الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen Algérie
جامعة أبي بكر بلقايد
تلمسان الجزائر

FACULTÉ DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER
EN MATHEMATIQUES

Option : Perturbation,moyennisation et application aux biomathématique (PeMAB)

Thème :

Approche variationnelle pour une classe d'équations différentielles fractionnaires

Soutenu publiquement le 02/Juillet/2017 par

Benidris Youcef

Devant le Jury composé de :

Mme.Benmerzouk Hadj slimane D	Professeur, Université de Tlemcen	Président
Mr.Mabkhout BenMiloud	MAA à Université de Tlemcen	examinateur
Mr. Derheb.M	Professeur, Université de Tlemcen	examinateur
Mme. Daoudi-Merzagui N	Professeur, Université de Tlemcen	Encadreur

Année universitaire : 2016 – 2017

Remerciements

"Certains auteurs parlent de leurs ouvrages disent : « Mon livre, mon commentaire, mon histoire, etc.» Ils feraient mieux de dire : «Notre livre, notre commentaire, notre histoire, etc. », vu que d'ordinaire il y a plus en cela du bien d'autrui que du leur.

Blaise Pascal Pensée 64

Louanges à Dieu qui m'a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à mon encadreur de mémoire Mme.N. Merzagui,Professeur au département de mathématiques de l'Université de Tlemcen, elle m'a fait l'honneur d'accepter de diriger ce mémoire. Ses conseils, ses critiques et sa rigueur scientifique m'ont permis de mener ce travail à son terme .

J'adresse tout particulièrement mes remerciements à Mme.Hadj Slimane Djamila Professeur à l'université de Tlemcen, pour tous les efforts déployés pour notre formation pendant les deux années écoulées, aussi je le remercie vivement pour avoir bien voulu accepter de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens aussi à remercier Monsieur M. Derhab Professeur à université de Tlemcen, pour avoir bien voulu juger ce travail.

J'adresse à Monsieur Benmiloud Mebkhout, enseignant au département de mathématiques à de l'université de Tlemcen, l'expression de mes sincères remerciements et de mon entière gratitude, pour avoir accepté de faire partie du jury.

Enfin, merci à tous ceux et celles qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail de mémoire .

Dédicace

A mes parents

A mes frères

A ma famille et mes amis

Table des matières

1 Préliminaires **5**
1.1 Quelques notions d'analyse fonctionnelle 5
1.1.1 Espace de Lebesgue 5
1.1.2 Dérivation au sens de Gâteaux et au sens de Fréchet 6
1.2 Espace de Sobolev et la formulation variationnelle des problèmes aux limites 7
1.2.1 Espaces de Sobolev 7
1.2.2 Formulation variationnelle pour BVP 8
1.2.3 Le théorème du Col de la montagne 12
1.3 Quelques notions sur le calcul fractionnaire [13] 13
1.3.1 Fonction Gamma 13
1.3.2 Fonction Bêta 14
1.3.3 Intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 14
1.3.4 Propriétés des opérateurs fractionnaires 14
1.4 Structure variationnelle pour FBVP 15
1.4.1 Espace de Sobolev d'ordre fractionnaire $s \in \mathbb{R}$ 16
1.4.2 Formulation variationnelle de problème fractionnaire 18

2 Recherche de solutions pour un BVP par approche variationnelle **20**
2.1 Exemple 26

3 Recherche de solutions pour un FBVP par approche variationnelle **30**
3.1 Exemple explicatif 37

Bibliographie **40**

Absract

In this work, we study the existence of solution for Dirichlet boundary value problem in two cases first, for ordinary differential equations and second, for fractional differential equations, our approach is variational. We obtain solution by Mountain Pass theorem.
Keywords :Ordinary differential equations, Fractional differential Equations, critical point, Mountain pass theorem, variational methods.

Résume

Dans ce mémoire, nous étudions l'existence de solutions pour deux types des problème de Dirichlet le premier est associé à des équations différentielles ordinaires alors que le second est associé à des équations différentielles fractionnaires, Notre approche est variationnelle basée sur l'application du théorème du col.
Mots-clés : Équations différentielles ordinaire, Équations différentielles fractionnaires, problème de Dirichlet, point critique, théorème du col.

Notations

Notation	Définition
EDO	Équation différentielle ordinaire
EDF	équation différentielle fractionnaire
BVP	problème aux limites (Boundary value problem)
$FBVP$	problème aux limites fractionnaire(fractinal boundary value problem)
$\rightharpoonup$	Convergence faible
X'	Espace dual de X
$p.p$	Presque partout
$\mathcal{L}(X,Y)$	l'espace des opérateur linéaires continues de X dans Y
$\mathcal{C}(\Omega)$ ou$\mathcal{C}^0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω
$\mathcal{C}_0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω à support compact
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment dérivable Ω
$\mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact
$L^{p'}(\Omega)$	Espace dual de $L^p(\Omega)$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev, à dérivée jusqu'à l'ordre k dans $L^p(\Omega)$

Introduction

Le calcul fractionnaire généralise les notions de différentiation et d'intégration à des ordres non-entiers, ainsi que leurs applications dans l'étude de systèmes dynamiques. Beaucoup de phénomènes physiques se trouvent mieux expliqués quand ils sont représentés par un modèle dynamique d'ordre fractionnaire. L'étude des systèmes d'ordre fractionnaire est plus délicate que pour leurs homologues d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires sont, d'une part, considérés comme des systèmes à mémoire, notamment pour la prise en compte des conditions initiales et d'autre part ils présentent une dynamique beaucoup plus complexe.
Les origines du calcul fractionnaire remontent à la fin du 17ème siècle, à l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral, mais ce n'est que lors des trois dernières décennies que le calcul fractionnaire a connu le plus d'intérêt en raison du développement intensif de la théorie du calcul fractionnaire lui-même et ses applications. Les équations différentielles d'ordre fractionnaire ont recemment prouvé qu'elles sont un outil incontournable dans la modélisation de beaucoup de phénomènes dans différents champs de la science et l'engineering. Ces modèles ont été appliqués avec succès, en mécanique (theorie de viscoelasticité et viscoplasticité), bio-chimie (modélisation des polymères et protéines), enginerie éléctrique (transmission des ondes d' ultrasons), médecine (model pour tissu humain sous charges mécaniques), théorie de contrôle, (mouvement a travers des milieux poreux), électromagnétique, ... etc. Pour plus de détails voir [8],[9],[19],[20], [22],[28] [3].
L'histoire, définitions, théorie, et applications du calcul fractionnaire, sont bien présentés dans les ouvrages de Miller - Ross [18], Oldham - Spanier [23] , Samko-Kilbas- Marichev [26].
Dans ce mémoire nous nous interessons à la solvabilité de problèmes aux limites associés à des équations différentielles d'ordre entier et d'ordre fractionnaire. Notre approche est variationnelle. Ce travail est basé sur les travaux de J. Torres [27], P. Rabinowitz [24] et la thèse de doctorat de Merzagui [6] et [7], [10].

L'exemple classique pour les problèmes variationnels est le principe de Dirichlet, à savoir le fait que la solution d'une équation aux dérivées partielles de type elliptique soumise à des conditions aux limites peut être obtenue comme un minimiseur d'une fonctionnelle appropriée. Riemann a introduit ce point de vue en 1851, et lui a donné le nom de principe de Dirichlet pour le processus de résolution du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad dans \quad \Omega \\ u = f, \quad sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

Bien que le principe de Dirichlet est élégant et peut être appliqué à une grande classe de problèmes autres que (1) , la preuve fournie par Riemann ne peut pas être considérée comme correcte, comme cela a été dûment signalé par Weierstrass. Le problème réside dans le fait que lorsque on travaille dans des espaces fonctionnels, et donc dans des espaces vectoriels de dimensions infinies, les propriétés de compacité usuelles de la dimension finie ne sont plus vraies, et les étapes de la démonstration de l'existence des extremas, en grande partie fondées sur des arguments de compacité, ne fonctionnent plus. Ces faits n'avaient pas encore été pleinement reconnu au temps de Riemann. Le dénouement théorique de ces types de difficultés a eu besoin du développement extraordinaire de l'analyse fonctionnelle, théorie de la mesure et de l'intégration qui a explosé au cours du XXe siècle, avec l'étude précise des propriétés topologiques et métriques des espaces vectoriels de dimensions infinies, la théorie de l'intégration de Lebesgue, et beaucoup d'autres techniques.
L'idée fondamentale derrière le principe de Dirichlet est l'interprétation d'un problème différentiel écrit sous forme implicite $F(u) = 0$, comme

$$J'(u) = 0, \tag{2}$$

où J est une fonction appropriée définie sur un ensemble de fonctions, et J' est la différentielle de J dans un sens qu'on va préciser. En d'autres termes, les zéros de F sont considérés comme des points critiques (pas nécessairement minimas) de J. L'équation (2) est l'équation d'Euler, ou l'équation d'Euler-Lagrange associé à J.
Par ailleurs, dans d'innombrables applications, la fonctionnelle J a une signification physique qui est fondamentale. Souvent, J est une énergie, écrite comme l'intégrale d'un Lagrangien, et donc trouver un point de minimum signifie non seulement de résoudre l'équation différentielle, mais trouver la solution d'énergie minimale qui est souvent très importante dans les problèmes concrets. L'interprétation de J comme une énergie est si fréquente que les fonctionnelles associées à des problèmes différentiels sont appelés fonctionnelles d'énergie, même lorsque le problème n'a pas d'applications directes en physique. Les problèmes différentiels pouvant être écrits sous la forme $J'(u) = 0$ sont des problèmes qui ont une structure variationnelle.
Au cours du vingtième siècle, après avoir donné les fondements de l'analyse fonctionnelle, l'extension du calcul différentiel aux espaces normés, les méthodes variationnelles n'ont jamais cessé d'être développées. D'une part, des techniques de minimisation ont évolué à un niveau très élevé, et ont été appliquées à un nombre énorme de problèmes dans beaucoup de domaines de la science pure et appliquée. Les méthodes qui sont concernées par la minimisation de fonctionnelles sont appellées des méthodes directes du Calcul des Variations. D'autre part, les procédures visant la recherche de points critiques des fonctionnelles et qui ne sont pas des points de minimum ont donné lieu à une branche de l'analyse non linéaire connue sous le nom de la théorie des points critiques.
La systématisation des propriétés de compacité demandées dans le cadre de la dimension infinie est due à Palais et Smale, qui ont introduit une condition de compacité qui porte leurs noms et est aujourd'hui reconnue comme la notion la plus utilisée dans la théorie des points critiques [16] ;[17]. Cette notion a permis l'obtention de deux résultats des plus célèbres qui sont le théorème du col (Mountain Pass theorem) démontré par Ambrosetti et Rabinowitz en 1973, et le théorème du point selle (Saddle Point theorem) démontré par Rabinowitz en 1978.

Ce mémoire est constitué en plus des préliminaires du chapitre 2 relatif à la solvabilité de problème de Dirichlet associé à une équation différentielle du second ordre, dans le chapitre 3 on développe l'approche variationnelle pour des équations fractionnaires des exemples sont donnés à la fin de chaque chapitre. Nous achevons le mémoire par une conclusion.

Chapitre 1

Préliminaires

Nous présentons quelques outils d'analyse non-linéaire qui seront utilisés au cours de ce mémoire. Notons qu'on va étudier deux types de problèmes "classique et fractionnaire", nous allons donc subdiviser ce chapitre en trois parties.
Dans la première partie, nous rappelons quelques notions de base d'analyse fonctionnelle, comme les notions des espaces de Lebesgue et quelques résultats de différentiabilité comme la dérivée aux sens de Gâteau et Fréchet.
La deuxième partie est consacrée aux outils nécessaires dans les espaces de Sobolev pour étudier les problèmes aux limites et qui sont les espaces "naturels" de fonctions permettant de résoudre les formulations variationnelles des équations différentielles. Enfin dans la dernière section nous présentons les notions sur le du calcul fractionnaire.
Pour plus de détails concernant les résultat présentés dans ce chapitre nous référons le lecteur aux ouvrages [2] et [13].

1.1 Quelques notions d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espace de Lebesgue

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
Définition 1. *Soit $1 \leq p < \infty$; on pose*
$L^p(\Omega) = \left\{ f \quad : \quad \Omega \quad \rightarrow \mathbb{R} \quad ; f \text{ mesurable et } ||f||_{L^p} < \infty \right\}.$
On note

$$||f||_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

Dans le cas particulier $p = 2$, on dispose d'un cadre hilbertien très commode. Ainsi, pour u et v données dans $L^2(\Omega)$ l'application

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

définit un produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ qui lui confère une structure d'espace de Hilbert.
Théorème 1. ***(Inégalité de Hölder)*** *Soient $f \in L^p(\Omega)$;et $g \in L^{p'}(\Omega)$; avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} .$$

où p' est le conjugué de p i.e $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$

Théorème 2. ***(Théorème de convergence dominée de Lebesgue).***

Soit $\{f_n\}$ *une suite de fonctions de* L^1*.On suppose que*
a) $f_n(x) \to f(x)$ *p.p. sur* Ω *.*
b) il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ *telle que pour chaque n,* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p. sur* Ω*.*
Alors $f \in L^1(\Omega)$ *et* $||f_n - f||_{L^1} \to 0$*.*

1.1.2 Dérivation au sens de Gâteaux et au sens de Fréchet

Soit $(\mathbb{E}, \|.\|_E)$ un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_E$. $A \subset \mathbb{E}$, une partie de $\mathbb{E}$.

