الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen Algérie

جامعة أبي بكر بلقايد
تلمسان الجزائر

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER
EN MATHEMATIQUES

Option : Perturbations, Moyennisation et Applications aux Biomathématiques (PeMAB)

Sujet :

Sur la stabilité globale pour certains modèles de dynamiques de populations scalaires avec retard

Candidate : **Ibtissem AYACHI**

Date : 03/07/2017

Membres du Jury :

Président :	Sidi Mohamed BOUGUIMA,	Professeur, Université de Tlemcen
Examinateurs :	Karim YADI,	Professeur, Université de Tlemcen
	Fethi BORSALI,	MCB, Université de Tlemcen
Encadreur :	Mustapha LAKRIB,	Professeur, Université de Sidi Bel Abbès

Année Universitaire 2016/2017

Dédicaces

Je dédie ce modèste travail à :

Mes chers parents.

Ma sœur Mounira que j'aime très fort.

Mon petit frère Zinou que je n'imagine pas un monde sans sa présence.

Ma chère cousine Hafida.

Toute ma famille.

"Les deux guerriers les plus puissants sont la patience et le temps. N'oublie pas que les grandes réalisations prennent du temps et qu'il n'y a pas de succès du jour au lendemain." Léon Tolstoï.

Remerciements

Je tiens a témoigner ma reconnaissance à **DIEU** tout puissant, de m'avoir donné le courage, la volonté et la force d'achever cette réalisation et nous lui rendons grâce.

Mes remerciements s'adressent en tout premier lieu à mon encadreur le Professeur Mustapha LAKRIB qui a su guider mon travail avec compétence. Je lui apporte aussi toute ma reconnaissance pour sa disponibilité, ses conseils qui ont été nécessaires pour la bonne réussite de ce travail.

Je remercie le Professeur Sidi Mohamed BOUGUIMA, pour sa disponibilité, sa gentillesse et ses efforts durant notre cursus universitaire. Je le remercie vivement d'avoir accepté de présider le jury.

Je remercie tout particulièrement le Professeur Karim YADI pour tous les efforts déployés pendant ces deux années de master. Je le remercie énormément d'avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Je remercie le Docteur Fethi BORSALI de bien vouloir évaluer ce travail.

Je remercie mes parents que j'aime plus que tout au monde. Je veux que vous soyez si fiers de moi. Vous êtes le premier amour que j'ai connu et jamais ce sentiment ne sera interrompu. Merci de m'aimer comme vous le faites si merveilleusement. Les outils, les espoirs et les rêves m'appartiennent maintenant et tout cela grâce à vous chers parents.

Tlemcen, juillet 2017.

Table des matières

Introduction

La modélisation des dynamiques des populations vise à expliquer, et éventuellement à prévoir, les évolutions d'une population dans un cadre écologique ou géographique donné. La plupart du temps, elle se limite à la description des variations de la taille de la population, mais elle peut aussi permettre de décrire l'évolution de sa structure en âge ou en biomasse. Les scientifiques ont, dès le XIIIe siècle, proposé des « modèles », c'est-à-dire, des représentations simplifiées de telles dynamiques, le plus souvent sous forme mathématique et plus précisément en utilisant des équations différentielles ordinaires et partielles, celles-ci exprimant le lien entre la taille de la population représentée par une quantité inconnue, et sa dérivée en temps. Cependant, pour mieux modéliser les problèmes de dynamiques de populations il s'est avéré indispensable d'inclure une partie du passé de l'état (qui représente la taille de la population, par exemple) dans ces modèles, c'est-à-dire, idéalement, un système réel devrait être modélisé par des équations différentielles avec des retards de temps. En effet, l'utilisation des équations différentielles à retard (EDR) dans la modélisation des dynamiques de populations est actuellement très actif, en grande partie grâce aux récents progrès rapides réalisés dans la compréhension de la dynamique de plusieurs classes importantes des équations et des systèmes retardés.

Lors de l'étude d'un modèle de dynamiques de populations, exprimé par des équations différentielles ordinaires, à retard ou autre, et afin d'analyser mathématiquement le modèle pour mieux comprendre le fonctionnement de la population étudiée et prévoir son évolution, il est indispensable de déterminer les points d'équilibre du modèle et d'étudier leur stabilité.

L'objectif de ce mémoire est l'étude de la stabilité globale des points d'équilibre dans divers modèles mathématiques, avec retard, de dynamiques de populations dans le cas d'espèces uniques (cas scalaires), et dans certains cas nous allons étudier d'autres propriétés comme l'existence et la bornitude des solutions, et la stabilité locale des points d'équilibre.

A l'issue de cette introduction, ce mémoire est articulée comme suit :

Dans le *premier chapitre* sont présentés les notions et outils mathématiques nécessaires à la compréhension de la suite du mémoire.

Le *deuxième chapitre* expose la problématique du mémoire qui est l'étude de la stabilité de certains modèles scalaires avec retard de dynamiques de populations.

Il est à souligner que ce travail se base essentiellement sur le Chapitre 4 du livre "Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics" par Yang Kuang [7].

NOTIONS PRÉLIMINAIRES 1

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques définitions, notations et résultats utiles pour la suite de ce mémoire (voir [5, 7]).

1.1 Équation différentielles à retard

Nous allons présenter ici quelques notions de base sur les équations différentielles à retard.

1.1.1 Définitions et notations

Avant d'aborder le concept des équations différentielles à retard, nous adoptons les notations suivantes :

$\mathbb{R}^n$, l'ensemble des n-uplets de nombres réels, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n muni de la norme euclidienne $|.|$.

Pour $b > a$, on note $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach des fonctions continues définies sur $[a,b]$ et à valeur dans $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie de la convergence uniforme, i.e., pour $\phi \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$, la norme de ϕ est définie par $||\phi|| = \sup_{a \leq \theta \leq b} |\phi(\theta)|$.

Si $[a,b] = [-r,0]$, où r est une constante positive, on note généralement par $\mathcal{C}$ l'espace $\mathcal{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$.

Pour $\sigma \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$, $x \in \mathcal{C}([\sigma - r, \sigma + A],\mathbb{R}^n)$ et $t \in [\sigma, \sigma + A]$, on définit $x_t \in \mathcal{C}$ par $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-r,0]$.

Définition 1.1 *Soit Ω une partie de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction donnée. La relation*

$$x'(t) = f(t, x_t) \tag{1.1}$$

où " ′ " représente la dérivation à droite par rapport à t, est dite équation différentielle à retard ou, plus généralement, équation différentielle fonctionnelle à retard sur Ω.

Commentaire 1.1 *Le nombre r est appelée le retard. Évidemment, le cas $r = 0$ correspond au cas des équations différentielles ordinaires. De plus, à l'instant $t = 0$, la fonction $x_{t=0}$ nécessite la connaissance des valeurs $x(t)$ sur l'intervalle de temps $[-r,0]$. En d'autres termes, une condition initiale doit être précisée. Si la condition initiale à l'instant t_0 d'une équation différentielle ordinaire est un point $x(t_0)$, celle d'une équation différentielle à retard est une fonction appartenant, en général, à l'espace $\mathcal{C}$:*

$$x_{t_0} = \phi, \quad \phi \in \mathcal{C}.$$

L'équation (1.1) est dite linéaire si $f(t, x_t) = L(t, x_t) + h(t)$ où $L(t, x_t)$ est linéaire en x_t, linéaire homogène si $h(t) \equiv 0$ et linéaire non homogène si $h(t) \neq 0$. On dit que (1.1) est autonome si $f(t, x_t) = g(x_t)$ où g indépendante de t, sinon, on dit qu'elle est non autonome.

Remarque 1.1 *L'équation (1.1) est de type plus général, en ce sens qu'elle inclut la forme suivante que nous allons utiliser dans ce mémoire.*

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_p)),$$

avec $0 \leq \tau_i \leq r$, $i = 1, 2, \ldots, p$, *puisqu'il suffit de poser*

$$f(t, u) = f_2(t, u(0), u(-\tau_1(t)), ..., u(\tau_p(t)))$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} f(t, x_t) &= f_2(t, x_t(0), x_t(-\tau_1(t)), ..., x_t(-\tau_p(t))) \\ &= f_2(t, x(t), x(t-\tau_1(t)), ..., x(t-\tau_p(t))). \end{aligned}$$

Définition 1.2

- *Une fonction x est appelée solution de (1.1) sur l'intervalle $[t_0 - r, t_0 + A[$ si $x \in \mathcal{C}([t_0 - r, t_0 + A[, \mathbb{R}^n)$, $(t, x_t) \in \Omega$ et x satisfait l'équation (1.1) pour $t \in [t_0, t_0 + A[$.*
- *Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{C}$, on dit que $x = x(t; t_0, \phi)$ est une solution de (1.1) de condition initiale ϕ à l'instant t_0, ou tout simplement une solution à travers (t_0, ϕ).*

1.1.2 Existence et unicité

Théorème 1.1 (Existence) *Dans (1.1), on suppose que Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ et que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continue sur Ω. Si $(t_0, \phi) \in \Omega$, alors il existe au moins une solution de l'équation (1.1) passant par (t_0, ϕ).*

Définition 1.3 *On dit que la fonction $f = f(t, \varphi)$ est lipschitzienne par rapport à φ sur un compact K de $\mathbb{R} \times C$ s'il existe une constante $k > 0$ telle que, pour tout $(t, \varphi_i) \in K$, $i = 1, 2$, on a*

$$|f(t, \varphi_1) - f(t, \varphi_2)| \leq k|\varphi_1 - \varphi_2|.$$

Théorème 1.2 (Unicité) *Dans (1.1), on suppose que Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ et que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continue sur Ω et qu'elle est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur tout ensemble compact de Ω. Si $(t_0, \phi) \in \Omega$, alors il existe une unique solution de (1.1) passant par (t_0, ϕ).*

1.1.3 Stabilité

La discussion sur la stabilité se simplifie lorsqu'il s'agit de la stabilité d'une solution constante et plus particulièrement, la solution (identiquement) nulle (on dit aussi, la solution zéro ou la solution triviale).

Mais il arrive que l'équation (1.1) n'admette pas de solution nulle, ou encore que l'on s'intéresse plutôt à une autre solution que la solution nulle. Dans ce cas on procède de la manière suivante : soit $\bar{x}$ la solution de l'équation (1.1) dont la stabilité nous intéresse. Si x est une autre solution de l'équation (1.1), il suffit de faire une translation en posant $y(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ pour retomber sur la solution nulle.

Définition 1.4

- *On dit que la solution nulle de l'équation (1.1) est stable (au sens de Lyapounov) en* $t_0 > \alpha$ *si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$*, tel que, pour tout* $\phi \in \mathcal{C}$ *vérifiant* $|\phi| \leq \delta$*, la solution* $x = x(\cdot; t_0, \phi)$ *de l'équation (1.1) existe pour tout* $t \geq t_0 - r$ *et satisfait l'inégalité suivante :* $|x(t)| < \varepsilon$*, pour tout* $t \geq t_0 - r$*.*
- *Sinon, on dit que la solution nulle est instable (au sens de Lyapounov) en* $t_0 > \alpha$*.*
- *La solution nulle de l'équation (1.1) est dite uniformément stable si elle est stable (au sens de Lyapounov) en tout instant* $t_0 > \alpha$ *et le nombre* δ *est indépendant de* t_0*, i.e.* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *ne dépend que de* ε*.*
- *La solution nulle de l'équation (1.1) est dite asymptotiquement stable si en plus de la stabilité, il existe* $\delta_0 > 0$ *tel que*

$$|\phi| \leq \delta_0 \Longrightarrow \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0.$$

1.2 Notion d'oscillation et Lemme de Gronwall

Nous présentons dans cette dernière section la notion de fonction oscillatoire et le Lemme de Gronwall qui seront utilisés dans ce mémoire.

