الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبي بكر بلقايد – تلمسان –

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –

Faculté des Sciences

Thèse

Présentée pour l'obtention du **grade** de **DOCTEUR EN SCIENCES**

En : Mathématiques

Spécialité : Equations aux dérivées Partielles et applications

Par : Mme Bekkouche Noria

Solvabilité et bifurcation pour une classe de problème aux limites

Soutenue publiquement, le 06 / 07 /2017 , devant le jury composé de :

M. S.M. Bouguima	Professeur	Univ. Tlemcen	Président
Mme N. Merzagui	Professeur	Univ. Tlemcen	Directeur de thèse
M. M.Benchohra	Professeur	Univ. Sidi Bel Abbes	Examinateur
M. A. Lakmeche	Professeur	Univ. Sidi Bel Abbes	Examinateur
M. M.Yebdri	Professeur	Univ. Tlemcen	Examinateur
M. M. Bouchekif	Professeur	Univ. Tlemcen	Invité

Table des matières

0.1 Introduction Générale 3

1 Préliminaires 8

1.1 Espaces fonctionnels 9

1.1.1 Espaces de Lebesgue 9

1.1.2 Espace de Sobolev 10

1.2 Quelques définitions et théorèmes 12

1.2.1 Fonction L^p-Carathéodory 12

1.2.2 Théorème d'Ascoli-Arzela 12

1.2.3 Résultat sur la concentration de compacité 13

1.2.4 Convergence forte et Convergence faible 14

1.3 Approche variationnelle 14

1.3.1 Formulation variationnelle 15

1.3.2 Approche variationnelle pour un problème avec singularité 19

1.3.3 Valeur propre du p-Laplacien 20

1.3.4 Spectre de Fučik 21

1.3.5 Caractérisation variationnelle de la première courbe non triviale 22

2 Problème de perturbation 25

2.1 Introduction 25

2.2 Formulation du problème 30

2.2.1 Notion de solution non radiale 31

2.3 Formulation variationnelle 31

2.4 Résultat principal 32

3 Problème singulier 38

3.1 Introduction 38

3.2 Formulation du problème 41

3.3 Résultats 41

3.3.1 Resultat d'existence 41

3.3.2 Résultat de bifurcation 46

4 Problème associé au spectre de Fučik **48**
4.1 Introduction 48
4.2 Formulation du problème 50
4.3 Résultat principal 52

Conclusion et perspectives **58**

Bibliographie **58**

Remerciements

Comme le veut la tradition, je vais tenter de satisfaire au difficile exercice de la page des remerciements. Non qu'exprimer ma gratitude envers les personnes en qui j'ai trouvé un soutien soit contre ma nature, bien au contraire. La difficulté tient plutôt dans le fait de n'oublier personne. C'est pourquoi, je remercie par avance tous ceux dont le nom n'apparaît pas dans cette page et qui m'ont aidé d'une manière ou d'une autre. Ils se reconnaîtront.

Cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans la confiance et la générosité de ma directrice de thèse la professeure N. Daoudi-Merzagui, que je tiens à remercier vivement. Je lui exprime ma gratitude pour le temps et la patience qu'elle m'a accordés tout au long de ces années et surtout pour avoir cru en mes capacités. De plus, les conseils qu'elle m'a prodigués en période de rédaction ont toujours été clairs et succincts, me facilitant grandement la tâche et me permettant d'aboutir à la production de cette thèse.
Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Professeur S. M. Bouguima pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.
Je suis très honoré que les professeurs : M. Benchohra, A. Lakmeche et M. Yebdri aient accepté d'examiner ce travail.
J'adresse tout mon respect à tous mes professeurs, particulièrement, ceux qui m'ont enseigné en Licence et en Magister. J'adresse un grand Merci à M. Bouchekif pour son aide si précieuse.
Mes remerciements vont également à notre chef de département M. Mebkhout pour sa disponibilté à aider les étudiants.
Merci à toute ma famille, amis et collègues, qui de prés ou de loin, m'ont soutenu et encouragé.

Dédicace

A mes parents, mon mari, mes sœurs, mes frères et à mes enfants.

Abreviations

EDP	Equation aux dérivées partielles.
$p.p.$	Presque partout.

Notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^N$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ N fois.
∇u	Gradient de u défini par $\nabla u \overset{def}{=} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$.
Δu	Laplacien de u.
$\Delta_p u$	p-Laplacien de u défini par $\Delta_p u = div\left(\lvert\Delta u\rvert^{p-2}\Delta u\right)$.

0.1 Introduction Générale

Les équations aux dérivées partielles (EDP) permettent d'aborder d'un point de vue mathématique des phénomènes observés, elles apparaissent trés souvent dans la modélisation de processus de phénomènes naturels. Elles sont omniprésentes dans les sciences à appliqués, Physique, Chimie, Biologie (cf. [161], [132]). Nous citrons par exemples: la dynamique des structures, la mécanique des fluides, les théories de la gravitation de l'électromagnétisme (équations de Maxwell) ou encore les mathématiques financières (équation de Black-Scholes) (cf. [110], [101]).
Elles sont primordiales dans certains domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des EDP, (cf. [79], [90]). Les trois classes d' EDP (elliptiques, hyperboliques et paraboliques) [29], [155], [31], servent à analyser et à comprendre beaucoup de phénomènes naturels; par exemple les équations de Poisson (elliptique) et de la chaleur (parabolique) modélisent des phénomènes de diffusion de la chaleur ou de la matière (par exemple un polluant dans une rivière, ou des bactéries dans un organe, etc), ou encore d'une charge électrique. L'équation des ondes (hyperbolique) modélise des phénomènes de propagation, comme celle du son ou de la lumière. L'équation des ondes et de la chaleur sont dites d'évolution car elles modelisent en général un phénomène instationnaire, évoluant avec le temps. L'équation de Poisson est quant à elle stationnaire: elle modelise en général un phénomène à l'équilibre dans l'espace. L'équation de Poisson, aussi appelée équation de Laplace, peut être vue comme un cas particulier de l'équation de la chaleur lorsque l'équilibre est atteint, c'est-à-dire lorsque la fonction inconnue ne dépend plus du temps. Nous soulignons cette relation entre les differentes classes d' EDP: elliptiques et hyperboliques, par l'exemple suivant: Les solitons ou ondes solitaires sont au centre de la description de la propagation d'ondes nonlinéaires et ont surgi historiquement dans des domaines de la physique très divers allant de la mécanique des fluides à l'optique nonlinéaire et la physique des plasmas en passant par l'astrophysique. Ils correspondent à des objets nonlinéaires exceptionnels pour lesquels se compensent exactement deux processus physiques génériques: la dispersion et la concentration. Prenons par exemple la propagation d'un faisceau laser dans un milieu nonlinéaire, typiquement une fibre optique supposée transporter un signal électromagnétique sur de longues distances. Deux phénomènes dominants entrent en jeu: la dispersion, c'est-à-dire la propension du faisceau à s'étaler en espace comme il le ferait dans le vide, et la concentration, conséquence de l'interaction du milieu et de l'onde qui tend à focaliser les rayons. La dispersion permet la propagation du faisceau, la focalisation permet de confiner cette propagation au centre de la fibre optique. Partant des équations de Maxwell, la recherche de solutions de type onde plane se propageant dans

une direction donnée aboutit dans certains régimes au modèle simplifié de Schrödinger nonlinéaire gouvernant l'équation de l'enveloppe de l'onde, [172] :

$$\begin{cases} i\partial_t \psi + \Delta\psi + \psi\left|\psi\right|^2 = 0 \\ \psi\left(0,x\right) = \psi_0\left(x\right) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N,\ \psi\left(t,x\right) \in \mathbb{C} \end{cases} \tag{1}$$

où typiquement $N = 1,2,3$ dépendant de la modélisation physique. La variable de temps t correspond en réalité dans la modélisation physique a la direction de propagation de l'onde.

D'un point de vue mathématique, la dispersion est associée a l'équation de Schrodinger linéaire :

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi = 0 \tag{2}$$

qui conserve la masse totale de l'onde :

$$\forall t \geq 0,\ \int_{\mathbb{R}^N} \left|\psi\left(t,x\right)\right|^2 dx = \int \left|\psi_0\left(x\right)\right|^2 dx,$$

mais disperse le paquet d'ondes, ce que l'on peut mesurer par exemple via la décroissance locale de la masse :

$$\forall R > 0,\ \int\limits_{|x|\leq R} \left|\psi\left(t,x\right)\right|^2 dx \to 0 \ \text{ quand } t \to +\infty.$$

Contrairement à (2) le système nonlinéaire complet (1) admet des solutions exceptionnelles pour les quelles la dispersion et la concentration se compensent exactement et qui se propagent sans aucune déformation: ce sont les solitons ou ondes solitaires. Dans le cas de (1), ce sont en fait des solutions périodiques en temps de la forme

$$\psi\left(t,x\right) = e^{it}Q\left(x\right),$$

où le profil Q doit résoudre l'EDP elliptique nonlinéaire :

$$\Delta Q - Q + Q\left|Q\right|^2 = 0. \tag{3}$$

Le phénomène de compensation entre dispersion et concentration apparaît naturellement dans des modélisations physiques diverses, notamment en mécanique des fluides et en physique des plasmas où la modélisation des phénomènes dominants par des ondes solitaires s'est avérée extrêmement pertinente, voir [172] pour plus de détails.

Les équations aux dérivées partielles mettent en jeu des fonctions arbitraires, une solution des équations aux dérivées partielles n'est généralement pas unique. Plusieurs méthodes ont été proposées pour l'étude de l'existence et les propriétés qualitatives de ces solutions (degré topologique, point fixe, transversalité topologique), (cf. [65], [139]), les méthodes variationnelles (cf. R. Courant [63]) et les méthodes numériques (cf. [154]).