Définition 2. *Soit f une fonction définie sur A à valeurs réelles.Si* $u \in A$ *et* $v \in \mathbb{E}$ *sont tels que pour* $t > 0$ *assez petit on ait,* $u + tv \in A$*, on dit que f admet (au point u) une dérivée dans la direction v si la limite suivante existe*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(u+tv) - f(u)}{t}$$

On notera cette limite f'(u).

Remarque 1. *On notera qu'une fonction f peut avoir une dérivée directionnelle dans toute direction* $v \in \mathbb{E}$*, sans pour autant être continue. Lorsque la dérivée directionnelle de f existe pour certains* $v \in \mathbb{E}$ *on introduit la notion de dérivée au sens de Gâteaux.*

Définition 3. *On dit que* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dérivable au sens de Gâteaux en* $u_0 \in \mathbb{E}$ *si elle admet au point* u_0 *une dérivée directionnelle dans la direction de tout vecteur v de* $\mathbb{E}$ *c.à.d*

$$f'(u_0)(v) := \lim_{t\to 0^+} \frac{f(u_0+tv) - f(u_0)}{t}.$$

Définition 4. *f est dite différentiable (ou dérivable) au point* $u_0 \in A$ *(au sens de Fréchet) s'il existe* $df(u_0) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ *telle que :*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(u_0+h) - f(u_0) - df(u_0)(h)}{\|h\|} = 0$$

On notera que si f est différentiable au sens de Fréchet, alors f est continu.

Pour la definition de la topologie faible sur un espace vectoriel normé, nous renvoyons à [2]. Nous nous limiterons ici à la seule notion de convergence faible.

Définition 5. *Soit* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *une suite de l'espace* $(\mathbb{E}, \|.\|_{\mathbb{E}})$*. On dit que* $\{x_n\}$ *converge faiblement dans* $\mathbb{E}$ *s'il existe un élément* $x \in \mathbb{E}$ *tel que*

$$\forall f \in \mathbb{E}' \lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = f(x). \tag{1.1}$$

Notation. On notera $x_n \rightharpoonup x.$, la convergence faible dans $\mathbb{E}$.

On notera de même $x_n \longrightarrow x,$ *ou* $x_n \xrightarrow{\mathbb{E}} x$, la convergence forte dans $\mathbb{E}$ (c'est à dire la convergence en norme).

Définition 6. *Soient* $(\mathbb{E}, \|.\|_{\mathbb{E}})$ *et* $(\mathbb{F}, \|.\|_{\mathbb{F}})$ *: deux espaces de Banach. — On dit que* $\mathbb{F}$ *s'injecte continûment dans E si* $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ *et l'application*

$$\begin{aligned} g : &\mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{E} \\ &x \longrightarrow g(x) = x \end{aligned}$$

est continue, c'est-à-dire s'il existe $C > 0$ *tel que, pour tout* $x \in \mathbb{F}$

$$\|x\|_{\mathbb{E}} \leq C \|x\|_{\mathbb{F}} .$$

On note $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{E}$.

1.2 Espace de Sobolev et la formulation variationnelle des problèmes aux limites

1.2.1 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont omniprésents dans l'étude des équations différentielles. Il s'avère donc judicieux d'en faire une brève présentation avant d'aborder ces équations. Nous reprenons dans cette section certains énoncés de Kavian [14] et de Brezis [2], pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev se référer à [2].

Définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) \equiv \left\{ u \in L^p(\Omega);\ \text{tels que} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } i = 1...N \right\}.$$

où les dérivées sont au sens des distributions.

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

$W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. L'espace $W^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert, il est noté $H^1(\Omega)$.
$W_0^{1,p}(\Omega)$ dénote la complétion de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ i.e $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$, pour
$1 \leq p < \infty$.
L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme induite par celle de $W^{1,p}(\Omega)$.

Injections de Sobolev

Les injections de Sobolev sont très utilisées, elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes des espaces de Lebesgue.

.

Définition 7. *Pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$, on note $W^{k,p}(\Omega)$ l'espace des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ telles que les dérivées $\partial^\alpha u$ au sens des distributions (avec α un multi-indice vérifiant $|\alpha| \leq k$) soient des fonctions de L^p.On muni $W^{k,p}(\Omega)$ de la norme*

$$\|u\|_W\, k,p = \begin{cases} \left(\sum_{\alpha,|\alpha|<K} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{P}} & si \quad p \leq \infty \\ \sup_{\alpha,|\alpha|<K} \|\partial^\alpha u\|_\infty & si \quad p = \infty \end{cases}$$

Théorème 3. *Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $p, q \in [1 + \infty[$. on a*

1. $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} > 0,$ *alors* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$ *avec* $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{k}{N}$
2. $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} < 0,$ *alors* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$
3. $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} = 0,$ *alors* $W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega).\forall q \in [p, \infty[$

Remarque 2. *Pour $N = 1$ et p=2, Ω =intervalle I borné, on a le résultat suivant*
Il existe une constante C dépendant de $|I| < \infty$ telle que

$$\|u\|_\infty \leq C \parallel u\|_{W^{1,p}(I)}\, ; \forall u \in W^{1,p}(I), 1 \leq p < \infty \tag{1.2}$$

Autrement dit, $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ avec injection continue $\forall 1 \leq p < \infty$. De plus, si I est borné, on a L'injection $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$ est compacte pour $1 \leq p < \infty$.

L'inégalité de Poincaré

L'inégalité de Poincaré (du nom du mathématicien français Henri Poincaré) est un résultat de la théorie des espaces de Sobolev. Cette inégalité permet de borner une fonction à partir d'une estimation sur ses dérivées et de la géométrie de son domaine de définition. Ces estimations sont d'une grande importance pour la méthode du calcul des variations.

Soit p, tel que $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert de largeur finie (borné dans une direction). Alors il existe une constante C, dépendant uniquement de Ω et p, telle que, pour toute fonction u de l'espace de Sobolev $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\parallel u \parallel_{L^p(\Omega)} \leq C \parallel \nabla u \parallel_{L^p(\Omega)} .$$

L' inégalité de Poincaré dans le cas où $\Omega = I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans]-T,T[s'écrit pour tout $u \in H_0^1(I)$,

$$\parallel u \parallel_{L^2} \leq 2T \parallel \nabla u \parallel_{L^2} . \tag{1.3}$$

Grace à l' inégalité de Poincaré , on peut considérer une norme equivalent à $\|.\|_{W^{1,2}}$ sur $H_0^1(I)$ définie par

$$\|u\| = \|u'\|_{L^2}$$

1.2.2 Formulation variationnelle pour BVP

La théorie du point critique et les méthodes variationnelles se sont révélées être des outils très efficaces pour déterminer l'existence de solutions pour les équations différentielles d'ordre entier. L'idée est de trouver des solutions d'un problème aux limites donné en recherchant des points critiques d'une fonctionnelle (fonction d'énergie) appropriée définie sur un espace de Banach. Au cours des 30 dernières années, la théorie des points critiques est devenue un outil de taille pour étudier l'existence de différents types de solutions pour des équations différentielles présentant une structure variationnelle, nous référons le lecteur aux livres [24], [16].

Posons I= [0,T], considèrons le problème de Dirichlet(BVP) associé à une équation différentielle du second ordre suivant :

$$\begin{cases} u'' + f(t,u) = 0 & t \in I \\ u(0) = u(T) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Solution classique

Définition 8. *Une solution classique (solution forte) du probléme* (1.4) *est une fonction de classe* C^2 *sur I vérifiant* (1.4).

Selon les données de problème (ordre de régularité de f), la formulation classique peut poser malheureusement un certain nombre de problèmes pour démontrer l'existence de solution. C'est pourquoi nous remplacerons la formulation classique de (1.4) par une formulation, dite variationnelle, beaucoup plus avantageuse.
La formulation variationnelle d'un problème aux limites (elliptique) prend toujours une forme du type : $u \in \mathbb{E} \quad a(u,v) = L(v)$ où $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel , a(u,v) est une forme bilinéaire et L(v) une forme linéaire.
Écrire un problème aux limites sous forme variationnelle c'est déterminer l'espace $\mathbb{E}$ où l'on cherche la solution, Trouver une forme bilinéaire a(u,v)et la forme linéaire L(v).
Considérons le problème aux limites(1.4) . Soit u, une solution du problème (1.4) ayant la régularité : $u \in W^{2,2}(I)$. Soit $v \in H_0^1(I)$ quelconque. On multiplie l'équation par v et on intégre. On vérifie, compte tenu de nos hypothèses, que cette intégration est possible. On a alors

$$\int_0^T u''(t)\, v(t)\, dt + \int_0^T f(t,u(t))v(t)\, dt = 0 \tag{1.5}$$

par intégration par parties et utilisant $v(0) = v(T) = 0$, on obtient :

$$\int_0^T u'(t)\, v'(t)\, dt = \int_0^T f(t,u(t))v(t)\, dt \tag{1.6}$$

Déterminer une fonction $u \in H_0^1(I)$ qui vérifie (1.6)est la formulation variationnelle du problème (1.4).
La formulation variationnelle du problème (1.4) a été donc donnée par $\mathbb{E} = H_0^1(I)$ et $a(u,v) = Lv$ avec

$$a(u,v) = \int_0^T u'v'dt,$$

et

$$Lv = \int_0^T fvdt.$$

Supposons que l'on ait résolu ce problème. A-t-on résolu le problème de départ ?
Interprétation de la formulation variationnelle.
On a le résultat suivant :
Proposition 1. *Soit $u \in W^{2,2}(I)$. u est solution du problème aux limites* (1.4) *si et seulement si elle est solution du problème variationnel* (1.6)*.*

Démonstration. . Nous avons déjà montré que u est solution de (1.4) implique u solution de (1.6). Montrons la réciproque. Soit $u \in H_0^1(I)$ solution de (1.6). Comme l'équation (1.6) est vérifiée pour toute fonction $v \in H_0^1(I)$, elle est en particulier vraie pour toute fonction $v \in D(I)$ (espace des fonctions C^∞ à support compact). Ce qui permet d'interpréter (1.6) au sens des distributions. Ainsi pour toute fonction v de $D(I)$, on a :

$$\int_0^T u''vdt + \int_0^T fvdt = 0.$$

Chaque élément apparaissant dans l'équation est une distribution, on a donc

$$\langle u', v' \rangle = \langle f, v \rangle .$$

Par définition de la dérivée au sens des distributions, on a :

$$\langle u", v \rangle + \langle f, v \rangle = \langle u'' + f, v \rangle = 0$$

On a donc, au sens des distributions :

$$u" + f = 0$$

On retrouve donc l'équation (1.4) mais en un sens faible. Mais de l'égalité précédente, on déduit que $u" \in L^2(I)$ et que l'égalité a donc lieu dans $L^2(I)$ et donc presque partout. Quand à la condition aux limites, elle est naturellement satisfaite, puisque $u \in H_0^1$. □

Au lieu d'adopter une écriture variationnelle, on peut aussi chercher $u \in E$ comme fonction minimisant une énergie ou du moins comme point critique de fonctionnelle dite équation d'énergie. Pour le problème (1.4), on pose

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T |u'(t)|^2 dt - \int_0^T F(t, u(t))dt,$$

où $F(t, u) = \int_0^u f(t, s)ds$.