Définition 1.5 *On dit qu'une fonction* y*, définie pour* $t \geq a$ *où* $a \in \mathbb{R}$*, est oscillatoire par rapport à une certaine valeur* y^**, s'il existe une suite* (t_n) *avec* $t_n \geq a$ *et* $t_n \to +\infty$ *lorsque* $n \to +\infty$*, telle que* $y(t_n) = y^*$*. Sinon on dit qu'elle est non oscillatoire.*

Dans le cas où $y^* = 0$*, on dit simplement que* y *est oscillatoire ou non oscillatoire, respectivement.*

Lemme 1.1 (Lemme de Gronwall) *Soient* φ*,* ψ *et* y *trois fonctions continues sur un segment* $[a, b]$*, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité*

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s) y(s) ds.$$

Alors

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq \varphi + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u) du\right).$$

2 Stabilité globale pour les modèles d'une seule espèce

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'analyse de la stabilité globale des points d'équilibre pour différents modèles de dynamiques de populations décrits par des équations différentielles scalaires à retard. Pour certains cas, nous étudions aussi la bornitude des solutions et la stabilité locale des points d'équilibre.

Ce chapitre est essentiellement puisé du livre de Kuang [7, Chapitre 4].

2.1 Stabilité globale de Wright

2.1.1 Sur l'équation logistique avec retard

De manière générale, les équations à retard apparaissent de plus en plus fréquemment dans la modélisation de la dynamique des populations. En effet, le premier modèle de développement démographique décrivant l'évolution d'une population dans le temps est introduit par Malthus en 1798 et il est représenté par l'équation différentielle suivante :

$$x'(t) = \lambda x(t).$$

Il traduit la croissance exponentielle d'une population au cours du temps. Malhtus dans ce modèle a négligé l'hypothèse que de nombreuses populations ont un plafond démographique imposé par les contraintes extérieures comme l'espace, les ressources nutritives, etc. Pour remédier à ce problème, Verhulst en 1838 a proposé le modèle suivant dans lequel il a tenu compte de la capacité maximale k de la population. Il a alors remplacé le taux de croissance λ par une quantité qui sera d'autant plus petite que l'on s'approche de k, pour obtenir l'équation dite logistique suivante :

$$x'(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right). \tag{2.1}$$

Même si ce modèle paraît plus réaliste, mais le taux de croissance de la population à l'instant t dans l'équation logistique (2.1) ne fait intervenir que la taille de la population à cet instant ce qui est moins proche de la nature écologique.

Pour remédier à ce problème Hutchinson a proposé une nouvelle formulation du modèle décrit par (2.1) donnée par l'équation logistique à retard suivante :

$$x'(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{k}\right), \tag{2.2}$$

où r est le taux de croissance de la population, k est la capacité de charge du milieu et $\tau > 0$ est le retard.

2.1.2 Forme simplifiée de l'équation logistique avec retard

Maintenant on va écrire l'équation de Hutchinson (2.2) sous une forme plus simple qui facilitera l'étude de la stabilité globale, qui est notre objectif principal dans ce mémoire.

En posant

$$y(t) = -1 + \frac{x(t)}{k}$$

dans l'équation (2.2), celle-ci devient :

$$y'(t) = -ry(t-\tau)[1 + y(t)], \tag{2.3}$$

puis, en posant $t = \tau\bar{t}$ et $\bar{y}(\bar{t}) = y(t)$ dans (2.3), on obtient :

$$\frac{d}{d\bar{t}}\bar{y}(\bar{t}) = -r\tau\bar{y}(\bar{t}-1)[1 + \bar{y}(\bar{t})], \tag{2.4}$$

laquelle, en notant $\alpha = r\tau$, et en revenant aux variables initiales, donne l'équation simplifiée suivante

$$y'(t) = -\alpha y(t-1)[1 + y(t)] \tag{2.5}$$

qui fera l'objet d'étude dans le reste du chapitre.

2.1.3 Résultats de stabilité

Dans l'étude de la stabilité d'un modèle non linéaire avec retard de dynamique de populations, il est souvent souhaitable d'obtenir des conditions suffisantes pour la stabilité asymptotique globale (en fonction des conditions initiales appropriées) de son état d'équilibre positif (souvent unique).

Dans le cas de l'équation (2.2), le seul équilibre positif stable est $x(t) \equiv k$, qui est réduit à la solution triviale de l'équation (2.5). Le résultat de stabilité globale suivant est dû à Wright [13] :

Théorème 2.1 *Soit $\alpha \leq 3/2$ et $\phi \in \mathcal{C}([-1,0], \mathbb{R})$, avec $\phi(\theta) \geq -1$, $\phi(0) > -1$ et soit y la solution de (2.5) de condition initiale ϕ. Alors $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$.*

La démonstration du Théorème 2.1 fait intervenir le lemme suivant.

Lemme 2.1 *Sous les conditions du Théorème 2.1, nous avons :*
i) $y(t) > -1$, *pour tout* $t \geq 0$.
ii) y *est bornée.*

Démonstration du Lemme 2.1.
i) L'équation (2.5) peut s'écrire comme

$$\frac{y'(t)}{1+y(t)} = -\alpha y(t-1).$$

En faisant ensuite une intégration de t_0 à t, on obtient :

$$1 + y(t) = (1 + y(t_0)) \exp\left\{-\alpha \int_{t_0-1}^{t-1} y(\xi)d\xi\right\}. \tag{2.6}$$

Ce qui implique que $1 + y(t) > 0$ aussi longtemps que l'intégrale de $y(\xi)$ existe sur $[-1, t-1]$, donc $y(t) > -1$.

ii) a) Si y est non oscillatoire alors, soit $y(t) > 0$, soit $y(t) < 0$ pour certains $t \geq t_0 \geq 0$.

En supposant que $y(t) > 0$ pour $t \geq t_0$ alors $y'(t) < 0$ pour $t \geq t_0 + 1$, qui est obtenu à partir de (2.5) (puisque $1 + y(t) > 0$). Donc y est strictement décroissante pour $t \geq t_0 + 1$. Il existe alors $c \geq 0$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = c$, ce qui entraine que $\lim\limits_{t\to+\infty} y'(t) = 0 = -\alpha c(1+c)$, et donc on a : $c = 0$.

On a le même résultat pour le cas : $y(t) < 0$ pour $t \geq t_0$.

b) Supposons maintenant que y est oscillatoire. Soient $t_2 > t_1 > 0$ deux zéros consécutifs quelconques de y tels que $y(t) \geq 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$, et supposons que y atteint son maximum à t^*. Alors $y'(t^*) = 0$; ce qui implique que $y(t^* - 1) = 0$.

En posant $t_0 = t^* - 1$ dans (2.6), celle-ci devient :

$$1 + y(t^*) = \exp\left\{-\alpha \int_{t^*-2}^{t^*-1} y(\xi)d\xi\right\} < e^{\alpha}, \quad \text{puisque} \quad y(\xi) > -1.$$

Donc, $y(t^*) < e^{\alpha} - 1$. Cela prouve que

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, y(t) \leq e^{\alpha} - 1,$$

et le lemme est prouvé. □

Maintenant nous allons présenter la preuve du Théorème 2.1.

Démonstration du Théorème 2.1. Puisque y est bornée (voir Lemme 2.1), on peut définir

$$u = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, y(t), \quad v = -\underline{\lim_{t\to+\infty}}\, y(t). \tag{2.7}$$

On va supposer que y est oscillatoire, sinon, de la preuve du Lemme 2.1, on déduit que : $u = v = 0$; et la preuve est faite.

Soit $\varepsilon > 0$ et $t \geq t_1 = t_1(\varepsilon) > 0$, tels que

$$-v - \varepsilon < y(t) < u + \varepsilon. \tag{2.8}$$

Si $y(T)$ est un maximum ou un minimum (local) avec $T > t_1 + 2$, alors $y(T-1) = 0$ et on obtient à partir de (2.6) et (2.8)

$$-\alpha(u+\varepsilon) < \ln(1+y(T)) = -\alpha \int_{T-2}^{T-1} y(t)dt < \alpha(v+\varepsilon),$$

ce qui donne

$$-1 + \exp\{-\alpha(u+\varepsilon)\} < y(T) < -1 + \exp\{\alpha(v+\varepsilon)\}. \tag{2.9}$$

De la définition de u, v, il découle qu'il existe un $T > 0$ tel que $y(T)$ est un maximum local et $y(T) > u - \varepsilon$, et un $T' > 0$ tel que $y(T') > 0$ est un minimum local et $y(T') < -v + \varepsilon$. Donc

$$u - \varepsilon < \exp\{\alpha(v+\varepsilon)\} - 1, \quad v - \varepsilon < 1 - \exp\{-\alpha(u+\varepsilon)\}. \tag{2.10}$$

Puisque (2.10) est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, cela conduit à

$$u \leq e^{\alpha v} - 1, \quad v \leq 1 - e^{-\alpha u}. \tag{2.11}$$

On remarque dans (2.11) que $v < 1$ et si l'un des u et v est nul, alors l'autre l'est aussi, et le théorème est prouvé dans ce cas là.

Nous supposons dans la suite que :

$$u > 0, \quad 0 < v < 1. \tag{2.12}$$

Si $\alpha \leq 1$, alors (2.11) donne :

$$1 + u \leq e^{v} \leq \exp(1 - e^{-u}).$$

Par conséquent, puisque $u > 0$, nous avons

$$1 + u - \exp(1 - e^{-u}) = \int_0^u \int_0^{u_1} (1 - e^{-u_2}) \exp(1 - e^{-u_2} - u_2) du_2 du_1 > 0,$$

c'est une contradiction. Cela prouve le Théorème dans le cas où $\alpha \leq 1$.

Maintenant on suppose que $\alpha > 1$. Soit T un instant maximum ou minimum tel que $T \geq t_1 + \varepsilon$. Alors, $y(T-1) = 0$ et, pour $t > 0$,

$$\ln(1+y(t)) = -\alpha \int_{T-2}^{t-1} y(\xi)d\xi = \alpha \int_{t-1}^{T-2} y(\xi)d\xi.$$

Pour $t_1 + 1 \leq t \leq T - 1$, nous obtenons à partir de (2.8) :

$$-\alpha(v+\varepsilon)(T-t-1) < \ln\{1+y(t)\} < \alpha(u+\varepsilon)(T-t-1).$$

Donc

$$\begin{aligned} -1 + \exp\{-\alpha(v+\varepsilon)(T-t-1)\} \\ \leq y(t) \leq -1 + \exp\{\alpha(u+\varepsilon)(T-t-1)\}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Soit $\tau \in [0,1]$. Les inégalités (2.8) et (2.13) donnent

$$\begin{aligned}
\ln(1+y(T)) &= -\alpha \int_{T-2}^{T-1} y(t)dt = -\alpha \int_{T-2}^{T-1-\tau} y(t)dt - \alpha \int_{T-1-\tau}^{T-1} y(t)dt \\
&\leq \alpha(1-\tau)(v+\varepsilon) + \alpha \int_{T-1-\tau}^{T-1} [1-e^{-\alpha(v+\varepsilon)(T-t-1)}]dt \\
&\leq \alpha(1-\tau)(v+\varepsilon) + \alpha\tau - \frac{1-\exp\{-\alpha\tau(v+\varepsilon)\}}{v+\varepsilon}, \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\ln\{1+y(T)\} &\geq -\alpha(1-\tau)(u+\varepsilon) - \alpha \int_{T-1}^{T-1-\tau} (\exp\{\alpha(u+\varepsilon)(T-t-1)\}-1)\, dt \\
&\geq -\alpha(1-\tau)(u+\varepsilon) + \alpha\tau + \frac{1-\exp\{\alpha\tau(u+\varepsilon)\}}{(u+\varepsilon)}. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

