

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE
ET POPULAIRE

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID - TLEMCCEN

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Option : Perturbations, Moyennisation et Applications aux Biomathématiques (PeMAB)

Thème

Analyse mathématique d'un modèle d'équation de réaction-diffusion à retard

Soutenu publiquement le 14 juin 2017 par

Ilias Khater

Devant le Jury composé de :

M. Karim Yadi	Professeur, Université de Tlemcen	Président
M. Ali Moussaoui	Professeur, Université de Tlemcen	Membre du Jury
M. Sabri Bensid	M.C.A, Université de Tlemcen	Membre du Jury
M. Abdennasser Chekroun	M.A.B, Université de Tlemcen	Encadrant

Année universitaire : 2016 – 2017

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu qui m'a donné la volonté, la motivation et surtout la santé durant toutes mes années d'études.

Pour le soutien d'accompagnement qu'il m'a accordé, je remercie vivement Mr. Abdennasser CHEKROUN d'avoir accepté l'encadrement de ce mémoire. Je suis très reconnaissant de l'aide qu'il m'a apporté à travers les nombreuses discussions. De plus, sa grande disponibilité, ses précieux conseils et orientations pour mon encadrement. J'ai, également, très apprécié son aide à la rédaction de ce manuscrit et à la préparation de la soutenance.

Je tiens à remercier, également, Mr Karim YADI pour l'honneur d'avoir accepté de présider le jury.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à Mr Ali MOUSSAOUI et Mr Sabri BENSID pour l'honneur d'avoir en acceptant d'examiner ce travail et faire partie du jury.

Mon respect et mes remerciements vont, ensuite, à tous mes chers enseignants. Je remercie en particulier Madame D. Hadj Slimane.

Je tiens à remercier, chaleureusement, les êtres qui me sont les plus chers au monde « mes parents » pour leurs sacrifices et leurs conseils, sans eux, je ne serais jamais arrivé à ce niveau. que dieu les garde.

Par ailleurs, mes remerciements s'adressent, également, à tous mes amis et mes collègues pour les moments et les souvenirs inoubliables qu'on a passé ensemble.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'épanouissement et l'élaboration de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à

Mes très chers parents pour leurs sacrifices et qui n'ont jamais cessé de m'encourager, que ALLAH me les garde.

Mes chers frères et mes chères sœurs.

Tous les membres de ma famille, petits et grands.

A Mes amis : Youcef, Salah Eddine, Elbahi, Rafik, Rida et Younes.

A mes collègues de ma promotion sans exception.

Introduction

La modélisation mathématique consiste à utiliser les mathématiques pour décrire, expliquer, prévoir un comportement d'un phénomène dans le monde réel. Elle peut être particulièrement utile pour répondre à des questions ou tester des idées dans des systèmes complexes. La modélisation mathématique a fait l'objet de nombreuses recherches dans plusieurs domaines, en particulier la dynamique des populations, l'écologie et l'épidémiologie.

Parmi les étapes dans le processus de modélisation est de comprendre l'évolution par rapport au temps. Il existe un autre effet, parfois, important à prendre en considération dans la modélisation qui est la mobilité et la structuration en espace. Nous savons, que lors d'un mouvement aléatoire, on utilise un terme de diffusion pour le décrire. De plus, en combinant les processus de réaction (croissance) et de diffusion, on obtient, par exemple, une équation de réaction-diffusion de la forme

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w), \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega,$$

Les équations de réaction-diffusion jouent un rôle très important dans le domaine de la dynamique des populations. Dans ce mémoire, une contribution à ce sujet et à l'analyse d'un modèle de réaction diffusion est étudiée. Plus précisément, nous considérons le modèle suivant (voir [6])

$$\begin{cases} \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} - dw(t, x) + \int_0^\pi f_\alpha(x, y) b(w(t - \tau, y)) dy, & t \geq 0, x \in [0, \pi], \\ w(t, 0) = w(t, \pi) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

L'équation (1) décrit l'évolution d'une population (individus matures) au cours du temps avec un terme de diffusion, un terme de dégradation qui représente la mortalité, un terme non local qui résulte de la mobilité des individus immatures. Le retard ici représente la durée moyenne de maturation. Cette équation est obtenue par réduction d'un système d'équations aux dérivées partielles structurées en âge et en espace en utilisant la méthode des caractéristiques. Il est bien connu que les états stationnaires positifs jouent un rôle important dans l'étude de la dynamique globale et locale d'une équation de réaction-diffusion découlant de la biologie. La convergence des solutions à un état stationnaire positif exige tout d'abord son existence. Dans ce manuscrit, nous avons étudié l'existence d'un état stationnaire positif de l'équation ci-dessus, c'est-à-dire, l'existence d'une solution positive du problème suivant

$$\begin{cases} -\frac{d^2 w(x)}{dx^2} + k^2 w(x) = \int_0^\pi f_\alpha(x, y) b(w(y)) dy, & t \geq 0, x \in [0, \pi], \\ w(0) = w(\pi) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

avec $k^2 = d/D$. Nous avons traité, dans un premier temps, les propriétés d'existence et de positivité des solutions. En particulier, nous combinons la méthode des sur- et sous-solution et une estimation du noyau pour obtenir une condition suffisante pour l'existence d'une solution du problème ci-dessus. Ensuite, nous avons étudié le comportement asymptotique des solutions, en particulier, la stabilité asymptotique locale et l'attractivité globale de l'équilibre trivial. Deux simulations numériques de la solution pour différentes valeurs du retards sont tracées dans la figure .

Dans ce travail, l'étude de notre modèle nous a incité à consacrer tout un chapitre sur des

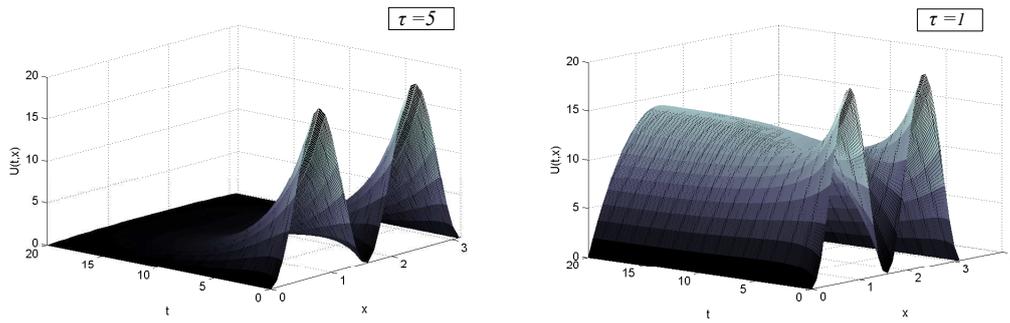


FIGURE 1: Deux simulations numériques de la solution pour différentes valeurs du retard.

notions importantes pour l'aspect mathématique. Dans un premier temps, nous avons dévoué le premier chapitre pour rappeler quelques propriétés sur les équations différentielles à retard. Nous avons énoncé quelques résultats élémentaires pour ce type d'équation. De plus, nous avons mis le point sur le fait que le retard est un paramètre qui peut mettre en évidence la présence des oscillations. Par la suite, nous avons initié la méthode des caractéristiques pour la résolution des équations de transport. Nous avons aussi introduit des propriétés basiques du cône et nous avons énoncé un théorème de point fixe pour des opérateurs monotone utile dans le traitement de notre problème. Puis, nous avons consacré un paragraphe pour définir des fonctions de Green.

Dans le deuxième chapitre, nous avons parlé d'un cadre général de la modélisation mathématique et nous avons présenté quelques modèles de base. Ensuite, nous avons procédé à la construction du modèle étudié. L'approche utilisée est celle des systèmes structurés. Cette dernière a été abordé dans le chapitre 3.

Dans le chapitre 4, nous avons traité la question d'existence des états stationnaires, désormais les solutions du problème (2). Nous avons distingué deux cas suivant la monotonie du terme non local. L'approche utilisée est la technique d'itération monotone basée sur l'existence d'une sur- et sous-solution.

Ensuite dans le chapitre 5, nous avons abordé le cas de l'équilibre trivial. Une condition nécessaire et suffisante est obtenue pour qu'il soit globalement asymptotiquement stable. Enfin, nous décrivons la méthode numérique pour simuler les solutions du problème de réaction-diffusion à retard. Nous avons utilisé un schéma de différence finis.

Table des matières

1	Préliminaires	4
1.1	Généralités sur les équations différentielles à retard	4
1.1.1	Introduction	4
1.1.2	Théorie élémentaire des équations différentielles à retard	5
1.1.3	Comparaison entre les EDOs et les EDRs	6
1.1.4	Problème de Cauchy	8
1.1.5	Méthode des pas	10
1.2	Méthode des caractéristiques	10
1.3	Propriétés basiques du cône et point fixe pour un opérateur monotone	14
1.3.1	Définition d'un cône	14
1.3.2	Définition d'un cône normal	15
1.3.3	Point fixe pour un opérateur monotone	16
1.4	Fonction de Green	16
2	Modélisation mathématique	20
2.1	Introduction	20
2.2	Modélisation mathématique en biologie et en écologie	20
2.2.1	Modèle de croissance linéaire (Malthus)	20
2.2.2	Modèle de croissance logistique	21
2.2.3	Modèles de Malthus et de croissance logistique à retard	22
2.3	Structuration continue en espace	23
2.3.1	Modèles de transport et de diffusion	23
2.3.2	Modèle de réaction-diffusion	25
2.4	Modélisation d'un système dynamique pour une population structurée en age	26
2.4.1	Modèle de Von Foerster-McKendrick	27
3	Description du modèle utilisé : modèle Juvéniles-Adultes	29
3.1	Motivation biologique et construction du modèle	29
3.2	Réduction du système par la méthode des caractéristiques	31
4	Existence des solutions stationnaires	36
4.1	Existence des solutions positives - Cas monotone.	37
4.2	Existence des solutions positives - Cas non monotone.	39
5	Stabilité locale et attractivité globale de l'équilibre trivial	44
5.1	Attractivité globale de l'équilibre trivial	44
5.2	Stabilité locale de l'équilibre trivial	46
5.3	Simulations numériques	48

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Généralités sur les équations différentielles à retard

1.1.1 Introduction

Les équations différentielles à retard (désormais EDR) tiennent en compte l'effet du passé dans la prédiction du futur. Elle décrivent l'évolution d'une variable en fonction d'une ou plusieurs valeurs prises par cette dernière dans le passé. Nous les retrouvons issues de différentes disciplines scientifiques décrivant de divers phénomènes. Les équations différentielle à retard ont été introduites pour modéliser des phénomènes dans lesquels il y a un décalage temporel entre l'action sur le système et la réponse du système à cette action. Par exemple, dans les processus de naissance des populations biologiques (cellules, bactéries . . .) ou dans des processus qui nécessitent qu'un certain seuil soit atteint avant que le système soit activé. De nombreux phénomènes rencontrés en physiques, biologie, chimie, etc. . . ont trouvé dans la théorie des équations différentielle à retard un bon moyen de modélisation (plus réaliste).

Par la suite, nous allons illustrer quelques exemples d'EDR. Soit l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\frac{dx}{dt}(t) = g(t, x(t)).$$

Cette équation traduit une relation entre $\frac{dx}{dt}$ et x au même temps t . Par contre, l'équation différentielle à retard suivante

$$\frac{dx}{dt}(t) = ax(t-1), \quad a \in \mathbb{R}^*$$

traduit une relation entre $\frac{dx}{dt}$ et la valeur de x à un instant passé ($t-1$).

Les premiers modèles à retard ont été introduits par V. Volterra qui a proposé le nom d'équations à retard en (1928). Depuis ce temps, ces équations ont été utilisées

dans différents domaines. Les modèles "Proie-Prédateur" sont, en général, constitués de deux populations, l'une N_2 le prédateur se nourrissant de l'autre, la proie N_1 . Parmi les modèles les plus classiques, on retrouve le système Proie-Prédateur de Volterra à retard suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}N_1 = [b_1 - a_1N_2]N_1(t), \\ \frac{d}{dt}N_2 = [-b_2 + \int_{-\tau}^0 k(s)N_1(t+s)ds]N_2(t). \end{cases}$$

Volterra a supposé que la croissance des prédateurs en contact avec la proie n'est pas instantanée. Elle est due par exemple à une période de gestation.

La fonction k est censée décrire la manière dont le gain du prédateur à chaque instant t dépend de l'abondance de la population des proies N_1 dans un intervalle de temps passé $[t - \tau, t]$.

1.1.2 Théorie élémentaire des équations différentielles à retard

Soit $\tau \geq 0$ un réel donné. Nous notons par $C := C([a, b], \mathbb{R}^N)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R}^N , muni de la topologie de la convergence uniforme. Nous posons

$$\mathcal{C} := C([- \tau, 0], \mathbb{R}^N),$$

et on désigne la norme d'un élément ϕ de \mathcal{C} par

$$\|\phi\| = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} |\phi(\theta)|.$$

Nous notons par $x|_{[t-\tau, t]}$ la position de x entre les instants $t - \tau$ et t . Cette notation permet de déterminer $\dot{x}(t)$ en fonction des valeurs de x à un instant passé. Par conséquent, les équations différentielles à retard peuvent donc s'écrire sous la forme

$$\dot{x} = F(t, x|_{[t-\tau, t]}). \quad (1.1)$$

Dans ce cas, le domaine de $x|_{[t-\tau, t]}$ est $\mathcal{D}(x|_{[t-\tau, t]}) = [t - \tau, t]$. Nous remarquons que ce domaine dépend de t . En effet, il faut définir

$$F : I \times \bigcup_{t \in I} \mathcal{F}([t - \tau, t], \mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

et ce n'est pas du tout pratique à utiliser (voir [17]).

Remarque 1. Pour tout $s \in [t - \tau, t]$, on a $s - t \in [-\tau, 0]$. Si on pose $\theta = s - t$ alors $x|_{[t-\tau, t]}(s) = x(t + \theta) := x_t(\theta)$ avec

$$x_t : \theta \in [-\tau, 0] \mapsto x_t(\theta) = x(t + \theta) \in \mathbb{R}^N.$$

L'équation (1.1) s'écrit sous la forme

$$\dot{x} = f(t, x_t), \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

avec f est définie sur $I \times \mathcal{F}([- \tau, 0], \mathbb{R}^N)$ à valeur dans \mathbb{R}^N . La fonction x_t est appelée **fonction de translation**.

Exemple 1. 1. Soit $\dot{x}(t) = ax(t-1) + bx(t) = f(x_t)$, pour $t \geq 0$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} F : \mathcal{F}([- \tau, 0], \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi(t) &\longmapsto f(\varphi) = a\varphi(-1) + b\varphi(0). \end{aligned}$$

2. Soit $\dot{x}(t) = g(t, x(t-\tau_1), \dots, x(t-\tau_m))$ pour $t \geq 0$ avec $g : I \times \mathbb{R}^N \times \dots \times \mathbb{R}^N$. Cette équation s'écrit sous la forme $\dot{x} = f(t, x_t)$ avec

$$\begin{aligned} f : \mathcal{F}([t-\tau, t], \mathbb{R}^N) &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (t, \varphi) &\longmapsto f(\varphi) = g(t, \varphi(-\tau_1), \dots, \varphi(-\tau_m)), \end{aligned}$$

Nous prenons $\tau = \max\{\tau_i, \quad i = 1, \dots, m\}$.