Les méthodes variationnelles, utilisées dans cette thèse, ont une longue histoire, qui est probablement originaire du problème brachistochrone posé en 1696 et résolu par Newton, Leibniz, Jakob et Johann Bernoulli, ainsi que par L'Hôpital et qui consiste à déterminer la trajectoire la plus rapide permettant à une masse ponctuelle uniquement soumise à la gravité d'aller d'un point A à un point B, bien que le problème des surfaces de révolution dans un milieu résistant étudié par Newton remonte encore plus loin. Des contributions importantes ont également été données par Euler, qui a publié la première monographie sur le calcul des variations en 1744, et par Lagrange qui a introduit des formalismes et des techniques qui sont toujours en usage aujourd'hui. Le principe de moindre action de Maupertuis est aussi un des premiers cadres variationnels posé.
L'exemple classique pour les problèmes variationnels est le principe de Dirichlet, à savoir le fait que la solution d'une équation aux dérivées partielles de type elliptique soumise à des conditions aux limites peut être obtenue comme un minimiseur d'une fonctionnelle appropriée. Riemann a introduit ce point de vue en 1851, et lui a donné le nom de principe de Dirichlet pour le processus de résolution de

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \qquad \text{dans } \Omega; \\ u &= f, \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4}$$

Bien que le principe de Dirichlet est élégant et peut être appliqué à une grande classe de problèmes autres que (4) , la preuve fournie par Riemann ne peut pas être considérée comme correcte, comme cela a été dûment signalé par Weierstrass. Le problème réside dans le fait que lorsqu'on travaille dans des espaces fonctionnels, et donc dans des espaces vectoriels de dimensions infinies, les propriétés de compacité usuelles de la dimension finie ne sont plus vraies, et les étapes de la démonstration de l'existence des extremas, en grande partie fondées sur des arguments de compacité, ne fonctionnent plus. Ces faits n'avaient pas encore été pleinement reconnu au temps de Riemann. Le dénouement théorique de ces types de difficultés a besoin du développement extraordinaire de l'analyse fonctionnelle, théorie de la mesure et de l'intégration qui a explosé au cours du XXe siècle, avec l'étude précise des propriétés topologiques et métriques des espaces vectoriels de dimensions infinies, la théorie de l'intégration de Lebesgue, et beaucoup d'autres techniques.
L'idée fondamentale derrière le principe de Dirichlet est l'interprétation d'un problème différentiel, écrit abstraitement comme $F(u) = 0$, comme

$$J'(u) = 0, \tag{5}$$

où J est une fonction appropriée définie sur un ensemble de fonctions, et J' est la différentielle de J dans un sens qu'on va préciser. En d'autres termes, les zéros de F sont considérés comme des points critiques (pas nécessairement minimas) de J, (cf. 1.3.1). L'équation (5) est l'équation d'Euler, ou l'équation d'Euler-Lagrange associé à J.

Par ailleurs, dans d'innombrables applications, la fonctionnelle J a une signification physique qui est fondamentale. Souvent, J est une énergie, écrite comme l'intégrale d'un Lagrangien, et donc trouver un point de minimum signifie non seulement de résoudre l'équation différentielle, mais trouver la solution d'énergie minimale qui est souvent très importante dans les problèmes concrets. L'interprétation de J comme une énergie est si fréquente que les fonctionnelles associées à des problèmes différentiels sont appelés fonctionnelles d'énergie, même lorsque le problème n'a pas d'applications directes en physique. Les problèmes différentiels pouvant être écrits sous la forme $J'(u) = 0$ sont des problèmes qui ont une structure variationnelle. Au cours du vingtième siècle, après avoir donné les fondements de l'analyse fonctionnelle, l'extension du calcul différentiel aux espaces normés, les méthodes variationnelles n'ont jamais cessé d'être développées. D'une part, des techniques de minimisation ont évolué à un niveau très élevé, et ont été appliquées à un nombre énorme de problèmes dans beaucoup de domaines des sciences pure et appliquée. Les méthodes qui sont concernées par la minimisation de fonctionnelles sont appellées des méthodes directes du Calcul des Variations.

D'autre part, les procédures visant la recherche de points critiques des fonctionnelles et qui ne sont pas des points de minimum ont donné lieu à une branche de l'analyse non linéaire connue sous le nom de la théorie des points critiques. Parmi les précurseurs de cette théorie sont Ljusternik et Schnirelman, avec leur célèbre travail en 1929 sur l'existence des géodésiques fermées, et Morse, qui a donné les fondations de l'analyse non linéaire.

Une des idées les plus fécondes issues de cette recherche, est la notion de l'existence des points critiques qui est liée à des propriétés topologiques des ensembles de sous-niveaux de la fonctionnelle, dans le sens qu'un changement dans le type topologique de ces sous-niveaux nous assure l'existence d'un point critique, pourvu que des conditions de compacité sont satisfaites.

La systématisation des propriétés de compacité demandées dans le cadre de la dimension infinie est due à Palais et Smale (cf. 1.3.6), qui ont introduit une condition de compacité qui porte leurs noms et est aujourd'hui reconnue comme la notion la plus utilisée dans la théorie des points critiques.

Les deux facteurs qui sont le changement de la topologie et la compacité, ont été beaucoup utilisés par des chercheurs travaillant dans les équations elliptiques semi-linéaires. Les deux résultats les plus célèbres sont le théorème du col (Mountain Pass) (cf. 1.11) démontré par Ambrosetti et Rabinowitz en 1973, et le théorème du point selle (Saddle Point) démontré par Rabinowitz en 1978.

Par des méthodes directes du Calcul des Variations.ainsi que la théorie des points critiques, nous considérons dans cette thèse l'étude de l'existence et la multiplicité d'une certaine catégorie de solutions dite solutions non radiales pour des problèmes de Dirichlet associés à des équations aux dérivées partielles elliptiques dans differents cas. Notre travail tente d'étendre certains résultats comme ceux de [179], [23] et [123].

Cette thèse se compose de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous introduisons les outils nécessaires à la suite de notre travail. Dans le second, nous présentons un résultat d'existence de solutions non radiales multiples pour un problème de Dirichlet dans le cas de perte de symétrie [74]. Nous appliquerons une methode variationnelle pour établir l'existence et la multiplicité des solutions non radiales.

Le chapitre 3 est l'exposé de l'article [27]. Nous y abordons un problème de Dirichlet dans le cas de présence de singularité, se basant sur des résultats du à Lions [135], nous obtenons, en plus d'un résultat d'existence de solutions non radiales, pour un problème de Dirichlet associé au p- Laplacien, un résultat de bifurcation.

Dans le dernier chapitre, nous abordons un problème lié au spectre de Fucik pour le Laplacien (cf. [68]) pour lequel nous determinons des conditions suffisantes permettant l'existence de solutions non radiales dans le cas de résonnance [28].

Finalement, parmi les nombreuses références bibliographiques, nous avons choisi à la fin de ce travail un nombre assez consistant permettant au lecteur interéssé d'avoir accès à quelques sources que nous avons utilisées pour réaliser cette thèse.

Chapitre 1

Préliminaires

Sommaire

1.1 Espaces fonctionnels 9
1.1.1 Espaces de Lebesgue 9
1.1.2 Espace de Sobolev 10
1.2 Quelques définitions et théorèmes 12
1.2.1 Fonction L^p-Carathéodory 12
1.2.2 Théorème d'Ascoli-Arzela 12
1.2.3 Résultat sur la concentration de compacité 13
1.2.4 Convergence forte et Convergence faible 14
1.3 Approche variationnelle 14
1.3.1 Formulation variationnelle 15
1.3.2 Approche variationnelle pour un problème avec singularité 19
1.3.3 Valeur propre du p-Laplacien 20
1.3.4 Spectre de Fučik 21
1.3.5 Caractérisation variationnelle de la première courbe non triviale 22

Dans ce chapitre, nous dressons une liste non exhaustive des principales notations et outils utilisés tout au long de cette thèse. D'autres, plus spécifiques, seront introduites dans le texte. Nous rappelons également divers résultats généraux qui pour la plupart sont accompagnés de références à la bibliographie et seront utilisés dans le texte de manière transparente. Les ouvrages de base utilisés dans ce chapitre sont [127] , [36], [145] et [157].

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces de Lebesgue

Nous commençons par introduire les espaces de Lebesgue.
Pour Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^N$, $D(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact dans Ω.
L'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, +\infty[$ est défini par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable; } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

L^p est muni de la norme $\|u\|_p = \left[\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$. Cette norme le rend complet, c'est donc un espace de Banach.
Pour $p = \infty$,

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable; } ess \sup |u| < +\infty \},$$

$L^\infty(\Omega)$ est muni de la norme suivante: $\|u\|_\infty = ess\sup\limits_\Omega |u|$; avec

$$ess \sup |u| = \inf \{ C > 0; \;\; |u(x)| \leq C \quad p.p \text{ dans } \Omega \}.$$

$L^p(\Omega)$ est reflexif et séparable pour $1 < p < +\infty$ et son dual est isomorphe à $L^q(\Omega)$ avec q le conjugué de p c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Inégalité de Hôlder

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et q le conjugué de p alors :

$$f.g \in L^1(\Omega) \text{ et } \int_\Omega |f.g| \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

lemme de Fatou

Lemme 1.1.1 *Soit (f_n) une suite de fonctions dans $L^1(\Omega)$ telle que, pour chaque n, $f_n(x) \geq 0 \;\; p.p$ sur Ω.Si $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \inf f_n(x)$, pour tout $x \in \Omega$; alors $f \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega f(x) \, dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f_n(x) \, dx,$$

i.e.