Définition 9. *Soient $\mathbb{E}$ un espace de Banach, soit $A \subset \mathbb{E}$ un ouvert et $f \in C^1(A, \mathbb{R})$. On dit que $u \in A$ est* ***point critique*** *de f si $f^{'}(u) = 0$.*
Si u n'est pas un point critique, on dit que u est un point régulier de f.
Pour $c \in \mathbb{R}$ on dit que c est une valeur critique de f s'il existe $u \in A$ tel que $f(u) = c$,et $f'(u) = 0$.
Si c n'est pas une valeur critique, on dit que c est une valeur régulière.
Proposition 2. *Tout point critique de $\mathcal{J}$ est une solution du problème* (1.4) *et réciproquement.*

Démonstration. Pour tout $u, v \in H_0^1$ et $h > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(u+hv) - \mathcal{J}(u) &= \int_0^T \frac{1}{2}\left[(u(t)+hv(t))'\right]^2 dt - \int_0^T F(t, u+hv)dt - \int_0^T \left[\frac{1}{2}u'(t) + F(t, u(t))\right] dt \\
&= \int_0^T \left[\frac{1}{2}u'^2 + \frac{h^2}{2}v'^2 + hu'v'\right] dt - \int_0^T \left[\frac{1}{2}u'^2 + F(t, u(t)) - F(t, u+hv)\right] dt \\
&= \int_0^T \left[\frac{h^2}{2}v'^2 + hu'v'\right] dt - \int_0^T \left[F(t, u(t)+hv(t)) - F(t, u(t))\right] dt
\end{aligned}$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{F(t, u(t)+hv(t)) - F(t, u(t))dt}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\int_0^{u+hv} f(t,s)ds - \int_0^u f(t,s)ds}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\int_u^{u+hv} f(t,s)ds}{h}$$

Par un résultat basique d'analyse on a :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\int_u^{u+hv} f(t,s)ds}{h} = f(t,u)v$$

De la pour tout $v \in H_0^1$

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(u+hv) - \mathcal{J}(u)}{h} = \int_0^T \left[u'(t)v'(t) - f(t, u(t))v(t)\right] dt$$

D'où

$$\mathcal{J}'(u).v = \int_0^T \left[u'(t)v'(t) - f(t, u(t))v(t)\right] dt.$$

Soit $\bar{u}$ est un point critique de $\mathcal{J}$
pour tout $v \in H_0^1$

$$\langle \mathcal{J}'(\bar{u}), v \rangle = 0$$

ce qui implique

$$\int_0^T \bar{u}'(t)v'(t) = \int_0^T f(t, \bar{u}(t))v(t)dt$$

Nous retrouvons (1.5), et le résultat en découle. □

Un outil essentiel dans le calcul variationnels, une condition de compacité est la condition de Palais-Smale, c'est une condition à priori, à vérifier pour la fonctionnelle . Elle est utilisé pour montrer l'existence des valeurs critiques dans plusieurs cas.

Définition 10. *On appelle suite minimisante de $\mathcal{J}$ dans A une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que* $\lim \mathcal{J}(u_n) = \inf \mathcal{J}(x)$.

Définition 11. *Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach et $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{J}$ vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c) et on le note $(PS)_c$,si de toute suite $(u_n)_n$de A telle que*

$$\mathcal{J}(u_n) \longrightarrow c \quad dans \quad \mathbb{R} \quad et \quad \mathcal{J}'(u_n) \longrightarrow 0 \quad dans \quad \mathbb{E},$$

on peut extraire une sous-suite convergente.

Remarque 3. *La condition de Palais-Smale ne préjuge pas de l'existence d'une valeur critique. Elle dit seulement que si on a une telle suite $(u)_n$, celle-ci est nécessairement relativement compacte. Pour l'utiliser effectivement de façon utile, il faudra pouvoir démontrer par un autre biais qu'une telle suite existe.*

Les deux hypothèses sont indépendantes. En effet, même si $c = \inf_X \mathcal{J}$*, on peut parfaitement avoir une suite minimisante* (u_n)*, telle que* $\mathcal{J}'(u_n) \nrightarrow 0$*. Il suffit de prendre :*

$$\mathbb{E} = \mathbb{R}, \mathcal{J}(u) = sin(u^2),$$

$$c = -1 \quad et \quad u_n = \left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi + \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)\frac{1}{2},$$

on a

$$\mathcal{J}(u_n) \longrightarrow -1 \quad et \quad \mathcal{J}'(u_n) \longrightarrow 2.$$

Théorème 4. *Soit* $\mathcal{J} : X \to \mathbb{R}$ *une fonctionnelle de classe* C^1 *bornée inférieurement et* $c = \inf J$*. Supposons que* $\mathcal{J}$ *satisfait la condition (PS)*$_c$*. Alors c est atteint en un point* $x_0 \in X$ *telle que* $J'(x_0) = 0$.

Remarque 4. *Ce dernier théorème a une généralisation basée sur une autre condition (PS) introduite par G. Cerami [5] .*

Un outil essentiel permettant de démontrer des résultats d'existences de solutions pour des problèmers admettant une formulation variationnelle est le théorème du col utilisé dans ce mémoire comme moyen pour établir la solvabilité des BVP considérés.

1.2.3 Le théorème du Col de la montagne

Le premier exemple de construction de valeur critique par le procédé de minmax est le théorème du Col de la montagne (en anglais Mountain Pass Theorem) qui exprime très bien le contenu du résultat et sa démonstration : si on se trouve en un point A dans une cuvette à une altitude h_0, entourée de montagnes d'une altitude supérieure ou égale à $h > h_0$; si on veut aller à un point B située en dehors de la cuvette au delà des montagnes, et à une altitude $h_1 < h$, il existe un chemin passant par un col et conduisant de A à B. Pour le trouver il suffit de prendre parmis tous les chemins allant de A à B, celui qui monte le moins haut.

Théorème 5. *(Ambrosetti & Rabinowitz, 1973)*
Soit X un espace de Banach réel et $\mathcal{J} \in C^1(X, \mathbb{R})$ *Supposons que* $\mathcal{J}$ *satisfait la condition (PS), et*
(i) $\mathcal{J}(0) = 0$
(ii) il existe des constantes $\rho > 0$ *et* $\alpha > 0$ *telles que* $\mathcal{J}(u) > \alpha$ *si* $\|u\| = \rho$,
(iii) il existe $e \in X$, $\|e\| > \rho$*, tel que* $\mathcal{J}(e) < 0$*. Alors* $\mathcal{J}$ *a une valeur critique* $c > \alpha$ *qui peut être caractérisée comme suit*

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [01]} J(\gamma(t))$$

où,

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Remarque 5. *a) On comprend mieux pourquoi ce théorème s'appelle théorème du Col, quand on interprète géométriquement ou plutôt géographiquement les conditions (i) à (iii) dans le cas où* $X = \mathbb{R}^2$ *et* $J(u)$ *représente l'altitude dans* $\mathbb{R}^3$ *d'un point u. Les conditions (i) et (ii) signifient que l'origine est placée dans une cuvette entourée de montagnes d'altitude au moins* α*. La condition iii) signifie qu'au delà de ces montagnes existe un point e situé moins haut que les dites montagnes, disons dans une vallée. Par conséquent, il est intuitivement clair que l'on peut joindre continûment* 0 *à e en passant par un col de montagne et la construction du min-max nous dit comment faire : il suffit de regarder l'altitude maximale atteinte sur chaque chemin et de choisir un chemin qui minimise cette altitude maximale.*

b) Il faut toute fois faire attention à l'intuition montagnarde. Ainsi, le théorème du Col est vrai même si J ne satisfait pas la condition de Palais-Smale quand $X = \mathbb{R}$ (par le théorème des valeurs intermédiaires et celui de Rolle), par contre il est faux quand $X = \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il peut ne pas exister de col car la borne inférieure de l'altitude maximale sur les chemins n'est pas atteinte.Ainsi, par exemple, la fonction

$$J(x_1, x_2) = x_1^2(1 + x_2)^3 + x_2^4$$

n'a clairement qu'un seul point critique sur $\mathbb{R}^2$, à savoir l'origine où $J = 0$. Ce point critique est un minimum local, donc une cuvette entourée de montagnes, et l'on peut descendre encore plus bas à l'extérieur de la cuvette car $\inf_{R2} J = -\infty$. C'est donc un exemple de fonction présentant un seul point critique, qui est un minimum local mais pas global.Comme il n'y a pas d'autre point critique que le minimum local, c'est donc qu'il n'existe pas de col pour sortir de la cuvette. Cela ne peut se produire que si les chemins minimisants partent vers l'infini. Cette perte de compacité est évidemment liée au fait que J ne satisfait pas la condition de Palais-Smale au niveau de l'inf-max.

Le situation du théorème est expliqué dans la figure ci-dessous.

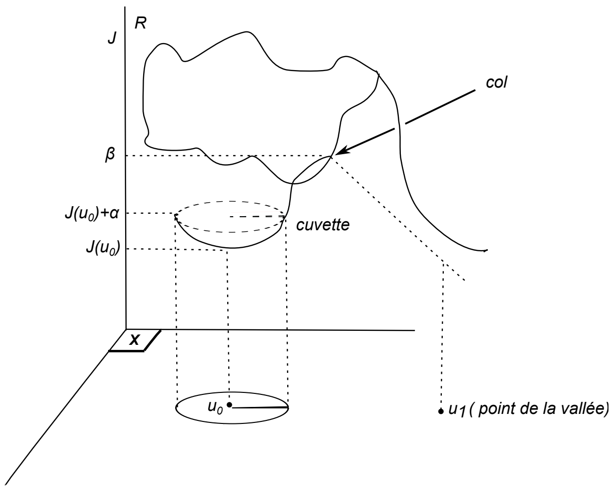

FIGURE 1.1: Graphe de $\mathcal{J}$ dans $X \times \mathbb{R}$

1.3 Quelques notions sur le calcul fractionnaire [13]

1.3.1 Fonction Gamma

L'une des fonction de base dans le calcule fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler qui prolonge le factoriel aux valeur non entières.

Définition 12. *La fonction Gamma d'Euler est définie sur C par l'intégrale suivante*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}du \quad ou \quad (\mathfrak{Re}(z) > 0),$$

Propriétés

1 Une propriété importante de la fonction $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

2 La fonction Gamma généralise le factoriel i.e :

$$\Gamma(n+1) = n!$$

1.3.2 Fonction Bêta

La fonction Bêta est définie par l'intégrale suivante

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du$$

La relation entre la fonction Gamma d'Euler et Bêta d'Euler est donnée par

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}$$

1.3.3 Intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 13. *Soit $u \in L^1([a,b])$ une fonction intégrable sur $[a,b]$ On définit l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \geq 0$ au sens de Riemann-Liouville (à gauche) notée ${}_aI_t^\alpha u(t)$ par*

$${}_aI_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}u(s)ds, \qquad t \in [a,b].$$

Définition 14. *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha \geq 0$ est définie par*

$${}_tI_b^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b (s-t)^{\alpha-1}u(s)ds, \qquad t \in [a,b].$$

Théorème 6. *[13] Si $f \in L^1([a,b])$, alors $I_a^\alpha f$ existe pour presque tout $t \in [a,b]$, et de plus $I_a^\alpha \in L^1([a,b])$.*

Définition 15. *Soit u une fonction définie sur $[a,b]$. La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche notée ${}_aD_t^\alpha$ est définie par*

$${}_aD_t^\alpha u(t) = \frac{d^n}{dt^n}{}_aI_t^{n-\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}u(s)ds$$

Définition 16. *La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre est définie par*

$${}_tD_b^\alpha u(t) = (-1)^n\frac{d^n}{dt}{}_aI_b^{n-\alpha}u(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1}u(s)ds$$

1.3.4 Propriétés des opérateurs fractionnaires

Un des intérêts du calcul fractionnaire est qu'il généralise certaines propriétés des dérivées et intégrales classiques : la dérivée fractionnaire de l'intégrale du même ordre redonne l'identité, la dérivée d'une dérivée redonne sous certaines conditions une dérivée, l'intégration par parties reste valable

Dans la suite, nous donnons quelques résultats utilisés dans ce mémoire pour les démonstrations et pour plus de détails nous référons le lecteurs à [13].

Proposition 3. *Soit* $\alpha, \beta \geq 0$ *et* $u \in L^1[a,b]$ *alors*

$$ {}_aI_t^{\alpha}({}_aI_t^{\beta}u(t)) = {}_aI_t^{\alpha+\beta}u(t) \qquad t \in [a,b] $$

et

$$ {}_tI_b^{\alpha}({}_tI_b^{\beta}u(t)) = {}_tI_b^{\alpha+\beta}u(t) \qquad t \in [a,b] $$

Proposition 4. *Soit* $\alpha \geq 0$ *et* $u \in L^1[a,b]$ *alors*

$$ {}_aD_t^{\alpha}({}_aI_t^{\alpha}u(t)) = u(t) \qquad t \in [a,b] $$

et

$$ {}_tD_b^{\alpha}({}_tI_b^{\alpha}u(t)) = u(t) \qquad t \in [a,b] $$

Proposition 5. *Soit* $n-1 \leq \alpha < n$

$$ {}_aI_t^{\alpha}({}_aD_t^{\alpha}u(t)) = u(t) - \sum_{k=1}^{n} \left[{}_aI_t^{k-\alpha}u(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}, $$

$$ {}_tI_b^{\alpha}({}_tD_b^{\alpha}u(t)) = u(t) - \sum_{k=1}^{n} \left[{}_tI_b^{k-\alpha}u(t)\right]_{t=b} \frac{(-1)^{n-k}(b-t)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}, $$

1.4 Structure variationnelle pour FBVP

Récemment, on discute des équations comprenant des dérivées fractionnaires à gauche et à droite. Outre leurs applications possibles, les équations avec dérivées gauche et droite sont un champ intéressant et nouveau dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. Dans ce sujet, de nombreux résultats sont obtenus dans le cadre de l'existence et de la multiplicité des solutions des équations différentielles fractionnaires non linéaires en utilisant des techniques d'analyse non linéaire, telles que la théorie du point fixe [4] (y compris l'alternative non linéaire Leray-Schauder), la théorie du degré topologique [11] et la méthode de comparaison [29] (y compris les solutions supérieures et inférieures et la méthode itérative monotone) et ainsi de suite. Motivé par les travaux classiques, la théorie du point critique a été une approche efficace pour aborder l'existence de solutions pour des problèmes aux limites fractionnaires faisant intervenir les dérivées fractionnaires à gauche et à droite voir [12] et [7].