On peut trouver T tel que $y(T) > u - \varepsilon$. En utilisant ceci dans (2.14) et en faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$\ln(1+u) \leq \alpha(1-\tau)v + \alpha\tau - v^{-1}(1-e^{-\alpha\tau v}). \qquad (2.16)$$

Posant $\tau = 1$, (2.16) se réduit alors à

$$\ln(1+u) \leq \alpha - v^{-1}(1-e^{-\alpha v}). \qquad (2.17)$$

Si $\alpha v \geq -\ln(1-v)$, nous pouvons mettre $\tau = \dfrac{-\ln(1-v)}{\alpha v}$ dans (2.16) pour obtenir

$$\ln(1+u) \leq \alpha v - v^{-1}(1-v)\ln(1-v) - 1. \qquad (2.18)$$

De même, nous choisissons un instant minimum T pour lequel $y(T) < -v + \varepsilon$. En utilisant ceci dans (2.15), en faisant tendre ε vers 0 et en posant

$$\tau = (\alpha u)^{-1}\ln(1+u) \leq 1 \qquad (\text{puisque} \quad \alpha > 1),$$

nous avons

$$-\ln(1-v) \leq \alpha u - u^{-1}(1+u)\ln(1+u) + 1. \qquad (2.19)$$

La propriété suivante est vraie :
Propriété. Si $1 < \alpha \leq 3/2$, $u > 0$ et $v > 0$, alors

$$\ln(1+u) < v - v^2/6, \quad -\ln(1-v) < u + u^2/6.$$

Cette propriété découle de (2.17) et (2.19), une fois vérifié ce qui suit :

$$\alpha v - 1 + e^{-\alpha v} \leq v^2 - v^3/6 \qquad (2.20)$$

dès que

$$\alpha \leq 3/2, \quad \alpha v < -\ln(1-v), \qquad (2.21)$$

et

$$\frac{3}{2}v + \left(\frac{1-v}{v}\right)\ln\left(\frac{1}{1-v}\right) - 1 < v - \frac{1}{6}v^2, \tag{2.22}$$

$$\frac{3}{2}u - \left(\frac{1+u}{u}\right)\ln(1+u) + 1 < u + \frac{1}{6}u^2. \tag{2.23}$$

Puisque $u > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}(1+u)\ln(1+u) - u &= \int_0^u \int_0^{u_1} \frac{du_2}{1+u_2} du_1 \\ &> \int_0^u \int_0^{u_1} (1-u_2) du_2 du_1 = \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6},\end{aligned}$$

qui est (2.23). Puisque $0 < v < 1$, nous avons

$$\begin{aligned}v + (1-v)\ln(1-v) &= \int_0^v \left(\int_0^{v_1} \frac{dv_2}{1-v_2}\right) dv_1 \\ &> \int_0^v \int_0^{v_1} (1+v_2) dv_2 dv_1 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{6}v^3,\end{aligned}$$

qui donne (2.22).

Il reste à prouver que (2.20) est vrai chaque fois que (2.21) est vrai. Notons $W = 1 - e^{-w}$. Nous avons à partir de (2.21)

$$\begin{aligned}(1+u)\ln(1+u) - u &= \int_0^u \int_0^{u_1} \frac{du_2}{1+u_2} du_1 \\ &> \int_0^u \int_0^{u_1} (1-u_2) du_2 du_1 = \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6},\end{aligned}$$

qui est (2.23). Puisque $0 < v < 1$, nous avons donc

$$\begin{aligned}\alpha v - 1 + e^{-\alpha v} &= \int_0^{\alpha v} (1-e^{-w}) dw < \int_0^{-\ln(1-v)} (1-e^{-w}) dw \\ &= \int_0^v \frac{W}{1-W} dW < \frac{1}{1-v}\int_0^v W dW = \frac{v^2}{2(1-v)}.\end{aligned}$$

Si $0 < v \leq 0.45$, on a

$$\frac{v^2}{2(1-v)} < 0.925v^2 \leq v^2\left(1 - \frac{v}{6}\right),$$

et donc nous avons (2.20) pour un tel v. Puisque $\alpha \leq 3/2$, nous avons

$$\begin{aligned}\alpha v - 1 + e^{-\alpha v} &= \int_0^{\alpha v} (1-e^{-w}) dw \leq \int_0^{3v/2} (1-e^{-w}) dw \\ &\leq \int_0^{3v/2} \left(w - \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{6}w^3\right) dw = \frac{9}{8}v^2 - \frac{9}{16}v^3 + \frac{27}{128}v^4,\end{aligned}$$

et la dernière expression est plus petite que $v^2 - v^3/6$ à condition que $81v^2 - 152v + 48 < 0$; ce qui équivaut à

$$\left(v - \frac{76}{81}\right)^2 < \frac{1888}{81^2} = \left(\frac{43.45}{81}\right)^2,$$

et qui est vrai quand

$$1 \geq v > (76 - 43.45)/81 = 0.402,$$

et donc en particulier pour $v > 0.45$. Cela prouve la propriété.

On suppose maintenant que la condition dans la propriété précédente est satisfaite et on définit $v_3 = v_3(u)$ comme la plus petite racine de

$$\ln(1+u) = v_3 - \frac{v_3^2}{6}. \tag{2.24}$$

Clairement, $v_3 > 0$ (puisque $u > 0$). On définit aussi v_4 par

$$-\ln(1 - v_4) = u + \frac{1}{6}u^2. \tag{2.25}$$

L'équation (2.25) donne $v_4 = 1 - \exp\{-u - (1/6)u^2\} < u$, si $u > 0$. Par conséquent, selon la propriété plus haut, nous avons

$$0 < v_3 < v < v_4 < u. \tag{2.26}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{1+u}\frac{du}{dv_3} = 1 - \frac{v_3}{3}, \quad \frac{1}{1-v_4}\frac{dv_4}{du} = 1 + \frac{u}{3}$$

et donc

$$\frac{dv_4}{dv_3} = (1+u)\left(1 + \frac{u}{3}\right)(1 - v_4)\left(1 - \frac{v_3}{3}\right).$$

Par conséquent, par (2.24) et (2.25), on a

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{dv_4}{dv_3}\right) &= \ln(1+u) + \ln\left(1 + \frac{u}{3}\right) + \ln(1 - v_4) + \ln\left(1 - \frac{v_3}{3}\right) \\
&\leq v_3 - \frac{v_3^2}{6} + \frac{u}{3} - u - \frac{u^2}{6} - \frac{v_3}{3} = \frac{2}{3}v_3 - \frac{1}{6}v_3^2 - \frac{2}{3}u - \frac{1}{6}u^2 \\
&\leq \frac{3}{2}\{\ln(1+u) - u\} < 0.
\end{aligned}$$

Donc, $d(v_4 - v_3)/du < 0$ et par suite, puisque $v_4 \to 0$ et $v_3 \to 0$ quand $u \to 0$, nous avons $v_4 < v_3$ pour $u > 0$. Mais cela contredit (2.26) et donc, pour $1 < \alpha \leq 3/2$, nous devons avoir $u = v = 0$. La preuve est donc complète. □

2.1.4 Commentaire

Wright en 1955 a affirmé dans [13] que l'approche adoptée dans la démonstration du Théorème 2.1 peut être utilisée pour étendre ce résultat pour $\alpha \leq \frac{37}{24}(= 1.5416)$, et probablement pour $\alpha < 1.567$ (comparé avec $\frac{\pi}{2} = 1.571...$).

Ensuite, Gopalsamy en 1986 a affirmé dans [2] que le résultat prouvé par Wright (Théorème 2.1) est vrai pour $\alpha < \frac{\pi}{2}$ et il a démontré ceci par une application du Théorème de point fixe de Tychonoff.

Kuang a démontré dans [7] que la preuve de Gopalsamy n'est pas correcte, en arguant que l'ensemble suivant, construit par Gopalsamy,

$$A = \left\{ u \in B : \lim_{t \to +\infty} u(t) = 0; \mid u(t) \mid \leq \alpha e^{\beta t} \right\}$$

où α et β sont constants, B est l'espace vectoriel des fonctions réelles continues bornées sur $[0, +\infty[$ muni de la norme :

$$||u|| = \sup_{t \geq 0} |u(t)|,$$

n'est pas fermée puisque $[0, +\infty[$ n'est pas compact.

2.2 Stabilité globale des équations logistiques générales (non autonomes et retardées)

2.2.1 Étude qualitative de l'équation logistique retardée, non linéaire et non autonome

Lorsque l'équation de Hutchinson (2.2) est utilisée comme modèle de croissance d'une population d'une seule espèce, on s'attend souvent à ce que r, k et même τ soient dépendants du temps car l'environnement change constamment. Il est donc nécessaire et intéressant d'étudier l'équation logistique généralisée (non linéaire et non autonome) à retard suivante :

$$x'(t) = -(1 + x(t)) \sum_{i=1}^{n} \int_{t-r(t)}^{t} f_i(t, x(s)) d\mu_i(t, s), \tag{2.27}$$

où $f_i(t, 0) = 0$, $r(t) > 0$ et les $\mu_i(t, s), i = 1, \ldots, n$ sont des fonctions croissantes.

Remarque 2.1 *On remarque que l'équation (2.5) considérée dans la section 2.1 est un cas particulier de l'équation (2.27).*

Dans cette partie est présentée une version modifiée de la méthode utilisée par Wright dans la section 2.1 pour établir les conditions dans lesquelles la solution triviale de (2.27) est globalement asymptotiquement stable.

Plus précisément, nous supposons dans ce qui suit que f_i et r sont continues et différentiables par rapport à leurs arguments ; les $\mu_i = \mu_i(t,s)$ sont des fonctions continues par rapport à t, croissantes par rapport à s, et définies pour tout $(t,s) \in \mathbb{R}^2$. En plus, on pose les hypothèses suivantes :

(H1) Pour tout $t \geq 0$, pour $x > -1$, $xf_i(t,x) \geq 0$, et $\sum_{i=1}^{n} f_i(t,x) = 0$ si et seulement si $x = 0$;

(H2) Pour tout $t \geq 0$, $r(t) > 0$, $t - r(t)$ est croissante, et $\lim_{t\to+\infty}(t - r(t)) = +\infty$;

(H3) Pour tout $t \geq 0$, $\mu_i(t,t) > \mu_i(t, t - r(t))$;

(H4) Il existe des fonctions continues : $a_i, b_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que, pour tout x, $b_i(|x|) = 0$ si et seulement si $x = 0$, $|f_i(t,x)| \geq a_i(t)b_i(|x|)$ et

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\tau - r(\tau)}^{\tau} a_i(\tau) d\mu_i(\tau,s) \right) d\tau = +\infty.$$

Soit $r = r(0)$, alors la condition initiale associée à (2.27) prend la forme

$$x(\theta) = \phi(\theta), \qquad \theta \in [-r, 0], \tag{2.28}$$

où $\phi \in \mathcal{C}$. Motivé par les applications de l'équation (2.27) dans la modélisation mathématique dans le domaine d'écologie, on suppose que $\phi(\theta) \geq -1$ et $\phi(0) > -1$.

En appliquant le théorème d'existence et d'unicité des solutions, le problème à valeur initial (2.27)-(2.28) a une solution unique locale notée x. Notons aussi que la longueur du retard $r(t)$ n'est pas nécessairement finie.

Des exemples plus spécifiques de l'équation (2.28) qui apparaissent dans la littérature seront considérés à la fin de cette section.