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x) \, dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f_n(x) \, dx.$$

Définition 1.1.1 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et ω une fonction poids. Pour $1 < p < \infty$, on définit $L^p(\Omega, \omega)$, l'espace de Banach de toutes les fonctions mesurables u définies sur Ω , telles que*

$$||u||_{L^p(\Omega,\omega)} = \left(\int_\Omega |u(t)|^p \, \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Exemple 1.1.1 *La fonction $\omega(x) = |x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^N$, est une fonction poids si et seulement si $-N < \alpha < N(p-1)$ (cf. [[42], Chapitre 15]). Alors pour $1 < p < N$, $|x|^{-p}$ est une fonction poids.*

1.1.2 Espace de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont omniprésents dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques. Il s'avère donc judicieux d'en faire une brève présentation avant d'aborder ces équations. Nous reprenons dans cette section certains énoncés de Kavian [127] et de Brezis [36], pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev se référer à [145].
Pour Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^N$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial x_J} \in L^p(\Omega), \text{ pour } J \in \{1, ..., N\} \right\},$$

où les dérivées sont au sens des distributions.
$W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \sum_{J=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_J} \right\|_p, \tag{1.1}$$

est un espace de Banach.
L'espace $W^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert, il est noté $H^1(\Omega)$.
$W_0^{1,p}(\Omega)$ denote la complétion de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ i.e $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$, pour $1 \leq p < +\infty$. Où $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$, ensemble des fontions de classe C^∞ a support compact dans Ω. Comme, l'espace $D(\Omega)$ est par définition dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ (pour $1 \leq p < +\infty$), le dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ peut être identifié à un sous-espace de l'espace des distributions $D'(\Omega)$ par:

$$W^{1,q}(\Omega) = \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'; \; q \text{ conjugué de } p.$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme induite par celle de $W^{1,p}(\Omega)$.

Lemme 1.1.2 *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est :*
1. un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.
2. il est réflexif pour $1 < p < \infty$.
3. il est separable pour $1 \leq p < \infty$.

Remarque 1 *Soit* $1 < p < \infty$, *l'espace de Sobolev* $W_T^{1,p}(\mathbb{R})$ *est l'espace des fonctions* T*-périodiques ayant une dérivée faible* $u' \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $W_T^{1,p}(\mathbb{R})$ *est muni de la norme*

$$\|u\|_{W_T^{1,p}(\mathbb{R})} = \left[\int_0^T |u(t)|^p \, dt + \int_0^T |u'(t)|^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Les injections de Sobolev

Les injections de Sobolev sont très utilisées lorsqu'on étudie les équations aux dérivées partielles. Elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes des espaces de Lebesgue. Pour l'espace $W^{k,p}(\Omega)$, on a le résultat suivant.

Théorème 1.1 *Soit* Ω *est un ouvert régulier de* $\mathbb{R}^N$. *Soient* $k \geq 1$ *et* $p \in [1, +\infty)$. *Alors*
a). Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} > 0$, *on a* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *avec* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}$;
b). Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} = 0$, *on a* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *pour tout* $q \in [p; +\infty[$, *(mais pas pour* $q = +\infty$*);*
c). Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} < 0$, *on a* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Toutes ces injections sont continues.
Sans hypothèse de régularité sur Ω, les injections sont vraies localement : $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q_{loc}(\Omega)$ elles restent globalement vraies si on remplace $W^{k,p}(\Omega)$ par $W_0^{k,p}(\Omega)$. Concernant la compacité des injections précédentes, on a le théorème suivant.

Théorème 1.2 ***(Rellich-Kondrachov*** ([36])***):Si*** Ω *un domaine ouvert borné de classe* C^1 *dans* $\mathbb{R}^N$, *alors*
a). Si $p < N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ *pour tout* $q \in [1, p^*[$, *où* $p^* = \frac{N.p}{N-p}$;
b). Si $p > N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ *pour tout* $q \in [1, +\infty[$;
c). Pour tout $q \in]1, +\infty[$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\bar{\Omega})$.

Remarque 2 ***a)*** *La condition sur le domaine* Ω *est nécessaire, si* Ω *n'est pas borné alors les injections ne sont pas compactes en général comme le démontre le contre exemple suivant: Soit* $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ *tel que,* $\phi \geq 0$, *on pose* $\phi_n(x) = \phi(x + ne)$, $e = (1, 1, 1, ..., 1)$, *il est facile de voir que* $\phi_n \to 0$ *p.p. Et* $\|\phi_n\|_{L^q} = \|\phi\|_{L^q} > 0$.
b) *On note* $\alpha(N, q) > 0$, *la constante de Sobolev de l'injection compacte de* $W_0^{1,p}(\Omega) \circlearrowleft L^q(\Omega)$, *avec* $q \in [1, p^*)$ *où* $p^* = \frac{Np}{(N-p)}$. *Ainsi, pour chaque* $u \in W_0^{1,p}$, *nous avons*

$$\|u\|_{L^q} \leq \alpha(N, q) \|u\|. \tag{1.2}$$

Inégalitè de Poincaré

L'inégalité de Poincaré est un résultat de la théorie des espaces de Sobolev. Cette inégalité permet de borner une fonction à partir d'une estimation sur ses dérivées et de la géométrie du domaine sur lequel elle est considérée.
Soit p, tel que $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert borné. Alors il existe une constante C, dépendant uniquement de Ω et p, telle que, pour toute fonction u de l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, nous avons

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_p . \tag{1.3}$$

Remarque 3 *L'inégalité de Poincaré permet d'établir l'équivalence sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *entre la norme* 1.1 *et celle définie par*

$$\|u\| = \sum_{k=0}^{m} \left\|\nabla^k u\right\|_p .$$

Il est évident que l' inégalité (1.3) *ne peut être généralisée à* $W^{m,p}(\Omega)$*. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les fonctions constantes sur* Ω *borné (ou de mesure finie).*

1.2 Quelques définitions et théorèmes

1.2.1 Fonction L^p-Carathéodory

Définition 1.2.1 *Nous rappelons que* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction* L^p*-Carathéodory si*
a). $f(x,u)$ est dans $L^p(\Omega)$ pour chaque $u \in \mathbb{R}$;
b). $f(x,u)$ est continue presque par tous $x \in \Omega$;
c). Pour chaque $\rho > 0$ il existe une fonction $l_\rho \in L^p(\Omega)$ telle que p.p $x \in \Omega$.

$$\sup_{|u|\leq\rho} |f(x,u)| \leq l_\rho(x).$$

1.2.2 Théorème d'Ascoli-Arzela

Définition 1.2.2 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite $(f_n)_n$ est équicontinue ssi :*

$$\forall x \in I,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall y \in I,\ \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon.$$

Autrement dit, toutes les fonctions (f_n) sont continues sur I, et elles sont continues "de la même façon".
La notion d'équicontinuité intervient notamment dans le théorème d'Ascoli-Arzela:

Théorème 1.3 ***(Théorème d'Ascoli-Arzela)***

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle fermé borné I, à valeurs réelles. On suppose que cette suite de fonctions est équicontinue, et qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $|f_n(x)| < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$. Alors on peut extraire une sous-suite (f_{n_k}) qui converge uniformément sur I vers une fonction continue f.

Théorème 1.4 *Soit $(f_n)_n$ une suite de L^p et $f \in L^p$, tels que*

$$\|f_n - f\|_{L^p} \to 0 \text{ lorsque } u \to \infty.$$

Alors il existe une sous suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que
a). $f_{n_k}(x) \to f(x)$ p.p sur Ω;
b). $|f_{n_k}(x)| \le h(x)$ pour tout k et p.p sur Ω avec $h \in L^p(\Omega)$.

1.2.3 Résultat sur la concentration de compacité

Nous énonçons un résultat de concentration de compacité, pour plus de details nous reférons le lecteur [135] et [186].

Théorème 1.5 *(cf. [135])*
Soit $(\rho_n)_{n\ge 1}$ une suite dans L^1 avec

$$\rho_n \ge 0 \text{ dans } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \rho_n dx = \lambda.$$

Où $\lambda > 0$ (λ est fixé). Alors il existe une suite extraite $(\rho_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui vérifie l'une des propriétés suivantes:
(i) Compacité: il existe $(y_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\rho_{n_k}(. + y_k)$ est tendu c-à-d

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R < \infty, \int_{y_k + B_R} \rho_{n_k}(x)\, dx \ge \lambda - \varepsilon;$$

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \int_{y+B_R} \rho_{n_k}(x)\, dx = 0, \text{ pour tout } R < \infty;$$

(iii) Dichotomie: il existe $\delta \in \,]0, \lambda[$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k_0 \ge 1$ et $\rho_k^1,\ \rho_k^2 \in L_+^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ satisfaisant pour $k \ge k_0$

$$\begin{cases} \left\|\rho_{n_k} - (\rho_k^1 + \rho_k^2)\right\|_{L^1} \le \varepsilon, \quad \left|\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \rho_k^1 dx - \delta\right| \le \varepsilon, \quad \left|\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \rho_k^2 dx - (\lambda - \delta)\right| \le \varepsilon \\ dist\,(Supp\rho_k^1,\ Supp\rho_k^2) \underset{k}{\to} +\infty. \end{cases}$$

Remarque 4 *Pour la démonstration de ce théorème voir [180].*

1.2.4 Convergence forte et Convergence faible

Soient X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et $(u_n)_n$ une suite dans X.

