République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abou Bakr Belkaid- Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Équations Différentielles Ordinaires

Thème

Problèmes de Cauchy sur des intervalles non bornés

Présenté par : HAMOUM Yasmina

Mémoire soutenu le 3 Juillet 2017 devant le jury composé de :

Mr. Yebdri Mustapha	Président
Mr.Mebkhout Benmiloud	Examinateur
Mr.Benchaib Abdellatif	Examinateur
Mr.Slimani Boualem Attou	Encadreur

Année universitaire 2016-2017

Table des matières

Introduction

La théorie des équations différentielles est un vaste domaine aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. Celles-ci sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques comme pour l'étude de la radioactivité ou la mécanique céleste sans oublier la technique de datation par le C14 .

Les équations différentielles définies sur la demi droite réelle positive modélisent beaucoup de phénomènes physique,par exemple dans l'étude du courant instable d'un gaz à travers un nuage [2, 18] la physique du plasma [3] etc .

D'autre part ,les équations différentielles impulsives apparaient comme une description naturelle de nombreux phénomènes d'évolution dans le monde réel. La majorité des processus dans les sciences appliquées sont représentés par des équations différentielles.

Cependant, la situation est différente dans certains phénomènes physiques subisant des changements brusques au cours de leur évolution comme les systèmes mécaniques avec impact, les systèmes biologiques (battements du coeur, flux du sang,...) ,la dynamique des populations ,la dynamique des cellules etc.

Depuis plusieurs années, plusieurs chercheurs s'intéressent à l'existence des solutions de ces équations . La résolution d'une équation différentielle requiert une bonne combinaison de connaissances en mathématiques telle que la continuité par rapport aux conditions initiales et aux autres paramètres du système.

Dépendamment du type de solution en quête, plusieurs méthodes ont été développées comme celle de la théorie du point fixe et bien d'autres voir par exemple les références[1, 12, 16] .

En général , afin d'étudier l'aspect qualitatif telle que l'oscillation des solutions ,la stabilité ou le comportement asymptotique ,nous devons établir les résultats globaux . Ceci est l'une des motivations de ce travail.

Ce mémoire est consacré à quelque résultats d'existence et d'unicité des solutions pour quelques classes d'équations différentielles sur des espaces de Banach et de Fréchet .Nous nous inspirons principalement du travail[12]et pour plus de détaille voir les références [1, 4, 6, 8, 12, 26]. L'approche est basée sur la théorie du point fixe particulièrement l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder pour les contractions sur les espaces de Banach et Fréchet .

Ce travail est composé de quatre chapitres et d'une bibliographie et est organisé comme suit :

Le premier chapitre porte sur des préliminaires où on rappelle des définitions et des théorèmes nécessaires pour le développement de notre travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du problème suivant :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad p.p \;\; t \in J = [0, +\infty[\tag{1}$$

$$y(0) = y_0 \tag{2}$$

Où $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée.
le problème sera étudié sur l'espaces de Fréchet
$C([0, +\infty[, \mathbb{R}) = \{y : [0, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ est continue $\}$, muni de la semi norme

$$\|y\|_n = \sup_{t \in [0, +\infty[} |y(t)|, \; t \in [0.n]$$

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du problème :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad p.p \;\; t \in [0, +\infty[\tag{3}$$

$$y(0) = y_0 \tag{4}$$

Où $f : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée , et $y_0 \in \mathbb{R}$.

le problème sera étudié sur l'espaces de Banach
$BC([0, +\infty[, \mathbb{R}) = \{y : [0, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ est continue et borné $\}$, muni de la semi norme

$$\|y\|_{BC} = \sup_{t \in [0, n]} |y(t)|, \; t \in [0. + \infty[$$

Dans le quatrième chapitre , on considère le problème suivant :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad p.p \quad t \in [0, +\infty[\setminus \{t_1, t_2, ...\} \tag{5}$$

$$\Delta y(t) = y(t_k^+) - y(t_k^-) = I_k(y(t_k^-)) \quad , k = 1, ..., m \tag{6}$$

$$y(0) = y_0 \tag{7}$$

Où $f : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée , et $I_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions données , k=1,...,m et $y_0 \in \mathbb{R}$ avec

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_k, \quad y(t_k^+) = \lim_{t \longrightarrow t_k} y(t) \; , \quad y(t_k^-) = \lim_{t \longrightarrow t_k} y(t)$$

le problème sera étudié sur l'espaces de Banach suivant :

$$PC([0,+\infty[,\mathbb{R}) = \begin{cases} \quad y : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} e^{-rdt}|y(t)| \quad existe, \quad y \in \mathbb{C}(J_*,\mathbb{R}), \\ y(t_k^+) \ et \quad y(t_k^-) \quad existent \quad et \quad y(t_k^-) = y(t_k), k = 1,2,...,m. \end{cases}$$

Nous terminerons ce travail par une conclusion .

Notations

$J=[0,+\infty[$: intervalle réel positive .

$C(J,E)$: espace des fonctions continues sur J à valeurs dans un espace de Banach E muni de la norme

$$\|y\|_{\infty}=sup\{\|y\|:t\in J\}$$

òu $\|.\|$ est une norme sur E.

$AC^1(J,E)$ espace de Banach des fonctions dérivables $y:J\to E$ ayant la première dérivée absolument continue.

$C^k(J,E)$: espace des fonctions k fois continument dérivables de J dans E..

$L^1(J,E)$ espace de Banach des fonctions mesurables $y:J\longmapsto\mathbb{R}$ qui sont Lebesgue intégrables, muni de la norme

$$\|y\|_{L^1}=\int_0^{\infty}|y(t)|dt.$$

$L^p(J,E)$: espace des fonctions p-intégrables sur J

$L^p_{loc}(J,E)$: espace des fonctions localement p-intégrables.

$BC([0,+\infty[,\mathbb{R})$: espace des fonctions continues bonées .

$\{\|.\|\}$: la famille des semi-normes .

$\sim_n$: relation d'équivalence .

$X^n=(X/\sim_n,\|.\|_n)$: espace quotient .

$(X^n,\|.\|)$: le complémentaire de X par rapport à $\|.\|_n$.

$[x]_n$: la classe d'équivalence de x dans X^n

$Y^n=\{[x]_n:x\in Y\}$.

$int_n(Y^n)$: l'intérieure de Y^n par rapport à $\|.\|$ dans X^n.

$\partial_n Y^n$: la frontière de Y^n par rapport à $\|.\|$ dans X^n.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on introduit les définitions qui seront utilisées dans ce mémoire .Nous rappelons certains théorèmes d'analyse fonctionnelle pour une meilleure présentation des démonstrations des résultats de notre travail.Pour plus de détails le lecteur peut consulter [1],[12],[16],[17],[21], [27] .

Définition 1.1. ***(Espace vectoriel normé)[12]***

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$, on appelle norme sur l'espace $\mathbb{E}$ toute application notée $\| \, . \, \|$ définie sur $\mathbb{E}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,vérifiant pour tout x, y dans $\mathbb{E}$ et α dans $\mathbb{K}$

(i) $\|x\| = 0$ *si seulement si x = 0.*

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$.

(iii) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Un espace vectoriel normé E est un espace de Banach s'il est complet.

Autrement dit, E est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

Définition 1.2. *On associe à X une suite d'espace de Banach $\{(X^n, \|.\|)\}$ telle que :*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère sur X la relation d'équivalence $\sim_n$ définie par $x \sim_n y$ si et seulement si

$$\|x-y\|_n = 0 \quad \textit{pour tout } x, y \in X.$$

Pour tout sous ensemble $Y \subset X$, on associe une suite $\{Y_n\}$ de sous ensemble $Y^n \subset X^n$ telle que : Pour tout $x \subset X$, le sous ensemble Y^n soit définie par

$$Y^n = \{[x]_n : x \in Y\}.$$

Définition 1.3. *Un espace localement convexe est un espace vectoriel qui peut être défini à l'aide d'une famille de semi-normes.*

Un espace de Fréchet est Un espace localement convexe métrisable complet .