3. Soit l'équation différentielle à retard distribué

$$\dot{x}(t) = \int_{-\tau}^0 k(s)x(t+s)ds.$$

On peut mettre cette équation sous la forme $\dot{x}(t) = f(x_t)$ avec $f(\varphi) = \int_{-\tau}^0 k(s)\varphi(s)ds$.

Définition 1. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $L \geq 0$. Prenons $x \in C([t_0 - \tau, t_0 + L], \mathbb{R}^N)$ et $t \in [t_0, t_0 + L]$. On définit la fonction de translation x_t , élément de \mathcal{C} , par

$$x_t := x(t + \theta), \theta \in [-\tau, 0].$$

Remarque 2. Pour chaque t fixé, x_t est donc la translatée sur $[-\tau, 0]$ de la restriction de x sur l'intervalle $[t - \tau, t]$.

Définition 2. Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction continue. On appelle équation différentielle à retard (EDR) sur U une relation de la forme

$$\dot{x} = f(t, x_t). \tag{1.2}$$

L'équation (1.2) souligne le fait qu'il n'y a que le présent et le passé de x qui interviennent dans la détermination de \dot{x} .

1.1.3 Comparaison entre les EDOs et les EDRs

Historiquement, la première équation en dynamique des populations est celle de Malthus donnée par

$$N'(t) = aN(t) - bN(t) = (a - b)N(t), \tag{1.3}$$

où a le taux de natalité et b le taux de mortalité. La solution de (1.3) est donnée par

$$N(t) = e^{(a-b)t} N(0).$$

Dans la plupart des cas, ce modèle n'est pas réaliste car une population ne peut pas suivre une croissance exponentielle. Si on suppose que la variation de la population n'est pas linéaire $N' = f(N)$ avec $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ (équation scalaire), alors la solution serait forcément monotone (l'explication est juste ci-dessous). Ce cas n'est pas valable dans des phénomènes qui présentent des oscillations.

En effet, si on suppose par contradiction qu'il existe une solution N non monotone. Il existe t_1, t_2 et N_0 tel que (voir Figure ci-dessous)

$$N(t_1) = N(t_2) = N_0 \quad \text{et} \quad N'(t_1)N'(t_2) < 0.$$

Nous obtenons

$$0 > f(N(t_1))f(N(t_2)) = f(N_0)f(N_0) = (f(N_0))^2 \geq 0.$$

Ce n'est pas possible.

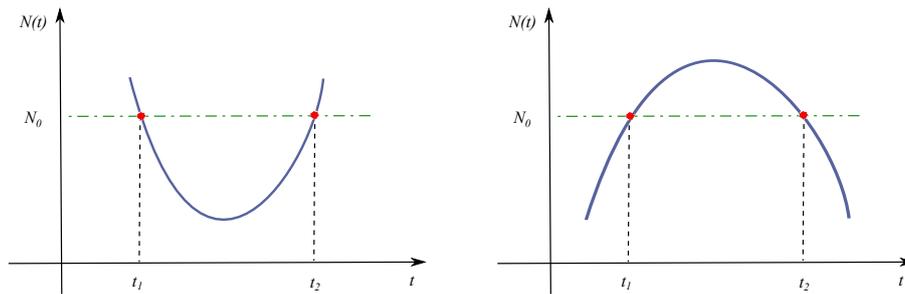


FIGURE 1.1: Le cas de présence d'une fluctuation pour $N(t)$.

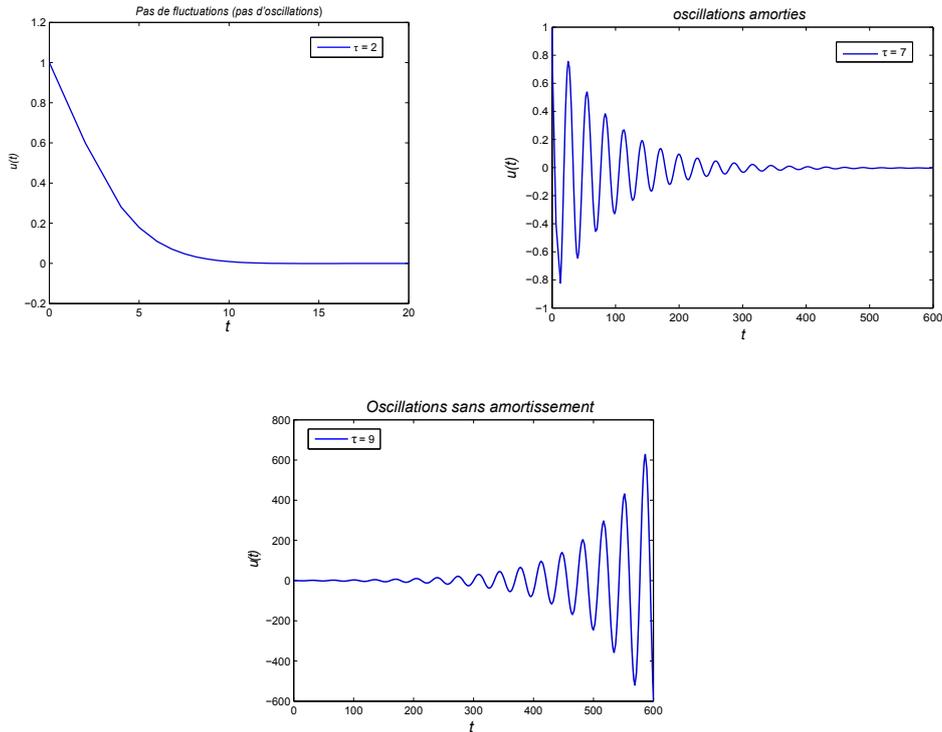
Considérons maintenant l'exemple suivant

$$\dot{u}(t) = -ru(t - \tau). \quad (1.4)$$

Des simulations de l'équation ci-dessus sont tracées dans la figure 1.1.3. De différentes valeurs du retards τ ont été prises. Nous remarquons que le fait de changer les valeurs du retard induit la présences d'oscillations (fluctuation de la solution). Ceci permet de dire que dans les EDRs (y compris les équations scalaires) et contrairement aux EDOs, elles peuvent présenter toutes sortes de comportements.

Remarque 3. Cette simulation a été effectuée sur **Matlab** par le biais de la commande **DDE23**.

Nous allons voir maintenant que la donnée d'une condition initiale ponctuelle, comme les EDOs, ne peut déterminer une solution unique pour les équations différentielles à retards. Pour voir ça, nous considérons l'une des plus simples équations à

FIGURE 1.2: Paramètres : $r = 0.2$, τ est donné dans la légende

retard à savoir

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2}x(t-1), \quad (1.5)$$

associe à une condition initiale ponctuelle en $t = 0$. Soit par exemple

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\pi}{2}x(t-1), & t \geq 0, \\ x(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Les fonctions

$$t \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right) \quad \text{et} \quad t \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right)$$

sont deux solutions de (1.6). Nous constatons que pour résoudre l'équation (1.5) d'une manière unique, la donnée $x_0 = x(t_0)$ n'est pas suffisante. Pour dépasser ce problème d'unicité, nous allons voir dans le paragraphe suivant qu'il nous faut connaître x sur un intervalle $[-1, 0]$ (de longueur du retard).

1.1.4 Problème de Cauchy

Nous posons

$$\mathcal{C}_{t_0} = C([t_0 - \tau, t_0], \mathbb{R}^N).$$

Nous considérons le problème suivant

$$(PC) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), & t \geq t_0, \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{C}_{t_0}, \end{cases}$$

où $x : [t_0 - \tau, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^N$, $f : [t_0, t_0 + \alpha] \times \mathcal{C}_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}^N$ et $\alpha > 0$. Les résultats de ce paragraphe sont connus dans la littérature voir le livre de Hale et Verduyn Lunel [7], le livre de Kuang [10] et le livre de Smith [20].

Définition 3. On appelle solution de (PC) pour la condition initiale φ toute fonction x définie sur un intervalle $[t_0 - \tau, t_0 + \alpha]$ telle que x est continue sur $[t_0 - \tau, t_0 + \alpha]$, dérivable sur $[t_0, t_0 + \alpha]$ et qui vérifie le problème (PC).

Théorème 1. (Existence locale) Soit $f : [t_0, t_0 + \alpha] \times \mathcal{C}_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue, $\alpha > 0$. Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_{t_0}$, il existe $a \in]0, \alpha]$ tel que (PC) admet une solution sur $[t_0 - \tau, t_0 + a]$.

Théorème 2. Supposons que $f : [t_0, +\infty[\times \mathcal{C}_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}^N$ est continue et bornante (c'est-à-dire que l'image de tout borné du domaine de définition est borné). Si x est une solution maximale de (PC), alors elle est définie sur $[t_0 - \tau, t_0 + a[$ avec

$$a = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{t \rightarrow a^-} \sup \|x(t)\| = +\infty. \quad (1.7)$$

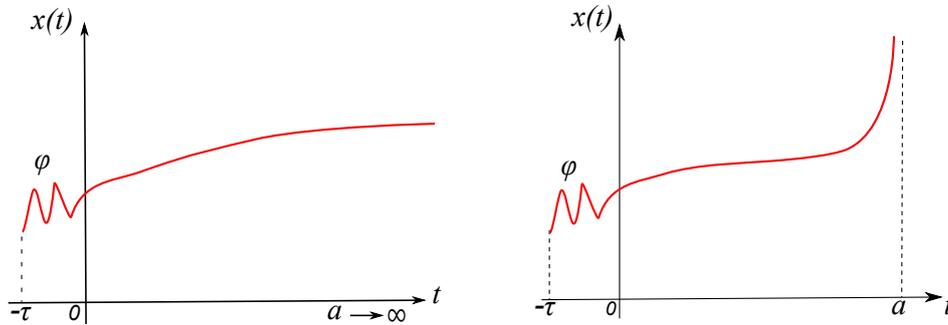


FIGURE 1.3: Un schéma représentatif des deux cas possibles : solution globale et explosion en temps fini (Blow up). Nous prenons $t_0 = 0$ pour cette illustration.

Définition 4. Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_{t_0}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction. On dit que $f = f(t, x)$ est lipschitzienne en x dans les compacts de U si pour tout compact K dans U , il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L \|x - y\|,$$

pour tout (t, x) et (t, y) dans K .

Théorème 3. (Unicité) Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_{t_0}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction continue. on suppose que $f = f(t, x)$ est lipschitzienne en x dans les compacts de U . Si $(t_0, \varphi) \in U$, alors le problème (PC) admet une solution unique.

1.1.5 Méthode des pas

En général, nous abordons cette méthode lors du traitement des équations différentielles à retard. Cette dernière est souvent utile dans quelques contextes tels que l'existence, l'unicité, la positivité et d'autres outils. Soit le problème (PC) pour $t \in [t_0, t_0 + \tau]$. Faisons une translation de temps $t \mapsto t - \tau$. Nous obtenons $t - \tau \in [t_0 - \tau, t_0]$. Dans ce cas (PC) devient une équation différentielle ordinaire avec la condition initiale ponctuelle à l'instant t_0

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, \varphi_t), & \text{pour tout } t \in [t_0, t_0 + \tau], \\ x(t_0) = \varphi(t_0). \end{cases}$$

Si f satisfait les conditions d'existence et d'unicité, alors cette équation différentielle admet une unique solution x_1 sur $[t_0, t_0 + \tau]$ qui coïncide avec la solution de (PC) sur cet intervalle. De ce fait, on peut connaître x sur $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$. De la même manière, on peut déduire une équation différentielle ordinaire en x sur $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ et ainsi de suite On obtient finalement une solution maximale x définie sur $[t_0 - \tau, t_0 + a]$ et donnée sur chaque intervalle de la forme $[t_0 + (k-1)\tau, t_0 + k\tau]$, avec $k \in \mathbb{N}$. Comme $x_0(t) = \varphi(t)$ pour $t \in [t_0 - \tau, t_0]$, alors pour $k \in \mathbb{N}^*$, x_k est la solution du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = f(t, x_{k-1}(t - \tau)), & \text{pour tout } t \in [t_0 + (k-1)\tau, t_0 + k\tau], \\ x_k(t_0 + (k-1)\tau) = x_{k-1}(t_0 + (k-1)\tau). \end{cases}$$

1.2 Méthode des caractéristiques

La méthode des caractéristiques est une technique qui permet de résoudre les équations aux dérivées partielles. Particulièrement, elle est adaptée aux problèmes de transport (voir Chapitre 2 Section 2.3.1). Pour une équation aux dérivées partielles du premier ordre, la méthode des caractéristiques cherche des courbes (appelées « lignes caractéristiques » ou plus simplement « caractéristiques ») le long desquelles cette équation se réduit à une équation différentielle ordinaire. La résolution de cette dernière permet de retrouver la solution du problème original (voir [8, 15]).

Pour exposer cette méthode, nous allons procéder par l'étude de trois exemples d'illustration. Nous considérons, dans un premier temps le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (1.8)$$

avec c une constante et $u : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mapsto u(x, t)$.

Nous allons chercher une ligne caractéristique $s \in \mathbb{R} \mapsto (x(s), t(s))$ le long de laquelle

l'équation (1.8) se réduirait à une équation différentielle du premier ordre. Calculons la dérivée de u le long d'une telle courbe

$$\frac{d}{ds}u(x(s), t(s)) = \frac{dx(s)}{ds} \frac{\partial u}{\partial x}(x(s), t(s)) + \frac{dt(s)}{ds} \frac{\partial u}{\partial t}(x(s), t(s)). \quad (1.9)$$

Nous remarquons que si on pose $\frac{dt}{ds} = 1$ et $\frac{dx}{ds} = c$, alors on obtient

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.10)$$

L'égalité ci-dessus implique que la solution u reste constante le long de la courbe caractéristique. On obtient ainsi trois équations différentielles ordinaires à résoudre

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = c \quad \text{et} \quad \frac{du}{ds} = 0.$$

Ces équations impliquent :

- Si $\frac{dt}{ds} = 1$ et en posant $t(0) = 0$, alors $t(s) = s$ pour tout $s \in \mathbb{R}^+$.
- Si $\frac{dx}{ds} = c$ et $x(0) = x_0$, alors $x(s) = x_0 + cs = x_0 + ct$.
- Si $\frac{du}{ds} = 0$, alors $u(s) = u(0) = u(x_0, 0) = u_0(x_0)$, pour tout $s \in \mathbb{R}^+$.

Dans ce cas, les courbes caractéristiques sont des droites de pente c (voir Figure ci-dessous). De plus, la solution est constante sur ses droites, ce qui nous permet de déduire que la valeur de la solution u en un point quelconque $(x^*, t^*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ peut donc être retrouvée en cherchant la valeur de la condition initiale u_0 au point x_0 avec $x_0 = (x^* - ct^*)$.