Les résultats inclus dans cette partie sont ceux du livre de Kuang [6].

a) Points d'équilibre

A partir des hypothèses (H1) et (H3), on peut voir que (2.27) a exactement deux points d'équilibre : $x(t) \equiv -1$ et $x(t) \equiv 0$.

Maintenant, on va présenter un lemme très utile.

Lemme 2.2 *Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $t \geq 0$ et tout $x > -1$, $f_i(t,x) > -M$, $i = 1 \ldots, n$. Alors $x(t)$ existe pour tout $t \geq 0$.*

De plus, $x(t) > -1$ pour $t \geq 0$, et si x est non oscillatoire, alors $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Démonstration. En faisant une intégration de 0 à t, l'équation (2.27) donne

$$\ln(1 + x(t)) = \ln(1 + \phi(0)) - \int_0^t \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\tau-r(\tau)}^{\tau} f_i(\tau, x(s)) d\mu_i(\tau,s) \right) d\tau, \tag{2.29}$$

à partir de laquelle on peut voir que $x(t) > -1$ pour $t \geq 0$. Ainsi, $-f_i(t,x) < M$ pour $t \geq 0, i = 1, \ldots, n$, qui produit

$$x'(t) \leq M(1 + x(t)) \sum_{i=1}^{n} \left[\mu_i(t,t) - \mu_i(t, t - r(t)) \right]. \tag{2.30}$$

Par conséquent,

$$1 + x(t) \leq (1 + \phi(0)) \exp \left\{ M \int_0^t \sum_{i=1}^n [\mu_i(\tau, \tau) - \mu_i(\tau, \tau - r(\tau))] d\tau \right\}, \tag{2.31}$$

ceci prouve que $x(t)$ existe pour tout $t \geq 0$.

Si, pour un certain $\bar{t} > 0$, $x(\bar{t}) = -1$, et $x(\bar{t}) > -1$ pour $t < \bar{t}$, alors, il existe $\overline{M} > 0$ tel que $|x(t) \leq \overline{M}$ pour $t \leq \bar{t}$. Ainsi, il existe $N > 0$ tel que

$$\sum_{i=1}^n \int_{t-r(t)}^t |f_i(t, x(s))| d\mu_i(t, s) \leq N$$

pour $t \leq \bar{t}$. Par conséquent,

$$x'(t) \geq -(1 + x(t))N \qquad \text{pour} \quad t \leq \bar{t},$$

Ce qui entraine que

$$1 + x(\bar{t}) \geq (1 + \phi(0))e^{-N\bar{t}} > 0,$$

c'est une contradiction avec notre hypothèse. Cela prouve bien que $x(t) > -1$ pour tout $t \geq 0$.

Supposans que x est non oscillatoire. Alors, il existe $T > 0$ tel que, pour $t > T$, $x(t)$ ne change pas de signe. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x(t) > 0$ pour $t > T$. Alors l'équation (2.27), ainsi que des hypothèses (H1)-(H3), impliquent que $x'(t) < 0$ pour $t > T_1$, où $T_1 - r(T_1) = T$. Ainsi, il existe $c \geq 0$ tel que

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = c.$$

Si $c > 0$, alors (2.29) avec l'hypothèse (H4) donnent

$$\lim_{t \to +\infty} \ln(1 + x(t)) = -\infty,$$

qui conduit à $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = -1$, qui est une contradiction. Donc $c = 0$.

Le cas où $x(t) < 0$ pour $t > T$ peut être traité de la même façon. Cela prouve le lemme. $\square$

On va présenter maintenant le premier résultat dans cette section qui donne des conditions pour lesquelles les solutions de l'équation (2.27), avec des conditions initiales telles que $\phi(\theta)$, $\phi \geq -1$, $\phi(0) > -1$, sont uniformément bornées.

Théorème 2.2 *Dans (2.27), on suppose qu'il existe $M, N > 0$ tels que, pour tout $t \geq 0$ et tout $x > -1$, $f_i(t, x) > -M$, $i = 1, \ldots, n$, et pour t suffisamment grand ,*

$$\int_{t-r(t)}^t \left(\sum_{i=1}^n [\mu_i(\tau, \tau) - \mu_i(\tau, \tau - r(\tau))] \right) d\tau \leq N. \tag{2.32}$$

Soit x la solution de (2.27), de condition initiale $\phi \in \mathcal{C}$. Alors, pour t suffisamment grand, on a :

$$x(t) \leq e^{MN} - 1. \tag{2.33}$$

Si, en outre, il existe $\overline{M} > M$ tel que, pour $-1 < x < e^{MN}$,$|f_i(t,x)| < \overline{M}$ pour tout $t \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, alors pour t suffisamment grand, on a :

$$x(t) \geq \exp(-\overline{M}N) - 1. \tag{2.34}$$

Démonstration. D'après le Lemme 2.2, $x(t)$ existe pour tout $t \geq 0$, et si $\lim\limits_{t\to+\infty} x(\phi)(t) \neq 0$, alors x doit être oscillatoire.

Supposons que x est oscillatoire, et soit $t_1 = r(t_1)$ (ce t_1 existe à partir de l'hypothèse (H2)) et $t^* > t_1$ tel que x admet un maximum local en t^*. Alors, $x'(t^*) = 0$. Puisque $t^* - r(t^*) \geq t_1 - r(t_1) = 0$, par le Lemme 2.2, on voit que $x(\phi)(t) > -1$ pour $t \in [t^* - r(t^*), t^*]$. Par conséquent, de (2.27), nous obtenons $\sum\limits_{i=1}^{n} \int_{t^*-r(t^*)}^{t^*} f_i(t^*, x(s))d\mu_i(t^*, s) = 0$. De (H1) et (H3), on voit que cela indique qu'il y a un $t_0 \in [t^* - r(t^*), t^*]$ tel que $x(t_0) = 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \ln(1 + x(t^*)) &= -\sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t^*} \left(\int_{\tau-r(\tau)}^{\tau} f_i(\tau, x(s))d\mu_i(\tau, s) \right) d\tau \\ &\leq M \sum_{i=1}^{n} \int_{t^*-r(t^*)}^{t^*} [\mu_i(\tau, \tau) - \mu_i(\tau, \tau - r(\tau))]d\tau. \end{aligned}$$

Maintenant, de (2.33), pour t suffisamment grand nous avons

$$\ln(1 + x(t)) \leq MN,$$

ce qui donne

$$x(t) \leq e^{MN} - 1.$$

Ainsi, il existe $t_2 > t_1$ tel que, pour $t \geq t_2 - r(t_2), x(t) \leq e^{MN}$. Soit $\bar{t} > t_2$ un minimum local de x, alors $x'(\bar{t}) = 0$. Encore une fois de (2.27) nous voyons qu'il existe $t_3 \in [\bar{t} - r(\bar{t}), \bar{t}]$ tel que $x(t_3) = 0$. Donc, par un argument semblable à ce qui précède, nous avons

$$\ln(1 + x(\bar{t})) \geq -\overline{M}N$$

ce qui conduit à

$$x(\bar{t}) \geq \exp(-\overline{M}N) - 1$$

et achève ainsi la preuve du Théorème. □

b) Stabilité globale

Le théorème suivant est le résultat principal sur la stabilité globale des solutions dans l'équation (2.27).

Théorème 2.3 *On considère l'équation (2.27). En plus des hypothèses du Théorème 2.2, nous supposons qu'il existe des fonctions continues $\alpha_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que, pour tout $t \geq 0$ et tout x, $|f_i(t,x)| \leq \alpha_i(t)|x|$, $i = 1, \ldots, n$, et que pour t suffisamment grand*

$$\int_{t-r(t)}^{t} \left[\sum_{i=1}^{n} \int_{\tau-r(\tau)}^{\tau} \alpha_i(\tau)d\mu_i(\tau, s) \right] d\tau \leq 1. \tag{2.35}$$

Soit x la solution de (2.27), de condition initiale $\phi \in \mathcal{C}$. Alors

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0.$$

Démonstration. On suppose que x est oscillatoire, sinon par le Lemme 2.2, $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$. Notons

$$u = \limsup_{t\to+\infty} x(t), \qquad v = -\liminf_{t\to+\infty} x(t). \tag{2.36}$$

Par le Théorème 2.2, on a :

$$0 \leq u \leq e^{MN} - 1, \qquad 0 \leq v \leq 1 - \exp(\overline{M}N). \tag{2.37}$$

Soient $\varepsilon > 0$ et t_4 assez grand pour que, pour $t \geq t_4 - r(t_4)$ nous avons

$$\int_{t-r(t)}^{t} \left[\sum_{i=1}^{n} \int_{\tau}^{r(\tau)} \alpha_i(\tau) d\mu_i(\tau, s) \right] d\tau \leq 1$$

et

$$-v - \varepsilon < x(t) < u + \varepsilon. \tag{2.38}$$

Ainsi,

$$-\alpha_i(\tau)(u+\varepsilon) \leq -f_i(\tau, x(s)) \leq \alpha_i(\tau)(v+\varepsilon). \tag{2.39}$$

Nous supposons que $x(t^*)$ est un maximum ou un minimum tel que $t^* - r(t^*) \geq t_4$. Alors il existe $t_5 \in [t^* - r(t^*), t^*]$ tel que $x(t_5) = 0$. Ainsi,

$$\ln(1 + x(t^*)) = -\int_{t_5}^{t^*} \left[\sum_{i=1}^{n} \int_{\tau - r(\tau)}^{\tau} f_i(\tau, x(s)) d\mu_i(\tau, s) \right] d\tau. \tag{2.40}$$

L'expression (2.39) implique alors

$$\begin{aligned}
\ln(1 + x(t^*)) &< \int_{t_5}^{t^*} \left[\sum_{i=1}^{n} \int_{\tau - r(\tau)}^{\tau} \alpha_i(\tau)(v+\varepsilon) d\mu_i(\tau, s) \right] d\tau \\
&\leq \int_{t^* - r(t^*)}^{t^*} (v+\varepsilon) \left[\sum_{i=1}^{n} \int_{\tau - r(\tau)}^{\tau} \alpha_i(\tau) d\mu_i(\tau, s) \right] d\tau \\
&\leq v + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$x(t^*) < e^{v+\varepsilon} - 1. \tag{2.41}$$

De même, on a :

$$x(t^*) > -1 + e^{-(u+\varepsilon)}. \tag{2.42}$$

A partir de la définition de u et v, on voit qu'ils existent $t_6 > t_5$, $t_7 > t_5$ tels que $x(t_6) > u - \varepsilon$ et $x(t_7) < -v + \varepsilon$. Donc,

$$u - \varepsilon < e^{v+\varepsilon} - 1, \qquad v - \varepsilon < 1 - e^{-(u+\varepsilon)}. \tag{2.43}$$

En faisant tendre $\varepsilon \to 0$, nous obtenons

$$u \leq e^{v} - 1, \qquad v \leq 1 - e^{-u}. \tag{2.44}$$

A partir de (2.44), nous voyons que $u = 0$ si et seulement si $v = 0$. Ainsi, on peut supposer que

$$u > 0, \qquad 0 < v < 1. \tag{2.45}$$

Les inégalités (2.44) entraine que

$$1 + u \leq e^{v} \leq \exp(1 - e^{-u}). \tag{2.46}$$

Mais, puisque $u > 0$, nous avons

$$1 + u - \exp(1 - e^{-u}) = \int_0^u \int_0^{u_1} (1 - e^{-u_2}) \exp(1 - e^{-u_2} - u_2) du_2 du_1 > 0,$$

contradictions avec (2.46). Cela prouve le théorème. □

2.2.2 Quelques applications du Théorème 2.3

Nous appliquons maintenant le Théorème 2.3 à plusieurs équations différentielles à retard utilisées fréquemment pour modéliser la croissance d'une seule espèce.

a) Équation logistique non autonome à retards variables

On considère l'équation logistique non autonome à retards variables :

$$y'(t) = R(t)y(t) \left[1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)(t - r_i(t)) \right], \tag{2.47}$$

où R, α_i et r_i sont des fonctions continues strictement positive. On suppose qu'il existe une constante positive M tel que, pour tout $t \geq 0$,

$$0 < R(t) < M, \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) = 1, \quad \text{et} \quad r(t) = \max\{r_i(t) : i = 1, \ldots, n\} > 0.$$

Soient $x(t) = y(t) - 1$ et $a_i(t) = \alpha_i(t)R(t)$. On voit que (2.46) se réduit à

$$x'(t) = -\sum_{i=1}^{n} a_i(t)(x(t) + 1)x(t - r_i(t)), \tag{2.48}$$

avec comme condition initiale

$$x(\theta) = \phi(\theta) \geq -1, \qquad \theta \in [-r(0), 0], \qquad \phi(0) > -1, \qquad \phi \in \mathcal{C}. \tag{2.49}$$

Par une application du Théorème 2.3 à l'équation (2.48), on obtient le théorème suivant :

Théorème 2.4 *Dans (2.48), on suppose que* $\lim_{t\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_0^t a_i(\tau)d\tau = +\infty$, *et que pour t suffisamment grand*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t-r(t)}^{t} a_i(\tau)d\tau \leq 1, \tag{2.50}$$

où $r(t)$ *satisfait (H2). Alors la solution* x *de (2.48)-(2.49) tend vers zéro quand* $t \to +\infty$.