Définition 1.2.1 *On dit que la suite $(u_n)_n$ converge fortement vers u dans X si $\|u_n - u\|_E \to 0$ lorsque $n \to \infty$.*

Définition 1.2.3 *$(u_n)_n$ est dite convergente faiblement vers u si $\langle u_n, v\rangle \to \langle u, v\rangle$ $\forall v \in X'$ dual de X et elle est notée par $u_n \rightharpoonup u$.*

Définition 1.2.4 *On dit que $C \subset X$ est faiblement fermé si pour toute suite $(u_n) \subset C$ telle que: $u_n \rightharpoonup u$ alors $u \in C$.*

Théorème 1.6 *Un convexe C de X est faiblement fermé si et seulement si il est fortement fermé.*

Dans le cas particulier de $X = W_T^{1,p}$, nous avons le résultat suivant

Proposition 1.2.1 *Si une suite $(u_k)_k$ converge faiblement vers u dans $W_T^{1,p}$, alors $(u_k)_k$ converge uniformement vers u sur $[0, T]$. Et il existe $C > 0$ telle que pour $u \in W_T^{1,p}$,*

$$\|u\|_\infty \leq C \|u\|_{W_T^{1,p}(\Omega)} \text{ où } \|u\|_\infty = \max_{t\in[0,T]} |u(t)|.$$

Théorème 1.7 ***(Eberlein–Šmulian)*** *Un espace de Banach X est réflexif si et seulement si de toute suite bornée (x_n) de X, on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans X.*

1.3 Approche variationnelle

Dans cette thèse, nous nous sommes basées sur une approche variationnelle pour étudier la solvabilité de problèmes de Dirichlet associés à des EDP elliptiques. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{1.4}$$

où L est un opérateur uniformément elliptique, Ω est un domaine régulier dans $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 1$. Les solutions de (1.4) sont cherchées comme points critiques de fonctionnelles réelles définies sur un espace de Banach X.
Dans le cas où f est minorée ou majorée, il est raisonnable d'essayer de montrer que le minimum ou le maximum est atteint. Pour plus de détails, nous référons le lecteur à [171] et [156].

1.3.1 Formulation variationnelle

Au problème (1.4) on associé une fonctionnelle dite fonctionnelle d'énergie, définie par $J : X \to \mathbb{R}$,

$$J(u) = \langle Lu, u \rangle - \int_\Omega F(x,u)\,dx,$$

où $\langle , \rangle$ denote le produit scalaire dans L^2 et

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)\,ds.$$

Points critiques

Définition 1.3.1 *Soit J une fonctionnelle de classe C^1 définie sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que $u \in X$ est un point critique de J si $J'(u) = 0$.*
La valeur c est dite valeur critique de J s'il existe un point critique $u \in X$ tel que : $J(u) = c$.

Solution faible

Définition 1.3.2 *u est dite solution faible du problème* (1.4) *si*

$$\int_\Omega Lu.\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x).\varphi(x)\,dx \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Définition 1.3.3 *Une fonction $J : X \to \mathbb{R}$, est dite semi-continue inférieurement et on la note (s.c.i), en $x \in X$ si, pour toute suite $\{x_k\} \in X$ convergente vers x,*

$$\liminf_{x_k \to x} J(x_k) \geq J(x).$$

Définition 1.3.4 *Une fonctionnelle J est dite coercive si:* $\lim\limits_{\substack{\|u\| \to +\infty \\ u \in E}} J(u) = +\infty$.

Théorème 1.8 ***(minimisation directe** [171]) Si X est réflexif, $M \subset X$ un sous ensemble faiblement fermé de X. et $J : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, coercive et faiblement semi continue inférieurement sur M, alors J est borné inférieurement dans M et atteint son minimum dans M.*

Définition 1.3.5 ***(Suite minimisante)** Une suite minimisante pour une fonctionnelle $J : X \to \mathbb{R}$ est une suite $(w_k)_k$ telle que $J(w_k) \to \inf J$ quand $k \to \infty$.*

Remarque 5 *L'existence d'une suite minimisante est assurée en particulier quand J est coercive. Un outil essentiel dans le calcul de la variation est la compacité des suites minimisantes. La condition de Palais-Smale joue un rôle assez semblable pour des suites sur lesquelles la fonctionnelle prend des valeurs tendant vers une valeur critique potentielle, et pas seulement vers la borne inférieure. C'est une condition a priori, à vérifier pour chaque fonctionnelle, indépendamment de l'existence ou non des valeurs critiques. Elle sera par contre un outil essentiel pour montrer cette existence dans plusieurs cas.*

Conditions de Palais-Smale

Définition 1.3.6 *Soit $J : X \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On dit que J vérifie la condition de Palais-Smale au niveau $c \in \mathbb{R}$ et le note $(PS)_c$, si de toute suite (u_n) de X telle que*

$$J(u_n) \to c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } J'(u_n) \to 0 \text{ dans } X',$$

on peut extraire une sous-suite convergente.

Théorème 1.9 *Soit $J : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 bornée inférieurement et $c = \inf J$. Si J satisfait la condition $(PS)_c$, alors c est atteint en un point $x_0 \in X$ telle que $J'(x_0) = 0$.*

Ce dernier théorème a une généralisation basée sur une autre condition (PS) introduite par G. Cerami [53].

Remarques

1 La condition de Palais-Smale ne préjuge pas de l'existence d'une valeur critique. Elle dit seulement que si on a une telle suite, celle-ci est nécessairement relativement compacte. Pour l'utiliser effectivement de façon utile, il faudra pouvoir démontrer par un autre biais qu'une telle suite existe.

2 Les deux hypothèses sont indépendantes. En effet, même si $c = \inf_X J$; on peut parfaitement avoir une suite minimisante u_n telle que $J'(u_n) \nrightarrow 0$. Il suffit de prendre $X = \mathbb{R}$, $J(u) = \sin u^2$, $c = -1$, et $u_n = \left(\frac{3\pi}{2} + n2\pi + \frac{1}{\sqrt{n2\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}$ on a $J(u_n) \to -1$ et $J'(u_n) \to 2$.

3 Dans une série d'articles publiés dans les années 1960 (cf. [152], [153], [169]), R. Palais et S. Smale ont introduit une condition de compacité, maintenant appelée condition Palais-Smale, qui fournit l'existence d'une condition d'existence de point critique pour nombreux problèmes variationnels. Divers fonctionnels pertinents provenant de la physique et de la géométrie différentielle ne satisfont cette condition qu'à certains niveaux (cf. [98], [109]); une condition locale, introduite dans [33], est appliquée avec succès dans de nombreux problèmes. Une condition de compacité du type Palais-Smale a été introduite par G. Cerami dans [51]. Voir aussi [52]. C'est un peu plus faible que l'état du Palais-Smale. Les implications les plus importantes sont retenues; (cf. [20]). Les généralisations des deux Palais-Smale et Cerami apparaissent dans [87], [129]. Les applications sont données dans [88], [89], [85]. Voir aussi [142], [177].

Condition de Palais-Smale Cerami La définition de la condition de compacité de Cerami [53] est la suivante.

Définition 1.3.7 *Soit X un espace de Banach et $J : X \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On dit que J vérifie la condition de Palais-Smale Cerami au niveau $c \in \mathbb{R}$ et le note $(PSC)_c$, si de toute suite (u_n) de X telle que*

$$J(u_n) \to c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } (1 + \|u_n\|)\,\|J'(u_n)\| \to 0 \text{ dans } X',$$

on peut extraire une sous-suite convergente.

Le théorème de minimisation suivant est prouvé dans Ekeland [86], p.139.

Théorème 1.10 *Soit $J : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 bornée inferieurement et $c = \inf J$. Si la condition $(PS)_c$ est satisfaite, alors c est minimum de J.*

La preuve est basée sur le principe Ekeland appliqué à l'espace X équipé de distance géodésique.

Le théorème du Col (Mountain Pass Theorem)

Le premier exemple de construction de valeur critique par le procédé de minmax est le théorème du Col de la montagne (en anglais Mountain Pass Theorem) qui exprime très bien le contenu du résultat et sa démonstration: si on se trouve en un point A dans une cuvette à une altitude h_0, entourée de montagnes d'une altitude supérieure ou égale à $h > h_0$; si on veut aller à un point B située en dehors de la cuvette au delà des montagnes, et à une altitude $h_1 < h$, il existe un chemin passant par un col et conduisant de A à B. Pour le trouver il suffit de prendre parmis tous les chemins allant de A à B, celui qui monte le moins haut.

Théorème 1.11 [8] *Soit $J \in C^{\,1}(X, \mathbb{R})$ supposons que J satisfait la condition (PSC), et*
(i) $J(0) = 0$,

(ii) il existe des constantes $\rho > 0$ et $\alpha > 0$ telles que $J(x) > \alpha$ si $\|x\| = \rho$,
(iii) il existe $e \in X$, $\|e\| > \rho$, tel que $J(e) < 0$.
Alors J admet une valeur critique $c > \alpha$ qui peut être caractérisée comme suit

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [01]} J(\gamma(t)),$$

où,

$$\Gamma = \{\gamma \in C([01], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Remarque 6 *a) Nous comprenons mieux pourquoi ce théorème s'appelle théorème du Col, quand nous interprètons géométriquement ou plutôt géographiquement les conditions (i) à (iii) dans le cas où $X = \mathbb{R}^2$ et $J(u)$ représente l'altitude d'un point u (dans $\mathbb{R}^3$). Les conditions (i) et (ii) signifient que l'origine est placée dans une cuvette entourée de montagnes d'altitude au moins α. La condition iii) signifie qu'au delà de ces montagnes existe un point e situé moins haut que les dites montagnes, disons dans une vallée. Par conséquent, il est intuitivement clair que l'on peut joindre continûment 0 à e en passant par un col de montagne et la construction du min-max nous dit comment faire : il suffit de regarder l'altitude maximale atteinte sur chaque chemin et de choisir un chemin qui minimise cette altitude maximale.*
b) Il faut toute fois faire attention à l'intuition montagnarde. Ainsi, le théorème du Col est vrai même si J ne satisfait pas la condition de Palais-Smale quand $X = \mathbb{R}$ (par le théorème des valeurs intermédiaires et celui de Rolle), par contre il est faux quand $X = \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il peut ne pas exister de col car la borne inférieure de l'altitude maximale sur les chemins n'est pas atteinte. Ainsi, par exemple, la fonction

$$J(x_1, x_2) = x_1^2(1 + x_2)^3 + x_2^4,$$

n'a clairement qu'un seul point critique sur $\mathbb{R}^2$, à savoir l'origine où $J = 0$. Ce point critique est un minimum local, donc une cuvette entourée de montagnes, et l'on peut descendre encore plus bas à l'extérieur de la cuvette car $\inf_{\mathbb{R}^2} J = -\infty$. C'est donc un exemple de fonction présentant un seul point critique, qui est un minimum local mais pas global. Comme il n'y a pas d'autre point critique que le minimum local, c'est donc qu'il n'existe pas de col pour sortir de la cuvette. Cela ne peut se produire que si les chemins minimisants partent vers l'infini. Cette perte de compacité est évidemment liée au fait que J ne satisfait pas la condition de Palais-Smale au niveau de l'inf-max.