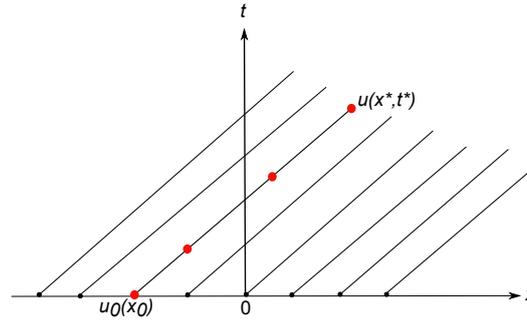
Par conséquent, nous avons, pour tout $(x^*, t^*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$,

$$u(x^*, t^*) = u_0(x^* - ct^*).$$

Nous considérons maintenant le problème précédent en prenant $x \in \mathbb{R}^+$. En général, cette variable représente une quantité positive telles que l'âge, la maturité ou la taille Nous allons la noter, cette fois-ci, « a » comme dans le chapitre 2. Dans ce cas, il faut préciser la valeur de la solution en $t = 0$ et $a = 0$. Le problème (1.8) devient

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} = 0, & t \geq 0, a \geq 0, \\ u(0, a) = u_0(a), \\ u(t, 0) = g(t). \end{cases} \quad (1.11)$$

Nous allons chercher la solution $s \mapsto u(t(s), a(s))$ qui reste constante le long de la

FIGURE 1.4: Représentation des droites caractéristiques dans le plan (x, t) .

caractéristique $(t(s), a(s))$. Nous avons $\frac{du}{ds} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{ds} + \frac{du}{da} \frac{da}{ds} = 0$. Ce qui revient à dire que la fonction $s \mapsto u(t(s), a(s))$ est constante. Nous posons

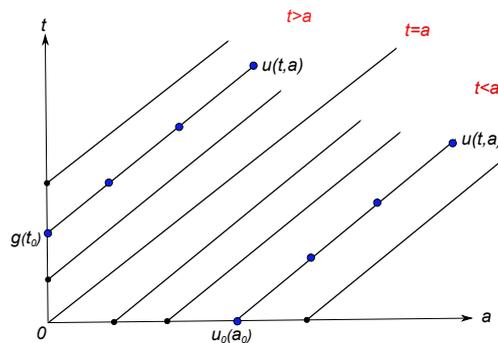
$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{da}{ds} = 1.$$

Ce qui implique que $t(s) = s + t_0$, pour tout $s \in \mathbb{R}^+$ et $a(s) = s + a_0$. Donc $a(s) - t(s) = a_0 - t_0$. Nous distinguons deux cas

- Si $a > t$ alors $t_0 = 0$, $a(s) - t(s) = a_0$ et $u(t(s), a(s)) = u(0, a_0) = u_0(a_0) = u_0(a - t)$.
- Si $a < t$ alors $a_0 = 0$, $t(s) - a(s) = t_0$ et $u(t(s), a(s)) = u(t_0, 0) = g(t_0) = g(t - a)$.

Par conséquent, la solution est donnée par

$$u(t, a) = \begin{cases} u_0(a - t) & \text{si } t \leq a, \\ g(t - a) & \text{si } t > a. \end{cases} \quad (1.12)$$

FIGURE 1.5: Représentation des droites caractéristiques dans le plan (a, t) .

Remarque 4. *Contrairement au problème (1.8), l'équation (1.11) nécessite deux conditions aux bords.*

Dans ce qui suit, on va regarder ce qui se passe pour un autre problème non homogène dont la vitesse du transport n'est pas constante.

Pour $x \in \mathbb{R}$, nous considérons l'équation suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + t^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -xt, \\ u(0, x) = f(x). \end{cases} \quad (1.13)$$

La fonction f est une donnée. Comme précédemment, nous paramétrons la solution sur le chemin $(t(s), x(s))$. Nous avons

$$\frac{du}{ds} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{ds} + \frac{du}{dx} \frac{dx}{ds}.$$

Si on pose

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{ds} = t^2,$$

alors l'équation différentielle à résoudre est

$$\frac{du}{ds} = -xt \quad (1.14)$$

La condition initiale peut s'écrire de façon paramétrique

$$\begin{aligned} t(s=0) &= 0, \\ x(s=0) &= x_0, \\ u(s=0) &= f(x_0), \end{aligned} \quad (1.15)$$

où x_0 est une constante quelconque. Le système d'équations de la courbe caractéristique implique que

$$\begin{aligned} t(s) &= s, \\ x(s) &= \frac{1}{3}s^3 + x_0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

On remplace les deux expressions de t et de x obtenues en (1.16) dans (1.14). Finalement, le problème à résoudre pour u est

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = -xt = -s \left(\frac{1}{3}s^3 + x_0 \right), \\ u(s=0) = f(x_0). \end{cases}$$

L'équation s'intègre facilement et on obtient

$$u(s) = - \left(\frac{1}{12}s^4 + \frac{x_0}{2}s^2 + f(x_0) \right).$$

Pour se ramener aux variables d'origine x et t , il faut inverser le système (1.16)

$$\begin{aligned} s &= t, \\ x_0 &= x - \frac{1}{3}t^3. \end{aligned} \tag{1.17}$$

La solution est donc donnée par

$$u(x, t) = -\frac{1}{12}t^4 - \frac{x_0}{2}t^2 - f\left(x - \frac{1}{3}t^3\right).$$

Remarque 5. *Il n'est pas toujours possible de revenir aux variables d'origine.*

1.3 Propriétés basiques du cône et point fixe pour un opérateur monotone

Dans cette section, nous introduisons les notions de cônes et quelques définitions sur les opérateurs, nous rappelons aussi la notion d'un cône normal. Nous citons à la fin un théorème utile d'existence basé sur la méthode des sous- et sur-solutions.

1.3.1 Définition d'un cône

Soit K un sous-ensemble non vide d'un espace vectoriel normé E .

Définition 5. [5] *On dit que K est un cône dans E , s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

- 1) $x \in K, \lambda \geq 0$ alors $\lambda x \in K$.
- 2) $x \in K, -x \in K$ alors $x = 0$.

Une illustration de cette définition est donnée dans l'exemple suivant.

Exemple 2. *Soit $X = C([a, b], \mathbb{R})$. Le sous ensemble C_+ définit par*

$$C_+ := \{f \in X, \quad f(x) \geq 0\}$$

est un cône dans X .

Définition 6. [2] *Notons que dans un espace vectoriel E muni d'un cône K , on peut définir un ordre partiel noté par \geq (ou \leq) de sorte que pour tous $x, y \in E$,*

$$y \geq x \quad (\text{ou} \quad x \leq y) \iff y - x \in K.$$

Dans ce cas, E est dit ordonné par le cône K .

1.3.2 Définition d'un cône normal

Le paragraphe ci-dessus permet de définir un concept important et utile par la suite.

Définition 7. [2] Un cône K dans E est dit normal s'il existe $\gamma > 0$ tel que pour tous $x, y \in K$

$$0 \leq x \leq y \implies \|x\| \leq \gamma \|y\|.$$

Par la suite, nous donnons un exemple d'un cône normal.

Exemple 3. [25] Considérons l'espace $E := C([0, 1])$ des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

Considérons le sous-ensemble $K := \{f \in E : f(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1]\}$. L'ordre partiel défini par ce cône est

$$f \leq g \iff f(t) \leq g(t) \quad \text{sur } [0, 1]. \quad (1.18)$$

Nous avons K un cône normal. En effet, si $0 \leq f \leq g$ alors

$$\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty.$$

Dans ce cas, la constante γ vaut 1.

Maintenant, nous donnons un exemple d'un cône qui n'est pas normal.

Exemple 4. [25] Soit $E := C^1([0, 1])$ l'espace des fonctions continuellement dérivables sur $[0, 1]$. La norme sur cet espace est donnée par $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Nous définissons le cône suivant (sur $C^1([0, 1])$)

$$K := \{f \in E : f(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1]\}.$$

L'ordre partiel est donné par (1.18). Nous affirmons que ce cône n'est pas normal. Pour mieux voir cela, nous considérons deux suites (f_n) et (g_n) dans E telles que $f_n(t) := \cos(n\pi t) + 1$ et $g_n(t) := 2$ pour tout $t \in [0, 1]$. Alors pour tout entier n ,

$$0 \leq f_n \leq g_n, \|f_n\| = n\pi + 2 \quad \text{et} \quad \|g_n\| = 2.$$

Donc, il n'est pas normal.

1.3.3 Point fixe pour un opérateur monotone

Dans cette partie, nous allons énoncer un théorème de point fixe pour une classe d'opérateur non linéaire sur un espace de Banach ordonné. Le théorème est basé sur la méthode monotone itérative ([5, 23]).

Nous avons besoin de la définition suivante. Soit E un espace de Banach.

Définition 8. Soit $D \subset E$. Un opérateur $A : D \rightarrow E$ est dit complètement continu si :

- 1) A est continu.
- 2) Pour tout sous ensemble B borné de D , $A(B)$ est relativement compact (i.e $\overline{A(B)}$ est compact) dans E .

Le résultat suivant se trouve dans [23] page 41 (voir aussi [5]). Soit E un espace de Banach ordonné par un cône K .

Théorème 4. Soient $u_0, v_0 \in E$, $u_0 < v_0$ et $A : [u_0, v_0] \subset E \rightarrow E$ un opérateur croissant, c'est à dire si $w_1 \leq w_2$ implique que $Aw_1 \leq Aw_2$, et que

$$u_0 \leq Au_0, \quad Av_0 \leq v_0.$$

On suppose que K est normal et A est complètement continu. Alors, A admet un point fixe minimal et un autre maximal dans $[u_0, v_0]$.

Nous finissons cette partie par quelques définitions (voir [2]).

Définition 9. Soient E, F deux espaces de Banach et un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$. L'opérateur A est dit positif ($A > 0$) si

$$AE_+ \subset F_+, \quad (u \geq 0 \text{ implique } Au \geq 0).$$

L'opérateur A est dit fortement croissant si

$$u < v \text{ alors } A(u) < A(v), \quad \text{pour tout } u, v \in E.$$

Pour compléter, nous avons besoin de définir la norme de l'opérateur A

$$\|A\| = \sup\{\|Au\|_F : u \in E, \|u\|_E \leq 1\}.$$

1.4 Fonction de Green

Les fonctions de Green sont un dispositif utilisé pour résoudre des équations différentielles ordinaires et partielles. En particulier, quand leurs résolutions ne peuvent être évidentes par d'autres méthodes. Soit

$$\mathcal{L}f(x) = 0,$$

avec \mathcal{L} est un opérateur différentiel. La solution de cette équation peut être représentée par un tel opérateur agissant sur une fonction. La fonction de Green dans ce cas est définie comme étant l'inverse de l'opérateur différentiel \mathcal{L}

$$G(x, y) \sim \mathcal{L}^{-1}.$$

Dans la version non homogène, c'est à dire, $\mathcal{L}f(x) = g(x)$, la solution est donnée par $f(x) = G(x, y)g(x)$. Donc, nous avons

$$\mathcal{L}f(x) \sim \mathcal{L}G(x, y)g(x) \sim \mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}g(x) = g(x).$$

Pour un opérateur différentiel linéaire arbitraire \mathcal{L} , la fonction de Green vérifie la relation suivante

$$\mathcal{L}G(x, y) = \delta(x - y), \quad (1.19)$$

avec δ est la distribution de Dirac. Soit maintenant \mathcal{L} un opérateur différentiel linéaire. La solution $u(x)$ de l'équation $\mathcal{L}u(x) = f(x)$ est donnée par

$$u(x) = \int G(x, y)f(y)dy,$$

En effet,

$$\mathcal{L}u(x) = \mathcal{L} \int G(x, y)f(y)dy = \int \mathcal{L}G(x, y)f(y)dy = \int \delta(x - y)f(y)dy = f(x).$$

La méthode de construction de la fonction de Green consiste à résoudre plutôt l'équation différentielle linéaire homogène $\mathcal{L}G(x) = 0$ et nous imposons les conditions aux bords et la continuité de la fonction de Green en $x = y$ (voir l'exemple ci-dessous).

Nous sommes intéressés au cas d'un opérateur linéaire du second ordre suivant

$$\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, la fonction de Green correspondante est de la forme

$$G(x, y) = \begin{cases} c_1G_1(x) + c_2G_2(x), & x < y \\ d_1G_1(x) + d_2G_2(x), & x > y \end{cases}$$

avec c_1, c_2, d_1, d_2 sont des constantes et G_1, G_2 sont deux les solutions homogènes (le lecteur peut consulter la référence [3] pour plus de détails).

Exemple 5. Soit l'équation différentielle du second ordre suivante

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)w(x) = f(x), \quad x \in [0, L], \quad (1.20)$$

avec des conditions aux bords de type Dirichlet $w(0) = w(L) = 0$. On veut déterminer

la solution générale de l'équation ci-dessus. L'équation homogène de (1.20) est

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)w(x) = 0. \quad (1.21)$$

La solution de cette équation est donnée par

$$G(x, y) = \begin{cases} c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}, & x < y, \\ d_1 e^{kx} + d_2 e^{-kx}, & x > y. \end{cases} \quad (1.22)$$

Les conditions aux bords $G(0, y) = G(L, y) = 0$ permettent de fixer les coefficients

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \\ d_1 e^{kL} + d_2 e^{-kL} &= 0. \end{aligned}$$

L'expression (1.22) devient

$$G(x, y) = \begin{cases} 2c_1 \sinh(kx), & x < y, \\ 2d_1 e^{kL} \sinh(k(x-L)), & x > y, \end{cases}$$

avec $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$. La continuité de G en $x = y$ implique

$$d_1 e^{kL} \sinh(k(y-L)) - c_1 \sinh(ky) = 0. \quad (1.23)$$

D'autre part, G vérifie l'équation (1.19), ce qui est équivalent à écrire

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)G(x, y) = \delta(x - y), \quad (1.24)$$

On intègre les deux membres de (1.24) entre $y - \varepsilon$ et $y + \varepsilon$. Puisque G est continue en $x = y$, nous avons

$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} k^2 G(x, y) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Alors, on récupère la relation suivante

$$G'(y - \varepsilon, y) - G'(y + \varepsilon, y) = 1.$$

Par passage à la limite ($\varepsilon \rightarrow 0$), on obtient

$$G'(y, y)^- - G'(y, y)^+ = 1.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$2kc_1 \cosh(ky) - 2kd_1 e^{kL} \cosh(k(y-L)) = 1, \quad (1.25)$$

avec $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$. Les deux équations (1.23) et (1.25) forment le système

de Cramer suivant

$$\begin{pmatrix} -2ke^{kL} \cosh(k(y-L)) & 2k \cosh(ky) \\ e^{kL} \sinh(k(y-L)) & -\sinh(ky) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Après un calcul simple, on trouve

$$d_1 = \frac{-\sinh(ky)}{2ke^{kL} \sinh(kL)} \quad \text{et} \quad c_1 = \frac{-\sinh(k(y-L))}{2k \sinh(kL)}.$$

La fonction de green associée à l'équation (1.20) est

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{\sinh(kx) \sinh(k(L-y))}{k \sinh(kL)}, & x < y, \\ \frac{\sinh(ky) \sinh(k(L-x))}{k \sinh(kL)}, & x > y. \end{cases}$$

Dans ce cas, la solution générale w de (1.20) s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_0^L G(x, y) f(y) dy \\ &= \int_0^x \frac{\sinh(ky) \sinh(k(L-x))}{k \sinh(kL)} f(y) dy + \int_x^L \frac{\sinh(kx) \sinh(k(L-y))}{k \sinh(kL)} f(y) dy. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Modélisation mathématique

2.1 Introduction

La modélisation mathématique consiste à utiliser les mathématiques pour décrire, expliquer, prévoir un comportement d'un phénomène dans le monde réel. Elle peut être particulièrement utile pour répondre à des questions ou tester des idées dans des systèmes complexes. Un modèle mathématique est une abstraction d'un système utilisant un langage précis pour décrire le comportement du système. Le modèle est alors analysé, résolu ou simulé sur un ordinateur. La modélisation mathématique a fait l'objet de nombreuses recherches dans plusieurs domaines en particulier la dynamique des populations, l'écologie et l'épidémiologie.