Propriétés 1.4. *Soit X un espace de Fréchet muni de la famille des semi-normes* $\{\|.\|_n\}$.

Soit $Y \subset X$*, on dit que Y est borné si pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *, il existe* $M_n > 0$ *tel que*

$$\|y\| \leqslant M_n \quad \forall y \in Y.$$

Définition 1.5. *L'application* $f : I \times E \longrightarrow E$ *est dite de Carathéodory si :*

1. *L'application* $t \longmapsto f(t,u)$ *est mesurable pour tout* $u \in E$ *.*
2. *L'application* $u \longmapsto f(t,u)$ *est continue presque pour tout* $t \in I$*.*
3. *l'application f est dite* L^1*-Carathéodory ,si Pour tout* $r > 0$*; il existe une fonction* $\phi_r \in L^1(I,R^+)$ *telle que*

$$\|f(t,u)\| \leqslant \phi_r(t) \quad et \quad \|u\| \leqslant r \quad pour\ tout\ u \in \mathbb{R}$$

.

Définition 1.6. *Soient E et F deux espaces de Banach. on appelle opérateur borné toute application linéaire continue de E dans F.*

Définition 1.7. ***(Opérateur complètement continu)***

Soient E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F. On dit que f est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de E en un ensemble relativement compact dans F.

Définition 1.8. *Soient* $(\mathbb{K}, d)$ *un espace métrique et F un un espace vectoriel normé.*

On dit qu'une partie $A(\mathbb{K};F)$ *est équicontinue si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\alpha(\varepsilon) > 0$ *telle que pour tout* $f \in A$*,on a*

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon \quad pour\ tout\ x,y \in \mathbb{K} \quad et\ d(x,y) < \alpha(\varepsilon)$$

Définition 1.9. *la fonction* $f : E \longrightarrow E$ *est dite contractante si il existe* $K \in]0,1[$ *telle que :*

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant K\|x - y\|, \ pout\ tous\ x,y \in E.$$

Thoérème 1.10. ***(Convergence dominée de Lebesgue)[12]***

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et (f_n) une suite de fonctions de L^1. On suppose que

(i) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *p.p. sur* Ω.

(ii) il existe une fonction $g \in L^1$ tel que pour chaque n, $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ *p.p. sur* Ω.

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L_1} \longrightarrow 0\,.$$

Définition 1.11. *L'opérateur $T : X \longmapsto Y$ est compact , si et seulement si pour toute suite bornée $\{Tx_n\}_{n\geq 1} \subset X$, la suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ admet une sous suite convergente dans Y . Dans le cas particulier où $X = C([a,b])$ le théorème suivant d'Arzela-Ascoli est généralement utilisé pour prouver la compacité de T.*

Thoérème 1.12. ***(Ascoli-Arzelà)[12]***

Soit A un sous ensemble de $C(J,E)$; A est relativement compact dans $C(J,E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. *L'ensemble A est borné i.e il existe une constante $K > 0$ tel que :*

$$\|f(x)\| \leqslant K \text{ pour tout } x \in J \text{ et tout } f \in A.$$

2. *L'ensemble A est équicontinu i.e pour tout $\varepsilon > 0$; il existe $\delta > 0$ tel que*

$$|t_1 - t_2| \leqslant \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } t_1, t_2 \in J \text{ et tout } f \in A\,.$$

3. *Pour tout $x \in A$, l'ensemble $\{f(x); f \in A\} \subset E$ est relativement compact.*

Définition 1.13. ***(Mesure de non compacité de Kuratowskii) [21]***

La mesure de non compacité de Kuratowskii est l'application α définie sur Ω_E dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$\alpha(B) = \inf\{\varepsilon > 0, B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (B)_i, diam(B_i) < \varepsilon\}$$

avec Ω_E est la famille des sous espaces bornés de E et $B \in \Omega_E$.

Propriétés :

La mesure de non compacité de Kuratowskii satisfait les propriétés suivantes :

1. $\alpha(B) = 0 \Leftrightarrow \overline{B}$ est compact ;
2. $\alpha(B) = \alpha(\overline{B})$;
3. $A \subset B \Rightarrow \alpha(A) \leq \alpha(B)$;
4. $\alpha(A+B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$;
5. $\alpha(cB) = |c|\,\alpha(B),\ c \in \mathbb{R}$;
6. $\alpha(convB) = \alpha(B)$;
7. $\alpha(A \cup B) = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$;
8. $\alpha(A \cap B) \leq \min\{\alpha(A), \alpha(B)\}$.

Thoérème 1.14. ***(Critère de compacité du Corduneanu)****[27]*

Soit $\mathbb{A} \subset BC([0, +\infty[, \mathbb{R})$ *est relativement compact si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *L'ensemble* $\mathbb{A}$ *est borné i.e il existe une constante* $K > 0$ *tel que :*
$$\|f(x)\| \leqslant K \textit{ pour tout } x \in [0, +\infty] \textit{ et tout } f \in \mathbb{A}.$$
2. *L'ensemble* $\mathbb{A}$ *est équicontinue (équicontinue sur tout intervalle compact de* $[0, +\infty[$ *)*
3. *L'ensemble* $\mathbb{A}$ *est équiconvergent*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists T(\varepsilon) > 0;\ \|y(t) - y(\infty)\|_{BC} < \varepsilon, \forall t > T(\varepsilon), \forall y \in A.$$

Définition 1.15. *Soit f une application d'un ensemble E dans lui même.*
On appelle point fixe de f tout point $u \in \mathbb{E}$ *telle que* $f(u) = u$ *.*

Les théorèmes de point fixe sont les outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. La méthode du point fixe consiste à transformer un problème donné en un problème de point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné. Pour tout ce qui suivra, nous aurons besoin des théorèmes de point fixe suivants :

Thoérème 1.16. ***[Principe de contraction de Banach][16]***

Soit E un espace métrique complet et soit $F : E \longmapsto E$ une application contractante, alors F possède un point fixe unique.

Thoérème 1.17. ***[Schauder][16]***

Soit X un espace de Banach et K un sous ensemble convexe , fermée , non borné ,non vide de X et $N : K \longmapsto K$ une application compacte ; alors N admet un point fixe dans K.

Thoérème 1.18. ***[Schaefer] [27]***

Soit X un espace de Banach et $N : X \longmapsto X$ est un opérateur complètement continu.
Si l'ensemble

$$F = \{y \in X : y = \lambda N(y), \lambda \in]0;1[\}$$

est borné , alors N admet un point fixe .

Thoérème 1.19. ***(Mönch)****[27]*

Soit D un sous espace fermé, borné et convexe d'un espace de Banach ,tel que $0 \in D$, et soit N une application continue de D dans D.
Si l'implication :

$$V = \overline{conv} N(V) \ \ ou \ \ V = N(V) \cup \{0\} \Rightarrow \alpha(V) = 0$$

est vérifiée pour tout sous ensemble V de D, alors N admet un point fixe dans D.

Thoérème 1.20. ***(Darbo-Sadovskii)****[27]*

Soit C un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach E et soit l'application continue $T : C \to C$ une γ_E-contraction, alors T admet au moins un point fixe dans C.