Démonstration. En comparant (2.27) avec (2.48) nous avons les correspondances suivantes :

(i) $f_i(t, x(s)) = a_i(t)x(s)$.

(ii) $\int_{t-r(t)}^{t} x(s)d\mu_i(t,s) = x(t - r_i(t))$.

Ainsi, (2.35) se réduit à (2.50). Les hypothèses (H1)-(H4) sont satisfaites. Puisque R est bornée et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) = 1$, alors a_i est bornée, ce qui implique que toutes les conditions du Théorème 2.2 sont satisfaites. Donc, par une application directe du Théorème (2.3), on conclut que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$. □

b) Équation logistique autonome à retards discrets constants

On suppose dans (2.48) que $a_i(t) = a_i > 0$, $r_i(t) = r_i \geq 0$, $r(t) = r > 0$. Alors, (2.48) se réduit à l'équation logistique autonome à retards discrets constants :

$$x'(t) = -(x(t)+1)\sum_{i=1}^{n} a_i x(t - r_i). \tag{2.51}$$

Dans ce cas, le Théorème 2.4 se réduit à :

Corollaire 2.1 *On considère (2.51) avec la condition initiale (2.49). Si* $r\sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1$, *alors* $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

c) Équation de croissance de Michaelis-Menton à retards discrets

Nous considérons l'équation de croissance des espèces uniques de Michaelis-Menton à retards discrets. Par soucis de simplification, seule l'équation autonome est considérée ici :

$$y'(t) = \gamma y(t)\left[1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i y(t-r_i)}{1 + c_i y(t-r_i)}\right], \tag{2.52}$$

où $\gamma > 0$, $a_i > 0$, $c_i > 0$, $r_i \geq 0$, $r > 0$ et $\sum_{i=1}^{n} a_i(1+c_i)^{-1} = 1$.

En introduisant le changement de variable suivant : $x(t) = y(t) - 1$, on voit que (2.52) se réduit à

$$x'(t) = -\gamma[x(t)+1]\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i y(t-r_i)}{(1+c_i)[1+c_i+c_i x(t-r_i)]}. \tag{2.53}$$

Par une application du Théorème 2.3 à l'équation (2.53), nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 2.2 *Dans (2.53), si* $r\gamma \leq 1$*, alors* $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

Démonstration. Notons que (2.35) se réduit à

$$r\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma a_i}{1+c_i}\right) \leq 1,$$

ce qui est équivalent à $r\gamma \leq 1$. □

d) Équation de croissance à retards distribués

On considère l'équation autonome à retard distribués qui décrit la croissance d'une seule espèce :

$$y'(t) = \gamma y(t)\left(1 - \alpha_1 \int_{-r}^{0} y(t+s)d\mu_1(s) - \alpha_2 \int_{-r}^{0} \frac{y(t+s)}{1+cy(t+s)} d\mu_2(s)\right), \tag{2.54}$$

où : $\int_{-r}^{0} d\mu_1(s) = \int_{-r}^{0} d\mu_2(s) = 1$, μ_1 et μ_2 sont croissantes, et r, α_1, α_2 et c sont des constantes positives et $\alpha_1 + \dfrac{\alpha_2}{1+c} = 1$.

Encore une fois, par le changement de variable $x(t) = y(t) - 1$, (2.54) peut être réduite à

$$\begin{aligned} x'(t) = -\gamma(1+x(t)) \Big\{ &\alpha_1 \int_{-r}^{0} x(t+s)d\mu_1(s) \\ &+\alpha_2 \int_{-r}^{0} \frac{x(t+s)}{(1+c)(1+c+cx(t+s))d\mu_2(s)} \Big\}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Encore une fois, une application du Théorème 2.3 mène au résultat suivant :

Corollaire 2.3 *Dans (2.55), si* $r\gamma \leq 1$*, alors* $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

2.3 Théorie asymptotique pour les équations différentielles à retard non autonomes avec feed-back négatif

Les résultats de cette section sont adaptés du livre de Haddock et Kuang [9]. Nous considérons l'équation différentielle scalaire avec retard suivante

$$x'(t) = -\int_{t-r(t)}^{t} \sum_{i=1}^{n} f_i(t, x(s)) d\mu_i(t, s), \tag{2.56}$$

où f_i et r sont continues par rapport à leurs arguments, et les $\mu_i = \mu_i(t, s)$ sont continues par rapport à t, croissantes par rapport à s, et définies pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^2$. En outre, nous reprenons les hypothèses suivantes de la Section 2.2 :

(H1) Pour tout $t \geq 0$, pour $x > -1$, $xf_i(t, x) \geq 0$, et $\sum_{i=1}^{n} f_i(t, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$;

(H2) Pour tout $t \geq 0$, $r(t) > 0$, $t - r(t)$ est croissante, et $\lim_{t \to +\infty} (t - r(t)) = +\infty$;

(H3) Pour tout $t \geq 0$, $\mu_i(t, t) > \mu_i(t, t - r(t))$.

Soit $r = r(0)$. Alors la condition initiale associée à (2.56) prend la forme

$$x(\theta) = \phi(\theta), \qquad \theta \in [-r, 0], \qquad \phi \in \mathcal{C}. \tag{2.57}$$

Comme dans la Section 2.2, le retard $r(t)$ peut être non borné lorsque $t \to +\infty$.

Remarque 2.2 *L'équation (2.56) est plus générale que l'équation (2.27). En effet, par une transformation de type*

$$x(t) = -1 + \exp(y(t)),$$

l'équation (2.27) se réduit à

$$y'(t) = -\sum_{i=1}^{n} \int_{t-r(t)}^{t} \bar{f}_i(t, y(s)) d\mu_i(t, s),$$

où

$$\bar{f}_i(t, y(s)) = f_i(t, e^{y(s)} - 1).$$

Dans ce qui suit, nous limitons notre attention aux solutions globales.

Lemme 2.3 *Soit x une solution globale de (2.56)-(2.57). Alors, x est soit bornée, soit oscillatoire.*

Démonstration. Supposons que x est non oscillatoire. Alors il existe $T > 0$ tel que, pour $t > T$, $x(t)$ ne change pas de signe. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x(t) > 0$ pour $t > T$. Alors, l'équation (2.56), ainsi que les hypothèses (H1)-(H3) impliquent que x est strictement décroissante. Ainsi, x doit être bornée. □

2.3.1 Quelques cas particuliers

Dans cette partie, nous allons étudier quelques cas particuliers de l'équation (2.56).

a) On suppose que le membre de droite de l'équation (2.56) est linéaire par rapport à x. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f_i(t,x) = x$. Alors, l'équation (2.56) se réduit à

$$x'(t) = -\int_{t-r(t)}^{t} x(s)d\mu(t,s), \tag{2.58}$$

où $\mu(t,s) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t,s)$.

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.5 *(Bornitude et stabilité globale) Dans (2.58), on pose*

$$\mu := \limsup_{t\to+\infty} \int_{t-r(t)}^{t} [\mu(\tau,\tau) - \mu(\tau,\tau - r(\tau))]d\tau. \tag{2.59}$$

(i) Si $\mu < 1$, alors toutes les solutions de (2.58) sont bornées.

(ii) Si en plus de (i), nous avons $\int_0^{+\infty} [\mu(\tau,\tau) - \mu(\tau,\tau - r(\tau))]d\tau = +\infty$, alors $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

Démonstration. Notons que les solutions de (2.58) sont définies et continues pour tout $t \geq 0$ et cela peut être prouvé par un argument similaire à celui de la preuve du Théorème 6.1 dans le livre de Hale [5].

(i) Supposons que x est une solution de (2.58) qui n'est pas bornée. Par le Lemme 2.3, on sait que x doit être oscillatoire autour de zéro. Soient $\varepsilon > 0$, $\mu + \varepsilon < 1$, et $T > 0$ tels que, pour $t \geq T$,

$$\int_{t-r(t)}^{t} [\mu(\tau,\tau) - \mu(\tau,\tau - r(\tau))]d\tau \leq \mu + \varepsilon. \tag{2.60}$$

Puisque x est oscillatoire et non bornée, il existe $t^* > T$ tel que $|x(t)| \leq |x(t^*)|$ pour $t < t^*$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x(t^*) > 0$. Cela implique que $x'(t^*) \leq 0$, ce qui est équivalent à

$$\int_{t^*-r(t^*)}^{t^*} x(s)d\mu(t^*,s) \leq 0. \tag{2.61}$$

Par les hypothèses sur r et μ, on voit qu'il existe $t_0 \in [t^* - r(t^*), t^*]$, tel que $x(t_0) = 0$. Par une intégration de (2.58) de t_0 à t^* on obtient

$$x(t^*) = -\int_{t_0}^{t^*} \left(\int_{\tau-r(\tau)}^{\tau} x(s)d\mu(\tau,s) \right) d\tau. \tag{2.62}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
|x(t^*)| &\leq \int_{t_0}^{t^*} \left(\int_{\tau-r(\tau)}^{\tau} |x(s)| d\mu(\tau,s) \right) d\tau \\
&\leq |x(t^*)| \int_{t_0}^{t^*} \left(\int_{\tau-r(\tau)}^{\tau} d\mu(\tau,s) \right) d\tau \\
&= |x(t^*)| \int_{t_0}^{t^*} [\mu(\tau,\tau) - \mu(\tau,\tau-r(\tau))] d\tau \\
&\leq |x(t^*)| \int_{t^*-r(t^*)}^{t^*} [\mu(\tau,\tau) - \mu(\tau,\tau-r(\tau))] d\tau \\
&\leq (\mu+\varepsilon)|x(t^*)|;
\end{aligned}$$

i.e,

$$|x(t^*)| \leq (\mu+\varepsilon)|x(t^*)|, \tag{2.63}$$

ce qui contredit l'hypothèse sur $x(t^*)$. Cela prouve la bornitude de x.

(ii) Maintenant, on suppose que $\mu < 1$. Ainsi, les solutions de (2.58) sont bornées. Si la conclusion (ii) était fausse, alors il existe une solution x de (2.58) telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) \neq 0$. Alors, x est soit oscillatoire, soit non oscillatoire.