2.2 Modélisation mathématique en biologie et en écologie

Dans un premier temps, nous présentons deux modèles simples pour des populations qui évoluent au cours du temps. Ensuite, nous verrons quelques modèles structurés (en âge, en espace).

2.2.1 Modèle de croissance linéaire (Malthus)

On considère une population dont l'effectif au cours du temps est représenté par une fonction réelle

$$x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

Ce modèle stipule qu'il n'y a pas de migration et que les naissances et les décès sont proportionnels à la valeur de la population à l'instant considéré, ce qui conduit au modèle linéaire suivant

$$x(t + \Delta t) - x(t) = [\text{taux de naissances} - \text{taux de décès}] \cdot x \cdot \Delta t.$$

Ce qui est équivalent à

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = [\text{taux de naissances} - \text{taux de décès}]x.$$

Faisons tendre Δt vers 0,

$$\frac{dx}{dt} = [\text{taux de naissances} - \text{taux de décès}]x$$

On peut écrire la loi d'évolution malthusienne (voir [13])

$$\frac{dx}{dt} = nx - mx := \alpha x, \quad (2.1)$$

avec n est le taux de natalité, m est le taux de mortalité et le paramètre $\alpha = n - m$ est le taux de croissance de la population.

La solution de (2.1) est donnée par : $x(t) = x_0 \exp(\alpha t)$ où x_0 est la densité initiale de la population. Nous distinguons trois cas :

- Si $\alpha > 0$, il y a une croissance exponentielle de la population.
- Si $\alpha < 0$, il y a une décroissance exponentielle de la population qui tend vers l'extinction.
- Si $\alpha = 0$, la population reste constante et égale à sa valeur initiale.

2.2.2 Modèle de croissance logistique

Une des limites du modèle précédent, celui de Malthus, vient du fait que cela suppose des ressources infinies puisque la population augmente d'une manière exponentielle vers l'infinie. Pour le rendre un peu plus réaliste, on peut supposer que les ressources du milieu sont limitées et donc une compétition entre les individus apparaisse. Lors du modèle de Malthus, il est légitime de penser que le taux de mortalité augmente et la croissance de la population diminue progressivement jusqu'à devenir nulle. Si la population est grande, le taux de mortalité augmente beaucoup du fait de la compétition et donc dépend de l'effectif de la population. L'inverse se passe pour le taux d'accroissement. Avec cette approche, nous avons le taux d'accroissement est donné par

$$\tilde{\alpha}(x) = \alpha - cx,$$

où $\alpha > 0$ taux d'accroissement intrinsèque et c représente la compétition due à la limite des ressources du milieu. Le modèle logistique est représenté par l'équation (voir [13])

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad (2.2)$$

avec $K = \alpha/c$ est appelé la capacité d'accueil du milieu. Après intégration de l'équation (2.2) assujettie à la condition initiale $x(0) = x_0$, on obtient

$$x(t) = \frac{Kx_0e^{\alpha t}}{K + x_0(e^{\alpha t} - 1)}, \quad \text{pour tout } t > 0. \quad (2.3)$$

L'expression (2.3) est équivalente à

$$x(t) = \frac{x_0e^{\alpha t}}{1 + (x_0/K)(e^{\alpha t} - 1)}, \quad \text{pour tout } t > 0. \quad (2.4)$$

Nous avons les remarques suivantes, pour $x_0 < K$,

- Si t est proche de 0, alors la solution se comporte comme $x_0e^{\alpha t}$.
- Si t est assez large et tend vers $+\infty$, pour n'importe quelle valeur de $x_0 > 0$, la solution $x(t)$ s'approche de la constante K .

2.2.3 Modèles de Malthus et de croissance logistique à retard

En 1973, Cooke et Yorke établirent le modèle suivant

$$N'(t) = aN(t - \tau) - bN(t), \quad (2.5)$$

avec $N(t)$ est nombre d'individus à l'instant t , a est le taux de natalité et b est le taux de mortalité. C'est une équation différentielle à retard, le retard est $\tau > 0$. La variation de la population dépend des personnes nées il y a τ ans et des personnes qui meurent aujourd'hui. Le retard τ est en fait l'âge de l'individu qui devient adulte et qui est capable de se reproduire ($N'(t) = aN(t - 23) - bN(t)$).

Nous supposons maintenant que la réaction biologique, représentée par $(1 - x(t)/K)$ dans l'équation (2.2) n'est pas instantanée, mais répond seulement après un certain retard $\tau > 0$. Alors, au lieu de l'équation différentielle (2.2), nous avons l'équation différentielle à retard suivante (voir [10])

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(t) \left(1 - \frac{x(t - \tau)}{K} \right), \quad (2.6)$$

En faisant le changement de variable $y(s) = [x(\tau s)/K] - 1$ et en posant $c = \alpha\tau$, alors l'équation (2.6) prend la forme (on garde la même notation pour t)

$$\frac{dy}{dt} = -cy(t - 1)[1 + y(t)] \quad (2.7)$$

Afin de résoudre l'équation (2.7), nous devons spécifier une fonction initiale θ définie sur $[-1, 0]$. Nous cherchons une fonction y telle que

$$y(t) = \theta(t), \quad \text{pour tout } t \in [-1, 0], \quad (2.8)$$

et qui vérifie l'équation (2.7), pour tout $t \geq 0$. Si on suppose que θ est continue sur $[-1, 0]$, alors il est facile de montrer, par la méthode des pas, l'existence et l'unicité d'une solution de (2.7) vérifiant la condition initiale (2.8). En effet, sur $[0, 1]$, l'équation (2.7) devient une équation différentielle ordinaire linéaire de premier ordre

$$\frac{dy}{dt} + c\theta(t-1)y(t) = -c\theta(t-1), \quad (2.9)$$

avec la condition initiale $y(0) = \theta(0)$. La solution unique sur l'intervalle $[0, 1]$ est donnée par

$$y(t) = [\theta(0) + 1]e^{-\int_0^t c\theta(s-1)ds} - 1. \quad (2.10)$$

Ayant déterminé la solution exacte sur l'intervalle $[0, 1]$, on peut maintenant refaire la même chose sur l'intervalle $[1, 2]$ et pour tout intervalle $[k, k+1]$ avec $k = 2, 3, 4, \dots$ pour déduire la solution.

2.3 Structuration continue en espace

2.3.1 Modèles de transport et de diffusion

L'advection représente le mouvement d'une particule qui résulte du transport. Celui-ci est donc caractérisé par une vitesse v . Considérons un tube dans lequel coule de l'eau à la vitesse $v > 0$ et qui contient des traces de polluant. D'après ce qui précède la distribution de polluant que l'on a en $t = 0$ se retrouve inchangée à l'instant $t_1 > 0$, à une translation de Δx près.

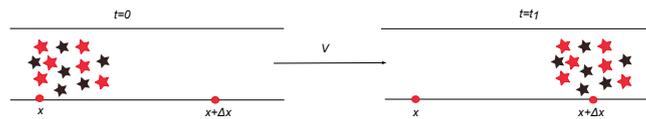


FIGURE 2.1: Ce dessin illustre l'effet du transport

Le phénomène de diffusion décrit la prolifération aléatoire des différentes particules, elle tend à uniformiser la distribution non homogène dans l'espace, donc s'effectuant dans le sens des concentrations décroissantes. Elle est caractérisée par un coefficient de diffusion D .

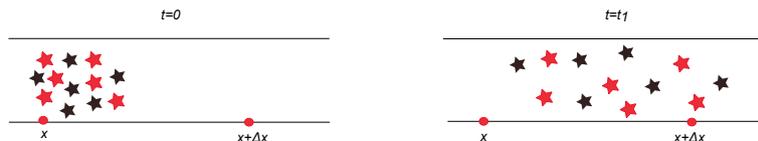


FIGURE 2.2: Ce dessin illustre la diffusion.

Nous allons procéder à la construction de quelques modèles qui mettent en évi-

dence des termes exprimant la diffusion et le transport dans des équations. Nous désignons par $p(t, x)$ la probabilité qu'une particule relâchée en temps initial, disant $t_0 = 0$, qu'elle atteigne la position x à l'instant t . Nous supposons qu'à l'instant $t - \Delta t$, la particule se trouve à la position $x + \Delta x$ ou $x - \Delta x$. Soit α est la probabilité pour qu'une particule se déplace à droite en unité de temps Δt et β est la probabilité pour qu'une particule se déplace à gauche en unité de temps avec $\alpha + \beta = 1$.

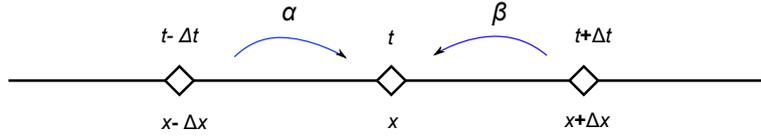


FIGURE 2.3: Ce dessin décrit la marche aléatoire des particules.

Donc, nous avons la relation suivante

$$p(t, x) = \alpha p(t - \Delta t, x - \Delta x) + \beta p(t + \Delta t, x + \Delta x).$$

Si on fait un développement de Taylor pour $p(t - \Delta t, x - \Delta X)$ et $p(t + \Delta t, x + \Delta X)$, on obtient

$$\begin{aligned} p(t, x) &= \alpha \left[p(t, x) - \Delta t \frac{\partial p}{\partial t} - \Delta x \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \dots \right] \\ &+ \beta \left[p(t, x) - \Delta t \frac{\partial p}{\partial t} + \Delta x \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Comme $\alpha + \beta = 1$, nous avons

$$(\beta - \alpha) \Delta x \frac{\partial p}{\partial x} - \Delta t \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \dots = 0.$$

Ce qui implique

$$\Delta t \frac{\partial p}{\partial t} = (\beta - \alpha) \Delta x \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \dots$$

En divisant par Δt , on obtient

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (\beta - \alpha) \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2 \Delta t} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \dots \quad (2.11)$$

Nous passons à la limite ($\Delta x \mapsto 0$) et l'égalité (2.11) devient

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (\beta - \alpha) \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2 \Delta t} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (2.12)$$

1/ Dans le cas où $\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} = D \neq 0$ et si $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ alors (2.12) devient

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (2.13)$$

L'équation (2.13) est une équation aux dérivées partielles parabolique décrivant la diffusion aléatoire. On peut considérer par exemple le cas de la diffusion de la chaleur et l'équation (2.13) dans ce cas est appelée équation de la chaleur.

2/ Dans le cas où $\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta x}{\Delta t} = C \neq 0$ et si $\beta \neq \alpha$ alors $D = 0$ et l'équation (2.12) devient

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\alpha - \beta)C \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2.14)$$

Il y a une possibilité où la particule ne suive qu'une direction soit vers la droite ou soit vers la gauche ($\alpha = 0$ et $\beta = 1$ ou bien le contraire) donc (2.14) devient

$$\frac{\partial p}{\partial t} \pm C \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2.15)$$

L'équation est donc de type hyperbolique et elle décrit une équation de transport de vitesse C car on suit qu'une direction.

3/ Dans le cas où $\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} = D \neq 0$ et $\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)} (\alpha - \beta) \frac{\Delta x}{\Delta t} = v$, on obtient

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (2.16)$$

L'équation ci-dessus est appelée une équation d'advection-diffusion.

2.3.2 Modèle de réaction-diffusion

Parmi les étapes dans le processus de modélisation est de comprendre l'évolution par rapport au temps. En supposant que le temps est continu, on obtient des équations différentielles ordinaires sous la forme

$$\frac{dp}{dt} = f(p), \quad t \geq 0,$$

où f représente la fonction de croissance, englobant les termes de naissance, de mort et de migration... Il existe un autre effet, parfois, important à prendre en considération dans la modélisation qui est la mobilité et la structuration en espace. Comme on l'a déjà remarqué, lors d'un mouvement aléatoire, on utilise un terme de diffusion comme dans l'équation de la chaleur suivante

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t, x) = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t, x), \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega,$$

avec x est la variable de l'espace et Ω un domaine unidimensionnel. En combinant ces deux processus de réaction f et de diffusion, on obtient une équation de réaction-diffusion

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + f(p), \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega.$$

On peut généraliser cette équation même dans un domaine de dimension élevée $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \Delta p + f(p), \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

Le cas où le terme de croissance suit la lois logistique, nous ramène à l'équation qui porte le nom des mathématiciens Fisher, Kolmogorov, Petrovskii et Piskunov dite aussi l'équation de Fisher-KPP ([4, 9]),

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + rp \left(1 - \frac{p}{K} \right), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.17)$$

En général, nous complétons ces équations par des conditions aux bords, par exemple, de type Dirichlet (sans perte de généralité, nous considérons $x \in [0, L]$)

$$p(t, 0) = p(t, L) = 0,$$

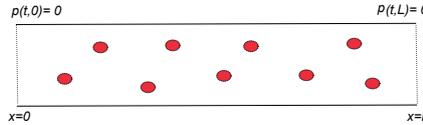


FIGURE 2.4: Le cas de Dirichlet : l'absence des particules aux bords.

ou de type Neumann

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t, 0) = \frac{\partial p}{\partial t}(t, L) = 0.$$

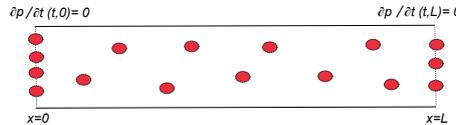


FIGURE 2.5: Le cas de Neumann : immobilité des particules aux bords.

2.4 Modélisation d'un système dynamique pour une population structurée en age

Une population est un ensemble d'individus. Elle peut être décomposée en sous catégories ou sous populations en fonction de leurs âges ou d'une caractéristique quel-

conque (taille, maturité ..). Nous allons procéder par une autre façon de modélisation des systèmes structurés.

Soient $u(t, a)$ la densité d'individus d'âge a à l'instant t et $\mu(a)$ représente le taux de mortalité pour les individus d'âge a . Pour h assez petit (décalage de temps), alors $u(t + h, a + h)$ s'exprime par

$$u(t + h, a + h) = u(t, a) - \mu(a)u(t, a)h.$$

Donc,

$$u(t + h, a + h) - u(t, a) = -\mu(a)u(t, a)h. \quad (2.18)$$

L'égalité (2.18) est équivalente à écrire

$$\frac{u(t + h, a + h) - u(t + h, a)}{h} + \frac{u(t + h, a) - u(t, a)}{h} = -\mu(a)u(t, a).$$

Faisons tendre h vers 0

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(t + h, a + h) - u(t + h, a)}{h} + \frac{u(t + h, a) - u(t, a)}{h} \right] = -\mu(a)u(t, a).$$

L'équation ci-dessus implique

$$\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\mu(a)u(t, a). \quad (2.19)$$

Le premier membre est la variation instantanée de la population d'âge a à l'instant t . Cette équation décrit la dynamique de la population considérée qui est une équation de transport (voir [8]).