Thoérème 1.21. ***(Darbo généralisé)****[27]*

Soit C un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach E et soit l'application continue

$$T : C \to C$$

satisfaisant :

$$\alpha(T(W)) \leq \phi(\alpha(W)) \qquad , \forall W \subseteq C$$

où α est une mesure de non compacité arbitraire et $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ une fonction strictement croissante (non nécessairement continue), avec :

$$\lim_{n\to\infty} \phi^n(t) = 0, \ \ \forall t \in [0,\infty)$$

Alors, T admet au moins un point fixe dans C.

Thoérème 1.22. ***[L'alternative non linéaire de Leray Schauder][16]***

Soit X un espace de Fréchet , Y fermé dans X et $N : Y \longrightarrow X$ *,une contraction telle que N(Y) soit borné , alors l'un des deux résultats suivant est satisfait :*

1. *N admet un point fixe unique .*
2. $\exists\, x \in \partial Y$ *telle que* $x = \lambda N(x)$ *. pour tout* $\lambda \in]0,1[$.

Thoérème 1.23. ***[L'alternative non linéaire de Frigon-Granas][16]***

Soit X un espace de Fréchet , Y fermé dans X et $N : Y \longrightarrow X$ *,une contraction telle que N(Y) soit borné , alors l'un des deux résultats suivant est satisfait :*

1. *N admet un point fixe unique .*
2. *il existe* $x \in \partial_n Y^n$ *telle que* $\|x - \lambda N(x)\|_n = 0$ *. pour tout* $\lambda \in]0.1[$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

Chapitre 2

Problème de Cauchy dans un espace de Fréchet

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on se propose de donner un résultat d'existence et d'unicité de solutions pour le problème de Cauchy suivant :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \;\; p.p. \;\; t \in J = [0, +\infty[\tag{2.1}$$

$$y(0) = y_0 \tag{2.2}$$

Où $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction donnée et* $y_0 \in \mathbb{R}$ *.*

L'objectif de ce chapitre est d'utiliser l'altérnative non linéaire de type Leray-Schauder due à Frigon-Granas adaptée aux applications contractantes dans les espaces de Fréchet pour établir l'éxistence d'un point fixe unique .

Pour plus de détails concernant le résultat cité dans ce chapitre, on peut consulter les références [16] [27].

2.2 La solution du problème de Cauchy.

Définition 2.1. *Une fonction $y \in AC(J,\mathbb{R})$ est dite solution du problème (2.1),(2.2) si elle satisfait l'équation (2.1) et la condition(2.2) .*

Lemme 2.2. *y est Une solution du problème (2.1),(2.2) , si elle satisfait l'équation intégrale*

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds$$

Preuve *:*

Si y est une solution du problème (2.1),(2.2) , alors y est continue car dérivable et par intégration ,on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^t f(s,y(s))ds &= \int_0^t y'(s)ds \\ &= y(t) - y(0) \\ &= y(t) - y_0.\end{aligned}$$

Si

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds$$

Alors y est dérivable

D'ou

$$y'(t) = f(t,y(t))$$

$$y(0) = y_0$$

Ainsi on a obtenu l'équivalence dans les deux sens .

Pour établir ce résultat d'existence de solutions du problème (2.1),(2.2), nous aurons besoin des hypothèses suivantes :

(H1) $f : [0,+\infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction de Carathéodory.*

(H2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *il existe* $0 < k_n < \frac{1}{n}$ *tel que :*

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leqslant k_n|y_1 - y_2|, t \in [0,n] \text{ pour tout } y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

(H3) Il existe $p \in L^1_{Loc}([0,+\infty[,\mathbb{R}^+)$ *et* $\psi : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ *continue et croissante telle que :*

$$|f(t,y) \leqslant p(t)\psi(|y|),\ t \in J,\ \text{pour tout } y \in \mathbb{R}$$

2.3 Existence de solutions

Thoérème 2.3. *Supposons que les hypothèses (H1),(H2),(H3) sont satisfaites.*

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{|y_0|}^{+\infty} \frac{ds}{\psi(s)} > \int_0^n p(s)ds$$

alors le problème (2.1),(2.2) admet une solution unique .

La démonstration de ce résultat est basée sur l'altérnative non linéaire de Frigon-Granas .

On donne la définition suivante :

Définition 2.4. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la famille de semi normes sur $C([0,+\infty[,\mathbb{R})$ par :*

$$\|y\|_n = \sup_{t\in[0,n]} \{|y(t)|,\ t \in [0.n]\}$$

***Preuve du théorème** :*

On introduit l'opérateur linéaire $N : C([0,+\infty[,\mathbb{R}) \longrightarrow C([0,+\infty[,\mathbb{R})$ définit par :

$$Ny(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds$$

On sait que les points fixes de l'opérateur N sont des solutions de problèmes (2.1),(2.2) d'aprés le lemme 2.2 . La démonstration se fait en deux étapes :

1. N est une contraction

Soient $y_1, y_2 \in C([0,+\infty[,\mathbb{R})$; $t \in [0.n], n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}|N(y_1)(t) - N(y_2)(t)| &= |\int_0^t f(s,y_1(s))ds - \int_0^t f(s,y_2(s))ds| \\ &\leqslant \int_0^t |f(s,y_1(s)) - f(s,y_2(s))|ds \\ &\leqslant k_n \int_0^t |y_1(s) - y_2(s)|ds.\end{aligned}$$

En passant au sup , on obtient

$$\sup_{t\in[0,n]} |N(y_1)(t) - N(y_2)(t)| \leqslant k_n \int_0^t \sup_{t\in[0,n]} |y_1(s) - y_2(s)|ds$$

Ce qui implique

$$\|N(y_1) - N(y_2)\|_n \leqslant nk_n \|y_1 - y_2\|_n \quad (\text{ d'aprés (H2)} \quad nK_n < 1 \text{ })$$

D'ou N est une contraction .

2. N est borné

D'aprés (H3) pour tout $t \in [0.n], n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\begin{aligned} |N(y)(t)| \leqslant & |y(0)| + \int_0^t |f(s,y(s))|ds \\ \leqslant & |y_0| + \int_0^t p(s)\psi(|y(s)|)ds. \end{aligned}$$

On considère la fonction $\mu(t)$*définie par :*

$$\mu(t) = |y_0| + \int_0^t p(s)\psi(|y(s)|)ds.$$

Alors

$$\begin{aligned} |Ny(t)| &\leqslant \mu(t). \\ \mu(t)' &= p(t)\psi(|y(t)|) \\ &\leqslant p(t)\psi(|\mu(t)|) \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\frac{\mu(t)'}{\psi(\mu(t))} \leqslant p(t).$$

On intègre

$$\int_0^t \frac{\mu(s)'}{\psi(\mu(s))} ds \leqslant \int_0^t p(s)ds.$$

En passant au changement de variable suivant

$$\mu(s) = v \Longrightarrow \mu(s)' ds = dv.$$

si: $s = 0 \Longrightarrow \mu(0) = v(0) = |y_0|$
si: $s = t \Longrightarrow \mu(t) = v(t)$.
Donc pour tout $t \in [0,n]$

$$\begin{aligned} \int_{|y_0|}^{\mu(t)} \frac{dv}{\psi(v)} &\leqslant \int_0^t p(s)ds \\ &\leqslant \int_0^n p(s)ds \\ &< \int_0^{+\infty} \frac{dv}{\psi(v)}. \end{aligned}$$

Alors il existe une constante k_n *telle que* $\mu(t) < k_n$, $t \in [0,n]$.

Puisque pour chaque $t \in [0,n], |y(t)| \leqslant \mu(t)$*, on a*

$$|y(t)| \leqslant \max(|y_0|, k_n) = M_n, \text{ pour tout } t \in [0,n]; n \in \mathbb{N}.$$

On définit le fermé,borné Y par :

Y= {y$\in C([0,+\infty[,\mathbb{R})\ \|y\|_n \leqslant M_n + 1\}$.