Supposons d'abord que x est non oscillatoire. Alors, il existe $T_1 > 0$ tel que $x(t)x(T_1) > 0$ pour $t \geq T_1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x(t) > 0$ pour $t \geq T_1$. Alors $x'(t) \leq 0$ pour de tels t. Par conséquent, il existe $x^* > 0$ tel que

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = x^*. \tag{2.64}$$

Donc, il existe T^* tel que, pour $t \geq T^*$, $x(t) \geq x^*/2$. En faisant une intégration de (2.58) de t_0 à t on obtient

$$x(t) - x(t_0) = -\int_{t_0}^{t} \left(\int_{\tau-r(\tau)}^{\tau} x(s) d\mu(\tau,s) \right) d\tau, \tag{2.65}$$

ce qui est équivalent à

$$x(t_0) - x(t) = \int_{t_0}^{t} \left(\int_{\tau-r(\tau)}^{\tau} x(s) d\mu(\tau,s) \right) d\tau. \tag{2.66}$$

Pour $t \geq t_0$, et $t_0 - r(t_0) \geq T^*$, on a

$$x(t_0) - x(t) \leq x^*/2.$$

D'autre part,

$$\int_{t_0}^{t} \left(\int_{\tau-r(\tau)}^{\tau} x(s) d\mu(\tau,s) \right) d\tau \geq \frac{1}{2} x^* \int_{t_0}^{t} [\mu(\tau,\tau) - \mu(\tau,\tau-r(\tau))] d\tau,$$

qui conduit à

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{\tau-r(\tau)}^{\tau}x(s)d\mu(\tau,s)\right)d\tau=+\infty. \tag{2.67}$$

Cela contredit (2.66). Donc, on doit avoir $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$.

On suppose maintenant que x est oscillatoire. Choisissons $T_2>0$, $\varepsilon>0$ tels que $\mu+\varepsilon<1$ et pour $t\geq T_2$,

$$\int_{t-r(t)}^{t}[\mu(\tau,\tau)-\mu(\tau,\tau-r(\tau))]d\tau<\mu+\varepsilon. \tag{2.68}$$

Notons $\bar{x}=\limsup\limits_{t\to+\infty}|x(t)|$. Nous avons $\bar{x}=0$. En effet, il existe une suite (t_i), $t_i>0$, $i=1,2,\dots,t_{i+1}>t_i$ et $\lim\limits_{i\to+\infty}t_i=+\infty$, telle que $x'(t_i)=0$ et $|x(t_i)|\to\bar{x}$ lorsque $i\to+\infty$. Sans perte de généralité, on peut supposer que cette suite peut être choisie de sorte que $x(t_i)>0$. Soit $\delta=\dfrac{1}{2}\bar{x}(1-\mu-\varepsilon)$, et soit $T_3>T_2$ assez grand. Pour $t\geq T_3$, on a $|x(t)|<\bar{x}+\delta$. On peut choisir t_i tel que $t_i-r(t_i)-r(t_i-r(t_i))>T_3$ et $x(t_i)>\bar{x}-\varepsilon$. Puisque $x'(t_i)=0$, à partir de l'équation (2.58), on voit qu'il existe t^*, $t^*\in[t_i-r(t_i),t_i]$ et $x(t^*)=0$. Par conséquent

$$x(t_i)=-\int_{t^*}^{t_i}\left(\int_{\tau-r(\tau)}^{\tau}x(s)d\mu(\tau,s)\right)d\tau. \tag{2.69}$$

Ce qui nous amène à

$$\begin{aligned}
\bar{x}-\delta<x(t_i) &\leq \int_{t^*}^{t_i}\left(\int_{\tau-r(\tau)}^{\tau}|x(s)|d\mu(\tau,s)\right)d\tau\\
&\leq (\bar{x}+\delta)\int_{t_i-r(t_i)}^{t_i}\left(\int_{\tau-r(\tau)}^{\tau}d\mu(\tau,s)\right)d\tau\\
&= (\bar{x}+\delta)\int_{t_i-r(t_i)}^{t_i}[\mu(\tau,\tau)-\mu(\tau,\tau-r(\tau))]d\tau.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité donne alors

$$\bar{x}-\delta<(\mu+\varepsilon)(\bar{x}+\delta). \tag{2.70}$$

Ainsi,

$$\delta>\frac{1-\mu-\varepsilon}{1+\mu+\varepsilon}\bar{x}, \tag{2.71}$$

ce qui contredit notre choix de δ.

Cela prouve l'affirmation et par suite le théorème. □

b) Pour un choix particulier de μ, (2.58) peut être réduite à

$$x'(t)=-\sum_{i=0}^{n}a_i(t)x(t-r_i(t)), \tag{2.72}$$

où $a_i(t)\geq 0$, r_i sont continues, avec $0<r_i(t)<r_{i+1}(t)\leq r(t)$, $i\neq 0$, $r_0(t)=0$.

Le corollaire suivant est un résultat immédiat du Théorème 2.5.

Corollaire 2.4 *Dans (2.72), on pose*

$$\mu := \limsup_{t\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \int_{t-r(t)}^{t} a_i(s)ds. \tag{2.73}$$

Si $\mu < 1$, alors toutes les solutions de (2.72) sont bornées. Si, en outre

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{0}^{+\infty} a_i(s)ds = +\infty,$$

alors, pour chaque solution x de (2.72), $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

2.3.2 Généralisation du Théorème 2.5

Maintenant on va revenir à l'équation (2.56). Le résultat suivant généralise le Théorème 2.5.

Théorème 2.6 *Dans (2.56), on suppose que $|f_i|$ est croissante par rapport à son second argument et que pour $c \neq 0$,*

$$\limsup_{t\to+\infty} \int_{t-r(t)}^{t} \sum_{i=1}^{n} c^{-1} f_i(\tau;c)[\mu_i(\tau,\tau) - \mu_i(\tau,\tau - r(\tau))]d\tau \leq \mu < 1. \tag{2.74}$$

Alors toutes les solutions globales de (2.56) sont bornées.

Si, en outre, pour $c \neq 0$,

$$\int_{0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(\tau,c)[\mu_i(\tau,\tau) - \mu_i(\tau,\tau - r(\tau))]d\tau = +\infty, \tag{2.75}$$

alors toutes les solutions globales de (2.56) tendent vers zéro quand $t \to +\infty$.

Démonstration. Par le Lemme 2.3, si x est une solution globale de (2.56) non bornée, alors elle doit être oscillatoire. Par un argument similaire à celui de la preuve du Théorème 2.5, on peut montrer que x doit être bornée. La condition (2.75) avec la monotonie de $|f_i|$ (par rapport à son second argument) assure que x ne peut pas tendre vers une constant différente de zéro. Ainsi, x soit elle tend vers zéro, soit elle est oscillatoire. Dans le dernier cas, l'hypothèse (2.75) entraine que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$. $\square$

Notons $t_0 = \min\{t : t = r(t)\}$. Nous avons le résultat local suivant :

Théorème 2.7 *Supposons dans (2.56) que $|f_i|$ est une fonction croissante par rapport à son second argument et qu'il existe $M > 0$ tel que, pour $|c| \leq M$, $c \neq 0$, on a*

(i) $\displaystyle\int_{t-r(t)}^{t} \sum_{i=1}^{n} c^{-1} f_i(\tau,c)[\mu_i(\tau,\tau) - \mu_i(\tau,\tau - r(\tau))] \leq \mu < 1$*, pour $t \geq t_0$;*

(ii) $\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} |f_i(\tau, c)| [\mu_i(\tau, \tau) - \mu_i(\tau, \tau - r(\tau))] d\tau = +\infty$;

(iii) $|f_i(\tau, c)| \leq a_i(\tau)|c|$, *où* $a_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est une fonction continue.*

Alors, pour tout $0 < \varepsilon \leq M$, *il existe* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tel que, pour* $\phi \in \mathcal{C}$, $||\phi|| < \delta(\varepsilon)$, *on a :* $|x(t)| \leq \varepsilon$ *et* $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$, *où* x *est la solution de (2.56) de condition initiale* ϕ.

Démonstration. Soit x la solution de (2.56) de condition initiale ϕ. Premièrement, on affirme que pour $\delta > 0$ assez petit, si $||\phi|| < \varepsilon$ alors $|x(t)| < M$ pour $t \in [0, t_0]$. En effet, en faisant une intégration de (2.56) de 0 à t on obtient

$$x(t) = x(0) - \int_0^t \left(\int_{\tau - r(\tau)}^{\tau} \sum_{i=1}^{n} f_i(\tau, x(s)) d\mu_i(\tau, s) \right) d\tau. \tag{2.76}$$

Supposons que $|x(s)| \leq M$ pour $s \in [-r, t_0]$, où $r = r(0)$. Moyennat l'hypothèse (iii), on a

$$|x(t)| \leq |x(0)| + \int_0^t \left(\int_{\tau - r(\tau)}^{\tau} \sum_{i=1}^{n} a_i(\tau) |x(s)| d\mu_i(\tau, s) \right) d\tau. \tag{2.77}$$

Soit $\tilde{x}(t) = \max\{|x(s)| : s \in [-r, t]\}$. Alors, (2.77) entraine que

$$\tilde{x}(t) \leq \tilde{x}(0) + \int_0^t \tilde{x}(\tau) \sum_{i=1}^{n} a_i(\tau) [\mu_i(\tau, \tau) - \mu_i(\tau, \tau - r(\tau))] d\tau.$$

Ainsi, par l'inégalité de Gronwall, nous avons

$$\tilde{x}(t) \leq \exp\left\{ \int_0^t \sum_{i=1}^{n} a_i(\tau) [\mu_i(\tau, \tau) - \mu_i(\tau, \tau - r(\tau))] d\tau \right\}. \tag{2.78}$$

Par conséquent, si on choisit $\tilde{x}(0) < \delta$, où

$$\delta = M \exp\left\{ -\int_0^{t_0} \sum_{i=1}^{n} a_i(\tau) [\mu_i(\tau, \tau) - \mu_i(\tau, \tau - r(\tau))] \right\}, \tag{2.79}$$

alors $|x(t)| \leq \tilde{x}(t) < M$ pour $t \in [0, t_0]$, et par suite on a prouvé l'affirmation.

Dans la suite, on va prouver que, pour tout $0 < \varepsilon \leq M$, on peut choisir

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon \exp\left\{ -\int_0^{t_0} \sum_{i=1}^{n} a_i(\tau) [\mu_i(\tau, \tau) - \mu_i(\tau, \tau - r(\tau))] \right\} \tag{2.80}$$

tel que, pour $||\phi|| < \delta(\varepsilon)$, on a :$|x(t)| < \varepsilon$ et $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

De la preuve de l'affirmation précédente, nous avons $|x(t)| \leq \varepsilon$ pour $t \in [0, t_0]$. Supposant qu'il existe $t^* \geq t_0$ tel que, pour $s \leq t^*$, $|x(s)| \leq \varepsilon$, $x(t^*) = \varepsilon$, et $x'(t^*) \geq 0$ (le cas où $x(t^*) = -\varepsilon$, $x'(t^*) \leq 0$ peut être traité de la même façon). Alors, l'équation (2.56) montre qu'il y a un $t' \in [t^* - r(t^*), t^*]$ tel que $x'(t') = 0$. Clairement, $t^* - r(t^*) \geq t_0 - r(t_0) = 0$.