Théorème 1.12 [14] *Soit $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ vérifiant la condition (PSC). Supposons qu'il existe un espace métrique compact K, et $K_0 \subset K$ une partie fermée et $h_0 \in C(K_0, K)$ telle que*

$$\max_{z \in K_0} J(h_0(z)) < \max_{z \in K} J(h(z)),$$

si
$$c=\inf_{h\in\Gamma}\max_{t\in K}J\left(h(t)\right).$$
où
$$\Gamma=\left\{h\in C(K,X)\setminus h_{|K_0}=h_0\right\},$$
Alors c est une valeur critique de J.

1.3.2 Approche variationnelle pour un problème avec singularité

Dans cette section nous présentons les outils utilisés dans le chapitre 3, où nous abordons un problème de Dirichlet associé à une EDP elliptique en présence de singularité.

Inégalité de Hardy

L'inégalité de Hardy [137] prouve que l'inclusion de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p\left(\Omega,\frac{1}{|x|^p}\right)$ est continue mais n'est pas compact comme l'injection de Sobolev (1.2), pour plus d'informations voir [35], [106]. Elle est donnée par,

$$\int_\Omega\frac{|u(x)|^p}{|x|^p}dx\leq\frac{1}{C_{N,p}}\int_\Omega|\nabla u|^p,\ u\in W_0^{1,p}(\Omega),\tag{1.5}$$

avec, $C_{N,p}=\left(\frac{N-p}{p}\right)^p$.

Application de l'inégalité de Hardy L'inégalité de Hardy a été utilisée dans [106] pour montrer la semicontinuité de fonctionnelles de type,

$$\Phi(u):=\frac{1}{p}\int_\Omega\left(|\nabla u|^p-\frac{\lambda\,|u(x)|^p}{|x|^p}\right)dx-\int_\Omega f(x)\,u(x)\,dx,$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $1<p<N$, $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, f étant une fonction de $L^{p'}(\Omega)$, et λ est un nombre réel positif.
Posons
$$\psi_\lambda(u):=\frac{1}{p}\int_\Omega\left(|\nabla u|^p-\frac{\lambda\,|u(x)|^p}{|x|^p}\right)dx.\tag{1.6}$$
Dans [143] E. Montefusco a montré la semicontinuité inférieure de fonctionnelle $\psi_\lambda(u)$ (1.6) dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, à condition que $\lambda\in[0,C_{N,p}]$, c.a.d λ est tel que la coercivité de la fonctionnelle soit assurée; il a utilisé le principe de concentration de compacité de P. L. Lions (1.5).
Maintenant nous énonçons ce résultat important du à E. Montefusco, présenté et démontré dans [143] concernant la semi- continuité inférieure de la fonctionnelle ψ_λ, et l'outil principal de la démonstration de ce théorème (1.13), formulé

en lemme (1.3.1) et concernant le comportement des suites faiblement convergentes dans les espaces de Sobolev et qui est du à P. L. Lions (cf. [135], [136]).

Théorème 1.13 $[cf : th.3.2 \ de \ [143]]$

Si $\lambda \in [0, C_{N,p}]$; alors $\psi_{\lambda}(u)$ est une fonctionnelle semi continue inférieurement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
La preuve de ce théorème est basée sur le lemme suivant:

Lemme 1.3.1 $[cf : Lemme.3.1 \ de \ [143]]$*:*
Si $\{u_n\}$ *est une suite convergente faiblement dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *vers* u *alors*

$$|\nabla u_n(x)|^p \, dx \to \mu,$$

et

$$\frac{|u_n(x)|^p \, dx}{|x|^p} \to \nu,$$

pour la topologie faible-*, et

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{|u(x)|^p \, dx}{|x|^p} + \nu_0 \delta_0, \\ \mu &\geq |\nabla u(x)|^p \, dx + \mu_0 \delta_0, \qquad 0 \leq \nu_0 \leq \mu_0 / C_{N,p}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

1.3.3 Valeur propre du p-Laplacien

Notion de valeur propre

Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $1 < p < +\infty$; on cherche les couples $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$, avec $u \neq 0$, solutions de

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u & dans \ \ \Omega \\ u = 0 & sur \ \ \partial\Omega \end{cases} \tag{1.8}$$

où $\Delta_p u$ est l' opérateur differentiel défini par :

$$\Delta_p u = \nabla \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right).$$

avec $|\nabla \cdot|^{p-2}$ donné par

$$|\nabla u|^{p-2} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + ... + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right]^{\frac{p-2}{2}}.$$

Définition 1.3.8 *Le réel* λ *est appelé valeur propre, et la fonction* u *fonction propre. L'ensemble des valeurs propres est appelé le spectre de (1.8).*

La suite$(\mu_n)_n$de toutes les valeurs propres de $-\Delta$ sur $H_0^1(\Omega)$ est telle que

$$\mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq .... \to +\infty$$

$(cf\ :\ [157], [158])$. Le théorème de Courant [64] affirme que si u est fonction propre associée à λ_k, alors u admet au plus k domaines nodaux .
Ce théorème a été partiellement étendu au p-Laplacien par Anane–Tsouli [11].
La suite des valeurs propres de $-\Delta_p$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ obtenue par la méthode de Ljusternik–Schnirelman (cf . [103]) est telle que

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq .... \to +\infty$$

Dans le cas linéaire $p = 2$, cette suite $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ....$ coïncide avec la suite précédente $\mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq ....$ (cf . [70]).

1.3.4 Spectre de Fučik

Nous présentons dans cette section un petit aperçu sur le spectre de Fučik du Laplacien et une caractérésation variationnelle de la première courbe non triviale de ce spectre. Ces notions permetront l'introduction du résultat dévelopé dans le chapitre 4.
Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Considérons le problème elliptique

$$\begin{cases} -\Delta u = \alpha u_+ - \beta u_- & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}. \tag{1.9}$$

Le spectre de Fučik est défini par l'ensemble:

$$\Sigma \overset{\text{def}}{=} \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2;\ \exists u \in H_0^1(\Omega), u \not\cong 0 \text{ est solution de } (1.9)\right\}, \tag{1.10}$$

les couples $(\alpha, \beta) \in \Sigma$ sont appelés points du spectre de Fučik ou demi-valeurs propres. Les solutions $u \neq 0$ correspondantes souvent sont appelées solutions propres généralisées. L'ensemble Σ est appelé spectre de Fučik de l'opérateur Laplacien Δ et généralise la notion usuelle du spectre de Δ.
Notons par σ l'ensemble des valeurs propres de $(-\Delta,\ H_0^1(\Omega))$. Il est bien connu que σ est composé d'une suite de nombres positifs tendant vers $+\infty$ et que chaque valeur propre est de multiplicité géométrique finie. Notons par $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq$ ...les valeurs propres répétées suivant leur multiplicité géométrique. Rappelons que la première valeur propre est simple et admet une fonction propre $\varphi_1 > 0$ dans Ω. En utilisant cette dernière propriété on peut montrer facilement que les droites $\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \{\lambda_1\}$ appartiennent à Σ.
Ces deux droites sont appelées la partie triviale de Σ.
Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'étude de ce spectre notamment sa description, ses propriétés topologiques et géométriques et des phénomènes de

non-résonnance. S. Fučik et E. Dancer montrèrent que dans le cas de dimension 1 càd $N = 1$, et $\Omega = (0, T)$ il est facile de voir que Σ est l'union des deux droites $\mathbb{R} \times \{\lambda_1\}$ et $\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}$, et d'une suite d'hyperboles $\Gamma_{n,p}$ définies par:

$$\Gamma_{n,p} := \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2; \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{p}{\sqrt{\beta}} = \frac{T}{p} \right\},$$

où $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, n, p sons des entiers tels que $|n - p| = 0$ ou 1, et $n + p \geq 2$.
Dans [73], pour $N > 1$, l'auteur montre que les lignes $\mathbb{R} \times \{\lambda_1\}$ et $\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}$ sont isolés dans Σ et [76] montre que

$$\Sigma = \mathbb{R} \times \{\lambda_1\} \cup \{\lambda_1\} \times \mathbb{R} \cup C_2 \cup \Sigma^1,$$

avec

$$C_2 = \left\{ (\alpha(r), \beta(r)) \in \mathbb{R}^2 \backslash r > 0 \right\},$$

est une courbe continue, strictement décroissante asymptotique aux lignes $\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \{\lambda_1\}$, avec $\alpha(r) > \lambda_1$ et $\beta(r) > \lambda_1$ pour tout $r > 0$, et l'ensemble Σ^1 est contenu dans la composante de $\mathbb{R}^2 \backslash C_2$ à laquelle le point(λ_1, λ_1) n'appartient pas. Cette construction a été motivé par le travail de Cuesta, [66] dans le cas $N = 1$.
T. Gallouët et O. Kavian (cf. [105]) ont montré quant à eux que si λ_k, avec $k \geq 2$, est simple alors la restriction du spectre de Fučik au carré $(]\lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}[)^2$ est exactement la réunion de deux courbes continues, strictement décroissantes et passant par (λ_k, λ_k). Ces deux courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice. Des résultats similaires ont été obtenus par B.Ruf [164] en utilisant des méthodes différentes.
C. Magalhães (cf. [138]) a généralisé l'étude faite dans [105], dans le cas où λ_k est de multiplicité supérieure ou égale à 1, pour un carré contenant plusieurs valeurs propres et a montré que le spectre de Fučik resreint à ce carré est délimité supérieurement et inférieurement par deux courbes continues strictement décroissantes.

