{l-k}\varphi^{(2k)}(t-2-2l) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{l-1} \gamma_{l,2k+1}\alpha^{2k+1}\beta^{l-k-1}\varphi^{(2k+1)}(t-2l-1)], \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{l} \delta_{l,2k}\alpha^{2k+1}\beta^{l-k}\varphi^{(2k+1)}(t-1-2l) \\ &+ \sum_{k=0}^{l-1} \delta_{l,2k+1}\alpha^{2k+2}\beta^{l-k}\varphi^{(2k+2)}(t-2l-2)) \\ &+ \sum_{k=0}^{l-1} \gamma_{l,2k}\alpha^{2k}\beta^{l-k+1}\varphi^{(2k)}(t-2-2l) \\ &+ \sum_{k=0}^{l-1} \gamma_{l,2k+1}\alpha^{2k+1}\beta^{l-k}\varphi^{(2k+1)}(t-2l-1). \end{aligned}$$

En utilise $\gamma_{l,2l+1} = 0$ et les équations (2.23) et (2.24)

$$\delta_{l,2k} = \gamma_{l+1,2k}, \qquad \delta_{l,2k+1} = \gamma_{l,2k+1},$$

on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{l} \gamma_{l+1,2k}\alpha^{2k+1}\beta^{l-k}\varphi^{(2k+1)}(t-1-2l) \\ &+ \sum_{k=0}^{l-1} \gamma_{l,2k+1}\alpha^{2k+2}\beta^{l-k}\varphi^{(2k+2)}(t-2l-2) \\ &+ \sum_{k=0}^{l-1} \gamma_{l,2k}\alpha^{2k}\beta^{l-k+1}\varphi^{(2k)}(t-2-2l) \\ &+ \sum_{k=0}^{l-1} \gamma_{l,2k+1}\alpha^{2k+1}\beta^{l-k}\varphi^{(2k+1)}(t-2l-1) \\ &= \sum_{k=0}^{l}(\gamma_{l+1,2k}+\gamma_{l,2k+1})\alpha^{2k+1}\beta^{l-k}\varphi^{(2k+1)}(t-(2l+1)) \\ &- \gamma_{l,2l+1}\alpha^{2l+1}\varphi^{(2l+1)}(t-(2l+1)) + \sum_{k=0}^{l-1} \gamma_{l,2k}\alpha^{2k}\beta^{l-k+1}\varphi^{(2k)}(t-(2l+2)) \\ &+ \sum_{k=0}^{l-1} \gamma_{l,2k+1}\alpha^{2k+2}\beta^{l-k}\varphi^{(2k+2)}(t-(2l-2)), \end{aligned}$$

en utilisant les relations (2.25) et (2.26)

$$\gamma_{l,2k-1}+\gamma_{l,2k} = \gamma_{l+1,2k} \quad et \quad \gamma_{l+1,2k}+\gamma_{l,2k+1} = \gamma_{l+1,2k+1}$$

et le changement de variable $k+1=r$, on trouve

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=0}^{l}\gamma_{l+1,2k+1}\alpha^{2k+1}\beta^{l-k}\varphi^{(2k+1)}(t-(2l+1)) \\
&\quad+\sum_{r=1}^{l}\gamma_{l,2r-1}\alpha^{2r}\beta^{l-r+1}\varphi^{(2r)}(t-(2l+2)) \\
&\quad+\sum_{k=0}^{l-1}\gamma_{l,2k}\alpha^{2k}\beta^{l-k+1}\varphi^{(2k)}(t-(2l+2)) \\
&= \sum_{k=0}^{l}\gamma_{l+1,2k+1}\alpha^{2k+1}\beta^{l-k}\varphi^{(2k+1)}(t-(2l+1))-\gamma_{l,-1}\beta^{l+1}\varphi(t-(2l+2)) \\
&\quad-\gamma_{l,2l}\alpha^{2l}\beta\varphi^{(2l)}(t-(2l+2)) \\
&\quad+\sum_{k=0}^{l}(\gamma_{l,2k-1}+\gamma_{l,2k})\alpha^{2k}\beta^{l-k+1}\varphi^{(2k)}(t-(2l+2)),
\end{aligned}$$

or $\gamma_{l,2l}=\gamma_{l,-1}=0$, donc

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=0}^{l}\gamma_{l+1,2k}\alpha^{2k}\beta^{l+1-k}\varphi^{(2k)}(t-(2l+2)) \\
&\quad+\sum_{k=0}^{l}\gamma_{l+1,2k+1}\alpha^{2k+1}\beta^{l-k}\varphi^{(2k+1)}(t-(2l+1)).
\end{aligned}$$