Pourquoi des équations avec dérivées fractionnaire à gauche et à droite ?

Vincent J. Ervin et John Paul Roop ont étudié l'approximation de Galerkin pour l'étude de l'équation de dispersion d'advection fractionnaire à l'état stationnaire (FADE) suivante

$$ Da(p_a D_x^{-\beta} + q_x D_1^{-\beta})Du + b(x)Du + c(x)u = f; \tag{1.7} $$

D représente la dérivation classique, ${}_aD_x^{-\beta}, {}_xD_1^{-\beta}$, opérateurs intégrales fractionnaire, avec $0 \leq \beta < 1,\ 0 \leq p, q \leq 1$ telle que p + q = 1.

L'intérêt pour (1.7) découle de son application comme modèle pour des phénomènes physiques pré-

sentant une diffusion anormale, c'est-à-dire une diffusion non modélisée avec précision par l'équation de dispersion d'advection habituelle. La diffusion "anormale" a été utilisée dans la modélisation de la dynamique turbulente et chaotique des systèmes conservateurs classiques. En viscoelasticite, les opérateurs différentiels fractionnaires ont été utilises pour décrire les équations constitutives des matériaux [15]. Récemment, les articles impliquant des opérateurs différentiels fractionnaires sont apparus dans Physics Today [25]. L'application importante est celle du transport de contaminants dans l'écoulement des eaux souterraines. $\grave{A}$ ce jour, la plupart des techniques de solution pour les équations impliquant des opérateurs différentiels fractionnaires ont exploité les propriétés des transformées de Fourier et de Laplace des opérateur .
La méthode des différences finies a également été appliquée pour construire l'approximation numérique [28]. D'autres documents dans la littérature étudient l'approximation de Galerkin et l'analyse d'erreur associée pour le FADE.
Il ya deux propriétés qui rendent difficile l'application du calcul de variation aux équations differentielles fractionnaires . Ces propriétés sont

(i) les opérateurs différentiels fractionnaires ne sont pas des opérateurs locaux,

(ii) l'adjoint d'un opérateur différentiel fractionnaire n'est pas le négatif de lui-meme.

En raison de (i) et (ii), la détermination d'espace de fonctions correct pour la solution variationnelle n'est pas évident.
Dans [7] les auteurs introduisent, en relation avec la dérivée fractionnaire gauche, l'espace J_L^α et l'espace J_R^α correspondant a la dérivée fractionnaire à droite et relient relie ces espaces à l'espace de Sobolev fractionnaire H^α à travers un espace intermédiaire J_S^α de mouvement brownien. Cela donne lieu à un mouvement superdiffusant.
En imposant des conditions sur l'ordre de dérivation ils montrent une équivalence entre la structure d'espace de Sobolev fractionnaire et les espaces J_L^α, J_S^α, J_R^α.(voir théorème 2.1, théorème 2.3, théorème 2.13) dans [7].
Dans ce mémoire nous étudions, le problème fractionnaire non linéaire de Dirichlet donné par :

$$\begin{cases} {}_tD_T^\alpha({}_0D_t^\alpha u(t)) = f(t,u(t)), t \in [0,T] \\ u\,(0) = u\,(T) = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

où $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie des hypothèse qui sont spécifies dans la suite.

1.4.1 Espace de Sobolev d'ordre fractionnaire $s \in \mathbb{R}$

Considérons l'opérateur

$$(I-\Delta)^{\frac{s}{2}} f(x) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}(1+|\xi|^2)^{(\frac{s}{2})} f(\xi) d\xi, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

où $\hat{f}(\xi)$= transformée de Fourier de f.
Définition 17. *Soient* $1 < p < \infty$ *et* $s \in \mathbb{R}$. *L'espace de Sobolev* $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ *est l'image par* $(I - \Delta)^{(s/2)}$ *de* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *dans* $S'(\mathbb{R}^n)$*espace des distributions tempérées. C'est un espace de Banach pour la norme héritée de* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *:*

$$\|f\|_{H_p^s} = \left\|(I-\Delta)^{(\frac{s}{2})} f\right\|_{L^p}.$$

Il est à remarquer que

$$\begin{cases} H_p^s(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n) & si \quad s = 0, \\ H_p^s(\mathbb{R}^n) = W^{N,p}(\mathbb{R}^n) & si \quad s = N \end{cases}$$

Grâce au travail V. Ervin et J. Roop [7], en particulier le théorème (2.13) dans [7] où il montre l'égalité entre l'espace de Sobolev $H_0^\alpha([0,T])$ et l'espace $J_{s,0}^\alpha$ qui est noté $E_0^{\alpha,p}$ dans les travaux de [12] et [27] est établie. Cet espace $E_0^{\alpha,p}$ est défini comme suit,

Espace $E_0^{\alpha,p}$

Afin d'établir une structure variationnelle pour FBVP (1.8), il est nécessaire de construire des espaces fonctionnels appropriés. Désignons par C^∞ ([0, T],$\mathbb{R}$) l'ensemble de toutes les fonctions $u \in C^\infty$ ([0, T], $\mathbb{R}$) avec u (0) = u(T) = 0. Le résultat suivant exprime le fait que l' opérateur intégral fractionnaire de Riemann - Liouville de l'espace L^p([0, T], $\mathbb{R}$) à l'espace L^p ([0, T], $\mathbb{R}$),est borné, où $1 \leq p < \infty$. Il convient de mentionner ici que les résultats similaires ont été présentés dans [13] . Pour la preuve de la proposition suivante voir [13]

Proposition 6. *Soit* $0 < \alpha \leq 1$ *et* $1 < p < \infty$. *pour tout* $u \in L^p([0,T],\mathbb{R})$,*on a*

$$\left\|D_0^{-\alpha}u\right\|_{L^p} \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left\|u\right\|_{L^p}. \tag{1.9}$$

Suite à (1.9), pour tout $u \in C_0^\infty([0,T],\mathbb{R})$ et $1 < p < \infty$, on a $u \in L^p([0,T],\mathbb{R})$ et $D_0^\alpha u \in L^p([0,T],\mathbb{R})$. Par conséquent, l'espace $E_0^{\alpha,p}$ peut être construit en utilisant la L^p-integrabilité de la derivée fractionnaire.

Définition 18. ([*10*]) *Pour* $0 < \alpha \leq 1$ *et* $1 < p < \infty$. *L'espace fractionnaire* $E_0^{\alpha,p}$ *est défini par la fermeture de* $C_0^\infty([0,T],\mathbb{R})$, *par rapport à la norme* $\|.\|_{\alpha,p}$*i.e :*

$$E_0^{\alpha,p} = \overline{C_0^\infty[0,T]}^{\|\cdot\|_{\alpha,p}},$$

oú $\|.\|_{\alpha,p}$*est définie par :*

$$\|u\|_{\alpha,p} = \left(\int_0^T |u(t)|^p\,dt + \int_0^T |{}_0D_t^\alpha u(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, \text{ pour } \quad u \in E_0^{\alpha,p}. \tag{1.10}$$

Il est clair que l'espace $E_0^{\alpha,p}$ est l'ensemble des fonctions $u \in L^p([0,T],\mathbb{R})$ possédant une derivée fractionnaire d'ordre α,$D_0^\alpha u \in L^p([0,T];\mathbb{R})$ et $u(0) = u(T) = 0$.

.

Proposition 7. *[10] Soit* $0 < \alpha \leq 1$ *et* $1 < p \leq \infty$. *L'espace* $E_0^{\alpha,p}$*est réflexif et séparable.*

On note $E^\alpha = E_0^{\alpha,2}$.

Proposition 8. *[10] Soit* $0 < \alpha \leq 1$ *et* $1 < p < \infty$. *pour tout* $u \in E_0^{\alpha,p}$, *si* $\alpha > \frac{1}{p}$ *alors*

$${}_0I_t^\alpha({}_0D_t^\alpha u(t)) = u(t).$$

Proposition 9. *[10] Soit* $0 < \alpha \leq 1$ *et* $1 < p < \infty$. *pour tout* $u \in E_0^{\alpha,p}$, *si* $\alpha > \frac{1}{p}$ *alors*

$$\|u\|_{L^p} \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|{}_0D_t^\alpha\|_{L^p} \tag{1.11}$$

si $\alpha > \frac{1}{p}$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *on a*

$$\|u\|_{L^p} \leq \frac{T^{\alpha - \frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)((\alpha-1)q+1)^{\frac{1}{q}}} \|{}_0D_t^\alpha\|_{L^p} \tag{1.12}$$

D'après (1.11)*, on peut considérer une norme équivalente à* (1.10) *sur* $E_0^{\alpha,p}$ *définie par*

$$\|u\|_{\alpha,p} = \|{}_0D_t^\alpha\|_{L^p}\,.$$

Proposition 10. *[10] Soit* $0 < \alpha \leq 1$ *et* $1 < p < \infty$*.si* $\alpha > \frac{1}{p}$ *et* $\{u_k\} \rightharpoonup u$ *dans* $u \in E_0^{\alpha,p}$*.Alors* $u_k \longrightarrow u$ *dans* $C[0,T]$ *,i.e*

$$\|u_k - u\|_\infty \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow \infty.$$

1.4.2 Formulation variationnelle de problème fractionnaire

La formule d'intégration par parties est une des propriétés extensibles aux opérateurs fractionnaires mais là encore sous certaines restrictions. C'est ici qu'apparaissent inévitablement les opérateurs à droite. Dans [13] apparait une formule d'intégration par parties, mais elle requiert plusieurs conditions. Nous préférons donner ici une version simplifiée avec des conditions explicites que nous avons trouvé dans [27].

Théorème 7 (intégration par parties)**.** *Si* $u \in L^p[0,T], v \in L^q[0,T]$ *avec*

$$p \geq 1, q \geq 1 \text{ et } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1 + \alpha$$

ou

$$p \neq 1, q \neq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \alpha$$

Alors

$$\langle {}_0D_t^{-\alpha}u, v\rangle = \langle u, {}_tD_T^{-\alpha}v\rangle \tag{1.13}$$

Et

$$\langle {}_0D_t^{\alpha}u, v\rangle = \langle u, {}_tD_T^{\alpha}v\rangle \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{1.14}$$

avec

$$u(0) = u(T) = 0, u' \in L^\infty[0,T], v \in L^1[0,T]$$

ou

$$v(0) = v(T) = 0, v' \in L^\infty[0,T], u \in L^1[0,T]$$

Remarque 6. *Les opérateurs intégrales à droite et à gauche de Riemann Liouville fractionnaires sont adjoints dans le sens* L^2*.*

Nous allons établir la formulation variationnelle du problème aux limites (1.8), on considère comme dans le cas classique, on multiplie (1.8) par une fonction test $v \in \mathcal{D}(I)$, On obtient

$${}_tD_T^\alpha({}_0D_t^\alpha u(t))v = f(t, u(t))v,$$

et d'après (1.14) on a

$$\int_0^T {}_tD_T^\alpha({}_0D_t^\alpha u(t))v(t)dt = \int_0^T ({}_0D_t^\alpha u(t))({}_0D_t^\alpha v(t))dt,$$

d'où

$$\int_0^T ({}_0D_t^\alpha u(t))({}_0D_t^\alpha v(t))dt = \int_0^T f(t, u(t))v(t)dt, \tag{1.15}$$

l'équation (1.15) est une formulation variationnelle du problème aux limites (1.8).

Chapitre 2

Recherche de solutions pour un BVP par approche variationnelle

Dans ce chapitre , nous étudions l' existence de solutions faibles du problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} -u''(t) = f(t, u(t)), \ 0 < t < T \\ u(0) = u(T) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où f vérifie les hypothèse suivantes

(H1) (i)$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en u et mesurable en t .

(ii) $f(t, u) = o(|u|)$ quand $u \longrightarrow 0$,

(iii) il existe $p \geq 1$, il existe des fonctions $a_1, a_2 \geq 0$ tel que pour tout $t \in [0, T]$

$$|f(t, u)| \leq a_1(t) + a_2(t)|u|^p \qquad \forall u \in \mathbb{R}.$$

(H2) Soit pour tout $u \in \mathbb{R}$, $F(t, u) = \int_0^u f(t, s)ds$. Il existe $\theta > 2$ et $\mathbf{R_0}$ tel que

$$0 < \theta F(t, u) < f(t, u)u \qquad \text{si} |u| > \mathbf{R_0}.$$

Bien sûr, ce problème a toujours la solution triviale $u = 0$ et nous intéressons à l'existence de solution non triviale .