Soit $y \in \partial Y$, $\lambda \in]0,1[$, $y = \lambda N y$

$$y(t) = \lambda N y(t), \text{pour tout } t \in [0,n], n \in \mathbb{N}$$

Donc

$$|y(t)| = |\lambda N y(t)| \leqslant |N y(t)|.$$

En passant au sup

$$\sup_{t \in [0,n]} |y(t)| \leqslant |(Ny)(t)|, n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\|y\|_n \leqslant M_n.$$

D'autre part , on a :

$$\|y\|_n = M_n + 1.$$

D'ou il n' existe aucun $y \in \partial_n Y_n$ *tel que* $y = \lambda N y$ *pour certain* $\lambda \in]0,1[$.

Donc d'après l'altérnative non linéaire de Frigon-Granas l'opérateur N admet un point fixe qui est solution unique de problème (2.1),(2.2) .

Chapitre 3

Solution globale dans un espace de Banach

3.1 Introduction

Au cours des dernières années, la théorie des équations différentielles linéaires et non linéaires a attiré l'attention de nombreux auteurs, et un nombre considérable de résultats a été obtenus.

Cependant, la majorité des travaux parus concernant l'étude de ces équations dans des espaces de Banach qui a considéré l'existence et l'unicité de solutions dans l'intervalle fini , et seulement peu de résultats dans la littérature mathématique ont traité le problème d'existence et d'unicité dans des domaines non bornés [1],[11],[27].

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'étude d'un problème de cauchy sur un domaine non borné .

En outre, nous établirons trois résultats d'existence et d'unicité ainsi que la dépendance continue de la solution par rapport à la donnée initiale.

Ce chapitre est structuré comme suit :

Dans la deuxième section, nous étudions l'existence globale de solutions pour une classe d'équations différentielles présenté sous la forme d'un problème de Cauchy avec condition non locale. Tout d'abord, nous prouvons une équivalence entre le problème de Cauchy et une équation intégrale.Ensuite, en s'appuyant sur un critère de compacité approprié, nous établissons notre premier résultat d'existence en utilisant le théorème du point fixe de Schauder .

Dans la troisième section nous présentons notre deuxième résultat qui s'agit d'un résultat d'existence et d'unicité. Nous le montrons, à l'aide du théorème du Mönch .

Dans la quatrième section nous utilisons le théorème de Darbo pour étendre le résultat d'existence à l'intervalle $[0,+\infty[$.

Ce chapitre est consacré à l'établissement d 'existence et d'unicité pour le problème :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \;\; p.p. \;\; t \in [0, +\infty[\tag{3.1}$$

$$y(0) = y_0 \tag{3.2}$$

Où $f : [0, +\infty] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction donnée , et* $y_0 \in \mathbb{R}$ *.*

3.2 Premier résultat d'existence

Dans la présente section nous allons étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1),(3.2) en utilisant le théorème de Schauder. Pour cela nous considèrons les hypothèses suivantes :

(H1) $f : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est Carathéodory.*

(H2) Il existe $p \in L^1([0, +\infty[, \mathbb{R}^+)$ *et* $\psi : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ *continue et croissante telle que :*

$$|f(t, y)| \leqslant p(t)\psi(|y|), \; t \in [0, +\infty], \; \textit{pour tout } y \in \mathbb{R}$$

(H3) Il existe $R > 0$ *, tel que*

$$|y_0| + p^*\psi(R) \leqslant R, \; \textit{avec } p^* = \|p\|_{L^1}.$$

(H4) il existe $L > 0$ *tel que pour chaque borné B dans BC et pour tout* $t \in [0, +\infty[$ *,on a*

$$\alpha(f(t, B(t))) \leqslant L\alpha(B(t)).$$

Le premier résultat est le suivant :

Thoérème 3.1. *Supposons que les hypothèses (H1),(H2),(H3) sont satisfaites.*
Alors le problème (3.1),(3.2) admet au moins une solution .

Pour monter ce théorème nous allons utiliser le théorème du point fixe de Schauder.

Démonstration *:*

Considérons l'opérateur :

$N : BC([0,+\infty[,\mathbb{R}) \longrightarrow BC([0,+\infty[,\mathbb{R})$ *définit par :*

$$Ny(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds$$

Montrons que :

1. N est bien définit (c'est à dire $N(BC) \subset BC$)

soit $y \in BC([0,+\infty[,\mathbb{R}), t \in [0,+\infty]$

$$\begin{aligned}
|(Ny)(t)| =& |y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds| \\
\leqslant& |y_0| + \int_0^t |f(s,y(s))|ds \\
\leqslant& |y_0| + \int_0^t p(s)\psi(|y(s)|)ds.(d'aprs\ H2) \\
\leqslant& |y_0| + \psi(\|y\|_{BC}) \int_0^t p(s)ds. \\
\leqslant& |y_0| + \psi(\|y\|_{BC})p^*.
\end{aligned}$$

Donc $\|Ny\| < \infty$ *, N est bien définie .*

2.N est continue

Soit y_n *une suite de* $BC([0,+\infty[,\mathbb{R})$ *convergente dans* $BC([0,+\infty[,\mathbb{R})$ *vers* y_* *.*

Montrons que

$$\|Ny_n - Ny_*\|_{BC} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$$

$$\begin{aligned}
|N(y_n)(t) - N(y_*)(t)| =& |\int_0^t f(s,y_n(s))ds - \int_0^t f(s,y_*(s))ds| \\
\leqslant& \int_0^t |f(s,y_n(s)) - f(s,y_*(s))|ds.
\end{aligned}$$

En passant au sup

$$|N(y_n) - N(y_*)| \leqslant \int_0^t |f(s,y_n(s))ds - f(s,y_*(s))|ds.$$

En passant à la limite , on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|N(y_n) - N(y_*)\|_{BC} \leqslant \int_0^t \lim_{n\longrightarrow\infty} |f(s,y_n(s))ds - f(s,y_*(s))|ds.$$

Comme f est de Carathéodory, on a f mesurable par rapport à y, on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.
Donc

$$\|Ny_n - Ny_*\|_{BC} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$$

D'ou l'opérateur N est continue .
Il nous reste à montrer que N est compact pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe de Schauder (c'est à dire l'ensemble image est relativement compact) en utilisant le théorème d'Ascoli-Arzélà.

Considérons l'ensemble

$$B = \{y \in BC([0,+\infty[,\mathbb{R}), \|y\| \leqslant R\}.$$

fermé,borné , convexe de $BC([0,+\infty[,\mathbb{R})$.

On procède en trois étapes :

Etape 1 *: L'ensemble NB est borné . Soit* $y \in B, t \in [0,+\infty[$

$$\begin{aligned}
|(Ny)(t)| =& |y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds| \\
\leqslant& |y_0| + \int_0^t |f(s,y(s))|ds \\
\leqslant& |y_0| + \int_0^t p(s)\psi(|y(s)|)ds. \quad (par (H2)) \\
\leqslant& |y_0| + \psi(R)\int_0^t p(s)ds. \\
\leqslant& |y_0| + \psi(R)p^*. \\
\leqslant& R. \qquad\qquad (par\ H3).
\end{aligned}$$

Donc

$$|(Ny)(t)| \leqslant R$$

c'est à dire

$$(Ny)(t) \in B \Longrightarrow NB \subset B$$

Etape 2 *: L'ensemble NB est équicontinu .*

Soit $t_1, t_2 \in [0, +\infty[; t_1 < t_2$ *et* $y \in B$ *.*

$$\begin{aligned}
|(Ny)(t_1) - (Ny)(t_2)| &= |\int_0^{t_1} f(s, y(s))ds - \int_0^{t_2} f(s, y(s))ds| \\
&\leqslant \int_{t_1}^{t_2} |f(s, y(s))|ds \\
&\leqslant \int_{t_1}^{t_2} p(s)\psi(|y(s)|)ds \quad (d'aprs(H2)) \\
&\leqslant \psi(R)\int_{t_1}^{t_2} p(s)ds. \\
&\leqslant \psi(R)\int_{t_1}^{t_2} p(s)ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$|(Ny)(t_1) - (Ny)(t_2)| \longrightarrow 0, si\ t_1 \longrightarrow t_2.$$

D'ou l'ensemble NB est équicontinue.