En réalité une population ne peut que disparaître par mortalité. Nous pouvons aussi considérer l'effet des naissances dans cette population. Dans ce cas nous obtenons le modèle de Von Foerster-McKendrick (voir ci-dessous).

2.4.1 Modèle de Von Foerster-McKendrick

Le modèle de Von Foerster-McKendrick est un modèle linéaire de base qui prend en considération la variable d'âge a . Soit $p(t, a)$ la densité d'individus d'âge a à l'instant t . Nous supposons que $0 < a_1 < a_2$. La quantité

$$\int_{a_1}^{a_2} p(t, a) da$$

représente la densité d'individus qui ont un âge compris entre a_1 et a_2 . Nous avons donc

$$P(t) = \int_0^{+\infty} p(t, a) da$$

est la population totale à l'instant t . Nous appellerons la quantité $p(t, 0)$ le taux de naissances (les individus d'âge $a = 0$). Cette quantité est donnée par

$$p(t, 0) = \int_0^{+\infty} \beta(a)p(t, a)da,$$

où $\beta(a)$ le nombre moyen de naissances provenant d'un individu d'âge a . La distribution initiale en age est supposée donnée par

$$p(0, a) = p_0(a),$$

alors le modèle de Von Foëster-McKendrick est constitué par le système suivant (voir [15])

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial a} = -\mu(a)p(t, a), & a > 0, \quad t > 0, \\ p(t, 0) = \int_0^{+\infty} \beta(a)p(t, a)da, & t > 0, \\ p(0, a) = p_0(a), & a > 0. \end{cases}$$

La deuxième équation donnant la condition en $a = 0$ est appelée équation de renouvellement.

Chapitre 3

Description du modèle utilisé : modèle Juvéniles-Adultes

3.1 Motivation biologique et construction du modèle

Nous allons maintenant présenter le système structuré utilisé dans ce mémoire. On note respectivement par $u_m(t, x, a)$ et $u_i(t, x, a)$ les densités des individus adultes et juvéniles à l'instant $t \geq 0$, d'âge a et de position $x \in \Omega = [l_1, l_2]$. L'âge représente ici le temps passé par un individu dans une des deux phases, adultes ou juvénile. Il varie entre 0 et τ dans la phase des juvéniles et entre τ et $+\infty$ dans la phase des adultes. Nous notons respectivement par D et D_i les taux de diffusion des individus adultes et des juvéniles. Soient respectivement d et d_i les taux de mortalité dans les deux phases.

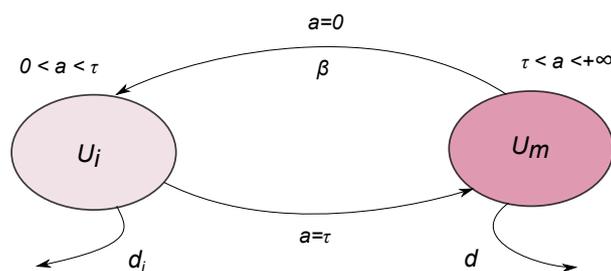


FIGURE 3.1: Un schéma représentatif du modèle.

A la fin de la phase des juvéniles, les individus d'âge $a = \tau$ entrent directement dans le compartiment des adultes et nous avons

$$u_m(t, x, \tau) = u_i(t, x, \tau). \quad (3.1)$$

Soit la population totale des individus matures donnée par

$$U_m(t, x) = \int_{\tau}^{+\infty} u_m(t, x, a) da. \quad (3.2)$$

Des Juvéniles peuvent être reproduits par des adultes par un taux de naissance β . On suppose que ce taux $\beta := \beta(U_m(t, x))$ dépend de la population totale des individus adultes. Donc, les nouveaux nés sont exprimés par l'expression suivante

$$u_i(t, x, 0) = \int_{\tau}^{+\infty} u_m(t, x, a) \beta(U_m(t, x)) da = \beta(U_m(t, x)) U_m(t, x). \quad (3.3)$$

L'évolution de la population au cours du temps est décrite par le système d'équations aux dérivées partielles structurées en âge et en espace, pour $t \geq 0$, $x \in [l_1, l_2]$, suivant (voir [21])

$$\begin{cases} \frac{\partial u_m}{\partial t} + \frac{\partial u_m}{\partial a} = D \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}(t, x, a) - d u_m(t, x, a), & \tau < a < +\infty, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial a} = D_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}(t, x, a) - d_i u_i(t, x, a), & 0 < a < \tau. \end{cases} \quad (3.4)$$

Ce système est complété par des conditions aux bords homogènes de Dirichlet et des conditions initiales

$$\begin{cases} u_m(t, x, a) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad \tau < a < +\infty, \\ u_i(t, x, a) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad 0 < a < \tau, \\ u_m(0, x, a) = u_{m0}(x, a), & x \in \Omega, \quad \tau < a < +\infty \\ u_i(0, x, a) = u_{i0}(x, a), & x \in \Omega, \quad 0 < a < \tau. \end{cases} \quad (3.5)$$

Une condition naturelle est imposée. Elle est donnée par

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} u_m(t, x, a) = 0.$$

Dans ce qui suit et sans perte de généralité, nous faisons le changement de variable suivant

$$x \longmapsto \frac{\pi(x - l_1)}{l_2 - l_1},$$

On se ramène au domaine $\Omega = [0, \pi]$, avec les coefficients de diffusion qui deviennent $D(\pi/(l_2 - l_1))^2$ et $D_i(\pi/(l_2 - l_1))^2$ (nous les notons encore D et D_i). Les conditions aux bords deviennent

$$\begin{aligned} u_m(t, 0, a) = 0, \quad u_m(t, \pi, a) = 0, \quad t > 0, \quad \tau < a < +\infty, \\ u_i(t, 0, a) = 0, \quad u_i(t, \pi, a) = 0, \quad t > 0, \quad 0 < a < \tau. \end{aligned}$$

3.2 Réduction du système par la méthode des caractéristiques

En intégrant la première équation du système 3.4 par rapport à la variable d'âge a , on obtient

$$\frac{\partial U_m}{\partial t}(t, x) + u_m(t, x, +\infty) - u_m(t, x, \tau) = D \frac{\partial^2 U_m}{\partial x^2}(t, x) - dU_m(t, x). \quad (3.6)$$

En utilisant la condition (3.1) et le fait que $\lim_{a \rightarrow +\infty} u_m(t, x, a) = 0$, l'équation (3.6) devient

$$\frac{\partial U_m}{\partial t}(t, x) - u_i(t, x, \tau) = D \frac{\partial^2 U_m}{\partial x^2}(t, x) - dU_m(t, x). \quad (3.7)$$

En appliquant la méthode des caractéristiques (voir [1, 18, 21]) pour la deuxième équation du système 3.4, on peut déterminer une formulation de $u_i(t, x, \tau)$. Posons $a = t + c$, avec $c \in \mathbb{R}$, et $\tilde{u}(t, x) = u_i(t, x, t + c)$ pour $t > t_0 := \max\{0, -c\}$. Alors, nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t, x) = D_i \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(t, x) - d_i \tilde{u}(t, x), \\ \tilde{u}(t, 0) = \tilde{u}(t, \pi) = 0, \\ \tilde{u}(t_0, x) = u_i(t_0, x, t_0 + c), \end{cases} \quad \begin{array}{l} t \geq t_0, \\ x \in \Omega. \end{array} \quad (3.8)$$

Nous pouvons résoudre ce système en utilisant la méthode de séparation des variables (on a une équation de la chaleur avec perturbation linéaire). On pose

$$\tilde{u}(t, x) = \tilde{T}(t) \tilde{X}(x).$$

Nous remplaçons cette expression dans (3.8). On obtient

$$\tilde{X} \tilde{T}' = D_i \tilde{X}'' \tilde{T} - d_i \tilde{X} \tilde{T}. \quad (3.9)$$

Nous divisons les deux membres de l'égalité (3.9) par le terme $\tilde{X} \tilde{T}$. Ce qui implique

$$\frac{\tilde{T}'(t)}{\tilde{T}(t)} = D_i \frac{\tilde{X}''(x)}{\tilde{X}(x)} - d_i = \lambda,$$

avec λ est une constante réelle. Une égalité implique que

$$\tilde{T}(t) = C_0 e^{\lambda(t-t_0)}.$$

L'autre égalité est réécrit sous la forme suivante

$$\tilde{X}''(x) - \left(\frac{d_i + \lambda}{D_i} \right) \tilde{X}(x) = 0.$$

On peut résoudre cette dernière en utilisant les deux conditions aux bords de Dirichlet. Nous affirmons que $(d_i + \lambda)/D_i$ ne peut être qu'une constante strictement négative. Soit $\nu^2 := -(d_i + \lambda)/D_i$. Dans ce cas, on sait que \tilde{X} s'exprime comme suit

$$\tilde{X}(x) = C_1 \cos \nu x + C_2 \sin \nu x.$$

Par un simple calcul et en utilisant les conditions aux bords, nous déduisons que $\nu = n$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$. Nous obtenons les deux expressions de \tilde{T} et de \tilde{X} suivantes

$$\begin{cases} \tilde{X}(x) = C_2 \sin nx, \\ \tilde{T}(t) = C_0 e^{-(D_i k^2 + d_i)(t-t_0)}. \end{cases}$$

Par conséquent, la solution est donnée par

$$\tilde{u}(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin nx e^{-(D_i n^2 + d_i)(t-t_0)}. \quad (3.10)$$

La deuxième condition de (3.8) implique que

$$\tilde{u}(t_0, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin nx = u_i(t_0, x, t_0 + c).$$

En utilisant le développement en série de Fourier, les coefficients C_n sont donnés par

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_i(t_0, y, t_0 + c) \sin ny \, dy.$$

On remplace dans (3.10) et on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_i(t_0, y, t_0 + c) \sin ny \, dy \right] \sin nx e^{-(D_i n^2 + d_i)(t-t_0)}, \\ &= \int_0^\pi u_i(t_0, y, t_0 + c) \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin ny \sin nx e^{-(D_i n^2 + d_i)(t-t_0)} \right] dy. \end{aligned}$$

Par la méthode des caractéristiques, nous distinguons deux cas $t > a$ et $t \leq a$. Puisque nous nous intéressons au comportement asymptotique quand le temps est très grand, nous allons nous focaliser que sur le cas où $t > a$. En d'autre terme, on a $c = a - t$ est négative. Dans ce cas, nous avons $0 = a_0 = t_0 + c = t_0 + a - t$. Alors, on obtient $a = t - t_0$. Ce qui implique que

$$u_i(t_0, y, t_0 + c) = u_i(t - a, y, 0).$$

Donc, la solution cherchée est donnée par

$$u_i(t, x, a) = \tilde{u}(t, x) = \int_0^\pi u_i(t - a, y, 0) \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin ny \sin nx e^{-(D_i k^2 + d_i)a} \right] dy.$$

En particulier, pour $a = \tau$, on obtient

$$u_i(t, x, \tau) = \int_0^\pi u_i(t - \tau, y, 0) \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin ny \sin nx e^{-(D_i n^2 + d_i)\tau} \right] dy. \quad (3.11)$$

De (3.3), nous avons

$$u_i(t - \tau, y, 0) = \beta(U_m(t - \tau, y))U_m(t - \tau, y).$$

On remplace l'expression (3.11) dans (3.7), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_m}{\partial t}(t, x) &= D \frac{\partial^2 U_m}{\partial x^2}(t, x) - dU_m(t, x) \\ &+ \int_0^\pi \beta(U_m(t - \tau, y))U_m(t - \tau, y) \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \sin ny \sin nx e^{-(D_i n^2 + d_i)\tau} dy. \end{aligned}$$

L'équation ci-dessus est donnée pour $t > \tau$. On fait une translation temporelle de $t \mapsto t - \tau$ de telle sorte qu'elle soit définie sur le domaine $t > 0$. La condition initiale donnée pour $[-\tau, 0] \times \mathbb{R}$ s'obtient en traitant le deuxième cas où $a \geq t$. Par conséquent, nous nous concentrons sur l'étude de l'équation suivante

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial U_m}{\partial t}(t, x) = D \frac{\partial^2 U_m}{\partial x^2}(t, x) - dU_m(t, x) & t > 0, x \in]0, \pi[, \\ \quad \quad \quad + \int_0^\pi f_\alpha(x, y)b(U_m(t - \tau, y))dy, & \\ U_m(t, 0) = U_m(t, \pi) = 0, & t > 0, \\ U_m(\theta, x) = U_{m0}(\theta, x), & \theta \in [-\tau, 0], x \in [0, \pi]. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Les deux fonctions f_α et $b(U_m)$ sont données par

$$f_\alpha(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 \alpha} \sin ny \sin nx, \quad \text{avec} \quad b(u) := e^{-d_i \tau} \beta(u)u,$$

avec $\alpha := D_i \tau$. L'existence et l'unicité des solutions de (3.12) sont assurées en utilisant les résultats de la théorie des équations différentielles fonctionnelles abstraites. Nous allons traiter la question de la positivité des solutions. Nous avons besoin de quelques propriétés du noyau f_α citées dans le lemme suivant (voir [6]).

Lemme 1. *Pour $\alpha > 0$, on a*

- (i) $f_\alpha(0, y) = f_\alpha(\pi, y) = f_\alpha(x, 0) = f_\alpha(x, \pi) = 0$,
- (ii) $0 < f_\alpha(x, y) < \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{e^\alpha - 1} \right)$, pour $x, y \in]0, \pi[$.

Démonstration. La propriété (i) est facile à vérifier. Pour (ii) Nous avons l'estimation,

pour tout $x, y \in [0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, suivante

$$\left| \sin(ny) \sin(nx) e^{-n^2 \alpha} \right| \leq e^{-n^2 \alpha} \leq e^{-n \alpha}.$$

Autrement dit, cette estimation implique que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(ny) \sin(nx) e^{-n^2 \alpha}$$

est absolument convergente et que

$$|f_\alpha(x, y)| \leq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \alpha} \leq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n \alpha} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{e^\alpha - 1} \right),$$

Il reste à prouver que f_α est strictement positive. Pour cela, on définit, pour tout $\alpha > 0$ et $x \in [0, \pi]$, la fonction suivante

$$\psi(\alpha, x) = \int_0^\pi f_\alpha(x, y) \phi(y) dy,$$

avec $\phi \geq 0$ une fonction continue avec $\phi(0) = 0$. Alors, on peut vérifier que ψ satisfait le problème suivant

$$\begin{cases} \psi_\alpha = \psi_{xx}, \\ \psi(\alpha, 0) = \psi(\alpha, \pi) = 0, \\ \psi(0, x) = \phi(x) \geq 0. \end{cases}$$

Il est connu que la solution d'un tel système est positive. Donc, on a bien $\psi \geq 0$. Soit maintenant y fixée dans $[0, \pi]$. Nous considérons la fonction suivante

$$v(\alpha, x) = f_\alpha(x, y) \geq 0, \quad \text{pour } \alpha > 0 \text{ et } x \in [0, y].$$

Par un calcul direct, nous avons $v_\alpha = v_{xx}$. De plus,

$$v(\alpha, y) = f_\alpha(y, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin^2(ny) e^{-n^2 \alpha} > 0.$$

Par conséquent, en utilisant le principe du maximum nous avons $v(\alpha, x) > 0$ pour $\alpha > 0$ et $x \in [0, y]$. Puisque $y \in]0, \pi[$ est arbitraire, nous concluons la positivité stricte de f_α . \square

Nous prouvons la positivité par la méthode des pas.