Dans ce qui suit on désigne par H_0^1 l'espace de Sobolev des fonction $u \in W^{1,2}$ vérifiant la condition de Dirichleté $u(0) = u(T) = 0$. on peut définir la fonctionnelle d'énergie associée au (2.1) $J : H_0^1 \to \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T \left[\frac{1}{2}(u'(t))^2 - F(t, u(t)) \right] dt. \tag{2.2}$$

Lemme 1. *La fonctionnelle $\mathcal{J}$ est bien définie et de classe C^1 sur H_0^1, sa dérivée est la fonctionnelle $J'(u)$définie par :*

$$\mathcal{J}'(u).v = \int_0^T \left[u'(t)v'(t) - f(t,u(t))v(t)\right] dt. \tag{2.3}$$

Démonstration. De (**H1**) $\mathcal{J}$ est bien définie sur H_0^1.
Pour la différentielle de $\mathcal{J}$ voir proposition (2) chapitre 1.
Montrons que $\mathcal{J}$ est différentiable au sens de Fréchet
Nous commençons par rappeler la différentiabilité de la norme dans$L^2(I)$
L'application $J_1 : L^2(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $J_1(u) = \int_0^T (u(t))^2 dt$ est différentiable en $u \in L^2(I)$ et on

$$d_u J_1(h) = J_1'(h) = \int_0^T 2u(t)h(t)dt,$$

en effet,

$$\begin{aligned}\left|J_1(u+h) - J_1(u) - \int_0^T 2u(t)h(t)dt\right| &= \left|\int_0^T (u(t)+h(t))^2 dt - \int_0^T (u(t))^2 dt - \int_0^T 2u(t)h(t)dt\right| \\ &= \int_0^T (h(t))^2 dt \\ &= \|h\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

Ce qui entraine que,

$$\lim_{\|h\|_{L^2}\longrightarrow 0} \frac{\left|J_1(u+h) - J_1(u) - \int_0^T 2u(t)h(t)dt\right|}{\|h\|_{L^2}} = \lim_{\|h\|_{L^2}\longrightarrow 0} \|h\|_{L^2} = 0$$

Par suite, nous obtenons la différentiabilité au sens de Fréchet de la fonctionnelle définie sur $H_0^1(I)$ par $\dfrac{1}{2}\int_0^T (u'(t))^2 dt$.
Montrons la différentiabilité de l'application $u \longrightarrow I(u) = \int_0^T F(t,u)dt$ c-à-d on montre

$$\lim_{\|v\|\longrightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$$

. avec

$$r(v) = I(u+v) - I(v) - \int_0^T f(t,u)vdt.$$

Tout d'abord, nous remarquons

$$F(t,u+v) - F(t,v) = \int_0^1 \frac{d}{dx}F(t,u+xv)dx = \int_0^1 f(t,u+xv)vdx,$$

pour tout $u, v \in H_0^1$

$$\begin{aligned}I(u+v) - I(v) - \int_0^T f(t,u)vdt &= \int_0^T \left(F(t,u+v) - F(t,u)\right) dt - \int_0^T f(t,u)vdt \\ &= \int_0^T \left[\int_0^1 \left(f(t,u+xv) - f(t,u)\right) vdx\right] dt\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit donc que

$$\left| I(u+v) - I(v) - \int_0^T f(t,u)v dt \right| \le \|v\|_{L^2} \left[\int_0^T \left[\int_0^1 \left(f(t,u+xv) - f(t,u) \right) dx \right]^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

Or, toujours par Cauchy-Schwarz, on a

$$\left[\int_0^1 \left(f(t,u+xv) - f(t,u) \right) dx \right]^2 \le \int_0^1 \left(f(t,u+xv) - f(t,u) \right)^2 dx$$

Donc on a finalement obtenu l'estimation

$$\begin{aligned} \left| I(u+v) - I(v) - \int_0^T f(t,u)v dt \right| &\le \int_0^1 \|f(t,u+xv) - f(t,u)\|_{L^2} \|v\|_{L^2} dx \\ &\le \int_0^1 \|f(t,u+xv) - f(t,u)\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1} dx \end{aligned}$$

alors

$$\frac{r(v)}{\|v\|_{H_0^1}} \le \int_0^1 \|f(t,u+xv) - f(t,u)\|_{L^2} dx$$

Pour chaque x fixé et par continuité de f

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |f(t,u+xv_n) - f(t,u)|^2 = 0$$

et

$$|f(t,u+xv_n) - f(t,u)|^2 \le 4 \|f\|_\infty \in L^1[0,T].$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous donne donc le résultat.
À l'aide du même type d'arguments, on vérifie que l'application $u \longrightarrow \mathcal{J}'$ est continue, et par suite $\mathcal{J}$ est différentielle aux sens de Fréchet. □

Afin de pouvoir appliquer les techniques du calcul de variations ,il est tout d'abord important de se demander comment se comporte les suites de Palais-Smale de $\mathcal{J}$.

Proposition 11. *Sous(H1), la fonctionnelle $\mathcal{J}$ vérifie la condition de Palais-Smale.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans H_0^1 telle que $\{\mathcal{J}(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\mathcal{J}'(u_n)$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$i.e. il existe une constante $c_1 > 0$ et une suite $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ avec $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ tel que , pour n assez grand et pour tout $v \in H_0^1$,

$$\left| \int_0^T \left[\frac{1}{2}(u_n'(t))^2 - F(t,u_n(t)) \right] dt \right| \le c_1, \tag{2.4}$$

et

$$\left| \int_0^T \left[u_n'(t)v'(t) - f(t,u_n(t))v(t) \right] dt \right| \le \varepsilon_n \|v\|. \tag{2.5}$$

Nous allons montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H_0^1.

Considérons

$$\mathcal{J}(u_n) - \frac{1}{\theta}\mathcal{J}'(u_n)u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_0^T (u_n')^2 dt + \int_0^T \frac{1}{\theta}\left[f(t,u_n)u_n - F(t,u_n)\right] dt \tag{2.6}$$

$$\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_0^T (u_n')^2 dt, \tag{2.7}$$

car le troisième terme est positif et borné par une constante indépendante de n d'après (**H2**).

D'autre part, on a pour $v = u_n$ dans (2.5)

$$\left|\mathcal{J}(u_n) - \frac{1}{\theta}\mathcal{J}'(u_n)u_n\right| \leq c_1 + \frac{\varepsilon_n}{\theta}\|u_n\| \tag{2.8}$$

De (2.7) et (2.8) découle que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^2 \leq c_1 + \frac{\varepsilon_n}{\theta}\|u_n\|$$

ce qui implique

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^2 - \frac{\varepsilon_n}{\theta}\|u_n\| \leq c_1 \tag{2.9}$$

comme $\theta > 2$ si l'on suppose que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty}\|u_n\| = +\infty$, on arrive à une contradiction avec (2.9), par suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Nous sommes maintenant prêt pour étudier la condition de Palais-Smale ; montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement dans H_0^1. D'après (2.3) nous avons

$$\left\langle \mathcal{J}'(u_n) - \mathcal{J}'(u), u_n - u\right\rangle = \int_0^T |u_n' - u'|^2 dt - \int_0^T \left[f(t,u_n(t)) - f(t,u(t))\right](u_n(t) - u(t))\, dt \tag{2.10}$$

puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H_0^1, de la réflexivité de H_0^1 on peut extraire une sous suite qui converge faiblement vers un élément $u \in H_0^1(u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } H_0^1)$, pour la simplicité des notations, on dénote encore cette sous suite par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et par théorème d'injection de Sobolev on a :

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^2$$

D'après inégalité de Hölder on a

$$\int_0^T |f(t,u_n(t)) - f(t,u(t))(u_n(t) - u(t))|\, dt \leq \|f(t,u_n(t)) - f(t,u(t))\|_{L^2}\|u_n(t) - u(t)\|_{L^2}$$

Et comme

$$\|u_n(t) - u(t)\|_{L^2} \longrightarrow 0$$

Alors

$$\int_0^T \left[f(t,u_n(t)) - f(t,u(t))\right](u_n(t) - u(t))\, dt \underset{n\to\infty}{\to} 0,. \tag{2.11}$$

De $\lim_{n\to\infty}\mathcal{J}'(u_n) = 0$ et $u_n \rightharpoonup u$, on a

$$\left\langle \mathcal{J}'(u_n) - \mathcal{J}'(u), (u_n - u)\right\rangle \to 0, \text{ quand } n \to \infty. \tag{2.12}$$

(2.12)et (2.11) et $u_n \to u$ dans $L^2(I)$ entrainent que, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fortement convergente vers u dans H_0^1, ce qui signifie que $\mathcal{J}$ satisfait la condition de Palais-Smale. □

Proposition 12. *La fonctionnelle $\mathcal{J}$ a une géométrie du col de montagne.*

Démonstration. par définition de $\mathcal{J}$, nous avons $J(0) = 0$.
Sous **(H1) (ii)**, on a

$$\forall\varepsilon \geq 0, \exists\delta > 0 \quad \text{tel que} \qquad |u| \leq \delta \Longrightarrow |F(t,u)| \leq \varepsilon\frac{|u|^2}{2},$$

et d'après**(H1) (iii)** ,il existe une constante $A = A(\delta)$ tel que $|u| \geq \delta$ implique

$$|F(t,u)| \leq A\,|u|^{p+1}$$

Combinons les deux estimations, on obtient

$$|F(t,u)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|u|^2 + A|u|^{p+1},$$

on a donc

$$\mathcal{J}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1} - \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2_{L^2} - A\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}},$$

et par l'inégalité de Poincaré et l'injection de Sobolev, il vient que

$$\|u\|_{L^2} \leq 2T\|u\|_{H_0^1},$$

il vient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) \quad &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1} - 2T\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2_{H_0^1} - AC^{p+1}\|u\|^{p+1}_{H_0^1} &(2.13)\\ &\geq (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon 2T - AC^{p+1}\|u\|^{p-1}_{H_0^1})\|u\|^2_{H_0^1}. &(2.14)\end{aligned}$$

Il suffit de choisir ε de sorte que $(\frac{1}{2} - T\varepsilon) = \frac{1}{4}$, comme $p > 1$ il existe $\rho_0 > 0$ tel que si $\|u\| \leq \rho_0$ alors

$$AC^{p+1}\|u\|^{p-1}_{H_0^1} \leq \frac{1}{8}.$$

Ainsi

$$\mathcal{J}(u) \geq \frac{1}{8}\|u\|^2_{H_0^1} \qquad \|u\| \leq \rho_0,$$

en particulier si $\|u\| = \rho_0$

$$\mathcal{J}(u) \geq \frac{1}{8}\rho_0^2 = \alpha.$$

Nous allons établir que $\mathcal{J}$ est minoré.
Montrons tout d'abord que F croit au moins aussi vite que$|u|^\theta$ c'est-à-dire-dire qu'il existe $C > 0$

$$F(t,u) \geq C|u|^\theta \tag{2.15}$$

Ceci résulte en fait l'hypothèse (H3). En effet

$$0 < \theta F(t,u) < \frac{dF(t,u)}{du}u \qquad \text{si } |u| > \mathbf{R_0},$$

Nous avons $\dfrac{d}{du}(|u|^{-\theta}F(t,u)) = -\theta\left|u^{\theta-1}\right|F(t,u) + \dfrac{dF}{du}(t,u)\,|u|^{-\theta}$
qui implique $\dfrac{d}{du}(|u|^{-\theta}F(t,u)) \geq 0 \qquad$ si $|u| > \mathbf{R_0}$,
(2.15) découle aisément.

On peut alors utiliser un argument d'homogénéité.On a pour $u \in H_0^1$,

$$\mathcal{J}(\lambda u) := \frac{\lambda^2}{2}\int_0^T u'^2 dt - \int_0^T F(\lambda u)dt \leq \frac{\lambda^2}{2}\int_0^T u'^2 dt - \lambda^\theta \int_0^T |u|^\theta \qquad \text{(par 2.15)},$$

comme $\theta > 2$ si $u \neq 0$ on voit que

$$\mathcal{J}(\lambda u) \longrightarrow -\infty \qquad \text{lorsque } |\lambda| \longrightarrow \pm\infty$$

il suffit de choisir un vecteur u non nul quelconque, et poser $e = \lambda u$ pour λ assez grand.
Nous venons de vérifier que les conditions du théorème de col sont satisfaites, on peut donc dire si $c > \alpha$ est une valeur critique de $\mathcal{J}$ et par suite elle est une solution non triviale de (1.4). $\square$

2.1 Exemple

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -u'' = |u|^{\lambda-1} u & 2 < \lambda + 1 \\ u(0) = u(T) = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

1^{ere}**étape** :Mise sous la forme variationnelle

Introduisons la primitive F de f

$$F(t,u) = \int_0^u f(s)ds = \int_0^u |s|^{\lambda-1} sds = \frac{1}{1+\lambda} |u|^{\lambda+1}.$$

On vérifier que f satisfait les hypothèses

$\lim\limits_{u\longrightarrow 0} \dfrac{|u|^{\lambda-1} u}{u} = 0.$

On vérifier (H2)

$$uf(u) = |u|^{\lambda+1} \geq \frac{\theta}{\lambda+1} |u|^{\lambda+1},$$

et comme $\lambda + 1 > 2,\quad$ il existe une constant $\quad \theta \quad telleque \quad 2 < \theta < \lambda + 1$, d'où le résultat

nous introduisons maintenant la fonction $\mathcal{J}$ définie sur H_0^1 par

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T |u'|^2 dt - \frac{1}{\lambda+1} \int_0^T |u|^{\lambda+1} dt. \tag{2.17}$$

et

$$\mathcal{J}'(u)v = \langle \mathcal{J}'(u), u \rangle = \int_0^T u'v'dt - \int_0^T |u|^{\lambda-1} uvdt. \tag{2.18}$$

2^{eme}**étape** La suite de Palais Smale est bornée.