Etape 3 *:L'ensemble NB est équiconvergent . On montre que*

$$\begin{aligned}
|(Ny)(t) - (Ny)(\infty)| &= |\int_0^{t} f(s, y(s))ds - \int_0^{+\infty} f(s, y(s))ds|. \\
&\leqslant \int_{t}^{+\infty} |f(s, y(s))|ds. \\
&\leqslant \psi(R)\int_{t}^{+\infty} p(s)ds.
\end{aligned}$$

En passant à la limite ,on obtient

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} |(Ny)(t) - (Ny)(\infty)| = 0$$

Donc NC est équiconvergent .

Alors Le théorème du point fixe de Schauder assure l'existence d'un point fixe de N.

Par conséquent, le problème à valeur initiale (3.1),(3.2) possède au moins une solution .

3.3 Deuxième résultat d'existence

Thoérème 3.2. *Supposons que les hypothèses (H1),(H2),(H3) et (H4) sont satisfaites Alors le problème (3.1),(3.2) admet au moins une solution .*

La démonstration de ce théorème est basée sur le théorème du point fixe de Mönch.

***Démonstration** :*

Considérons l'opérateur $N : BC([0,+\infty[,\mathbb{R}) \longrightarrow BC([0,+\infty[,\mathbb{R})$ *définit par :*

$$Ny(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds$$

Il est clair que les points fixes de l'opérateur N sont les solutions du problème (3.1),(3.2) , on procède en trois étapes :

***Étape 1** : montrons que* $NK \subset K$

Soit l'ensemble

$$K = \{y \in BC([0,+\infty[,\mathbb{R}), \|y\|_{BC} \leqslant R\}.$$

férmé,borné de $BC([0,+\infty[,\mathbb{R})$.

Soit $y \in K, t \in [0,+\infty[$

$$\begin{aligned}
|(Ny)(t)| =& |y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds| \\
\leqslant & |y_0| + \int_0^t |f(s,y(s))|ds \\
\leqslant & |y_0| + \int_0^t p(s)\psi(|y(s)|)ds. \\
\leqslant & |y_0| + \psi(R)\int_0^t p(s)ds. \\
\leqslant & |y_0| + \psi(R)p^*. \\
\leqslant & R.
\end{aligned}$$

D'ou $NK \subset K$.

***Etape 2** :N est continue .*

Soit y_n une suite de $BC([0,+\infty[,\mathbb{R})$ convergente dans $BC([0,+\infty[,\mathbb{R})$ versy_*. On montre que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\|y_n - y_*\|_{BC}=0$$

$$\begin{aligned}|N(y_n)(t)-N(y_*)(t)| &= |\int_0^t f(s,y_n(s))ds - \int_0^t f(s,y_*(s))ds| \\ &\leqslant \int_0^t |f(s,y_n(s)) - f(s,y_*(s))|ds.\end{aligned}$$

En passant au sup

$$\|Ny_n - Ny_*\|_{BC}\leqslant \int_0^t |f(s,y_n(s))ds - f(s,y_*(s))|ds.$$

En passant à la limite , on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\|Ny_n - Ny_*\|_{BC}\leqslant \int_0^t \lim_{n\longrightarrow\infty}|f(s,y_n(s))ds - f(s,y_*(s))|ds.$$

Comme f est continue et d'aprés le théorème de la convergence de Lebesgue ,

On obtient

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\|N(y_n)-N(y_*)\|_{BC}=0$$

D'òu l'opérateur N est continue .

***Etape 3** : On montre que*

$$V=\overline{conv}\{(NV)\cup\{0\}\}\subset K$$

est relativement compact (c'est-à-dire $\alpha_{BC}(V)=0$) .

Soit $t\in[0,+\infty]$

$$\begin{aligned}\alpha(\overline{conv}\{(NV)\cup\{0\}\}) &\leqslant \alpha(NV(t)) \\ &= \alpha(\{y_0+\int_0^t f(s,V(s))ds\}).\end{aligned}$$

Donc d'aprés (H4), on obtient

$$\begin{aligned}
\alpha(V(t)) &\leqslant L\int_0^t \alpha(v(s))ds. \\
&\leqslant L\int_0^t e^{rLs}e^{-rLs}\alpha v(s))ds,\ r>1. \\
&\leqslant \frac{1}{r}\alpha_{BC}(V)[e^{rLt}-1],(\alpha_{BC}(V)=sup\ e^{-rLs}\alpha(V(t))) \\
&\leqslant \frac{1}{r}\alpha_{BC}(V)e^{rLt}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$e^{-rLt}\alpha(V(t)\leqslant \frac{1}{r}\alpha_{BC}(V).$$

En passant au sup ,on obtient

$$\alpha_{BC}(V)\leqslant \frac{1}{r}\alpha_{BC}(V).$$

Alors

$$0\leqslant (\frac{1}{r}-1)\alpha_{BC}(V)\leqslant 0,\ r>1.$$

Donc

$$\alpha_{BC}(V)=0.$$

D'ou V est relativement compact .

Donc d'après le théorème du Mönch l'opérateur N admet un point fixe y qui est solution de problème (3.1),(3.2).

3.4 Troisième résultat

Nous allons donner un autre résultat d'existence de solution pour le problème (3.1),(3.2) en utilisant le théorème de Darbo.

Thoérème 3.3. *supposons que (H1),(H2),(H3),(H4) sont satisfaites .*

Alors le problème (3.1),(3.2) admet au moins une solution .

Démonstration *:*

Considérons l'opérateur $N : BC([0,+\infty[,\mathbb{R}) \longrightarrow BC([0,+\infty[,\mathbb{R})$ *définit par :*

$$Ny(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds$$

Pour appliquer le théorème du Darbo , montrons les trois étapes suivantes :

Étape 1 *: montrons que* $NK \subset K$

Soit l'ensemble

$$K = \{y \in BC([0,+\infty[,\mathbb{R}), \|y\|_{BC} \leqslant R\}.$$

fermé,borné de $BC([0,+\infty[,\mathbb{R})$.

Soit $y \in K, t \in [0,+\infty[$

$$\begin{aligned} |(Ny)(t)| &= |y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds| \\ &\leqslant |y_0| + \int_0^t |f(s,y(s))|ds \\ &\leqslant |y_0| + \int_0^t p(s)\psi(|y(s)|)ds. \\ &\leqslant |y_0| + \psi(R)\int_0^t p(s)ds. \\ &\leqslant |y_0| + \psi(R)p^*. \\ &\leqslant R. \end{aligned}$$

D'ou $NK \subset K$ *.*

Etape 2 *: Nest continue .*

Soit y_n *une suite de* $BC([0,+\infty[,\mathbb{R})$ *convergente dans* $BC([0,+\infty[,\mathbb{R})$ *vers* y_* *.*

On montre que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|Ny_n - Ny_*\|_{BC} = 0$$

$$\begin{aligned}|N(y_n)(t)-N(y_*)(t)| &= |\int_0^t f(s,y_n(s))ds-\int_0^t f(s,y_*(s))ds| \\ &\leqslant \int_0^t |f(s,y_n(s))-f(s,y_*(s))|ds.\end{aligned}$$

$$|N(y_n)-N(y_*)| \leqslant \int_0^t |f(s,y_n(s))ds-f(s,y_*(s))|ds.$$

En passant à la limite , on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\|N(y_n)-N(y_*)\|_{BC}\leqslant \int_0^t \lim_{n\longrightarrow\infty}|f(s,y_n(s))ds-f(s,y_*(s))|ds.$$

(d'après la Carathéodory de f et le théorème de la convergence de Lebesgue)

On obtient

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\|N(y_n)-N(y_*)\|_{BC}=0$$

D'ou l'opérateur N est continue .