Cela montre la formule (2.29) à l'ordre $l+1$, donc l'expression (2.19) est vérifiées pour $t\in[2l-1,2l]$.

On refait le même travail sur l'intervalle $[2l+2,2l+3]$, pour trouver l'expression (2.20) à l'ordre $l+1$, c'est-à-dire on montre que

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=0}^{l+1}\delta_{l+1,2k}\alpha^{2k}\beta^{l+1-k}\varphi^{(2k)}(t-2(l+1)) \\
&\quad+\sum_{k=0}^{l}\delta_{l+1,2k+1}\alpha^{2k+1}\beta^{l+1-k}\varphi^{(2k+1)}(t-(2(l+1)+1)),
\end{aligned}$$

$t\in[2l+2,2l+3]$.

□

Remarque 2.4 *$x(t)$ peut être étendue vers la gauche d'une manière similaire en réécrire (2.11) comme suit*

$$x(t)=\alpha x'(t+1)+\beta x(t+2),$$

dans ce cas, on obtient des expressions pour $x(t)$ analogue à (2.19) et (2.20).

Exemple 2.2 *On présente l'exemple de l'équation différentielle mixte EDFM suivant*

$$u'(t) = u(t-1) + u(t+1). \tag{2.30}$$

Intégrons cette équation sur $[1,4]$.

L'équation (2.30) s'écrit sous la forme

$$u(t+1) = u'(t) - u(t-1),$$

alors

$$u(t) = u'(t-1) - u(t-2). \tag{2.31}$$

Prenant (2.31) comme un problème de Cauchy avec les conditions initiales $u(t) = \varphi(t)$, $t \in [-1,1]$ *c'est-à-dire*

$$\begin{cases} u(t) = u'(t-1) + u(t-2), & t \in [1,4] \\ u(t) = \varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) = t, & t \in [-1,0] \\ \varphi_2(t) = 2t^2, & t \in [0,1]. \end{cases} \end{cases}$$

i) Pour $t \in [1,2]$*, on a*

$$\begin{aligned} u(t) &= \varphi_2'(t-1) + \varphi_1(t-2) \\ &= 4(t-1) + (t-2) \\ &= 5t - 6, \end{aligned}$$

la solution sur $[1,2]$*, qu'on notera* $u_1(t)$ *est donnée par*

$$u_1(t) = 5t - 6, \quad t \in [1,2].$$

ii) Pour $t \in [2,3]$*, on a*

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1'(t-1) + \varphi_2(t-2) \\ &= \frac{d}{dt}(5(t-1) - 6) + \varphi_2(t-2) \\ &= 5 + 2(t-2)^2 \\ &= 2t^2 - 8t + 13, \end{aligned}$$

la solution sur $[2,3]$*, qu'on notera* $u_2(t)$ *est donnée par*

$$u_2(t) = 2t^2 - 8t + 13, \quad t \in [2,3].$$

iii) Pour $t \in [3,4]$*, on a*

$$\begin{aligned} u(t) &= u_2'(t-1) + u_1(t-2) \\ &= \frac{d}{dt}(2(t-1)^2 - 8(t-1) + 13) + (5(t-2) - 6) \\ &= \frac{d}{dt}(2t^2 - 12t + 23) + 5t - 16 \\ &= 4t - 12 + 5t - 16 \\ &= 9t - 28, \end{aligned}$$

la solution sur $[3, 4]$*, qu'on notera* $u_3(t)$ *est donnée par*

$$u_3(t) = 9t - 28, \quad t \in [3, 4].$$

Donc par la méthode des pas l'équation (2.30) admet les solutions suivantes sur les différents intervalles.