Soit $\{u_n\}$ une suite de Palais Smale pour J, $\exists c > 0$ tel que

$$\mathcal{J}(u_n) \longrightarrow c, \tag{2.19}$$

$$\|\mathcal{J}(u_n)\|_{H^{-1}} \longrightarrow 0. \tag{2.20}$$

D'autre part,pour $v = u_n$

$$\mathcal{J}'(u_n)u_n = \langle \mathcal{J}'(u_n), u_n \rangle \tag{2.21}$$

$$= \int_0^T |u_n'|^2 dt - \int_0^T |u_n|^{\lambda+1} dt \tag{2.22}$$

$$\leq \|J'(u_n)\| \, \|u_n\|. \tag{2.23}$$

En multipliant (2.22) par $\frac{-1}{\lambda+1}$, et en ajoutant (2.17), on obtient

$$\mathcal{J}(u_n) - \frac{1}{\lambda+1}\langle \mathcal{J}'(u_n), u_n\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda+1}\right)\int_0^T |u_n'|^2\, dt.$$

D'où

$$\begin{aligned}\left(\frac{\lambda-1}{2(\lambda+1)}\right)\|u_n\|^2 &\leq |\mathcal{J}(u_n)| + |\langle \mathcal{J}'(u_n), u_n\rangle| \\ &\leq c + \frac{1}{\lambda+1}\|\mathcal{J}'(u_n)\|\,\|u_n\| \\ &\leq c + d\,\|u_n\|,\end{aligned}$$

il résulte que (u_n) est borné.

3^{eme}**etape** on montre que $\mathcal{J}'(\bar{u}) = 0$

on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathcal{J}'(u_n)v = 0 \Longrightarrow \int_0^T u_n'v'dt - \int_0^T |u_n|^{\lambda-1} u_n v dt \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty, \tag{2.24}$$

d'autre part, on a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H_0^1, on peut extraire une sous suite qui vérifiée

$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{dans} \quad H_0^1, \tag{2.25}$$

par la définition (5) , $\forall v \in H_0^1$,on a

$$\int_0^T u_n'v'dt \longrightarrow \int_0^T u'v'dt, \tag{2.26}$$

et de (2.25), il existe sous suite telle que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad L^\theta \quad \forall\theta, \tag{2.27}$$

alors par la définition de convergence faible ,il vient que

$$\int_0^T |u_n|^{\lambda-1} u_n dt \longrightarrow \int_0^T |u|^{\lambda-1} u dt, \tag{2.28}$$

(2.24), (2.26) et (2.28) ,d'où le résultat.

4^{eme}**etape** on montre que $\mathcal{J}$ vérifie les conditions de Palais Smale.

Comme $\{u_n\}_n$ est bornée dans H_0^1, de la réflexivité de H_0^1, on peut extraire une sous suite tel que

$$u_n \rightharpoonup u \qquad dans \quad H_0^1,$$

et par théorème d'injection de Sobolev, on a :

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^2(I),$$

et d'autre part, on a

$$\langle \mathcal{J}'(u_n), u_n - u\rangle = \int_0^T u_n' \left(u_n' - u'\right) dt - \int_0^T |u_n|^{\lambda-1} u_n(u_n - u)dt \tag{2.29}$$

$$\langle \mathcal{J}'(u), u_n - u\rangle = \int_0^T u' \left(u_n' - u'\right) dt - \int_0^T |u|^{\lambda-1} u(u_n - u)dt, \tag{2.30}$$

de (2.30) et (2.29) , il vient que

$$\langle \mathcal{J}'(u_n) - \mathcal{J}'(u), u_n - u\rangle = \int_0^T \left(u_n' - u'\right)^2 dt - \int_0^T \left(|u_n|^{\lambda-1} u_n - |u|^{\lambda-1} u\right)(u_n - u)dt,$$

comme $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \|u_n - u\|_\infty = 0$, et

$$\int_0^T \left(|u_n|^{\lambda-1} u_n - |u|^{\lambda-1} u\right)(u_n - u)dt \leq \|u_n - u\|_\infty \int_0^T \left(|u_n|^{\lambda-1} u_n - |u|^{\lambda-1} u\right) dt,$$

alors

$$\int_0^T \left(|u_n|^{\lambda-1} u_n - |u|^{\lambda-1} u\right)(u_n - u)dt \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty, \tag{2.31}$$

de plus $u_n \rightharpoonup u$, d'où

$$\langle \mathcal{J}'(u_n) - \mathcal{J}'(u), u_n - u\rangle \longrightarrow 0, \tag{2.32}$$

il résulte de (2.32) et (2.31) que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|u_n - u\|_{H_0^1} = 0,$$

et la condition de Palais-Smale est satisfaite.

Montrons que $\mathcal{J}$ est minorée
On a

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T |u'|^2 dt - \frac{1}{\lambda+1}\int_0^T |u|^{\lambda+1} dt \tag{2.33}$$

$$= \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{\lambda+1}\|u\|_{L^{\lambda+1}}^{\lambda+1}, \tag{2.34}$$

comme $2 < \lambda + 1$ par injection compact de Sobolev

$$\|u\|_{L^{\lambda+1}} \leq C\|u\|_{H_0^1},$$

il vient alors

$$\mathcal{J}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 - \frac{C^{\lambda+1}}{\lambda+1}\|u\|_{H_0^1}^{\lambda+1} = \|u\|_{H_0^1}^2\left(\frac{1}{2} - \frac{C^{\lambda-1}}{\lambda+1}\|u\|_{H_0^1}^{\lambda-1}\right),$$

il existe $\rho_0 > 0$ tel que, si $\|u\| = \rho_0$, alors

$$\mathcal{J}(u) \geq \|\rho_0\|^2\left(\frac{1}{2} - \frac{C^{\lambda+1}}{\lambda+1}\|\rho_0\|^{\lambda-1}\right),$$

on choisit $\rho < \min \left\{ \rho_0, \left(\dfrac{\lambda+1}{2C^{\lambda+1}} \right)^{\dfrac{1}{\lambda-1}} \right\}$, et $\alpha = \dfrac{\rho_0^2}{2} - \dfrac{C^{\lambda+1}}{\lambda+1} \rho_0^{\lambda+1}$,

et alors

$$\mathcal{J}(u) \geq \alpha \quad si \qquad \|u\| = \rho$$

comme $\lambda + 1 \geq \theta$ alors

$$\frac{1}{1+\lambda} |u|^{\lambda+1} \geq \frac{1}{1+\lambda} |u|^{\theta} \Longrightarrow F(t,u) \geq D |u|^{\theta}$$

Par homogénéité

$$\mathcal{J}(\xi u) = \frac{\xi^2}{2} \int_0^T |u'|^2 \, dt - \frac{1}{\lambda+1} \int_0^T |\xi u|^{\lambda+1} \, dt \leq \frac{\xi^2}{2} \int_0^T |u'|^2 \, dt - D |\xi u|^{\theta}$$

comme $\theta > 2$ et si $u \neq 0$ on voit que

$$\mathcal{J}(\xi u) \longrightarrow -\infty \qquad lorsque \, |\xi| \longrightarrow \pm\infty$$

il suffit de choisir un vecteur u non nul quelconque, et de poser $e = \xi u$ pour ξ assez grand. Puisque les hypothèses de théorème du col sont satisfaites ,on peut donc dire que $c > \alpha > 0$ est une valeur critique de (2.16).

Chapitre 3

Recherche de solutions pour un FBVP par approche variationnelle

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions faibles du problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec des conditions de Dirichlet (FBVP) :

$$\begin{cases} {}_tD_T^{\alpha}({}_0D_t^{\alpha}u(t)) = f(t,u(t)) \\ u\,(0) = u\,(T) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ et $f : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie les hypothèse suivantes :

(H3) $f \in C([0,T] \times \mathbb{R})$

(H4) il existe une constant $\theta > 2$ telle que

$$0 < \theta F(t,u) < f(t,u)u \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T] et u \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

où, $F(t,s) = \int_0^s f(t,u)du$ est la primitive de f.

Les domaines de recherche sont actuellement si variés qu'il semble difficile d'avoir un aperçu complet, Motivé par les travaux classiques présentés dans le chapitre précédent, la théorie des points critiques est utilisée pour aborder l'existence de solutions pour le problème (FBVP) (3.1).

Définition 19. *Soit $u \in E^{\alpha}$ est une solution faible de* (3.1) *si*

$$\int_0^T {}_0D_t^{\alpha}u(t){}_0D_t^{\alpha}v(t)dt = \int_0^T f(t,u(t))v(t)dt \qquad \forall v \in E^{\alpha} \tag{3.2}$$

De (3.2), on peut définir la fonctionnelle d'énergie associée à (3.1) $\mathcal{J} : E^{\alpha} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \left|{}_0D_t^{\alpha}u(t)\right|^2 dt - \int_0^T F(t,u(t))dt \tag{3.3}$$

Lemme 2. *Si f vérifie* (**H4**) *alors pour tout $t \in [0,T]$, les inégalités suivantes sont vérifiées*

$$F(t,u) \leq F(t,\frac{u}{|u|})u^{\theta} \qquad si \quad 0<|u|\leq 1, \tag{3.4}$$

et

$$F(t,u) \geq F(t,\frac{u}{|u|})u^{\theta} \qquad si \quad |u|\geq 1. \tag{3.5}$$

Démonstration. On a d'après (**H4**) et pour tout $\sigma \in]0,\infty[$:

$$\theta F(t,\sigma u) \leq \sigma u f(t,\sigma u).$$

Soit $h(\sigma)=F(t,\sigma u)$.
Montrons tout d'abord

$$\frac{d}{d\sigma}(h(\sigma)\sigma^{-\theta}) \geq 0 \tag{3.6}$$

on a :

$$h'(\sigma)=\frac{dF}{d\sigma}(t,\sigma u)=uf(t,\sigma u)$$

Et il résulte que :

$$\frac{d}{d\sigma}(h(\sigma)\sigma^{-\theta})=h'(\sigma)\sigma^{-\theta}-\theta\sigma^{-\theta-1}h(\sigma)=uf(t,\sigma u)\sigma^{-\theta}-\theta\sigma^{-\theta-1}F(t,\sigma u)$$

D'où l'inégalité (3.6).
Maintenant, on intègre (3.6) de 1 jusqu'à $\frac{1}{|u|}$ pour conclure (3.4),

$$\int_1^{\frac{1}{|u|}} \frac{d}{d\sigma}(h(\sigma)\sigma^{-\theta}) = h(\frac{1}{|u|})(\frac{1}{|u|})^{-\theta}-h(1),$$

et d'après la définition de h et (3.6), on conclut (3.4).
De même, on conclut (3.5) en intégrant de $\frac{1}{|u|}$ jusqu'à 1. □

Lemme 3. *Soit $m=\inf\{F(t,u) : t\in[0,T], |u|=1\}$. Alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}-\{0\}$ et $u \in E^{\alpha}-\{0\}$, on a*

$$\int_0^T F(t,\xi u(t))dt \geq m\,|\xi|^{\theta}\int_0^T |u(t)|^{\theta}\,dt - Tm.$$

Démonstration. Pour chaque $\xi \in \mathbb{R}-\{0\}$ et $u \in E^{\alpha}$, on définit les ensembles suivants

$$A=\{t\in[0,T]/\,|\xi u(t)|\leq 1\},$$

et

$$B=\{t\in[0,T]/\,|\xi u(t)|\geq 1\}.$$

D'après (3.5), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T F(t,\xi u(t))dt &= \int_A F(t,\xi u(t))dt + \int_B F(t,\xi u(t))dt \\ &\geq \int_B F(t,\xi u(t))dt \\ &\geq \int_B F(t,\frac{\xi u(t)}{|\xi u(t)|}\,|\xi u(t))|^\theta\,dt \\ &\geq m\int_B |\xi u(t))|^\theta\,dt \\ &= m\int_0^T |\xi u(t)|^\theta\,dt - m\int_A |\xi u(t)|^\theta\,dt \\ &\geq m\,|\xi|^\theta \int_0^T |u|^\theta\,dt - mT.\end{aligned}$$