Etape 3 *: Montrons qu'il existe $K\in[0,1]$ telle que*

$$\alpha_{BC}(NA)\leq K\alpha_{BC}(A)\ , \quad \text{pour tout borné } A\subset K.$$

soit $t\in[0,+\infty[$

$$\begin{aligned}\alpha(NA(t)) &= \alpha(\{y_0+\int_0^t f(s,A(s))ds\}). \\ &\leqslant \alpha(\{\int_0^t f(s,A(s))ds\}). \\ &\leqslant \int_0^t \alpha(f(s,A(s)))ds. \\ &\leqslant L\int_0^t \alpha(A(s))ds. \\ &\leqslant L\int_0^t e^{rLs}e^{-rLs}\alpha(A(s))ds,\ r>1. \\ &\leqslant \frac{1}{r}e^{rLt}\alpha_{BC}(A),\ r>1\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\alpha_{BC}(NA)\leqslant \frac{1}{r}\alpha_{BC}(A),\ r>1$$

Comme $\frac{1}{r}<1$, alors la condition de Darbo est satisfaite . Donc d'aprés le théorème du Darbo l'opérateur N admet un point fixe y qui solution de problème (3.1),(3.2) .

Chapitre 4

Problème de Cauchy avec impulsions

4.1 Introduction

La théorie des équations différentielles ordinaires impulsives a été initiée en 1960 par V. Milman et A. Myshkis et elle a été développée durant la période de 1960-1975 par certains chercheurs ukraniens et russes. Ensuite, de 1975 à 1990, le mérite du développement de cette théorie et de sa popularisation revient au mathématicien américain V. Lakshmikantham.

A partir de 1991, en plus de Lakshmikantham, d'autres mathématiciens comme L. Byszewski, D. Bainov contribuaient à l'enrichissement de la théorie des équations différentielles impulsives où ils lancèrent différentes études sur ce sujet et beaucoup de résultats ont été obtenus dès lors [9, 20, 25].

les équations différentielles impulsives apparaissent comme une description naturelle de nombreux phénomènes d'évolution dans le monde réel.

Certains phénomènes physiques subissant des changements brusques au cours de leur évolution comme les systèmes mécaniques avec impact,la dynamique des cellules , les systèmes biologiques (battements du coeur, flux du sang,...) .

Ces changements sont souvent de très courtes durées et sont donc produits instantanément sous forme d'impulsions. La modélisation de tels phénomènes nécessite l'utilisation des formes qui font intervenir explicitement et simultanément l'évolution continue du phénomène ainsi que les changements instantanés. De tels modèles sont dits "impulsifs" .

Au cours des dernières années, un nombre considérable de travaux traitant ce sujet ont été présentés [5, 6, 8, 9, 23, 25].

Dans ce chapitre nous allons établir des résultats d'existence et d'unicité pour des équations différentielles impulsives avec conditions initiales.Les théorèmes de fixe de Banach et schaefer seront utilisés .

4.2 Système impulsif

Un système différentiel impulsif est généralement défini par une équation différentielle ordinaire soumise à une équation aux différences qui représente la condition impulsive. Un tel système est donné par :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)); & t \neq t_k \\ \Delta y(t) = I(t,y(t)); & t = t_k,\ k = 0,1,... \end{cases}$$

Où $f : [0,+\infty] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction donnée .*

$\Delta y(t)$ *représente la condition impulsive donnée par*

$$\Delta y(t) = y(t_k^+) - y(t_k^-) \quad ,k = 1,...,m$$
$$y(t_k^+) = \lim_{t \longrightarrow t_k^+} y(t)\ , \quad y(t_k^-) = \lim_{t \longrightarrow t_k^-} y(t)$$

le système ci-dessus est simplement un système différentiel impulsif avec des moments fixes c'est à dire que le temps d'impulsion est fixe .

Dans ce cas le problème est assujetti à un nombre fini (ou infini) d'impulsions qui ont lieu à des moments fixes donnés par une suite croissante

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_k,$$

n'ayant pas de points d'accumulation à savoir

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} t_k = +\infty.$$

4.3 Problème impulsif du premier ordre

Considérons le problème impulsif du premier ordre suivant :

$$y'(t) = f(t,y(t)) \ \ p.p.\ \ t \in [0,+\infty[\setminus \{t_1,t_2,...\} \tag{4.1}$$
$$y(t_k^+) - y(t_k^-) = I_k(y(t_k^-)), k = 1,...,m \tag{4.2}$$
$$y(0) = y_0 \tag{4.3}$$

Où $f : [0,+\infty] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction donnée , et* $I_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont des fonctions données,k=1,...,m et* $y_0 \in \mathbb{R}$ *avec*

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_k, \quad y(t_k^+) = \lim_{t \longrightarrow t_k} y(t)\ , \quad y(t_k^-) = \lim_{t \longrightarrow t_k} y(t)$$

Considérons l'espace de Banach suivant :

$$PC([0,+\infty[,\mathbb{R}) = \begin{cases} y : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} e^{-rdt}|y(t)| \quad existe, \quad y \in \mathbb{C}(J_*,\mathbb{R}), \\ y(t_k^+) \ et \quad y(t_k^-) \quad existent \quad et \quad y(t_k^-) = y(t_k), k = 1,2,...,m. \end{cases}$$

muni de la norme

$$\|y\|_{PC} = \sup_{t\in[0,+\infty]} \{e^{-rdt}|y(t)|\}.$$

avec d une constante positive et $r > 1$.

Introduisons maintenant la définition de la solution du problème (4.1)-(4.3)

Définition 4.1. *Une fonction* $y \in PC \cap \cup_{k=1}^{+\infty} \mathbb{C}(\mathbb{J}_k, \mathbb{R})$ *est solution du problème (4.1),(4.3) si y satisfait l'équation (4.1) pour* $t \in [0,+\infty], \quad t \neq t_k \quad ,k = 1,2,...,m$ *ainsi que les conditions*

$$\begin{cases} y(t_k^+) - y(t_k^-) = I_k(y(t_k^-)) \quad ,k = 1,...,m \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

4.4 Equivalence entre le problème de cauchy et l' équation intégrale

Nous allons établir une équivalence entre le problème (4.1),(4.3) et une certaine équation intégrale

Définition 4.2. *On considère le problème linéaire suivant*

$$y' = h(t), t \in J_* = [0,+\infty[\setminus\{t_1,t_2,...\} \tag{4.4}$$

$$y(t_k^+) - y(t_k^-) = a_k, \quad k = 1,...,m \tag{4.5}$$

$$y(0) = y_0 \tag{4.6}$$

où h est une fonction donnée .