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = t. & t \in [-1, 0] \\ \varphi_2(t) = t^2. & t \in [0, 1] \\ u_1(t) = 5t - 6. & t \in [1, 2] \\ u_2(t) = 2t^2 - 8t + 13. & t \in [2, 3] \\ u_3(t) = 9t - 28. & t \in [3, 4]. \end{cases}$$

2.3 L'équation caractéristique

On considère l'équation différentielle fonctionnelle linéaire mixte (2.9)

$$u'(t) = au(t) + bu(t-1) + cu(t+1), \quad t \in I = [t_1, t_2] \subset \mathbb{R},$$

avec a, b et $c \in \mathbb{R}$.

La fonction $u(t) = e^{\lambda t}$ est solution de (2.9) si et seulement si

$$\lambda e^{\lambda t} - ae^{\lambda t} - be^{\lambda(t-1)} - ce^{\lambda(t+1)} = 0.$$

Ceci implique que

$$\lambda - a - be^{-\lambda} - ce^{\lambda} = 0.$$

Définition 2.3 *i) La fonction h donnée par*

$$h(\lambda) = \lambda - a - be^{-\lambda} - ce^{\lambda}, \tag{2.32}$$

est appelée fonction caractéristique de l'équation différentielle linéaire mixte (2.9); c'est un quasi-polynôme, c'est-à-dire un polynôme en λ*,* $e^{-\lambda}$ *et en* e^{λ}*.*

ii) L'équation

$$h(\lambda) = \lambda - a - be^{-\lambda} - ce^{\lambda} = 0, \tag{2.33}$$

est nommée l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle linéaire mixte EDFM (2.9).

Remarques

- L'équation caractéristique (2.33) peut être aussi définie comme l'équation obtenue à partir de l'équation différentielle fonctionnelle linéaire mixte (2.9) en recherchant une solution non triviale de la forme $e^{\lambda t}c$, o$\grave{u}$ c est une constante.

- Les valeurs λ sont connues sous le nom de valeurs caractéristiques, ou valeurs propres, de (2.9).

Exemples

1) Soit l'équation différentielle fonctionnelle linéaire mixte suivante

$$u'(t) = 2u(t) + 4u(t-1) - u(t+1).$$

La fonction caractéristique est donnée par

$$h(\lambda) = \lambda - 2 - 4e^{-\lambda} + e^{\lambda}.$$

2) Soit l'équation différentielle fonctionnelle linéaire mixte suivante

$$u'(t) = \frac{5}{4}u(t) - 7u(t-1) - 2u(t+1).$$

La fonction caractéristique est donnée par

$$h(\lambda) = \lambda - \frac{5}{4} + 7e^{-\lambda} + 2e^{\lambda}.$$

Bibliographie

[1] R. M. Brooks and K Schmitt, *The contraction mapping principle and some applications*, Electronic Journal of Differential Equations, Monograph 09, 2009.

[2] V.A.Darzu-Ilea, *Some functional differential equations with both retarded and advanced arguments*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., vol. 38, No. 1, 2009, pp. 45-53.

[3] P. N. Dutta and B. S. Choudhury, *A generalisation of contraction principle in metric spaces*, Fixed point theory and applications, 2008.

[4] N. J. Ford and P. M. Lumb, *Mixed-type functional differential equations : a numerical approach (Extended version)*, Technical Report, Department of Mathematics, University of Chester, 2007.

[5] N. J. Ford and P. M. Lumb, *Mixed-type functional differential equations : a numerical approach*, Journal of Computational and Applied Mathematics, University of Chester, 2012.

[6] J.K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1977.

[7] V. Iakovleva and C. J. Vanegas, *On the solution of differential equations with delayed and advanced arguments*, Electronic Journal of Differential Equations, Conference 13, 2005, pp. 57-63.

[8] I.A. Rus and V.A.Darzu-Ilea, *First order functional-differential equations with both advanced and retarded arguments*, Fixed Point Theory, Vol. 5, No. 1, 2004, pp. 103-115.

[9] H. Smith, *An introduction to Delay differential equations with applications to the life sciences*, Springer-Verlag, New York, 2011.