□

Lemme 4. *Sous l'hypothèse (**H3**) la fonctionnelle définie par* (3.3) *est bien définie et de classe* C^1*, i.e* $\mathcal{J} \in C^1(E^\alpha, \mathbb{R})$*et*

$$\mathcal{J}'(u)v = \int_0^T {}_0D_t^\alpha u(t) {}_0D_t^\alpha v(t)dt - \int_0^T f(t,u(t))v(t)dt \qquad \forall v \in E^\alpha \tag{3.7}$$

Démonstration. Il suffit de démontrer que la fonctionnelle $G : \mathbb{E}^\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$G(u) = \int_0^T F(t,u)dt$$

est $C^1(\mathbb{E}^\alpha, \mathbb{R})$
On démontre que G est différentiable au sens de Fréchet i.e

$$\lim_{\|v\|_\alpha \longrightarrow 0} \frac{|r(v)|}{\|v\|_\alpha} = 0$$

Où

$$r(v) = \int_0^T [G(u+v) - G(u)]\,dt - \int_0^T f(t,u(t))vdt$$

On peut écrire

$$G(u+v) - G(u) = \int_0^1 \frac{d}{dx} G(u+xv)dx$$

Alors

$$\begin{aligned} r(v) &= G(u+v) - G(u) - \int_0^T f(t,u(t))vdt \\ &= \int_0^T \left[\int_0^1 \left(f(t,u+xv) - f(t,u)\right) vdx\right] dt\end{aligned}$$

Il résulte que

$$|r(v)| \leq \int_0^T \left[\int_0^1 |f(t,u+xv) - f(t,u)|\,|v|\,dx\right] dt,$$

puisque f est continue alors

$$|f(t,u+xv)-f(t,v)|^2 \leq 4\,\|f\|_\infty^2 .$$

D'après le théorème de Fubini et l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}
|r(v)| &\leq \int_0^1 \left[\int_0^T |f(t,u+xv)-f(t,u)|\,|v|\,dt\right] dx \\
&\leq \int_0^1 \|f(t,u+xv)-f(t,u)\|_{L^2} \|v\|_{L^2}\,dx \\
&\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^1 \|f(t,u+xv)-f(t,u)\|_{L^2} \|v\|_\alpha\,dx
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{|r(v)|}{\|v\|_\alpha} \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^1 \|f(t,u+xv)-f(t,u)\|_{L^2}\,dx$$

pour chaque x fixé et soit $v_n \in \mathbb{E}^\alpha$ telle que $v_n \longrightarrow 0$ on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^T |f(t,u+xv_n)-f(t,u)|^2\,dt = 0$$

$$\|f(t,u+xv_n)-f(t,u)\|_{L^2} \leq \|f(t,u+xv_n)\|_{L^2} + \|f(t,u)\|_{L^2} \leq 2\,\|f\|_\infty T^{\frac{1}{2}} \in L^1.$$

D'après théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^T \|f(t,u+xv_n)-f(t,u)\|_{L^2}\,dt = 0 \Longrightarrow \|f(t,u+xv_n)-f(t,u)\|_{L^2} \longrightarrow 0 \quad dans \quad L^1[0,T].$$

D'où le résultat.

Prouvons maintenant que G' est continue.
Soit $\{v_n\} \in \mathbb{E}^\alpha$ telle que $v_n \longrightarrow 0$ d'après proposition (10)

$$v_n \longrightarrow 0 \quad \mathbb{L}^2\ et \quad v_n \longrightarrow 0 \quad p.p \quad sur \quad [0,T]$$

et puisque f est continue alors

$$f(t,u+v_n) \longrightarrow f(t,u) \quad p.p \quad sur \quad [0,T],$$

Ce qui implique

$$|f(t,u+v_n)-f(t,u)|^2 \longrightarrow 0 \quad p.p \quad sur \quad [0,T].$$

Et d'autre part on a

$$|f(t,u+v_n)-f(t,u)|^2 \leq 4\,\|f\|_\infty^2 \in L^1$$

Et d'après théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^T |f(t,u+v_n)-f(t,u)|^2 = 0.$$

nous utilisons l'inégalité de Hölder et la proposition(9)

$$\begin{aligned}
|\langle G'(u+v_n)-G'(u),v\rangle| &= \int_0^T \left(f(t,u+v_n)-f(t,u)\right)vdt \\
&\leq \left(\int_0^T |f(t,u+v_n)-f(t,u)|^2\,dt\right)^{\dfrac{1}{2}}\left(\int_0^T |v|^2\,dt\right)^{\dfrac{1}{2}} \\
&\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left\|f(t,u+v_n)-f(t,u)\right\|_{L^2}\|v\|_\alpha\,dx
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
\|G'(u+v_n)-G'(u)\| &= \sup_{\|v\|_\alpha\leq 1}|\langle G'(u+v_n)-G'(u),v\rangle| \\
&\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left\|f(t,u+v_n)-f(t,u)\right\|_{L^2}\longrightarrow 0
\end{aligned}$$

D'où la continuité de G'.
Maintenant on démontre (3.7)

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(u+hv) &= \frac{1}{2}\int_0^T \left[{}_0D_t^\alpha(u+hv)(t)\right]^2dt-\int_0^T F(t,(u+hv)(t))dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \left[{}_0D_t^\alpha u(t)+h{}_0D_t^\alpha v(t)\right]^2dt-\int_0^T F(t,(u+hv)(t))dt
\end{aligned}$$

Et d'autre part, on a

$$\mathcal{J}(u)=\frac{1}{2}\int_0^T \left[{}_0D_t^\alpha(u)(t)\right]^2dt-\int_0^T F(t,(u)(t))dt$$

D'où

$$\mathcal{J}(u+hv)-\mathcal{J}(u)=\frac{1}{2}\int_0^T\left[h^2\left({}_0D_t^\alpha v(t)\right)^2+2h{}_0D_t^\alpha u(t){}_0D_t^\alpha v(t)\right]dt-\left[\int_0^T\left(F(t,u+hv)-F(t,u)\right)dt\right]$$

Et comme

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{F(t,u(t)+hv(t))-F(t,u(t))dt}{h}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\int_0^{u+hv}f(t,s)ds-\int_0^u f(t,s)ds}{h}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\int_u^{u+hv}f(t,s)ds}{h}$$

Par un résultat basique d'analyse on a

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\int_u^{u+hv}f(t,s)ds}{h}=f(t,u)v$$

Il résulte que

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\mathcal{J}(u+hv)-\mathcal{J}(u)}{h}=\int_0^T {}_0D_t^\alpha u(t){}_0D_t^\alpha v(t)dt-\int_0^T f(t,u)vdt.$$

□

On démontre que $\mathcal{J}$ satisfait les conditions de Palais-Smale.

Soit $\{u_k\}_k \in E^\alpha$ telle que

$$|\mathcal{J}(u_k)| \leq M, \qquad \lim_{k \longrightarrow \infty} \mathcal{J}'(u_k) = 0 \tag{3.8}$$

Premièrement, on montre que $(u_k)_k$ est bornée .on a

$$\mathcal{J}(u_k) = \frac{1}{2}\|u_k\|_\alpha^2 - \int_0^T F(t, u_k(t))dt$$

$$\langle \mathcal{J}'(u_k), u_k \rangle = \|u_k\|_\alpha^2 - \int_0^T f(t, u_k(t))u_k(t)dt$$

Utilisons (3.8), les calculs étant les même que le cas des BVP, on obtient

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_k\|_\alpha^2 \leq \mathcal{J}(u_k) - \frac{1}{\theta}\langle \mathcal{J}'(u_k), u_k \rangle \leq M + M_1 \|u_k\|$$

Comme $\theta > 2$, on en déduit que u_k est bornée dans $\mathbb{E}^\alpha$.On peut donc extraire une sous-suite (toujours notée u_k)tel que

$$u_k \rightharpoonup u \qquad dans \quad \mathbb{E}^\alpha$$

Utilisons l'inégalité de Cauchy Schwartz et (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}'(u_k) - \mathcal{J}'(u), u_k - u \rangle &= \langle \mathcal{J}'(u_k), u_k - u \rangle - \langle \mathcal{J}'(u), u_k - u \rangle \\ &\leq \|\mathcal{J}'(u_k)\| \|u_k - u\|_\alpha - \langle \mathcal{J}'(u), u_k - u \rangle \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Quand $k \longrightarrow \infty$. D'après (1.12) et la proposition (10), on obtient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C[0,T]$et

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \|u_k - u\|_\infty = 0$$

De plus

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}'(u_k) - \mathcal{J}'(u), u_k - u \rangle &= \langle \mathcal{J}'(u_k), u_k - u \rangle - \langle \mathcal{J}'(u), u_k - u \rangle \\ &= \int_0^T \left[{}_0D_t^\alpha u_k(t) {}_0D_t^\alpha (u_k - u)(t) - f(t, u_k(t))(u_k - u)(t)\right] dt \\ &- \int_0^T \left[{}_0D_t^\alpha u(t) {}_0D_t^\alpha (u_k - u)(t) - f(t, u(t))(u_k - u)(t)\right] dt \\ &= \int_0^T \left|{}_0D_t^\alpha (u_k - u)(t)\right|^2 dt - \int_0^T \left(f(t, u_k(t)) - f(t, u(t))\right)(u_k(t) - u(t))\, dt \\ &= \|u_k - u\|_\alpha^2 - \int_0^T \left(f(t, u_k(t) - f(t, u(t))\right)(u_k(t) - u(t))\, dt \end{aligned}$$

Il résulte que

$$\|u_k - u\|_\alpha^2 \longrightarrow 0 \qquad quand \quad k \longrightarrow \infty$$

D'où $\{u_k\}$ converge fortement vers u dans $\mathbb{E}^\alpha$.

Théorème 8. *Soit* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ *,supposant que* f *satisfait les condition (H3) et (H4). L'équation* (3.1) *admet une solution faible non trivial* $u \in \mathbb{E}^{\alpha}$.

Pour démontrer ce théorème on utilise le lemme suivant

Lemme 5. *La fonctionnelle* $\mathcal{J}$ *vérifie les hypothèses du théorème du col.*

Démonstration. En effet, $\mathcal{J}(0) = 0$. D'après (1.12) on a

$$\max |u(t)| \leq C \|u\|_{\alpha} \qquad \forall u \in \mathbb{E}^{\alpha}$$

avec $C = \dfrac{T^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha)(2\alpha-1)^{\frac{1}{2}}}$. Soit $C_1 = \dfrac{1}{C}$, d'après inégalité précédent et (3.4), si $\|u\|_{\alpha} \leq C_1$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T F(t, u(t)) &\leq \int_0^T F(t, \frac{u(t)}{|u(t)|}) |u(t)|^{\theta} dt \\ &\leq M \|u\|^{\theta} \leq MTC^{\theta} \|u\|_{\alpha}^{\theta}\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(u) &= \frac{1}{2} \|u\|_{\alpha}^2 - \int_0^T F(t, u(t))dt \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_{\alpha}^2 - MTC^{\theta} \|u\|_{\alpha}^{\theta}\end{aligned}$$

il résulte que

$$\mathcal{J}(u) \geq \frac{1}{2} C_1^2 - MTC^{\theta} C_1^{\theta} \qquad si \quad \|u\|_{\alpha} = C_1$$

Soit $\rho < \min \left\{ C_1, (\frac{1}{2MTC^{\theta}})^{\frac{1}{\theta-2}} \right\}$ et $\beta = \dfrac{\rho^2}{2} - MTC^{\theta}\rho^{\theta}$
il résulte que

$$\mathcal{J}(u) \geq \beta \qquad \|u\|_{\alpha} = \rho$$

D'après le lemme (3), pour chaque $\xi \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $u \in E^{\alpha} - \{0\}$ on a

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\xi u) &= \frac{\xi^2}{2} \|u\|_{\alpha}^2 - \int_0^T F(t, \xi u(t))dt \\ &\leq \frac{\xi^2}{2} \|u\|_{\alpha}^2 - m |\xi|^{\theta} \int_0^T |u|^{\theta} dt + mT\end{aligned}$$

il suffit de choisir un vecteur non nul quelconque, et poser $e = \xi u$ pour ξ assez grand on a $\mathcal{J}(e) \leq 0$ Dans ce cas $\mathcal{J}$ satisfait les conditions de théorème de col (Pass mountain). D'où l'existence de solution faible pour (3.1). $\square$

3.1 Exemple explicatif

Afin illustrer le résultat obtenu auparavant, nous donnons l'exemple suivant

$$\begin{cases} {}_tD_T^{\alpha}({}_0D_t^{\alpha}u(t)) = h(t)u(u^2+1) \\ u(0) = u(T) = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

avec h(.)est une fonction positive continue sur [0,T].
donc l'hypothèse (H3) est vérifiée .
étape1 Montrons que (H4) est satisfaite,

a) Introduisant la primitive F,

$$\begin{aligned} F(t,u) &= \int_0^u f(t,\sigma)d\sigma \\ &= \int_1^u h(t)\sigma^2(\sigma-1)d\sigma \\ &= h(t)\left(\frac{u^4}{4}+\frac{u^2}{2}\right) \end{aligned}$$

b) montrons l'existence de θ tel que $G(t,u) \leq \theta$,où $G(t,u) = \dfrac{uf(t,u)}{F(t,u)}$

$$G(t,u) = \frac{u^2(u^2+1)}{\dfrac{u^4}{4}+\dfrac{u^2}{2}} = \frac{4(u^2+1)}{(u^2+2)}$$

d'où

$$\frac{\partial G(t,u)}{\partial u} = \frac{8u}{(u^2+2)^2}$$

il est bien que G admet un minimum en 0 qui vaut 2, d'où l'existence d'un $\theta \leq 2$ tel que $G(t,u) \leq \theta$.