On a le résultat suivant :

Lemme 4.3. *y est solution de problème (4.4),(4.6) , si elle satisfait l'équation :*

$$y(t) = y_0 + \int_0^t h(s)ds + \sum_{0<t_k<t} a_k.$$

$$\sum_{0<t_k<t} a_k = \begin{cases} 0 & si \quad t \in [0,t_1] \\ a_1 & si \quad t \in [t_1,t_2[\\ a_1 + a_2 & si \quad t \in [t_2,t_3[\\ . \\ . \\ . \\ a_1 + a_2 + ... + a_m & si \quad t \in [t_m,+\infty[\end{cases}$$

Dans le but d'établir nos résultats d'existence et d'unicité nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.4. *la fonction $y \in \mathbb{C}^1([0,+\infty],\mathbb{R}) \cap PC([0,+\infty],\mathbb{R})$ est solution du problème (4.1)-(4.3) , si et seulement si $y \in PC([0,+\infty],\mathbb{R})$ est une solution de l'équation intégrale impulsive suivante :*

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_K(y(t_k^-)).$$

4.5 Premier résultat d'existence

le résultat suivant est basé sur le principe de contraction de Banach . En vue d'obtenir un tel résultat,nous considérons des conditions appropriées sur les fonctions impliquées dans le problème(4.1)-(4.3) , nous proposons les hypothèses suivantes :

(H1) $f : [0,+\infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue.*

(H2) il existe $d > 0$ *0 telle que :*

$$|f(t,y) - f(t,\overline{y})| \leqslant d|y - \overline{y}|, \ \forall t \in [0,+\infty] \ ,\forall y,\overline{y} \in \mathbb{R}.$$

(H3) Il existe $c_k > 0$ *telle que :*

$$|I_k(y) - I_k(\overline{y})| \leq c_k|y - \overline{y}|.\forall y,\overline{y} \in \mathbb{R}.$$

Thoérème 4.5. *Supposons que (H1),(H2),(H3) sont satisfaites .Si*

$$(\frac{1}{r}+\sum_{k=0}^{m}c_k)<1$$

Alors le problème (4.1)-(4.3) admet une unique solution .

Démonstation :

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème(4.1)-(4.3) , il suffit de vérifier les hypothèses du théorème de point fixe de Banach.

On définit l'opérateur N : $PC([0,+\infty],\mathbb{R}) \longrightarrow PC([0,+\infty],\mathbb{R})$ *par :*

$$(Ny)(t)=y_0+\int_0^t f(s,y(s))ds+\sum_{0<t_k<t} I_K(y(t_k^-)).$$

D'après le lemme 4.4 les points fixes de l'opérateur N sont des solutions du problème (4.1)-(4.3)
Pour pouvoir appliquer le théorème de Banach , prouvons que N est une contraction .
En effet on a :
Etape 1 *: N est bien définit*

Si $y \in PC([0,+\infty],\mathbb{R})$ *alors la fonction* N_y *est continue sur* $[0,+\infty]$ *sauf aux points* $t_k, k=1...m$.

$$\lim_{t\longrightarrow t_k^+}(Ny)(t)=y_0+\int_0^t f(s,y(s))ds+I_1(y(t_1^-))+I_2(y(t_2^-))+...+I_{k-1}(y(t_{k-1}^-)).$$

$$(Ny)(t)=y_0+\int_0^t f(s,y(s))ds+I_1(y(t_1^-))+I_2(y(t_2^-))+...+I_{k-1}(y(t_{k-1}^-)).$$

D'ou Ny est continu à gauche aux points t_k *.*

$$\lim_{t\longrightarrow t_k^-}(Ny)(t)=y_0+\int_0^t f(s,y(s))ds+I_1(y(t_1^-))+I_2(y(t_2^-))+...+I_m(y(t_m^-)).$$

Finalement

$$(Ny)(t_k^+)-(Ny)(t_k^-)=I_K(y(t_k^-)).$$

Ny n'est pas continue au point t_k.

D'ou $Ny \in PC([0,+\infty],\mathbb{R})$

Etape 2 *: On va montrer que N est une contraction .*

Soient $y_1, y_2 \in PC([0,+\infty],\mathbb{R})$ *et* $t \in [0,+\infty]$ *.*

$$\begin{aligned}
|(Ny_1)(t)-(Ny_2)(t)| =& |\int_0^t (f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s))ds)+\sum_{0<t_k<t} I_K(y_1(t_k^-))-I_k(y_2(t_k^-))| \\
&\leqslant \int_0^t |f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s))|ds+\sum_{0<t_k<t} |I_K(y_1(t_k^-))-I_k(y_2(t_k^-))| \\
&\leqslant \int_0^t |(y_1(s)-y_2(s))|ds+\sum_{0<t_k<t} c_K|(y_1(t_k^-)-y_2(t_k^-)| \\
&\leqslant \frac{1}{r}\ (e^{rdt}-1)\ \|y_1-y_2\|_{PC}+(\sum_{k=1}^{m} c_k e^{rdt}))\ \|y_1-y_2\|_{PC} \\
&\leqslant (\frac{1}{r}\ e^{rdt}+\sum_{k=1}^{m} c_k e^{rdt})\ \|y_1-y_2\|_{PC} \\
&\leqslant e^{rdt}(\frac{1}{r}\ +\sum_{k=1}^{m} c_k)\ \|y_1-y_2\|_{PC}.
\end{aligned}$$

En passant au sup pour le premier membre ,on obtient

$$\|Ny_1-Ny_2\|_{PC}\leqslant (\frac{1}{r}\ +\sum_{k=1}^{m} c_k)\ \|y_1-y_2\|_{PC}$$

Donc N est une contraction .

D'ou N admet un point fixe qui est la solution unique de problème (4.1)-(4.3) .

Nous concluons d'après ce qui précède qu'en vertu du théorème du point fixe de Banach l'opérateur F possède au moins un point fixe .

4.6 Deuxième résultat d'existence

Afin d'établir un résultat d'éxistance de la solution du problème (4.1)-(4.3) basé sur le théorème du Schaefer , nous proposons les hypothèses suivantes :

(H1) $f : [0,+\infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue .*

(H2) Il existe $p \in L^1([0,+\infty[,\mathbb{R}^+)$ *et* $\psi : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ *continue et croissante telle que :*

$$|f(t,y) \leqslant p(t)\psi(|y|),\ t \in [0,+\infty],\ \textit{pour tout } y \in \mathbb{R}$$

(H3) $I_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *k=1,...,n des fonctions continues et il existe* $c_k > 0 : |I_k(y)| \leqslant c_k$, $\forall y \in \mathbb{R}$

Thoérème 4.6. *Supposons (H1),(H2),(H3) sont satisfaites . Si*

$$\int_{|y_0|}^{+\infty} \frac{ds}{\psi(s)} > \int_0^n p(s)ds \tag{4.7}$$

alors le problème (4.1),(4.3) admet au moins une solution .

Preuve *:*

Considérons l'opérateur N définie par :

$$N : PC(\mathbb{J},\mathbb{R}) \longrightarrow PC(\mathbb{J},\mathbb{R})$$
$$(Ny)(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_K(y(t_k^-)).$$

D'aprés le lemme (4.4) , les points fixes de l'opérateur N sont les solutions du problème (4.1)-(4.3) .

Pour appliquer le théorème de Schaefer , on doit démontrer d'abord que N est complètement continue . En effet on a :

Etape 1 *: N est complètement continue .*

Soit $D \subset PC(\mathbb{J},\mathbb{R})$ une partie bornée, alors $\exists r > 0, \forall y \in D : \|y\|_{PC} \leqslant r$.

Soit $y \in D$:

$$\begin{aligned}|(Ny)(t)| &\leqslant \int_0^t |f(s,y(s))|ds + \sum_{0<t_k<t} I_K(y(t_k^-))| \\ &\leqslant |y_0| + \int_0^t p(s)\psi(|y(s)|)ds + \sum_{k=1}^m c_k.\end{aligned}$$

On a $\|y\|_{PC} \leqslant r$.