1.3.5 Caractérisation variationnelle de la première courbe non triviale

La caractérisation variationnelle classique de Rayleigh de λ_1 [134],

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega),\ u \neq 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega |u|^2 \, dx},$$

entraîne que $\Sigma \backslash (\{\lambda_1\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{\lambda_1\}) \subset \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha > \lambda_1, \, \beta > \lambda_1\}$.

Il est bien connu que les valeurs propres du Laplacien peuvent s'exprimer comme les valeurs critiques de la fonctionnelle $E : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ définie par:

$$E(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx,$$

restreinte a la variété de classe C^∞,

$$S := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega |u|^2 \, dx = 1 \right\}.$$

Un résultat classique Courant-Hilbert [64] affirme que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_n = \min_{H \in \hat{H}_n} \max_{u \in H \cap S} E(u), \tag{1.11}$$

où $\hat{H}_n$ est la famille de sous-espaces de $H_0^1(\Omega)$ de dimension n. Les applications de la caractérisation variationnelle (1.11) sont multiples dans la résolution des problèmes elliptiques semilinéaires.

Une question largement ouverte est celle de la nature variationnelle des valeurs α et (ou) β d'un point $(\alpha, \beta) \in \Sigma$. Vue la nature non linéaire du spectre de Fučik il y a eu des généralisations d'autres formules min-max différentes de (1.11) des valeurs λ_n [69].

En 1988 Gallouet et Kavian [105] et [164] ont réussit a montrer l'existence d'au moins deux courbes (pas nécessairement différentes) passant par chaque point (λ_k, λ_k) et contenues dans le rectangle $[\lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}]^2$. Leur méthode consistait a perturber la fonctionnelle $E(u)$ dans la dernière caractérisation min-max de λ_n dans 1.11. Plus tard, dans [67] la première courbe non triviale de Σ passant par (λ_2, λ_2) dans le cas $N = 1$ a été caractérisé, par une méthode tout à fait différente. La méthode a été utilisée ensuite par [76] pour construire une courbe passant par (λ_2, λ_2) dans le cas $N > 1$. A la différence du résultat de [126], les propriétés de cette courbe sont bien mises en évidence dans [76], notamment le fait d'être la première courbe non triviale de Σ et d'être asymptotique a la droite $\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}$. le résultat s'énonce comme suit,

Théorème 1.14 [*68*] *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné. Il existe une courbe notée C_2 telle que,*

$$C_2 = \left\{ (\alpha(s), \beta(s)) : s \in \mathbb{R}^+ \right\}, \tag{1.12}$$

contenue dans Σ, symétrique par rapport à la diagonale, strictement décroissante, lipschitzienne et telle que

$$\lim_{s \to 0} \alpha(s) = \lim_{s \to +\infty} \beta(s) = +\infty, \lim_{s \to 0} \beta(s) = \lim_{s \to +\infty} \alpha(s) = \lambda_1.$$

De plus C_2 est la première courbe non triviale de Σ dans le sens que dans le segment $((\lambda_1, \lambda_1), (\alpha(s), \beta(s)))$ il n'y a pas de points de Σ.

Concernant la caracterisation du spectre de Fučik et les travaux utilisant les propriétés de ce spectre, nous pouvons citer [126], [76].

Chapitre 2

Problème de perturbation

Sommaire

2.1 Introduction **25**

2.2 Formulation du problème **30**

2.2.1 Notion de solution non radiale 31

2.3 Formulation variationnelle **31**

2.4 Résultat principal **32**

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de la solvabilité du problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) + g(x) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{2.1}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$, $(N > 2)$ avec $\partial\Omega$ est un bord lisse, $0 \in \Omega$; Δ_p l'opérateur p-Laplacien déféni par

$$\Delta_p u = \nabla\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right).$$

où $|\nabla \cdot|^{p-2}$ est défini par

$$|\nabla u|^{p-2} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2\right]^{\frac{p-2}{2}}.$$

Dans le cas où $p = 2$, ($\Delta_p u = \Delta u$: Le laplacien de u), ce problème a été amplement étudié par exemple, par Coffman [59], Hempel [115], Ambrosetti- Rabinowitz [7], Rabinowitz [158]; dans le cas où $g = 0$ et $f(x,u) := u\,|u|^{k-1}$,

tel que $1 < k < \frac{N+2}{N-2}$ et $N \geq 3$ ou bien $1 < k < +\infty$ et $N = 2$. Dans ces travaux, les auteurs ont utilisé le théoreme de Lusternik-Schnirelmann ou plutôt la notion du genre pour un ensemble symétrique. Par conséquent, le fait que la non-linéarité f dans le problème (2.1) soit impaire par rapport à sa deuxième variable est essentiel pour l'application de ces techniques. (Notre travail étudie le cas de perte de cette symétrie).
Beaucoup d'auteurs se sont penchés sur l'existence et la multiplicité de solutions radiales pour le problème (2.1), dans le cas où $g = 0$, voir par exemple [128], [?], [147], [151], [24]. Cependant, ils ne jettent aucune lumière sur la façon d'étendre ces travaux à l'existence de solutions non radiales. En fait, malgré le développement intense de la recherche sur les solutions radiales à des problèmes comme (2.1), ou autres dans le cas où $g = 0$, les résultats sur l'existence de solutions non radiales est loin d'être aussi abondants. Nous citons les travaux précurseurs de G. J. Butler [40], et B. L. Shekhter [168]. Et ceux de [21], [182], [4], [48], [47], [25], [99], [80], [24], ces derniers temps.
Dans ce qui suit nous donnons un petit aperçu sur la recherche de solutions non radiales pour differents problèmes aux limites associés au Laplacien, dans le cas où $g = 0$. anterieure à notre travail [21, 182, 48, 47, 1, 99, 24]
Tout d'abord pour les problèmes de Dirichlet sur des domaines bornés objet de notre travail, nous citerons les travaux suivants:
A. Castro et B. Finan [48] (2000) , ont étudié le problème suivant:

$$\begin{cases} \Delta u + f\ (u) = 0 & x \in \Omega_\varepsilon \\ u > 0 & x \in \Omega_\varepsilon \\ u = 0 & x \in \partial\Omega_\varepsilon \end{cases}, \tag{2.2}$$

où

$$\Omega_\epsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : 1 - \epsilon < |x| < 1 \right\},$$

et la non-linéarité f est de classe $C^1(\mathbb{R})$ et satisfait aux conditions suivantes;

(h_0) $f\ (0) = 0$ et $f\ '(0) < \lambda_1$ avec λ_1 est la première valeur propre de $-\Delta$.

(h_1) $\lim\limits_{|x| \to \infty} \frac{f\ (u)}{u} = +\infty$.

Si pour tout entier $k > 0$ il existe un $\epsilon_1(k) > 0$ telle que $0 < \varepsilon < \epsilon_1(k)$, les auteurs ont montré par approche variationnelle que le problème (2.2) possède k solutions non radiales positives distinctes.
H. Aduen et A. Castro dans [1] (2000) , ont considéré le problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u + f\ (u) = 0 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{2.3}$$

où Ω est la boule unité de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 superlinéaire au voisinage de ∞, et f n'est pas impaire, et sous les hypothèses suivantes, (reliant f, $f\ '$et sa primitive $F(t) = \int_0^t f\ (\zeta)\, d\zeta$).

(h0) Il existe des constantes $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\rho > 0$, $\omega > 1$ et $p \in \left]1, (n+2/n-2)\right[$ tel que $|t| \geq \rho$,

$$\mu_1 \left|f'(t)\right|^{\frac{p+1}{p-1}} \leq \Phi_\omega(t) \leq \Phi_1(t) \leq \mu_1 \left(\frac{1}{2} tf\ \ (t) - F(t)\right),$$

avec $\Phi_s(t) := 2nF(t) - s(n-2)\,tf\ \ (t)$,pout tout $t \in \mathbb{R}$.

(h1) Il existe $\mu_3 > 0$ telle que $t^2 f'(t) - tf\ \ (t) \geq \mu_3$ pour $|t| \geq \rho$.

Les auteurs ont montré en utilisant l'indice de morse que le problème (2.3) possède une suite de solutions non radiales non bornée.
Maintenant concernant les problèmes de Newmann sur un domaine borné, nous passons en revue quelques travaux :
Dans [182] (1994) , le problème considéré est,

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^p, \quad u > 0 & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial v} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{2.4}$$

où $\lambda > 0$ et $p \leq \frac{N+2}{N-2}$), et v est l'unité de la normale extérieure à $\partial\Omega$.
L'auteur s'est intéressé en particulier à l'existence de solutions non radiales et par approche variationnelle; il a établi l'existence d'une suite de solutions non radiales pour $N \geq 3$ quand Ω est un domaine radiale et symétrique. Remarquons que lorsque la condition au bord de Neumann est remplacée par la condition de Dirichlet le résultat Gidas-Nirenberg bien connu [107] affirme que les solutions positives doivent être radialement symétrique. Cependant, Z.Q. Wang montra que contrairement au problème de Dirichlet, (2.4) possède de nombreuses solutions non radiales lorsque Ω est une boule.
D. Cao, P. Han [47] (2003) , ont étudié le problème suivant,

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2} u + \mu |u|^{q-2} & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial v} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases},$$

où Ω est la boule unité dans $\mathbb{R}^N$ centrée à l'origine, $N \geq 3$, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ et $1 < q < 2$, $\mu > 0$.
En coupant la boule unité en des secteurs angulaires et en utilisant la méthode variationnelle pour faire face à un problème aux limites mixtes sur ces domaines, ils ont démontré l'existence d'une infinité de solutions non radiales avec une énergie positive pour les petits μ $(0 < \mu < \mu^*)$.
Des résultats d'existence de solutions non radiales ont été obtenu dans le cas où le domaine est non borné, par exemple :
Dans [21] (1993) , les auteurs ont considéré le problème suivant:

$$\begin{cases} \Delta u + b(|x|)\, u = f(|x|, u), & x \in \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases},$$

où b est une fonction minorée par une constante positve et f vérifiant

(h1) $f \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, il existe deux constantes positives a_1, R telle que pour tout $r \geq 0$, $|u| \geq R$

$$|f(r,u)| \leq a_1 |u|^q \,;\ \text{avec } 1 < q < \frac{N+2}{N-2}. \tag{2.5}$$

(h2) f impaire en u.