étape 2 La formulation variationnelle

Introduisons la fonction d'énergie $\mathcal{J}$ sur E^{α} définie par

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T |{}_0D_t^{\alpha}u(t)|^2\,dt - \int_0^T h(t)\left(\frac{u^4}{4}+\frac{u^2}{2}\right)dt$$

on a bien que $\mathcal{J} \in C^1(E^{\alpha},\mathbb{R})$, et que

$$\mathcal{J}'(u)v = \int_0^T {}_0D_t^{\alpha}u(t){}_0D_t^{\alpha}v(t)dt - \int_0^T h(t)u(u^2+1)vdt.$$

étape 3 *Recherche de point critique pour $\mathcal{J}$*

Nous avons vu que les solutions dans E^{α} de (3.10) *étaient les points critiques de $\mathcal{J}$, vérifions que $\mathcal{J}$ satisfait la condition de Palais-Smale de sorte que le résultat sera établi en vertu du théorème du col.*

Tout d'abord, montrons que la suite de Palais-Smale $\{u_k\}$ est bornée.
Soit $(u_k) \in E^{\alpha}$ tel que

$$|\mathcal{J}(u_k)| \leq M, \lim_{k\longrightarrow\infty} \mathcal{J}'(u_k) = 0$$

$$\mathcal{J}(u_k) - \frac{1}{\theta}\langle \mathcal{J}'(u_k), u_k\rangle = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_k\|_\alpha^2 - \int_0^T h(t)\left(\frac{u^4}{4}+\frac{u^2}{2}\right)dt + \frac{1}{\theta}\int_0^T h(t)u^2(u^2+1)vdt \tag{3.11}$$

$$\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_k\|_\alpha^2 \tag{3.12}$$

De plus nous avons

$$\mathcal{J}(u_k) - \frac{1}{\theta}\langle \mathcal{J}'(u_k), u_k\rangle \leq |\mathcal{J}(u_k)| + |\langle \mathcal{J}'(u_k), u_k\rangle| \tag{3.13}$$

il résulte de (3.12) et (3.13) que

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_k\|_\alpha^2 \leq |\mathcal{J}(u_k)| + |\langle \mathcal{J}'(u_k), u_k\rangle|$$
$$\leq M + \bar{C}\|u_k\|$$

$\dfrac{\theta-2}{2\theta}\|u_k\|_\alpha^2 - \bar{C}\|u_k\| \leq M \Longrightarrow \|u_k\| \leq \bar{\bar{C}}.$

Afin de prouver que $\mathcal{J}$ satisfait la condition de (PS) ,montrons que si $u_k \rightharpoonup u$ dans E^α, alors

$$\int_0^T \left(h(t)u_k(u_k^2+1) - h(t)u(u^2+1)\right)(u_k-u)dt \longrightarrow 0 \tag{3.14}$$

En effet, d'après l'étape précédente , $(u_k)_k$ est bornée dans E^α . On peut donc extraire une sous-suite (notée aussi (u_k)) qui converge faiblement dans E^α vers un élément $u \in E^\alpha, i.e.$

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad E^\alpha$$

et par la proposition (10),

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad C([0,T]), \tag{3.15}$$

il résulte de la continuité de f que

$$h(t)u_k(u_k^2+1) \longrightarrow h(t)u(u^2+1). \tag{3.16}$$

De plus via l'inégalité de Cauchy Schwartz

$$\left\langle h(t)u_k(u_k^2+1) - h(t)u(u^2+1), (u_k-u)\right\rangle \leq \left\|h(t)u_k^2(u_k-1) - h(t)u^2(u-1)\right\| \|u_k-u\|.$$

On conclut grâce à (3.15) et (3.16).

$$\langle \mathcal{J}'(u_k) - \mathcal{J}'(u), u_k-u\rangle = \|u_k-u\|^2 - \int_0^T h(t)u_k^2(u_k-1) - h(t)u^2(u-1)(u_k-u)dt. \tag{3.17}$$

nous utilisons (3.9) et (3.14), par conséquent $\|u_k-u\|_\alpha \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$.Cela implique la convergence forte de u_k vers u dans E^α.

Nous allons appliquer le théorème du col à la fonctionnelle $\mathcal{J}$. Il s'agit alors de trouver une "cuvette ", et un point bas.

- **l'existence d'une cuvette**

  Soit $C = \dfrac{T^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha)(2\alpha-1)^{\frac{1}{2}}}$ et $C_1 = \dfrac{1}{C}$, si $\|u\|_\alpha \leq C_1$ on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(u) &= \frac{1}{2}\int_0^T |{}_0D_t^\alpha u(t)|^2\,dt - \int_0^T h(t)\left(\frac{u^4}{4}+\frac{u^2}{2}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\|u\|_\alpha^2 - \int_0^T h(t)\left(\frac{u^4}{4\,|u|^4}+\frac{u^2}{2\,|u|^4}\right)|u|^4\,dt \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|_\alpha^2 - \int_0^T h(t)\left(\frac{u^4}{4\,|u|^4}+\frac{u^2}{2\,|u|^2}\right)|u|^4\,dt \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|_\alpha^2 - M\,\|u\|_{L^4}^4 \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|_\alpha^2 - MTC^4\,\|u\|_\alpha^4 \qquad si \quad \|u\|\,\alpha \leq C_1,
\end{aligned}$$

  et par conséquent

$$\mathcal{J}(u) \geq \frac{1}{2}C_1^2 - MTC^4C_1^4 \qquad si \quad \|u\|_\alpha = C_1$$

  On peut choisir C_1 suffisamment petit tel que

$$\frac{1}{2} - MTC^4C_1^2 > 0,$$

  pour que

$$\mathcal{J}(u) \geq C_1^2(\frac{1}{2} - MTC^4C_1^2) =: \beta > 0.$$

- **Existence du point bas**,

  Nous allons établir que $\mathcal{J}$ n'est pas minorée,ce qui fournit automatiquement le point bas u_1.

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(\lambda u) &= \frac{\lambda^2}{2}\int_0^T |{}_0D_t^\alpha u(t)|^2\,dt - \int_0^T h(t)\left(\frac{\lambda^4u^4}{4}+\frac{\lambda^2u^2}{2}\right)dt \\
&\leq \frac{\lambda^2}{2}\int_0^T |{}_0D_t^\alpha u(t)|^2\,dt - \int_0^T h(t)\left(\frac{\lambda^4u^4}{4}+\frac{\lambda^2u^2}{8}\right)dt
\end{aligned}$$

  si $u \neq 0$, on voit que

$$\mathcal{J}(\lambda u) \longrightarrow -\infty \quad \text{lorsque} \quad |\lambda| \longrightarrow \pm\infty$$

  il suffit de choisir un vecteur non nul quelconque,et de poser $u_1 = \lambda u$, pour λ assez grand. Comme toutes les hypothèses du théorème de col sont satisfaites, nous avons donc obtenue une solution non triviale de (3.10).

Conclusion

Nous avons montré à travers ce mémoire que l'approche variationnelle peut être appliquée à des équations différentielles ordinaires et fractionnaires, si elles ont une structure variationnelle. En considérant la même famille de non linéarités, nous avons pu appliquer le lemme du col dans les deux cas suivant les mêmes étapes , bien sur en respectant la spécificité de chaque cas et en faisant intervenir les espaces de Sobolev d'ordre entier et d'ordre fractionnaire.
Ce mémoire a souligné l'analogie entre le cas fractionnaire et le cas ordinaire et la possibilité de généraliser l'application de l'approche variationnelle pour une certaine classe d'opérateurs différentiels d'ordre fractionnaire.

Bibliographie

[1] D.A. Benson, S.W. Wheatcraft, and M.M. Meerschaeert. The fractional order governing equations of levy motion. Water Resour. Res., 36 :1413-1423, 2000.

[2] H. Brezis : Analyse Fonctionnelle, Th´eorie et Applications ; Editions Masson,Paris 1983..

[3] K.W., Blayneh,"Analysis of age structured host-parasitoid model", *Far East J. Dyn. Syst.*, Vol. 4, pp. 125-145, 2002.

[4] Z. Bai and H. L¨u, Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl.., Vol. 311, 495-505, 2005.

[5] Cerami : G. Cerami, Un criterio di esistenza per i punti critici su variet'a ilimitate,Rend. Ist. Lomb. Sci. Lett. 112 (1978), p. 332–336.

[6] Daoudi-Merzagui N, , Méthodes topologiques et variationnelles pour l'étude de problème aux limites périodiques, thèse de doctorat d'etat univercité de Tlemcen, 1999

[7] V. Ervin and J. Roop, Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation, Numer. Meth. Part. Diff. Eqs. Vol. 22, 58-76, 2006.

[8] W.G., Glockle, T.F., Nonnenmacher, "A fractional calculus approach of self-similar protein dynamics", *Biophys. J.*, Vol.68, pp. 46-53, 1995.

[9] R., Hilfer, "Applications of Fractional Calculus in Physics", *World Scientific, Singapore*, 2000.

[10] F. Jiao , and Y. Zhou, "Existence result for fractional boundary value problem via critical point theory ,Intern .Journal of bif .and chaos Vol .22,No 4,1-17,2012

[11] W. Jang, The existence of solutions for boundary value problems of fractional differential equatios at resonance, Nonlinear Anal. Vol. 74, 1987-1994, 2011.

[12] F. Jiao and Y. Zhou, Existence results for fractional boundary value problem via critical point theory, Intern. Journal of Bif. and Chaos Vol. 22, No 4, 1-17, 2012.

[13] A. Kilbas, H. Srivastava and J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, Amsterdam, 2006.

[14] O. Kavian, Introduction 'a la th´eorie des points critiques et applications aux probl'emes elliptiques. (French) [Introduction to critical point theory and applications to elliptic problems.] Mathématiques and Applications [Mathematics and Applications] Series, Springer-Verlag, Paris, 1993.

[15] F. Mainardi. Fractional calculus. In A. Carpinteri and F. Mainardi, editors, Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, New York, 1997. Springer-Verlag.

[16] J. Mawhin, M. Willem, Critical Point Theory and Hamiltonian Systems,Appl. Math. Sci. Springer-Verlag, New York. 74 (1989)

[17] J. Mawhin and M. Willem, Origin and evolution of the Palais-Smale condition in critical point theory, www.researchgate.net/profile/Jean_Mawhin/publication/225147695_Origin_and _evolution_of_the_Palais

[18] K.S., Miller, B., Ross, “An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations", *John Wiley, New York*, 1993.

[19] R., Magin “Fractional calculus in bioengineering", *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, Vol.32(1), pp.1-104, 2004.

[20] R., Metzler, K., Joseph, “Boundary value problems for fractional diffusion equations", *Physica. A.*, Vol.278, pp.107-125, 2000.

[21] N., Nyamoradi, D., Baleanu, RP., Agarwal, “Existence and uniqueness of positive solutions to fractional boundary value problems with nonlinear boundary conditions",

[22] K.B., Oldham, “Fractional differential equations in electrochemistry", *Advances in Engineering software*, Vol. 41, pp. 9-12, 2010.

[23] K.B., Oldham, J., Spanier, “The Fractional Calculus", *Academic Press, New York, London*, 1974.

[24] P. Rabinowitz, Minimax method in critical point theory with applications to differential equations, CBMS Amer. Math. Soc., No 65, 1986.

[25] I.M. Sokolov, J. Klafter, and A. Blumen. Fractional kinetics. Physics Today, Nov. :48-53, 2002.

[26] S.G., Samko, A.A., Kilbas, O.I., Marichev, “Fractional Integrals and Derivatives", *Theory and pplications, Gordon and Breach, Yverdon*, 1993.

[27] C. Torres, Mountain pass solution for a fractional boundary value problem, Journal of Fractional Calculus and Applications 5(1) (2014), 110.

[28] B., Vintagre, I., Podlybni, A., Hernandez, V. Feliu, “Some approximations of fractionalorder operators used in control theory and applications", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, Vol. 3(3), pp.231-248, 2000.

[29] S. Zhang, Existence of a solution for the fractional differential equation with nonlinear boundary conditions, Comput. Math. Appl. Vol. 61, 1202-1208, 2011