Nous avons

$$\varepsilon = |x(t^*)| \leq \int_{t^*-r(t^*)}^{t^*} \left(\int_{\tau-r(\tau)}^{\tau} \sum_{i=1}^{n} |f_i(\tau, x(s))| d\mu_i(\tau, s) \right) d\tau. \tag{2.81}$$

Par la monotonie de $|f_i|$, nous avons

$$\varepsilon \leq \int_{t^*-r(t^*)}^{t^*} \sum_{i=1}^{n} f_i(\tau, \varepsilon)[\mu_i(\tau, \tau) - \mu_i(\tau, \tau - r(\tau))] d\tau, \tag{2.82}$$

qui conduit à

$$\int_{t^*-r(t^*)}^{t^*} \varepsilon^{-1} \sum_{i=1}^{n} f_i(\tau, \varepsilon)[\mu_i(\tau, \tau) - \mu_i(\tau, \tau - r(\tau))] d\tau \geq 1, \tag{2.83}$$

ce qui est en contradiction avec (i).
Le reste de la preuve se fait de la même façon que celle du Théorème 2.6. □

Il convient de souligner ici que lorsque le Théorème 2.7 est appliqué à l'équation (2.47), le résultat obtenu n'est pas aussi précis que le Théorème 2.4. Néanmoins, le Théorème 2.7 s'applique aux équations générales de la forme (2.56). Nous avons également le résultat de bornitude suivant.

Théorème 2.8 *Pour (2.56), on suppose que $|f_i|$ est croissante par rapport à son second argument, et qu'il existe $M > 0$ tel que, pour $|c| \geq M$, $c \neq 0$, on a*

(i) $\displaystyle\int_{t-r(t)}^{t} c^{-1} \sum_{i=1}^{n} f_i(\tau, c)[\mu_i(\tau, \tau) - \mu_i(\tau, \tau - r(\tau))] d\tau \leq \mu < 1$, *pour* $t \geq t_0$ *;*

(ii) $|f_i(\tau, c)| \leq a_i(\tau)|c|$, *avec* $a_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *fonction continue.*

Alors, la solution x de (2.56) est bornée, et $\limsup_{t\to+\infty} |x(t)| \leq M$.

Idée de la démonstration. De l'hypothèse (ii), on voit que toute solution de (2.56) doit être globale. La condition (i) implique la bornitude et pour $\limsup_{t\to+\infty} |x(t)| \leq M$, la preuve est similaire à la celle du Théorème 2.7. □

2.4 Stabilité 3/2

Dans les deux sections précédentes, il a été permis au retard d'être non borné, tout en imposant quelques restrictions sur la non-linéarité de f. Dans toutes les équations à considérer dans cette section, nous supposons que la longueur du retard est bornée et cette restriction est essentielle. Nous imposerons également des conditions restrictives sur les non-linéarités des fonctions dans ces équations.

Yorke dans [12] a étudié l'équation

$$x'(t) = f(t, x_t), \tag{2.84}$$

où $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_q(\beta) \to \mathbb{R}$ est continue, avec

$$\mathcal{C}_q(\beta) = \{\phi \in \mathcal{C}([-q, 0], \mathbb{R}) : ||\phi|| < \beta\}.$$

Ainsi, il a prouvé le résultat suivant :

Théorème 2.9 *On suppose qu'il existe* $\alpha \geq 0$ *tel que*

(A) $\alpha q \leq 3/2$.

(B) $-\alpha M(\phi) \leq f(t, \phi) \leq \alpha M(-\phi)$, *pour tout* $\phi \in \mathcal{C}_q(\beta)$, *où*

$$M(\phi) = \max\{0, \sup_{s \in [-q,0]} \phi(s)\}.$$

Alors

(i) La solution nulle de (2.84) est uniformément stable ;

(ii) si, en outre $0 < \alpha q < 3/2$, *alors* $\lim_{t \to +\infty} x(t, t_0, \phi)$ *existe pour tout* $t_0 \geq 0$ *et* $\phi \in \mathcal{C}_q(2\beta/5)$.

Remarque 2.3 *Notons que la condition (B) est souvent appelée :* ***condition de Yorke****.*

On considère maintenant l'équation logistique retardée non autonome

$$x'(t) = -a(t)x(t-1)[1 + x(t)], \tag{2.85}$$

où $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue (par morceaux).

Nous avons ce qui suit.

Corollaire 2.5 *On suppose qu'il existe une constante* $\gamma > 0$ *telle que*

$$a(t) \leq \gamma < 3/2, \qquad \text{pour tout} \quad t \geq 0. \tag{2.86}$$

Alors

(i) La solution triviale de (2.85) est uniformément stable ;

(ii) si, de plus il existe une constante positive σ *tel que* $a(t) \geq \sigma$ *pour tout* $t \geq 0$, *alors la solution triviale de (2.85) est asymptotiquement stable.*

Démonstration. Soit $0 < \beta < 1/2$ une constante telle que

$$\gamma(1 + \beta) < 3/2.$$

Notons $\alpha = \gamma(1 + \beta)$ et $f(t, x_t) = -a(t)x(t-1)[1 + x(t)]$. Alors

$$-\alpha M(\phi) \leq f(t, \phi) \leq \alpha M(-\phi)$$

pour $\phi \in \mathcal{C}_1(\beta)$. La stabilité uniforme est obtenu à partir du Théorème 2.9. Si on a aussi $a(t) \geq \sigma$ pour $t \geq 0$, alors (ii) du Théorème 2.9 s'applique, et $\lim_{t \to +\infty} x(t, t_0, \phi)$ existe pour $\phi \in \mathcal{C}_1(2\beta/5)$.

Supposons que x^* est cette limite. Si $x^* > 0$, alors, pour t assez grand nous avons $x(t-1)[1 + x(t)] \geq x^*/2$, et (2.85) implique que $x'(t) \leq -x^*\sigma/2$, et par conséquent, $x(t) \to -\infty$; ce qui est une contradiction. De même, on peut prouver que x^* ne peut pas être négative. Par conséquent, $x^* = 0$, cela prouve le corollaire. □

Sugie dans [9] a donné un exemple pour montrer que si $\gamma > 3/2$ dans (2.86), la solution nulle est instable. Cela indique que, pour les équations non autonomes, les résultats précédents sont précis.

Le résultat suivant est dû à Yoneyama [10] et il généralise partiellement le Théorème 2.9.

Théorème 2.10 *On suppose qu'il existe un fonction continue* $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *telle que*

$$\int_t^{t+q} a(s)ds \leq 3/2,$$

et que pour tout $t \geq 0$, $\phi \in \mathcal{C}_q(\beta)$ *on a*

$$-a(t)M(\phi) \leq f(t,\phi) \leq a(t)M(-\phi).$$

Alors

(i) la solution nulle de (2.85) est uniformément stable ;

(ii) si $\lambda = \sup_{t\geq 0} \int_t^{t+q} a(s)ds < 3/2$ *et* $\mu = \inf_{t\geq 0} \int_t^{t+q} a(s)ds > 0$, *alors* $\lim_{t\to+\infty} x(t,t_0,\phi)$ *existe pour tout* $t_0 \geq 0$ *et* $\phi \in \mathcal{C}_q(e^{-2\lambda}\beta)$.

Remarque 2.4 *Notons que lorsque* $q = 1$, $Ka(s) = \alpha < 3/2$, *nous avons* $\lambda > 1$ *et, ainsi,* $e^{-2\lambda} < e^{-2} < 2/5$. *Donc, (ii) du Théorème 2.10 n'inclut pas celle du Théorème 2.9.*

L'exemple suivant est donné par Yoneyamma dans [10] pour montrer que 3/2 est la meilleure valeur possible pour les Théorèmes 2.9 et 2.10.

Exemple 2.1. *Soit* $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *une fonction continue par morceaux définie par*

$$a(t) = \begin{cases} \alpha & \text{pour} \quad t \in [3k, 3k+1+\alpha^{-1}[, \\ 0 & \text{pour} \quad t \in [3k+1+\alpha^{-1}, 3k+3[\end{cases}$$

où $\alpha > 0$, *pour* $k = 0, 1, 2, \ldots$. *Soit* $\phi(t) \equiv \varepsilon$ *pour* $t \in [-1, 0]$ *et soit* $x(t) = x(t, 0, \phi)$ *la solution de*

$$x'(t) = a(t)x(t-1).$$

Pour $k = 0, 1, 2, \ldots$, *la solution* x *est alors donnée par :*

$$x(t) = \begin{cases} (-1)^k\varepsilon(\alpha - 1/2)^k\{1 - \alpha(t-3k)\}, \text{ pour} \quad t \in [3k, 3k+1[\\ (-1)^k\varepsilon(\alpha - 1/2)^k\{1 - \alpha(t-3k) + \alpha^2(t-3k-1)^2/2\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour} \quad t \in [3k+1, 3k+1+\alpha^{-1}[\\ (-1)^{k+1}\varepsilon(\alpha-1/2)^{k+1}, \text{ pour} \quad t \in [3k+1+\alpha^{-1}, 3k+3[. \end{cases}$$

Pour $\alpha = 3/2$, x *est périodique, de période* σ, *et si* $\alpha > 3/2$, *alors* x *est non bornée.*

Yoneyama et Sugie dans [11] ont considéré la forme perturbée suivante de l'équation (2.85)

$$x'(t) = f(t, x_t) + g(t, x(t)), \tag{2.87}$$

où $g : \mathbb{R}_+ \times S(\beta) \to \mathbb{R}$ est continue et $S(\beta) = \{x \in R : |x| < \beta\}$.

L'exemple typique de (2.87) est

$$x'(t) = -a(t)x(t-q) + b(t)x(t). \tag{2.88}$$

Le résultat suivant est prouvé dans [11].

Théorème 2.11 *Dans l'équation (2.88), on suppose que :*
(H1) $-a(t)M(\phi) \leq f(t,\phi) \leq a(t)M(-\phi)$ *pour* $t \geq 0$ *et* $\phi \in C_q(\beta)$ *;*

$$|g(t,x)| \leq b(t)|x| \quad pour \quad t \geq 0 \quad et \quad x \in S(\beta);$$

où $a(t), b(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *sont continues ;*
et
(H2) $\limsup_{t\to+\infty} \int_t^{t+q} a(s)ds < 3/2$, $\liminf_{t\to+\infty} \int_t^{t+q} a(s)ds > 0$, *et que* $\int_0^{+\infty} b(s)ds < +\infty$.

Alors
(i) la solution triviale de (2.87) est uniformément stable ;
(ii) si, de plus on a l'hypothèse :
(H3) pour toutes les suites $t_n \to +\infty$ *et* $\phi_n \in \mathcal{C}_q(\beta)$ *convergeant vers une fonction constante non nulle dans* $\mathcal{C}_q(\beta)$*,* $f(t_n,\phi_n) + g(t_n,\phi_n(0))$ *ne converge pas vers zéro.*
Alors la solution triviale de (2.87) est uniformément asymptotiquement stable. Ainsi, la conclusion de la stabilité asymptotique (ii) du Corolaire 2.5 peut être renforcé pour une stabilité asymptotique uniforme.

2.5 Effet Allee

L'effet dit Allee se réfère à une population qui a un taux de croissance par habitant qui devient maximal à une certaine densité (ou taille de la population) qui est intermédiaire. Cela se produit lorsque le taux de croissance par habitant augmente à mesure que la densité augmente et diminue après que la densité dépasse une certaine valeur critique. Ce n'est certainement pas le cas dans l'équation logistique retardée (2.2), où le taux de croissance par habitant diminue en fonction de la densité.

Comme on le sait, dans la nature, certaines espèces coopèrent souvent entre elles pour chercher de la nourriture et échapper aux prédateurs. Par exemple, certains prédateurs forment des groupes de chasse pour leur permettre de capturer de nombreuses proies. Les poissons et les oiseaux forment souvent des bancs et des nuées en tant que défense contre les prédateurs. Certains insectes parasites s'accumulent pour pouvoir surmonter le mécanisme de défense d'un hôte. Un certain nombre d'espèces sociales, comme les fourmis, les termites, les abeilles, les humains, etc. ont développé un comportement de coopération complexe impliquant la division du travail, l'altruisme, etc. Des comportements comme ceux-la fournissent aux individus une plus grande chance de survivre et de se reproduire à mesure que la densité augmente. Dans les populations sexuelles, la coopération entre les individus est nécessaire pour l'accouplement, la construction de nids, l'élevage des jeunes, etc. L'agrégation et les caractéristiques coopératives et sociales associées chez les membres d'une espèce ont été largement étudiées dans les populations animales par Allee [1].