Ils ont montré l'existence d'une suite de solutions non radiales si $N = 4$ ou $N \geq 6$. en se basant sur le théorème de Fountain (cf. [22] th. 2.5).
Et, G. Francesca, G. Massimo, N. Sérgio [99] (2013) , ont considéré le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = (N+\alpha)(N-2)|x|^{\alpha} u^{\frac{N+2+2\alpha}{N-2}} & x \in \mathbb{R}^N \\ u > 0 & x \in \mathbb{R}^N \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}, \tag{2.6}$$

avec $N \geq 3$, ils ont étudié l'existence de solutions non radiales qui bifurquent à partir d'une radiale quand α est un entier pair.
Le problème considéré dans [5] (2016), est

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^{\alpha} F(u) & x \in \mathbb{R}^N \\ u > 0 & x \in \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0 \ \text{ qd} & |x| \to +\infty \end{cases}, \tag{2.7}$$

Où $\alpha > 0$ qui est dans un intervalle ouvert $J \subset [0,+\infty)$ et $N \geq 3$ et $F \in C^1[0,+\infty)$, telle que $F(0) = 0$, $F'(0) = -m < 0$.
Les auteurs montrent en utilisant l'indice Morse que le problème (2.7) possède des solutions non radiales qui bifurquent de solution radiale (α_J, u_{α_J}) avec $\alpha_J = 2i \in \mathbb{N}$.
Dans [24] (2015) , l'étude du système d'équations elliptiques suivant est considérée,

$$\begin{cases} -\Delta u + u = F_u(|x|, u, v) \\ -\Delta v + v = F_v(|x|, u, v) \\ u,\ v \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases},$$

il a montré que, si F est pair en (u,v) et satisfait une certaine condition de croissance, le système admet une infinité de solutions à la fois radiales et non radiales. La preuve repose sur le principe introduit dans [162] et le théorème de Fountain.
Nous devons faire la remarque que très peu de travaux abordent la question d'existence de solutions non radiales pour des EDP faisant intervenir le p-Laplacien nous citerons quelques résultats récents [146], [96], [44].

V. Felli, M. Schneider [96] (2003), ils ont considéré le problème elliptique suivant dans $\mathbb{R}^N$ de dimension $N \geq 3$:

$$-\operatorname{div}\left(|x|^{-2a} \nabla u\right) - \frac{\lambda}{|x|^{2(1+a)}} u = k(x) \frac{u^{p-1}}{|x|^{bp}} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \tag{2.8}$$

où

$$\begin{aligned} -\infty &< a < \frac{N-2}{2}, \quad -\infty < \lambda < \left(\frac{N-2a-2}{2}\right)^2, \\ p &= p(a,b) = \frac{2N}{N-2(1+a-b)} \text{ et } a \leq b < a+1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Supposons a, b, p satisfait (2.9) le problème (2.8) possède une solution non radiale. Ils ont utilisé la méthode variationnelle perturbative [10].
F. Catrina, [44] (2006) , il a considéré le problème suivant

$$-\operatorname{div}\left(|x|^{-2a} \nabla u\right) = \frac{\lambda}{|x|^{2(1+a)+c}} u + \frac{u^{p-1}}{|x|^{bp}}, \; u > 0 \quad \text{dans } B, \; u \in D_a(B), \tag{2.10}$$

avec $D_a(B)$ désigne l'espace de Hilbert obtenu comme l'achèvement des fonctions lisses avec support compact dans B sous la norme induite par le produit interne

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega |x|^{-2a} \nabla u . \nabla v dx.$$

Et

$$\begin{aligned} N &\geq 2, \; a < \frac{N-2}{2}, \; a < b < a+1, \\ p &= \frac{2N}{N-2(a+1-b)}, \; 0 < c. \end{aligned}$$

L'auteur a montré, en utilisant la méthode de l'itération de Moser et l'inégalité de Harnack [144], que le problème (2.10) possède une solution non radiale.
M. Musso, J. Wei, [146] (2012) , ils ont considéré le problème suivant

$$\nabla\left(|x|^{-2a} \; \nabla u\right) + |x|^{-\frac{2N}{N-2}a} |u|^{\frac{4}{N-2}} u = 0, \; \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \tag{2.11}$$

avec $N \geq 5$, $a < 0$ ou bien $a > N-2$.
Donnant suite au travail de Catrina-Wang [45], ils ont montré l'existence de solutions (radiale ou non radiale) au problème (2.11) quand $a < 0$. Et, pour $a > N-2$, ils établissent l'existence de solutions pouvant changer de signe pour le problème (2.11) .
Le problème (2.1) est considéré dans ce chapitre dans le cas où la non linéarité f a une croissance sublinéaire en 0, i.e

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(r,u)}{|u|^{p-1}} = +\infty, \; \text{pour presque tous } r \in [0, R];$$

ce genre de nonlinéarité n'a pas été largement étudié dans le passé, nous ne disposons dans la littérature que de peu de travaux sur ce sujet. Dans le cas des équations différentielles ordinaires, le livre de M. A. Krasnoselskii, A. I. Pera, A. I.Povolotskiy et P. P. Zabreiko [128] [6, Section 22]. E. W. C. Van Groesen [178], a considéré une hypothèse sur le comportement de f au voisinage de ∞ en plus de la croissance sublinéaire en 0. En utilisant une approche variationnelle de Min-Max, il a établi l'existence de trajectoires périodiques multiples. Et dans [179] le problème (2.1) est considéré avec $N = 2$ et $g = 0$, il a montré l'existence d'une suite de solutions radiales et non radiales, la preuve de ce résultat se base sur une approche variationnelle avec application du lemme du col (mountain pass theorem). Et dans des travaux plus récents, F.Alessio, W.Dambrosio [4] ont généralisé ce résultat au cas où $N > 2$.
Une question naturelle est de savoir si le nombre infini de solutions persiste pour le problème (2.1) sous l'effet de perturbations de l'équation originale. c'est à dire lorsque $g \neq 0$, dans le cas de perte de symétrie. Le premier résultat dans cette direction pour $N \geq 2$ est un théorème de perturbation de A. Ambrosetti [6] indiquant, dans le cas où $f(x,u) = |u|^{k-1} u$, $k > 1$, que pour tout nombre $\nu \in \mathbb{N}$, il existe $\epsilon_\nu > 0$, de telle sorte que si $\|g\|_{L^2} < \epsilon_\nu$, alors le problème (2.1) possède au moins ν solutions distinctes. Un résultat plus général de multiplicité-perturbation a été obtenue par A. Bahari, H. Berestycki [19]. Nous citons également [156] et [171].
Remarquons que l'existence d'au moins une solution de (2.1) pour g assez petit est une application directe du théorème de fonctions implicites.
Le résultat que nous obtenons pour (2.1) dans ce travail peut être considéré comme une réponse à la question mentionnée ci-dessus dans le cas de solutions non radiales (cf. 2.2.1).

2.2 Formulation du problème

Dans ce chapitre, nous considérons le problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(|x|, u) + g(x) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \Omega \end{cases}, \tag{2.12}$$

où $\Omega = B(0,R)$ est la boule de $\mathbb{R}^N$, de centre 0 et de rayon R; $N > 2$, $1 < p < N$, $|x| := \sqrt{\sum_{J=1}^{N} x_J^2}$, est la norme euclidienne de x dans $\mathbb{R}^N$, g et f deux fonctions vérifiant les hypothèses suivantes

(H_1) (i) $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est une fonction de Carathéodory radiale, et impaire par rapport à la second variable, c.à.d

$$\text{pour presque tout } x \in \Omega, \text{ et tout } s \in \mathbb{R}. f(|x|, s) = -f(|x|, -s)$$

(ii) $\lim\limits_{|u|\to+\infty}\frac{f(|x|,u)}{|u|^{p-1}}=0$, uniformément pour presque tout $x\in\Omega$.

(iii) $\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(|x|,u)}{|u|^{p-1}}=+\infty$, uniformément pour presque tout $x\in\Omega$.

(H_2) $g:\Omega\to\mathbb{R}$, est une fonction bornée de $L^q(\Omega)$, tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

La fonction g constitue une perturbation de l'EDP $-\Delta_p u=f(|x|,u)$.

2.2.1 Notion de solution non radiale

Nous commençons par introduire la paramétrisation standard de $\Omega=B(0,R)$ en coordonnées polaires $(r,\theta_1,...,\theta_{N-1})$,

$$\Omega=\{(r,\theta_1,...,\theta_{N-1})\,;\ |x|=r\in[0,R]\,,\ \theta_i\in[0,\pi]\,,\ i=1,...,N-2,\ \theta_{N-1}\in[-\pi,\pi]\}\,. \tag{2.13}$$

Définition 2.2.1 *On appelle solution non radiale de* (2.12) *toute solution qui ne dépend pas seulement de* r*, mais de* θ_i *aussi.*

Définition 2.2.1 *[178] Une valeur propre est dite radiale (respectivement non radiale) si sa fonction propre associée est radiale (respectivement non radiale).*

2.3 Formulation variationnelle

Nous définissons la fonction F par:

$$F(|x|,u):=\int_0^u f(|x|,s)\,ds.$$

Et nous considérons la fonctionnelle associée à (2.12),

$$J(u)=\int_\Omega\left[\frac{1}{p}|\nabla u|^p-F(|x|,u)-g(x).u(x)\right]dx, \tag{2.14}$$

La fonctionnelle J est bien définie dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. J est une fonctionnelle différentiable pour tout $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, de dérivée $J'(u)\in\left(W_0^{1,p}\right)^*(\Omega)$ qui, pour tout $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$, est définie par,

$$J'(u)(v)=\int_\Omega|\nabla u|^{p-1}\nabla v dx-\int_\Omega f(|x|,u(x))v dx-\int_\Omega g(x)\,v dx. \tag{2.15}$$

Les solutions faibles de (2.12) sont cherchées comme points critiques de la fonctionnelle (2.14).