Théorème 5. Soit $U_{m0}(\theta, x) \geq 0$, pour $(\theta, x) \in [-\tau, 0] \times [0, \pi]$, la condition initiale positive correspond à la solution $U_m(t, x)$ du problème (3.12), alors U_m est positive.

Démonstration. Soit $[0, b)$ l'intervalle maximal d'existence de U_m . Par hypothèse, nous avons $U_{m0}(\theta, x) \geq 0$ pour $(\theta, x) \in [-\tau, 0] \times [0, \pi]$. Nous utilisons une méthode itérative

sur $[0, b) = [0, \tau] \cup [\tau, 2\tau] \dots \cup [n\tau, b)$, avec $n = \lfloor b/\tau \rfloor$. Si $t \in [0, \tau]$, i.e $t - \tau \in [-\tau, 0]$ donc $U_m(t - \tau, x) = U_{m0}(t - \tau, x) \geq 0$. L'équation de (3.12) devient

$$\frac{\partial U_m(t, x)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 U_m(t, x)}{\partial x^2} + dU_m(t, x) = \int_0^\pi f_\alpha(x, y) b(U_{m0}(t - \tau, y)) dy \geq 0,$$

pour $(t, x) \in [0, \tau] \times [0, \pi]$. Nous avons alors la relation suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial U_m(t, x)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 U_m(t, x)}{\partial x^2} + dU_m(t, x) \geq 0, & (t, x) \in [0, \tau] \times [0, \pi], \\ U_m(0, x) = u_{m0}(0, x) \geq 0, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Le principe du maximum implique que $U_m(t, x) \geq 0$ pour $(t, x) \in [0, \tau] \times [0, \pi]$ (voir [16]). Nous pouvons répéter le même raisonnement sur chaque intervalle $[k\tau, (k+1)\tau]$ pour $k = 1, 2, \dots$. Par conséquent,

$$U_m(t, x) \geq 0, \quad (t, x) \in [0, b) \times [0, \pi].$$

□

Chapitre 4

Existence des solutions stationnaires

Les états stationnaires stables et positifs, désormais équilibres, jouent un rôle important dans l'étude de la dynamique d'une équation de réaction-diffusion. La convergence globale des solutions à un état stable et positif nécessite d'abord l'étude de l'existence et l'unicité de ses solutions. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à cette question pour l'équation (3.12). Nous rappelons que dans le cas du problème (3.12), les équilibres sont les solutions stationnaires en temps et uniformes ou non-uniformes en espace (notées $w(x)$). Des telles solutions satisfont à

$$\begin{cases} -\frac{d^2w(x)}{dx^2} + k^2w(x) = \int_0^\pi f_\alpha(x, y)b_\tau(w(y))dy, & x \in [0, \pi] \\ w(0) = w(\pi) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

avec $k^2 = d/D$. La fonction b_τ devient $s \mapsto b_\tau(s)/D$ (nous allons la noter encore une fois par b_τ). Puisque $b_\tau(U_m)$ représente une fonction de naissance, comme dans la plupart des modèles de dynamique de population, nous supposons, tout au long de ce document, que b_τ satisfait les hypothèses suivantes (voir [6])

(H1) $b_\tau(w) = wg_\tau(w)$, $g_\tau(w) > 0$ et $g'_\tau(w) < 0$, pour tout $w \geq 0$.

(H2) Les deux fonctions $b_\tau(w)$ et $b'_\tau(w)$ sont bornées pour tout $w \geq 0$.

Soient $X = C^2(0, \pi) \cap C[0, \pi]$ et $Y = C[0, \pi]$. Les deux espaces de Banach X et Y sont ordonnés, c'est-à-dire, pour tout $w_1, w_2 \in X$ (ou Y), $w_1 \leq w_2$ si et seulement si $w_1(x) \leq w_2(x)$ pour tout $x \in [0, \pi]$. On définit l'opérateur $\mathcal{L} : X \rightarrow Y$ par

$$\mathcal{L}w := -\frac{d^2w}{dx^2} + k^2w. \quad (4.2)$$

Soit $G(x, y)$ la fonction de Green correspondant à l'opérateur \mathcal{L} avec les conditions aux bords $w(0) = w(\pi) = 0$. Cette fonction est donnée explicitement par (pour

plus de détail sur l'obtention de cette fonction, le lecteur peut consulter la section 1.4)

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{\sinh(kx) \sinh k(\pi - y)}{k \sinh(k\pi)}, & 0 \leq x \leq y \leq \pi, \\ \frac{\sinh k(\pi - x) \sinh(ky)}{k \sinh(k\pi)}, & 0 \leq y \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

avec $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$.

4.1 Existence des solutions positives - Cas monotone.

Dans cette section, nous allons traiter la question d'existence des solutions du problème (4.1) dans le cas où le terme non local est monotone. L'approche utilisée est la technique d'itération monotone basée sur l'existence d'une sur- et sous-solution. Considérons l'opérateur

$$H(w(x)) := -\frac{d^2w(x)}{dx^2} + k^2w(x) - \int_0^\pi f_\alpha(x, y)b_\tau(w(y))dy.$$

Notre but est de chercher une fonction $w(x)$ positive telle que $H(w(x)) = 0$. Nous allons procéder à la construction d'une sous-solution $\underline{w}(x)$ et une sur-solution $\bar{w}(x)$ telles que

$$H(\underline{w}(x)) \geq 0, \quad H(\bar{w}(x)) \leq 0, \quad \text{et} \quad 0 < \underline{w}(x) \leq \bar{w}(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in]0, \pi[.$$

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour avoir l'existence d'une solution positive pour (4.1).

Théorème 6. [6] *Supposons que $1 + k^2 < g_\tau(0)e^{-\alpha}$ et qu'il existe une constante $M_0 > 0$ telle que*

$$(i) \quad b'_\tau(w) \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad w \in [0, M_0],$$

$$(ii) \quad g_\tau(M_0)\gamma \leq k^2, \quad \text{avec}$$

$$\gamma = \max_{x \in [0, \pi]} \int_0^\pi f_\alpha(x, y)dy = \max_{x \in [0, \pi]} \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-(2n-1)^2\alpha} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Alors, le problème (4.1) admet une solution $w(x)$ qui vérifie

$$0 < w(x) \leq M_0, \quad \text{pour tout} \quad x \in]0, \pi[.$$

Démonstration. Puisque $1 + k^2 < g_\tau(0)e^{-\alpha}$, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $1 + k^2 < g_\tau(\varepsilon)e^{-\alpha}$. Prenons $\underline{w}(x) = \varepsilon \sin x$, $\varepsilon > 0$. D'après la solution du problème (4.7), nous

avons, pour $x \in]0, \pi[$,

$$\begin{aligned}
H(\underline{w}(x)) &= -\frac{d^2\underline{w}(x)}{dx^2} + k^2\underline{w}(x) - \int_0^\pi f_\alpha(x, y)b_\tau(\underline{w}(y))dy \\
&= \varepsilon[(1 + k^2) \sin x] - \varepsilon \int_0^\pi f_\alpha(x, y)(\sin y)g_\tau(\varepsilon \sin y)dy \\
&\leq \varepsilon[(1 + k^2) \sin x] - \varepsilon g_\tau(\varepsilon) \int_0^\pi f_\alpha(x, y)(\sin y)dy \\
&= \varepsilon[(1 + k^2) - g_\tau(\varepsilon)e^{-\alpha}] \sin x \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

On conclut que $\underline{w}(x) = \varepsilon \sin x$ est une sous-solution de (4.1). Nous allons maintenant montrer que $\bar{w}(x) = M_0$ est une sur-solution de (4.1). On a

$$\begin{aligned}
H(\bar{w}(x)) &= -\frac{d^2\bar{w}(x)}{dx^2} + k^2\bar{w}(x) - \int_0^\pi f_\alpha(x, y)b_\tau(\bar{w}(y))dy \\
&= M_0[k^2 - g_\tau(M_0) \int_0^\pi f_\alpha(x, y)dy] \\
&\geq M_0[k^2 - g_\tau(M_0)\gamma] \geq 0.
\end{aligned}$$

La fonction $\bar{w}(x) = M_0$ est bien une sur-solution de (4.1).

On considère l'opérateur non linéaire $S : Y \mapsto X$ définie par

$$(Sw)(x) = \mathcal{L}^{-1} \left(\int_0^\pi f_\alpha(x, y)b_\tau(w(y))dy \right), \quad \forall w \in Y.$$

Nous notons par \hat{K} la fonction constante définie sur $[0, \pi]$ par $\hat{K}(x) = K$. Par la monotonie de b_τ sur $[0, M_0]$, l'opérateur S est fortement croissant sur $[0, \hat{M}_0]$. L'argument des sous-et sur-solutions (voir la section 1.3 et la référence [14] pour plus de détails), nous permet de conclure qu'il existe une solution w_0 satisfaite

$$\underline{w}(x) \leq w_0(x) \leq \bar{w}(x) \quad \text{pour } x \in [0, \pi].$$

□

Remarque 6. Le théorème 6 confirme l'existence d'une solution positive dans $[0, \hat{M}_0]$. Dans le corollaire suivant, nous montrons qu'il n'existe pas de solutions au delà de \hat{M}_0 .

Proposition 1. [6] Supposons que les hypothèses de théorème 6 sont satisfaites et que $b_\tau(w) \leq b_\tau(M_0)$ pour $w > M_0$. Alors, le problème (4.1) n'admet pas de solutions allant au delà de la sur-solution.

Démonstration. On suppose que \bar{w} est une solution positive de (4.1) avec $\max_{x \in [0, \pi]} \bar{w}(x) >$

M_0 . Soit $x_0 \in]0, \pi[$ tel que $\bar{w}(x_0) = \max_{x \in [0, \pi]} \bar{w}(x)$. Donc

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{d^2\bar{w}(x_0)}{dx^2} + k^2\bar{w}(x_0) - \int_0^\pi f_\alpha(x_0, y)b_\tau(\bar{w}(y))dy, \\ &\geq k^2M_0 - b_\tau(M_0) \int_0^\pi f_\alpha(x_0, y)dy \geq M_0(k^2 - g_\tau(M_0)\gamma) > 0. \end{aligned}$$

Ce qui mène à une contradiction. \square

4.2 Existence des solutions positives - Cas non monotone.

Les résultats de la section précédente nécessitent une condition de monotonie du terme non local ; $b'_\tau(w) \geq 0$ pour tout $w \in [0, M_0]$ avec M_0 satisfait $g_\tau(M_0)\gamma \leq k^2$. Dans cette section, on s'intéresse au cas où b est non monotone. nous allons garder le même raisonnement précédant et pour cela nous développons une approche qui nous permet de revenir au cas monotone.

En utilisant les deux hypothèses **(H1)** et **(H2)**, nous avons $b'(w)$ est bornée inférieurement. Soit $\eta \in \mathbb{R}$ tel que $\eta \leq \inf_{w \geq 0} b'_\tau(w)$ et prenons $b_0(w) = b_\tau(w) - \eta w$. Dans ce cas, l'équation (4.1) est équivalente à

$$\begin{cases} -\frac{d^2w(x)}{dx^2} + k^2w(x) - \eta \int_0^\pi f_\alpha(x, y)w(y)dy = \int_0^\pi f_\alpha(x, y)b_0(w(y))dy, \\ w(0) = w(\pi) = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

Il est clair que $b'_0(w) \geq 0$ pour tout $w \geq 0$. Si $\eta \geq 0$, alors on a $b'(w) \geq 0$ pour tout $w \geq 0$ et ce cas a été déjà traité précédemment. Nous considérons par la suite que le cas $\eta < 0$. Rappelons que \mathcal{L} est donné dans (4.2). Soit l'opérateur $\mathcal{K} : Y \mapsto X$ défini par

$$(\mathcal{K}w(x)) = -\eta \int_0^\pi f_\alpha(x, y)w(y)dy.$$

Nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 2. [6] *Si on a la condition suivante*

$$-\frac{4\eta}{(1+k^2)\pi} \frac{1}{e^\alpha - 1} < 1, \quad (4.4)$$

alors $\|\mathcal{L}^{-1}\mathcal{K}\| < 1$.

Démonstration. Pour tout $w \in Y$,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}^{-1}\mathcal{K}w)(x) &= -\eta \int_0^\pi G(x, u) \left[\int_0^\pi f_\alpha(u, y)w(y)dy \right] du, \\
&= -\eta \int_0^\pi \left[\int_0^\pi G(x, u)f_\alpha(u, y)du \right] w(y)dy, \\
&= -\frac{2\eta}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\alpha} \int_0^\pi \left[\int_0^\pi G(x, u) \sin nu du \right] \sin ny w(y)dy, \\
&= -\frac{2\eta}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\alpha} \frac{1}{n^2 + k^2} \sin nx \int_0^\pi \sin ny w(y)dy, \\
&\leq -\frac{4\eta}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\alpha} \frac{1}{n^2 + k^2} \|w\|, \\
&\leq -\frac{4\eta}{(1 + k^2)\pi e^\alpha - 1} \|w\|.
\end{aligned}$$

ainsi, par (4.4), on a

$$\|\mathcal{L}^{-1}\mathcal{K}\| \leq -\frac{4\eta}{(1 + k^2)\pi e^\alpha - 1} < 1.$$

□

Lemme 3. [6] *Supposons que (4.4) est satisfaite. Si*

$$-\frac{8\eta \sinh^4\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\pi k^3 \sinh k\pi e^\alpha - 1} < 1, \quad (4.5)$$

alors $(\mathcal{L} + \mathcal{K})^{-1}$ est strictement positif.

Démonstration. Notons que si $\|\mathcal{L}^{-1}\mathcal{K}\| < 1$ (par le lemme précédent), alors on a

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L} + \mathcal{K})^{-1} &= [\mathcal{L}(I + \mathcal{L}^{-1}\mathcal{K})]^{-1} = (I + \mathcal{L}^{-1}\mathcal{K})^{-1}\mathcal{L}^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-\mathcal{L}^{-1}\mathcal{K})^k \mathcal{L}^{-1}, \\
&= [I - \mathcal{L}^{-1}\mathcal{K} + (\mathcal{L}^{-1}\mathcal{K})^2 - (\mathcal{L}^{-1}\mathcal{K})^3 + \dots] \mathcal{L}^{-1}, \\
&= [I + (\mathcal{L}^{-1}\mathcal{K})^2 + (\mathcal{L}^{-1}\mathcal{K})^4 + (\mathcal{L}^{-1}\mathcal{K})^6 + \dots][I - \mathcal{L}^{-1}\mathcal{K}] \mathcal{L}^{-1}, \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (\mathcal{L}^{-1}\mathcal{K})^{2k} [\mathcal{L}^{-1} - \mathcal{L}^{-1}\mathcal{K}\mathcal{L}^{-1}].
\end{aligned}$$

Nous remarquons que l'opérateur $\sum_{k=0}^{+\infty} (\mathcal{L}^{-1}\mathcal{K})^{2k}$ est positif. Ceci est une conséquence de la positivité de \mathcal{L}^{-1} et de \mathcal{K} . Donc, il suffit de montrer que $\mathcal{L}^{-1} - \mathcal{L}^{-1}\mathcal{K}\mathcal{L}^{-1}$ est positif. C'est-à-dire, pour tout $u \geq 0$, on a $\mathcal{L}^{-1}u \geq \mathcal{L}^{-1}\mathcal{K}\mathcal{L}^{-1}u$.