Lorsque la densité d'une population devient trop grande, l'effet de feed-back positif de l'agrégation et de la coopération peut alors être dominé par un effet de feed-back négatif stabilisant la densité due à une compétition intraspécifique due à une croissance excessive et à la pénurie de ressources qui en résulte.

Pour étudier ces processus, Gopalsamy et Ladas dans [3] ont introduit le modèle retardé de croissance démographique d'une seule espèce de type Lotka-Volterra :

$$x'(t) = x(t)[a + bx(t-\tau) - cx^2(t-\tau)], \tag{2.89}$$

où a, b, c sont des constantes réelles, avec $a > 0$ et $c > 0$. Quand $\tau = 0$, le taux de croissance par habitant est $g(x) = a + bx - cx^2$. Si $b > 0$, alors $g'(0) = b > 0$, et g atteint sa valeur maximale à $x = b/2c$, manifestant ainsi l'effet Allee. Si $b < 0$, alors g est une fonction décroissante de x pour $x \geq 0$, et ainsi il n'y a pas d'effet Allee. On peut interpréter (2.89) comme un modèle d'espèce unique avec un taux de croissance quadratique par habitant.

Comme précédemment et pour des raisons biologiques, nous considérons uniquement les solutions de (2.89) associées à des conditions initiales de la forme

$$x(t) = \phi(t) \geq 0, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad \phi(0) > 0, \quad \phi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}). \tag{2.90}$$

L'équation (2.89) a un équilibre positif unique

$$x^* = \frac{1}{2c}\left(b + \sqrt{b^2 + 4ac}\right). \tag{2.91}$$

La transformation

$$x(t) = x^*[1 + y(t)] \tag{2.92}$$

réduit l'équation (2.89) à

$$y'(t) = -A(t)y(t-\tau), \quad t \geq 0, \tag{2.93}$$

où A (dépend de y) est donné par

$$A(t) = [(2cx^* - b)x^* + c(x^*)^2 y(t-\tau)][1 + y(t)]. \tag{2.94}$$

Puisque $y(t) > -1$, on voit que $A(t) \geq (cx^* - b)x^*[1 + y(t)] > 0$ si $cx^* > b$. On remarque que $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = x^*$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

Lemme 2.4 *Supposons que $cx^* - b > 0$. Alors chaque solution non oscillatoire de l'équation (2.93) tend vers zéro quand $t \to +\infty$.*

Démonstration. On suppose dans la suite que y est éventuellement positive. Le cas négative se traite de la même façon. Nous avons $y'(t) < 0$, et donc $L = \lim_{t \to +\infty} y(t) \geq 0$. Si $L > 0$, alors

$$\lim_{t \to +\infty} y'(t) = -L[(2cx^* - b)x^* + c(x^*)^2 L] < 0,$$

ce qui implique que $\lim_{t \to +\infty} y(t) = -\infty$; ce qui est une contradiction. □

Soit $L = 2cx^* - b$ et $M = [Lx^* + c(x^*)^2(e^{Lx^*\tau} - 1)](e^{Lx^*\tau} - 1)$. Le lemme suivant donne des bornes inférieures et supérieures pour les solutions oscillantes de l'équation (2.89).

Lemme 2.5 *On suppose que $cx^* - b > 0$ et que y est une solution oscillante de l'équation (2.93). Alors, il existe $T = T(y) > 0$ tel que*

$$e^{-M\tau} \leq 1 + y(t) \leq e^{Lx^*\tau} \quad pour \quad t \geq T. \tag{2.95}$$

Démonstration. Soit $t_2 > t_1 > 2\tau$ deux zéros quelconques de y, c'est-à-dire, $y(t_1) = y(t_2) = 0$. Soit $\xi \in]t_1, t_2[$ un point où y atteint sa valeur maximale ou minimale dans $]t_1, t_2[$. Puisque $y'(\xi) = 0$, on a de (2.93), $y(\xi - \tau) = 0$. Par suite, nous avons

$$\begin{aligned}\ln[1 + y(\xi)] &= -\int_{\xi-\tau}^{\xi} [Lx^* + c(x^*)^2 y(s-\tau)]y(s-\tau)ds \\ &\leq -\int_{\xi-\tau}^{\xi} Lx^* y(s-\tau)ds \leq \int_{\xi-\tau}^{\xi} Lx^* ds = Lx^*\tau.\end{aligned}$$

Par conséquent, $1 + y(\xi) \leq e^{Lx^*\tau}$, ce qui implique que $1 + y(t) \leq e^{Lx^*\tau}$ pour $t \geq t_1$. Cela prouve le lemme. □

Une conséquence immédiate de ce lemme est que, pour $t \geq t_1$,

$$(cx^* - b)x^* e^{-M\tau} \leq A(t) \leq \tilde{M}, \tag{2.96}$$

où

$$\tilde{M} = [Lx^* + c(x^*)^2(e^{Lx^*\tau} - 1)]e^{Lx^*\tau}. \tag{2.97}$$

Le résultat suivant est dû à Gopalsamy et Ladas [3]. Il fournit des conditions suffisantes pour la stabilité asymptotique globale de l'état stationnaire $x(t) = x^*$ de l'équation (2.89). La preuve présentée ci-dessous est donné par Kuang dans [7]. Elle est différente et plus simple que celle de Gopalsamy et Ladas qui, elle, est basée sur une fonction de Lyapounov.

Théorème 2.12 *Dans l'équation (2.89), on suppose que $cx^* > b$ et $\tilde{M}\tau < 1$. Alors toute solution positive x de l'équation (2.89) est telle que*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = x^*.$$

Démonstration. Nous vérifions que toute solution oscillante y de l'équation (2.93) satisfaisant $1 + y(t) > 0$ tend vers zéro. Soit

$$u = \limsup_{t \to +\infty} |y(t)|. \tag{2.98}$$

Par le Lemme 2.5 nous avons $u < +\infty$. Si $u > 0$, alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\tilde{M}\tau(u + \varepsilon) < u - \varepsilon. \tag{2.99}$$

La définition de u implique qu'il existe $\bar{t} > t_1$ tel que

$$|y(t)| < u + \varepsilon, \quad \text{pour} \quad t \geq \bar{t}. \tag{2.100}$$

Soit $\xi > \bar{t}$ un point maximum ou minimum local de $y(t)$ tel que $|y(\xi)| > u - \varepsilon$. Donc $y(\xi) = 0$, et par conséquent $y(\xi - \tau) = 0$. Cela entraine que

$$u - \varepsilon < |y(\xi)| = \left| \int_{\xi-\tau}^{\xi} A(s)y(s-\tau)ds \right| \leq \tilde{M}(u+\varepsilon)\tau,$$

qui contredit (2.99). Donc, $u = 0$, et le théorème est prouvé. □

Remarque 2.5 *On note que pour avoir $cx^* > b$ et $\tilde{M}\tau < 1$, nous devons avoir $x^* > bc^{-1}$ et $\tau < \tilde{M}^{-1}$. Cela revient à dire que la valeur de l'équilibre doit être suffisamment grande et que le retard soit suffisamment petit.*

Conclusion

Ce mémoire de fin d'études a eu pour objectif d'étudier la stabilité des points d'équilibre de certains modèles de dynamiques de populations décrits par des équations différentielles scalaires à retard. Dans le premier chapitre on a présenté des notions préliminaires qui ont été nécessaires pour la compréhension de la suite du mémoire. Dans le deuxième chapitre, la Section 2.1 a été consacrée à la stabilité de Wright de l'équation logistique retardée, puis à la Section 2.2 on est passé à la stabilité d'un modèle plus général qui est l'équation logistique non autonome retardée dont certains cas particuliers ont été considérés, et ensuite dans la Section 2.3 on a présenté la théorie asymptotique pour les équations différentielles à retard non autonomes avec un feed-back négatif. La bornitude des solutions a également été traitée ainsi que la stabilité locale. Dans la section 2.4, on a illustré des résultats de la stabilité dite 3/2 et on a terminé notre mémoire par la Section 2.5 où un modèle présentant l'effet Allee est considéré et on a exposé soigneusement la stabilité de l'équilibre.

A travers le thème abordé et traité par notre mémoire, nous en concluons que l'étude de la stabilité des points d'équilibre dans le cas des équations différentielles à retard n'est pas évidente et il n'existe pas de résultats généraux, applicables à tous les types d'équations. Ce qui a été affirmé par Kuang dans [7] où il pose un certain nombre de questions (ouvertes) sur des modèles scalaires à retard de dynamiques de populations, parmi elles celle-ci :

> "Est-il vrai que, si $0 < \alpha(t) < 3/2$ alors les solutions positives de l'équation différentielle à retard $x'(t) = \alpha(t)x(t)[1 - x(t-1)]$ tendent vers l'équilibre $x(t) \equiv 1$?".

Bibliographie

[1] Allee, W. C. Animal aggregations, *Quart. Rev. Biol.* 2, 1927, pp. 367-398.

[2] Gopalsamy, K. On the global attractivity in a generalized delay-logistic differential equation, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 100, 1986, pp. 183-192.

[3] Gopalsamy, K. and Ladas, G. On the oscillation and asymptotic behavior of $N'(t) = N(t)[a + bN(t-\tau) - cN^2(t-\tau)]$, *Quart. Appl. Math.* 3, 1990, pp. 433-440.

[4] Haddock, J. R. and Kuang, Y. Asymptotic theory for a class of nonautonomous delay differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 168, 1992, pp. 147-162.

[5] Hale, J. K. *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[6] Kuang, Y. Global stability for a class of nonlinear nonautonomous delay equations, *Nonlinear Analysis* 17, 1990, pp. 627-634.

[7] Kuang, Y. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Academic Press, Inc., San Diego, 1993.

[8] Lakrib, M. Cours de M2 : *Equations à retard, Moyennisation et Applications*, in Master "*Perturbation, Moyennisation et Applications aux Biomathématiques*", Université de Tlemcen, 2016.

[9] Sugie, J. On the stability for a population growth equation with time delay, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 12 A, 1992, pp. 179-184.

[10] Yoneyama, T. On the 3/2 stability theorem for one dimensional delay differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 125, 1987, pp. 161-173.

[11] Yoneyama, T. and J. Sugie. Perturbing uniformly stable nonlinear scalar delay-differential equations, *Nonlinear Analysis* 12, 1988, pp. 303- 311.

[12] Yorke, J. A. Asymptotic stabilityfor one-dimensional differentialdelay equations, *J. Diff. Eqns.* 7, 1970, pp. 189-202.

[13] Wright, E. M. A non-linear difference-differential equation, *J. Reine Angew. Math.* 494, 1955, pp. 66-87.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier la stabilité globale des états d'équilibre dans divers modèles mathématiques (scalaires), avec retard, de dynamiques de populations dans le cas d'espèces uniques. D'autres propriétés sont dans certains cas également étudiées comme l'existence et la bornitude des solutions, et la stabilité locale des points d'équilibre.

Mots clés : Modèles de dynamique de populations, équations différentielles scalaires à retard, stabilité globale.

Abstract

The main purpose of this text is to study the global stability of steady states in various scalar delay differential population models in the case of unique species. Other properties are also studied in some cases as the existence and the boundedness of solutions, and the local stability of the points of equilibrium.

Keywords : Models in population dynamics, scalar differential equations with delay, global stability.