En passant au sup , on obtient

$$|(Ny)|_{PC} \leqslant \|y_0\| + \psi(r)\|p\|_{L^1} + \sum_{k=1}^m c_k = l.$$

Etape 2 *:N est équicontinu .*

Soient $l_1, l_2 \in [0,+\infty]$ telle que $l_1 < l_2$,et soit $y \in D$

$$\begin{aligned}|(Ny)(l_2) - (Ny)(l_1)| &\leqslant \int_{l_1}^{l_2} |f(s,y(s))|ds + \sum_{0<t_k<l_2-l_1} |I_K(y(t_k^-))| \\ &\leqslant \psi(r)\int_{l_1}^{l_2} p(s)ds + \sum_{0<t_k<l_2-l_1} c_k.\end{aligned}$$

Si $l_1 \longrightarrow l_2$ alors $|(Ny)(l_2) - (Ny)(l_1)| \longrightarrow 0.$

***Etape 3** :N est continu .*

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans PC convergente vers y . il existe un entier r tel que $\|y_n\|_{PC}\leqslant r$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $\|y\|_{PC}\leqslant r$ donc $y_n\in D$ et $y\in D$.

D'aprés le théorème de la convergence dominée de lebesgue et la continuité des I_k on a

$$\begin{aligned}\|Ny_n-Ny\|_{PC}\leqslant &\int_0^b|f(s,y_n(s))-f(s,y(s)|ds\\ &+\sum_{0<t_k<t}|I_K(y_n(l_k^-))-I_k(y(l_k^-))|\longrightarrow 0\ \ si\ n\longrightarrow\infty\end{aligned}$$

Donc N est complètement continue .

Il reste à montrer que l'ensemble

$$F=\{y\in PC([0,+\infty]):y=\lambda Ny;\lambda\in[0,1]\}$$

est borné .

Soit $y\in F$, il existe $\lambda\in[0,1]$ telle que pour chaque $t\in[0,+\infty]$ alors

$$\begin{aligned}|y(t)|=\lambda Ny(t)\leqslant&|y_0|+\int_0^t|f(s,y(s))|ds+\sum_{0<t_k<t}|I_K(y_n(t_k^-))|\\ \leqslant&|y_0|+\int_0^t p(s)\psi(|y(s)|)ds+\sum_{k=1}^m c_k.\end{aligned}$$

Posons

$$v(t)=|y_0|+\int_0^t p(s)\psi(|y(s)|)ds+\sum_{k=1}^m c_k.$$

Donc

$$v_0=|y_0|+\sum_{k=1}^m c_k=\widetilde{y}.$$

et

$$v^{'}(t)=p(t)\psi(|y(t)|)\leqslant p(t)\psi(v(t)).$$

ce qui implique

$$\frac{v'(t)}{\psi(v(t))}\leqslant p(t)$$

En intégrant , on obtient

$$\int_0^t\frac{v'(s)}{\psi(v(s))}ds\leqslant\int_0^t p(s)ds$$

Posons v(s)=u donc

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{y}}^{v(t)} \frac{du}{\psi(u)} &\leqslant \int_0^{+\infty} p(t)\,dt \\ &\leqslant \int_{\widetilde{y}}^{v(t)} \frac{du}{\psi(u)}\end{aligned}$$

Donc il existe $l^* > 0 : v(t) \leqslant l^* > 0$, $\forall t \in [0, +\infty[$

D'ou

$$|y(t)| \leqslant l^* \Longrightarrow \|y\|_{PC} \leqslant l^*.$$

Donc F est borné .

Alors d'aprés le théorème de Schaefer N admet un point fixe qui est solution du problème (4.1)-(4.3) .

Bibliographie

[1] R.P.AGARWAL AND D.O'REGAN ,Infinite Interval Problems for Differential ,Difference and Integral Equation ,Academic Publishers,Dordrecht ,2001 .

[2] R.P.AGARWAL AND D.O'REGAN ,Infinite Interval Problems modelling the flow of a gaz through a semi-infinite porous medium ,Stud ,Appl.Math.80(2002) ,245-257.

[3] R.P.AGARWAL AND D.O'REGAN ,Infinite Interval Problems modelling phenomena which arise in the theory of plesma and electrical potential theory ,Stud,Appl.Math.111(2003) 339-358.

[4] Z.AGUR,L.COJOCARU,G,MAZAUR,R.M.ANDERSON AND Y.L.DANON,Pulse mass measles vaccination across age cohorts,Proc .Nat.Acad.Sci.USA.90.

[5] D.D.BAINOV AND P.S .SIMEONOV ,Systems with Impulse Effect Ellis Horwood Ltd, Chichister ,1989.

[6] D.BAINOV AND G.HRISTOVA , Selected Qualitative Investigations and Approximate Methods for Impulsive Equations.

[7] D.D.BAINOV AND P.S .SIMEONOV ,Systems with Impulse Effect Ellis Horwood Ltd, Chichister ,1989.

[8] M.BENCHOHRA ,J.HENDERSON,AND S.K.NTOUYAS,Impulsive Differential Equtions and Inclusions, Hindawi Publishing Corporation ,Vol.2,New York,2006.

[9] M.BENCHOHRA AND P.W. ELOE , On nonresonance impulsive functional differential equations with periodic boundary conditions, Applied Mathematics E-Notes ,1(2001),65-72.

[10] M.BENCHOHRA ,J.HENDERSON,AND S.K.NTOUYAS, An existence result for first order impulsive functionnel differential equations in Banach space ,Computers and Mathematics with applications, 42(2001), 1303-1310 .

[11] M.BENCHOHRA, J.HENDERSON,AND S.K.NTOUYAS, An existence result for an huperbolic differential inclusion in Banach space ,Dicuss .Math.Differ .Control Optim, 22(2002).

[12] K.DEIMLING, Nonlinear Fonctional Analysis ,Springer -Verlag,Berlin,1985.

[13] J.DEMAILLY, Analyse Numérique et Equations Différentielles, EDP sciences, Edition 3, 2006.

[14] R.W.DICKEY, Membrane caps under hydrosstatic pressure ,Quart, Appl.Math.46(1988), 95-104.

[15] R.W.DICKEY, Rotationally symmetric solutions for shallow membrane caps, Quart, Appl.Math.47(1989), 571-581.

[16] M.FRIGON AND A.GRANAS, Resultat de type Leray -Schauder pour des contractions sur des espaces de Fréchet, Ann .Sci. Math, Québec ,22(1998),no.2,161-168.

[17] J.HALE, Ordinary Differential Equation , Pure and applied Mathematics , John Wiley sons , New York, 1969.

[18] R.E. KIDDER, Unsteadyn flow of gaz through a semi-infinite porous medium, J.Appl.Mech.27(1957) ,329-332 .

[19] E.KRUGER-THIEMR,Fromal theory of dry dosage regiments .I.J.Theoret.Biol. 13 (1966) 212-235.

[20] V.LAKSHMIKANTHAM, D. BAINOV AND P.S. SIMENOV, Theory of Impulsive Differential Equations ,World Scientific ,Syngapore ,1989.

[21] E.LAAMRI,Mesures et Intégrations, Convolution et Transformé de Fourier des Fonction, Dunod 2001.

[22] T.Y.Na Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems ,Academic Press, New York, 1979.

[23] A.OUAHAB, Some contributions in impulsives differential equations and inclusions with fixed and variable times, Ph.D.Dissertation, University of Sidi-Bel-Abbès (Algeria),2006 .