Pour tout $w \in C[0, \pi]$, on a

$$(\mathcal{L}^{-1}w)(x) = \int_0^\pi G(x, y)w(y)dy.$$

En utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^{-1}\mathcal{K}\mathcal{L}^{-1}w)(x) &= - \int_0^\pi G(x, v) \left\{ \eta \int_0^\pi f_\alpha(v, u) \left[\int_0^\pi G(u, y)w(y)dy \right] du \right\} dv, \\ &= - \int_0^\pi \left\{ \int_0^\pi G(x, v) \left[\eta \int_0^\pi f_\alpha(v, u)G(u, y)du \right] dv \right\} w(y)dy. \end{aligned}$$

Par conséquent, il suffit de montrer que pour tout $x, y \in [0, \pi]$,

$$- \int_0^\pi G(x, v) \left[\eta \int_0^\pi f_\alpha(v, u)G(u, y)du \right] dv \leq G(x, y). \quad (4.6)$$

D'un autre côté, nous avons

$$\int_0^\pi f_\alpha(v, u)G(u, y)du = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\alpha} \sin nv \left[\int_0^\pi \sin nuG(u, y)du \right].$$

On sait que le problème suivant

$$\begin{cases} -\frac{d^2w}{dx^2} + k^2w = \sin ny, \\ w(0) = w(\pi) = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

a une solution unique donnée par

$$w(y) = \int_0^\pi \sin nuG(u, y)du.$$

D'autre part, on peut vérifier que $w(y) = \frac{1}{n^2 + k^2} \sin ny$ satisfait (4.7). Par conséquent,

$$\int_0^\pi \sin nuG(u, y)du = \frac{1}{n^2 + k^2} \sin ny,$$

et donc,

$$\int_0^\pi f_\alpha(v, u)G(u, y)du = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n^2\alpha}}{n^2 + k^2} \sin nv \sin ny.$$

Le calcul ci-dessus implique

$$\begin{aligned} & - \int_0^\pi G(x, v) \left[\eta \int_0^\pi f_\alpha(v, u)G(u, y)du \right] dv \\ &= -\eta \int_0^\pi G(x, v) \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n^2\alpha}}{n^2 + k^2} \sin nv \sin ny \right] dv, \\ &= -\frac{2\eta}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n^2\alpha}}{n^2 + k^2} \sin ny \int_0^\pi G(x, v) \sin nv dv, \\ &= -\frac{2\eta}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n^2\alpha}}{(n^2 + k^2)^2} \sin nx \sin ny. \end{aligned}$$

Puisque,

$$\int_0^\pi G(u, y) du = \int_0^\pi G(y, u) du = \frac{1}{k^2 \sinh k\pi} [\sinh k\pi - \sinh ky - \sinh k(\pi - y)],$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 + n^2} \sin nx &= \int_0^\pi \sin nu G(u, x) du \leq \int_0^\pi G(u, x) du \\ &= \frac{1}{k^2 \sinh k\pi} [\sinh k\pi - \sinh kx - \sinh k(\pi - x)]. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & - \int_0^\pi G(x, v) \left[\eta \int_0^\pi f_\alpha(v, u) G(u, y) du \right] dv \\ & \leq - \frac{2\eta}{\pi} \frac{1}{k^4 \sinh^2 k\pi} [\sinh k\pi - \sinh kx - \sinh k(\pi - x)] \\ & \quad [\sinh k\pi - \sinh ky - \sinh k(\pi - y)] \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\alpha}. \end{aligned}$$

Considérons

$$c = \sqrt{-\frac{2\eta}{\pi} \frac{1}{k^3 \sinh k\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\alpha}}.$$

Nous allons prouver que pour tout $x, y \in [0, \pi]$,

$$c [\sinh k\pi - \sinh kx - \sinh k(\pi - x)] \leq \sinh kx, \quad (4.8)$$

et

$$c [\sinh k\pi - \sinh kx - \sinh k(\pi - x)] \leq \sinh k(\pi - x). \quad (4.9)$$

Posons

$$h(c, x) = (c + 1) \sinh kx + c \sinh k(\pi - x) - c \sinh k\pi.$$

Un calcul simple donne $h'_x(c, x) = k(c + 1) \cosh kx - kc \cosh k(\pi - x)$ et $h''_x(c, x) = k^2(c + 1) \sinh kx + k^2c \sinh k(\pi - x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$. D'après la condition (4.5) et le Lemme 1, nous avons

$$c = \sqrt{-\frac{2\eta}{\pi} \frac{1}{k^3 \sinh k\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\alpha}} < \sqrt{-\frac{2\eta}{\pi} \frac{1}{k^3 \sinh k\pi} \frac{1}{e^\alpha - 1}} < \frac{1}{2 \sinh^2 \frac{k\pi}{2}}.$$

Cette inégalité implique que $h'_x(c, 0) \geq 0$. Comme $h''_x(c, x) \geq 0$, alors $h'_x(c, x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$. De plus, puisque $h(c, 0) = 0$, alors $h(c, x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$. Ceci prouve (4.8). Par un argument similaire, on prouve (4.9). Par conséquent, nous obtenons (4.6). Par équivalence, l'opérateur $\mathcal{L}^{-1} - \mathcal{L}^{-1}\mathcal{K}\mathcal{L}^{-1}$ (donc $(\mathcal{L} + \mathcal{K})^{-1}$) est positif. \square

Remarque 7. Les conditions (4.4) et (4.5) peuvent se réaliser simultanément. Pour

mieux le voir, on a

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sinh k\pi}{k\pi} = 1.$$

Alors, pour tout $\eta < 0$, nous pouvons prendre α tel que

$$-\frac{\eta\pi^2}{2} < e^\alpha - 1.$$

Nous obtenons que

$$-\frac{8\eta}{\pi} \frac{\sinh^4 \frac{k\pi}{2}}{k^3 \sinh k\pi} \frac{1}{e^\alpha - 1} \rightarrow -\frac{\eta\pi^2}{2} \frac{1}{e^\alpha - 1} < 1, \quad \text{lorsque } k \rightarrow 0,$$

et

$$-\frac{4\eta}{(1+k^2)\pi} \frac{1}{e^\alpha - 1} \rightarrow -\frac{4\eta}{\pi} \frac{1}{e^\alpha - 1} < -\frac{\eta\pi^2}{2} \frac{1}{e^\alpha - 1} < 1, \quad \text{lorsque } k \rightarrow 0.$$

Les deux observations veulent dire que (4.4) et (4.5) sont satisfaites quand $k > 0$ et suffisamment petit.

Théorème 7. [6] Supposons que $1 + k^2 < g_\tau(0)e^{-\alpha}$ et qu'il existe un réel positif M_1 , tel que $k^2 > g_\tau(M_1)\gamma$. Si les deux inégalités (4.4) et (4.5) sont vérifiées, alors (4.3) admet une solution positive.

Démonstration. D'après la preuve du Théorème 6, nous avons respectivement $w^{(l)} = \varepsilon \sin x$ et $w^{(u)} = \hat{M}_1$ une sous-solution et sur-solution de (4.3). On définit l'opérateur non linéaire \mathcal{T} comme suit

$$(\mathcal{T}w)(x) = (\mathcal{L} + \mathcal{K})^{-1} \int_0^\pi f_\alpha(x, y) b_0(w(y)) dy, \quad (4.10)$$

D'un autre côté, comme $b_0(w) \geq 0$, pour tout $w \geq 0$, et par le lemme 1, nous avons l'opérateur $\tilde{\mathcal{S}} : Y \rightarrow X$ défini par

$$(\tilde{\mathcal{S}}(w))(x) = \int_0^\pi f_\alpha(x, y) b_0(w(y)) dy,$$

est positif et fortement croissant. De plus, le lemme 3 implique que \mathcal{T} est positif et fortement croissant. L'argument des sous-et sur-solutions (voir la section 1.3 et la référence [14] pour plus de détails), nous permet de conclure qu'il existe une solution w_0 dans $[w^{(l)}, \hat{M}_1]$. \square

Chapitre 5

Stabilité locale et attractivité globale de l'équilibre trivial

5.1 Attractivité globale de l'équilibre trivial

Dans cette section, nous étudions la stabilité de l'équilibre trivial du système (3.12). Nous considérons le problème linéaire suivant avec une condition initiale

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) - dw(t, x) \\ \quad + g_\tau(0) \int_0^\pi f_\alpha(x, y) w(t - \tau, y) dy, \\ w(t, 0) = w(t, \pi) = 0, \\ w(\theta, x) = U_{m0}(\theta, x), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t > 0, x \in]0, \pi[, \\ \\ t > 0, \\ \theta \in [-\tau, 0], x \in [0, \pi]. \end{array} \quad (5.1)$$

Le problème aux valeurs propres associé à l'équation (5.1) est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda v(x) = D \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} - dv(x) \\ \quad + e^{-\lambda\tau} g_\tau(0) \int_0^\pi f_\alpha(x, y) v(y) dy, \\ v(0) = v(\pi) = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \in]0, \pi[, \\ \\ \end{array} \quad (5.2)$$

Nous considérons le problème auxiliaire suivant (le problème (5.2) sans le terme

($e^{-\lambda\tau}$). Nous allons voir son utilité par la suite.

$$\begin{cases} \lambda v(x) = D \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} - dv(x) & x \in]0, \pi[, \\ \quad \quad \quad + g_\tau(0) \int_0^\pi f_\alpha(x, y) v(y) dy, & \\ v(0) = v(\pi) = 0. & \end{cases} \quad (5.3)$$

Nous rappelons que λ_0 est une valeur propre principale, si pour toute autre valeur propre de (5.3), notée λ , on a

$$\operatorname{Re}(\lambda) < \lambda_0,$$

Proposition 2. *Il existe une valeur propre principale de (5.3). De plus, elle est donnée par*

$$\lambda_0 = -D - d + g_\tau(0)e^{-\alpha},$$

associée au vecteur propre $v(x) = \sin x$.

Démonstration. Nous avons besoin d'un résultat qui nous donne l'existence d'une valeur propre principale (voir Théorème 6.1 Page 137 de [19] et Théorème 2.1 de la page 223 de [24]). Considérons le vecteur propre positif $v(x) = \sin x$. Il est clair que

$$v(0) = v(\pi) = 0.$$

De plus, l'équation (5.3) implique que

$$\lambda = -D - d + g_\tau(0)e^{-\alpha}.$$

Puisque l'unique vecteur propre positif $\sin(x)$ (à une constante multiplicative près) est associé à la valeur propre ci-dessus. alors, on a forcément $\lambda_0 = -D - d + g_\tau(0)e^{-\alpha}$ (voir le Théorème 2.1 de la page 223 de [24]). \square

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'attractivité globale de l'équilibre trivial. On établit une condition suffisante pour que cet équilibre soit globalement attractif.

Théorème 8. *Supposons que*

$$D + d > g_\tau(0)e^{-\alpha}, \quad (5.4)$$

alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} U_m(t, x) = 0,$$

pour tout $x \in [0, \pi]$ et pour toute condition initiale.

Démonstration. D'après Théorème 2.1 de la page 223 de [24], le problème (5.2) admet une valeur propre principale notée λ_0^* . De plus, ce théorème affirme qu'elle est de même signe que la valeur propre principale λ_0 du problème (5.3).

D'après la proposition 2, nous avons

$$\lambda_0 = -D - d + g_\tau(0)e^{-\alpha}.$$

De plus, si (5.4) est vérifiée alors

$$\lambda_0 = -D - d + g_\tau(0)e^{-\alpha} < 0.$$

Cela veut dire que la solution w du système (5.1) tend vers zéro. D'un autre côté, nous avons

$$0 < g_\tau(U_m) \leq g_\tau(0), \quad \text{pour tout } U_m \geq 0.$$

Si nous passons à la solution de l'équation (3.12), alors nous obtenons l'inégalité, pour tout $t > 0$ et $x \in (0, \pi)$, suivante

$$\frac{\partial U_m(t, x)}{\partial t} \leq D \frac{\partial^2 U_m(t, x)}{\partial x^2} - dU_m(t, x) + g_\tau(0) \int_0^\pi f_\alpha(x, s)U_m(t - \tau, s)ds.$$

Le principe de comparaison (Proposition 3 de [12]) implique que

$$0 \leq U_m(t, x) \leq w(t, x), \quad \text{pour tout } t > 0, x \in]0, \pi[.$$

Par conséquent

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} U_m(t, x) = 0.$$

□

5.2 Stabilité locale de l'équilibre trivial

Dans ce paragraphe, nous allons étudier la stabilité asymptotique locale de l'équilibre trivial. Nous commençons par écrire l'équation caractéristique donnée par (voir [22])

$$\Delta_k^0(\tau, \lambda) = \lambda + Dk^2 + d - g_\tau(0)e^{-k^2\alpha}e^{-\lambda\tau} = 0, \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}^*. \quad (5.5)$$

Rappelons que l'équilibre trivial du système est localement asymptotiquement stable si toutes les racines de l'équation caractéristique (5.5) ont une partie réelle strictement négative, et qu'il est instable si au moins une racine de (5.5) a une partie réelle positive (voir [22]). Nous avons le résultat suivant.

Théorème 9. (i) *Supposons que*

$$D + d > g_\tau(0)e^{-\alpha}.$$

Alors, l'équilibre trivial est localement asymptotiquement stable.

(ii) *Si la condition*

$$D + d < g_\tau(0)e^{-\alpha}$$

est vérifiée, alors l'équilibre trivial est instable.

Démonstration. Si on considère Δ_k^0 , $k = 1, 2, \dots$ comme des fonctions réelles, alors il est facile de vérifier que $\Delta_k^0(\tau, \lambda)$ sont des fonctions croissantes en λ et que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \Delta_k^0(\tau, \lambda) = \pm\infty.$$

Donc, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une racine réelle unique de (5.5) notées λ_{\max}^k .

(i) Supposons que

$$D + d > g_\tau(0)e^{-\alpha}.$$

est satisfaite. Alors, nous avons

$$\Delta_1^0(\tau, 0) = D + d - g_\tau(0)e^{-\alpha} > 0.$$

Ce qui implique que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\lambda_{\max}^k < 0$. De plus, pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, nous allons montrer que pour toute λ racine de l'équation (5.5), on a

$$\operatorname{Re}(\lambda) \leq \lambda_{\max}^k.$$

On suppose par l'absurde qu'il existe $\lambda = \mu + iw$ avec $\mu > \lambda_{\max}^k$. Alors l'équation (5.5) implique que

$$\mu + Dk^2 + d - g_\tau(0)e^{-k^2\alpha}e^{-\mu\tau} \cos(w\tau) = 0, \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}^*. \quad (5.6)$$

λ_{\max}^k est racine réelle de l'équation (5.5), donc

$$\lambda_{\max}^k + Dk^2 + d - g_\tau(0)e^{-k^2\alpha}e^{-\lambda_{\max}^k\tau} = 0, \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}^*.$$

Par conséquent,

$$\mu - \lambda_{\max}^k = g_\tau(0)e^{-k^2\alpha} \left[e^{-\mu\tau} \cos(w\tau) - e^{-\lambda_{\max}^k\tau} \right] < 0, \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}^*. \quad (5.7)$$

Donc, $\mu - \lambda_{\max}^k < 0$ et cela conduit à une contradiction avec l'hypothèse du départ. Par conséquent,

$$\operatorname{Re}(\lambda) \leq \lambda_{\max}^k < 0.$$

Cela implique que l'équilibre trivial est localement asymptotiquement stable.

(ii) Supposons que

$$D + d < g_\tau(0)e^{-\alpha}$$

est satisfaite. Alors, nous avons

$$\Delta_1^0(\tau, 0) = D + d - g_\tau(0)e^{-\alpha} < 0$$

Ce qui implique que $\lambda_{\max}^0 > 0$. Par conséquent, l'équilibre trivial est instable. \square

5.3 Simulations numériques

Dans ce chapitre, nous décrivons la méthode numérique pour simuler les solutions du problème de réaction-diffusion à retard et non local en espace. Notre but est d'illustrer les résultats théoriques obtenus dans les deux chapitres précédents. Nous rappelons le problème d'évolution avec les conditions de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t}(t, x) = D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, x) - dU(t, x) \\ \quad + \int_0^\pi f_\alpha(x, y) b_\tau(U(t - \tau, y)) dy, \\ U(t, 0) = U(t, \pi) = 0, \\ U(\theta, x) = U_0(\theta, x), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t > 0, x \in]0, \pi[, \\ \\ t > 0, \\ \theta \in [-\tau, 0], x \in [0, \pi]. \end{array} \quad (5.8)$$

avec

$$f_\alpha(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 \alpha} \sin ny \sin nx.$$

Prenons une partition spatiale uniforme pour le domaine $\Omega = [0, \pi]$ avec les nœuds $x_i, i = 0, 1, \dots, N_x$, tel que

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{N_x} = \pi.$$

Dans ce cas, nous avons

$$\Delta x = \pi / N_x \quad \text{et} \quad x_i = i \Delta x.$$

D'un autre côté, nous prenons une partition aussi uniforme en temps définie comme suit

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n < \dots < t_{N_t} = T.$$

Nous avons donc

$$\Delta t = T / N_t \quad \text{et} \quad t_n = n \Delta t.$$

Les deux quantités Δx et Δt sont appelées respectivement les pas de la discrétisation spatiale et temporelle. Nous posons

$$U_i^n := U(t_n, x_i).$$

Nous avons approché les opérateurs différentiels dans (5.8) par (un schéma d'Euler en temps et un schéma centré en espace, voir [11])

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t_n, x_i) \approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t_n, x_i) \approx \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2).$$

D'autre part, le terme non local est approximé par une formule d'intégration composée. L'idée de programmation du terme à retard $b_\tau(U(t - \tau, \cdot))$ est basée sur la méthode des pas (voir 1.1.5). Comme nous l'avons déjà explicitée, elle consiste à utiliser une fonction initiale U_0 définie sur l'intervalle $[-\tau, 0]$, tel que $U(t, \cdot) = U_0(t, \cdot)$ sur $[-\tau, 0]$.

Nous avons considéré une fonction de naissance largement utilisée dans la littérature (équations de Nicholson). Cette fonction est donnée par

$$b_\tau(w) = pe^{-\tau d_i} w e^{-aw},$$

avec a, p et q sont des constantes strictement positives.

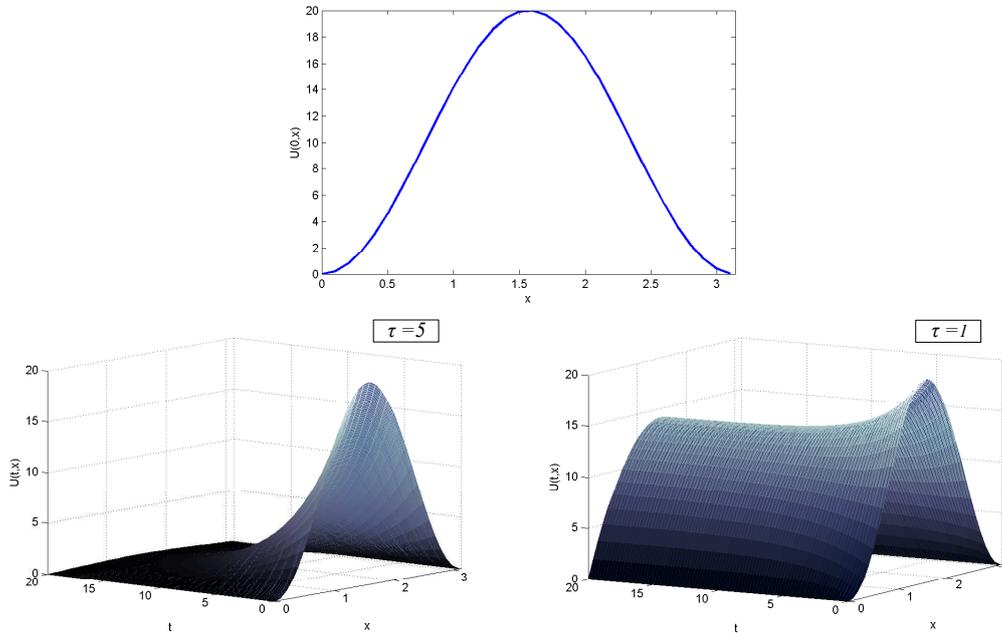


FIGURE 5.1: Deux simulations numériques de la solution du système traité sont représentées pour différentes valeurs du retards (A gauche : $\tau = 5$, à droite : $\tau = 1$). Les autres paramètres sont donnés par : $D = 0.1$, $d = 0.2$, $d_i = 1$, $\alpha = 1$, $a = 0.1$ et $p = 5$. La condition initiale prise est $u(\theta, x) = 10(1 - \cos(2x))$ pour $\theta \in [-\tau, 0]$, $x \in [0, \pi]$.

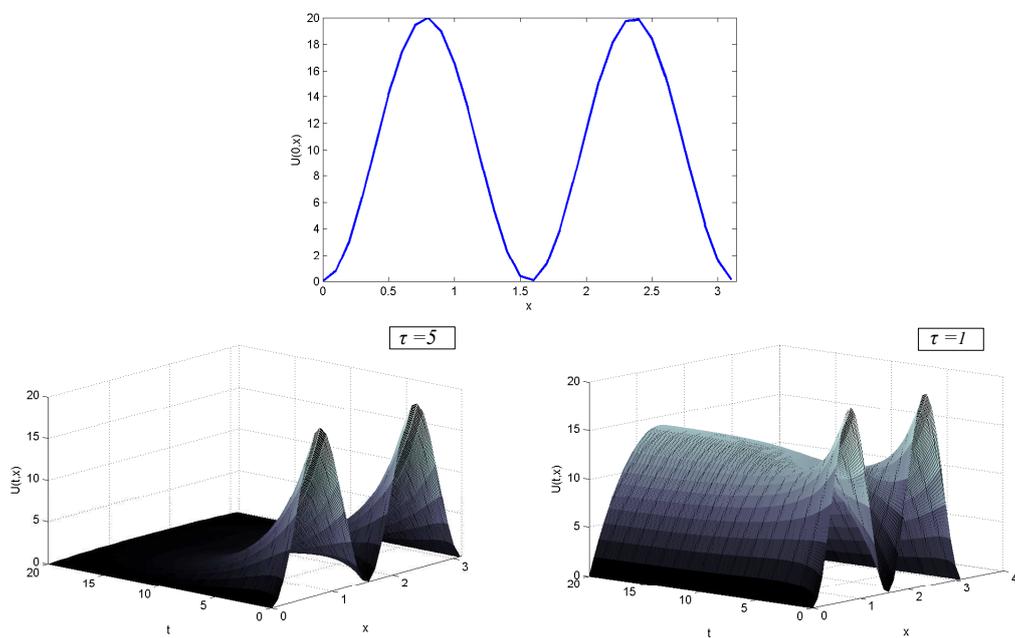


FIGURE 5.2: Deux simulations numériques de la solution du système traité sont représentées pour différentes valeurs du retards. (A gauche : $\tau = 5$, à droite : $\tau = 1$). Les autres paramètres sont donnés par : $D = 0.1$, $d = 0.2$, $d_i = 1$, $\alpha = 1$, $a = 0.1$ et $p = 5$. La condition initiale prise est $u(\theta, x) = 10(1 - \cos(4 * x))$ pour $\theta \in [-\tau, 0]$, $x \in [0, \pi]$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons analysé un modèle mathématique décrivant une dynamique d'une population (interaction entre des individus adultes et juvéniles). Ce modèle prend en compte la diffusion spatiale, un terme non local en espace et à retard en temps.

L'étude principale effectuée durant ce travail est le traitement de la question d'existence des états stationnaires positifs pour problème (3.12). Autrement dit, on cherche les solutions positives de problème (4.1).

La monotonie du terme non-local exige, dans l'approche utilisée, de distinguer deux cas possibles (cas monotone et cas non monotone). Nous avons procédé, dans les deux cas, par l'utilisation de la technique d'itération monotone basée sur l'existence d'une sur-solution et sous-solution. Sous certaines conditions imposées, nous avons formulé respectivement les deux résultats d'existence dans le théorème 6 et le théorème 7.

Nous avons complété cette étude en abordant la stabilité asymptotique globale et locale de l'équilibre trivial. Ce résultat est illustré par des simulations numériques effectuées sous matlab.

Bibliographie

- [1] M. Adimy, A. Chekroun, and B. Kazmierczak. Traveling waves in a coupled reaction–diffusion and difference model of hematopoiesis. *Journal of Differential Equations*, 262(7) :4085–4128, 2017.
- [2] H. Amann. Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces. *SIAM Review*, 18(4) :620–709, 1976.
- [3] Brilliant. Green’s Functions in Physics | Brilliant Math & Science Wiki, <https://brilliant.org/wiki/greens-functions-in-physics/>.
- [4] R. A. Fisher. The Wave of Advance of Advantageous Genes. *Ann. Eugenics*, 7 :353–369, 1937.
- [5] D. Guo and V. Lakshmikantham. *Nonlinear Problems in Abstract Cones*. ACADEMIC PRESS, INC., 1988.
- [6] Z. Guo, Z.-C. Yang, and X. Zou. Existence and uniqueness of positive solution to a non-local differential equation with homogeneous Dirichlet boundary condition—a non-monotone case. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 11(5) :1825–1838, 2012.
- [7] J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel. *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer, 1993.
- [8] M. Iannelli. *Mathematical theory of age-structured population dynamics*. Giardini editori e stampatori, 1995.
- [9] A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovskii, and N. S. Piskunov. A study of the equation of diffusion with increase in the quantity of matter, and its application to a biological problem. *Bjul. Moskovskogo Gos. Univ*, 1 :1–25, 1937.
- [10] Y. Kuang. *Delay Differential Equations : With Applications in Population Dynamics*. Academic Press, 1993.
- [11] D. Liang, J. W. H. So, F. Zhang, and X. Zou. Population dynamic models with nonlocal delay on bounded domains and their numerical computations.
- [12] R. H. Martin and H. L. Smith. Abstract functional-differential equations and reaction-diffusion systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 321(1) :1–44, 1990.
- [13] J. D. Murray. *Mathematical Biology : I. An Introduction*. Springer, New York, 3rd edition edition, 2002.

-
- [14] C. V. Pao. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*. Springer Science & Business Media, 1992.
- [15] B. Perthame. *Transport Equations in Biology*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [16] M. H. Protter and H. F. Weinberger. *Maximum Principles in Differential Equations*. Springer-Verlag New York Inc., 1984.
- [17] L. Pujo-Menjouet. Edp pour l'Hématopoïese, <http://math.univ-lyon1.fr/pujo/hematopoiese.pdf>, 2010.
- [18] H. Smith. Reduction of structured population models to threshold-type delay equations and functional differential equations : a case study. *Mathematical Biosciences*, 113(1) :1–23, 1993.
- [19] H. Smith. *Monotone Dynamical Systems : An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems*. American Mathematical Soc., 1995.
- [20] H. Smith. *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2011.
- [21] J. W.-H. So, J. Wu, and X. Zou. A reaction-diffusion model for a single species with age structure. i travelling wavefronts on unbounded domains. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 457(2001) :1841–1853, 2001.
- [22] J. Wu. *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*. Springer, 1996.
- [23] C.-B. Zhai, C. Yang, and C.-M. Guo. Positive solutions of operator equations on ordered Banach spaces and applications. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(12) :3150–3156, 2008.
- [24] X.-Q. Zhao. *Dynamical Systems in Population Biology*. Springer, New York, 2003.
- [25] M. Zima. *Positives operators in Banach space and their applications*. Rzeszow, 2005.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons analysé un modèle mathématique décrivant une dynamique d'une population (interaction entre des individus adultes et juvéniles). Ce modèle prend en compte la diffusion spatiale, un terme non local en espace et à retard en temps. L'étude principale effectuée durant ce travail est le traitement de la question d'existence des états stationnaires positifs. La monotonie du terme non local exige, dans l'approche utilisée, de distinguer deux cas possibles (cas monotone et cas non monotone). Nous avons procédé, dans les deux cas, par l'utilisation de la technique d'itération monotone basée sur l'existence d'une sur-solution et sous-solution. Sous certaines conditions imposées, nous avons formulé respectivement les deux résultats d'existence suivant la monotonie du terme non local. Nous avons complété cette étude en abordant la stabilité asymptotique globale et locale de l'équilibre trivial. Ces résultats sont illustrés par des simulations numériques effectuées sous Matlab.

Mots clés : Équations aux dérivées partielles structurées en âge et en espace, équation de réaction-diffusion à retard, méthode des caractéristiques, fonction de Green, sur- et sous-solution, solutions stationnaires, stabilité, modèle Juvéniles-Adultes.

Abstract

We analyzed a mathematical model describing a population dynamics (interaction between adult and juvenile individuals). This model takes into account a spatial diffusion, a nonlocal term in space and a time delay. The main goal of this work is the study of the existence of positive stationary solutions. Our approach requires to distinguish two cases on the monotony of the nonlocal term (monotone and non-monotone cases). We use the iteration technique based on the existence of a sub-solution and super-solution. Under some conditions, we have formulated the results according to the monotony of the nonlocal term. We complete this study by the global and local asymptotic stability of the trivial solution. Along this work, we carry out a numerical simulations to illustrate the results.

Keywords : Age- and space-structured partial differential equations, delayed reaction-diffusion equations, characteristic method, Green function, upper- and lower solution, stationary solutions, stability, Juvenile-Adult model.