2.4 Résultat principal

Nous avons un résultat d'existence et de multiplicité de solutions nonradiales pour le problème considéré (2.12).

Théorème 2.1 *: Sous les hypothèse* $(H_1), (H_2)$ *le problème* (2.12) *admet une suite* $(u_k)_{k\geq 1}$ *de solutions non radiales bornée dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve: Pour prouver ce résultat, nous adaptons une approche variationnelle. Évidemment, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est un point critique de la fonctionnelle J (2.14), alors u est une solution faible de problème (2.12).
Pour obtenir la multiplicité de solutions non radiales nous cherchons des solutions périodiques en θ_{N-1} sur les ensembles E_k, $k = 1, 2, ...$définis par

$$E_k = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega)\, ;\ u(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, .) \text{ impaire, et } \frac{2\pi}{k} \text{ périodique} \right\}. \quad (2.16)$$

Les ensembles E_k, $k \geq 1$, sont des contraintes naturelles pour le problème (2.12), dans le sens que chaque point critique de la fonctionnelle d'énergie J associée à (2.12) sur E_k, est un point critique de J, sur tout l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ (cf. [179]). Pour prouver l'existence d'un point critique pour la fonctionnelle J, sur E_k, nous considérons et montrons quelques résultats auxiliaires.

Lemme 2.4.1 *Supposons que* $(H_1)\,(i)-(ii)$ *est vérifiée alors :*
1- *L'ensemble* E_k *est faiblement fermé dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *pour tout* $k \geq 1$.
2- *La fonctionnelle* J *est semi continue inferieurement et coercive dans* E_k.

Preuve: ***1-*** *L'affirmation 1 du lemme* (2.4.1), *est une conséquence de la nature de l'ensemble* E_k, *qui est convexe et fortement fermé alors* E_k *est faiblement fermé (cf.* (1.6) *chap1).*
E_k *est convexe en effet, soient* $u, v \in E_k$

$$\begin{aligned} & tu(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, -\theta_{N-1}) + (1-t)\, v(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, -\theta_{N-1}) \\ = \; & -[tu(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1}) + (1-t)\, v(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1})]. \end{aligned}$$

Donc $tu + (1-t)\, v$ *est impaire.*

$$\begin{aligned} & tu\left(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1} + \frac{2\pi}{k}\right) + (1-t)\left(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1} + \frac{2\pi}{k}\right) \\ = \; & tu(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1}) + (1-t)(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1}). \end{aligned}$$

Donc $tu{+}(1-t)\, v$ *est impaire et périodique en* θ_{N-1} *. Alors* $tu{+}(1-t)\, v \in E_k$ $\forall t \in [0, 1]$. *Par conséquent* E_k *est convexe.*

Montrons que E_k est fortement fermé:
Soit $(u_n)_n \subset E_k$ tel que $u_n \to u$, montrons que $u \in E_k$.
Nous avons $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ car $W_0^{1,p}(\Omega)$ est complet

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\\
\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

d'aprés théorème (cf. (1.4) chap1) nous obtenons

$$u_{n_k} - u \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad p.p \text{ sur } \Omega.$$

Nous avons $x \in \Omega$, $x = (r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1})$

$$\begin{aligned}
u(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, -\theta_{N-1}) &= \lim_{n\to\infty} u_n(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, -\theta_{N-1}) \quad p.p \text{ sur } \Omega\\
&= \lim_{n\to\infty} -u_n(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1})\\
&= -\lim_{n\to\infty} u_n(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1})\\
&= -u(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u\left(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1} + \frac{2\pi}{k}\right) &= \lim_{n\to\infty} u_n\left(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1} + \frac{2\pi}{k}\right)\\
&= u(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1}),
\end{aligned}$$

donc $u \in E_k$.
E_k est convexe et fortement fermé alors E_k est faiblement fermé.
***2-** Vérifions la semi continuité inferieurement de J. Soit $(u_n) \subset E_k$, telleque $u_n \rightharpoonup u$ montrons que $J(u) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(u_n)$*

$$J(u_n) = \int_\Omega \left[\frac{1}{p}|\nabla u_n|^p - F(|x|, u_n) - g(x).u_n(x)\right] dx,$$

$W_0^{1,p}(\Omega)$ étant un espace de Banach, alors la norme $\|.\|$ est faiblement semi continue [185], utilisant l'hypothèse $(H_1)(i)$ et le lemme de Fatou (cf. (1.1.1) chap1), nous obtenons que la fonctionnelle J est semi continue inferieurement.
Montrons maitenant que J est coercive dans E_k, c'est-à-dire $\lim_{\substack{\|u\|\to+\infty \\ u\in E_k}} J(u) = +\infty$.
$(H_1)(ii)$ implique que, pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, de telle sorte que, pour presque tout $x \in \Omega$,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta(\epsilon) > 0;\ \ |u| > \delta(\epsilon) \Longrightarrow \frac{|f(|x|, u)|}{|u|^{p-1}} \leq \epsilon,$$

ce qui entraine,

$$|f(|x|,u)| \leq \varepsilon |u|^{p-1} \quad pour\ tout\ |u| > \delta(\epsilon),$$

d'aprés $(H_1)(i)$ *on a* f *est continue en* u, *alors pour tout* $u \in \mathbb{R}$

$$F(|x|,u) \leq \frac{\epsilon}{p}|u|^p + \max_{|u|\leq\delta}|F(|x|,u)|.$$

Par conséquent,

$$\int_\Omega F(|x|,u)\,dx \leq \int_\Omega \left(\frac{\epsilon}{p}|u|^p + \max_{|u|\leq\delta}|F(|x|,u|\right)dx = \frac{\epsilon}{p}.\|u\|_{L^p}^p + C,$$

avec, $C = C(\delta) := \int_\Omega \max_{|u|\ \leq\delta}|F(|x|,u)|\,dx < +\infty.$

D'autre part utilisant (H_2) *et l'inégalité de Hőlder* (*cf.* (1.1.1) *chap1*), *nous obtenons,*

$$\int_\Omega g(x)\,u(x)\,dx \leq \|g\|_{L^q}\|u\|_{L^p}. \tag{2.17}$$

Donc

$$J(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\epsilon}{p}.\|u\|_{L^p}^p - C(\delta) - \|g\|_{L^q}\|u\|_{L^p}.$$

Maintenant, par application du théorème (*cf.* (1.2) *chap1*) *nous obtenons*

$$\|u\|_{L^p} \leq c(N,p)\|u\|_{W_0^{1,p}} \quad tel\ que\ c(N,p) > 0,$$

ce qui entraine,

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p(1-\epsilon.c(N,p)) - \|g\|_{L^q}\|u\|_{L^p} - C(\delta) \\ &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p(1-\epsilon.c(N,p)) - \|g\|_{L^q}c(N,p)\|u\| - C(\delta), \end{aligned}$$

alors, pour $\epsilon < \frac{1}{2c\ (N,p))}$, $\lim_{\|u\|\to+\infty} J(u) = +\infty$. *Cela implique que* J *est coercive.*
D'après le lemme (2.4.1) E_k *est faiblement fermé dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *et* J *est semi continue inférieurement et coercive dans* E_k. *Nous déduisons que* J *est bornée inférieurement dans* E_k. ■

Posons

$$m_k = \inf_{E_k} J.$$

Le lemme suivant, nous donne une minoration sur, $\{m_k,\ k \in \mathbb{N}^*\}$.

Lemme 2.4.2 *Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$,

$$-\infty < m_1 \leq m_k < 0.$$

Preuve: 1- $m_k = \inf\limits_{E_k} J$ et la fonctionnelle J est coercive. D'où

$$-\infty < m_k = \inf_{E_k} J(u), \ \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

2- Et $u \in E_k$, donc u est impaire et $\frac{2\pi}{k}$ périodique en θ_{N-1}, en particulier, elle est impaire et $k\frac{2\pi}{k} = 2\pi$ périodique en θ_{N-1}
ce qui entraine que $u \in E_1 \Rightarrow E_k \subset E_1$. De plus nous avons: $\inf\limits_{E_1} J(u) \leq \inf\limits_{E_k} J(u)$ alors: $m_1 \leq m_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ nous considèrons l'ensemble suivant :

$$\Omega_k := \left\{(r, \theta_1, ..., \theta_{N-1}) \in \Omega; \theta_{N-1} \in \left[0, \frac{\pi}{k}\right)\right\}.$$

Soit λ_n la première valeur propre de $-\Delta_p$ dans $W_0^{1,p}(\Omega_k)$ telle que $\lambda_n > 1$, et v_n^k la fonction propre associée à λ_n, pour plus de détails sur les valeurs propres de $-\Delta_p$ (cf. [11]) $v_n^k \in L^\infty$.
Soit v_n le prolongement impaire de v_n^k dans Ω. Alors $v_n \in E_k \cap L^\infty$, et nous avons

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^p \, dx = 2k \int_{\Omega_k} \left|\nabla v_n^k\right|^p dx = 2k\lambda_n \int_{\Omega_k} \left|v_n^k\right|^p dx = \lambda_n \int_\Omega |v_n|^p \, dx, \quad (2.18)$$

en appliquant $(H_1) - (iii)$, il existe $\beta := \beta(\lambda_n) > 0$, telle que

$$F(|x|, u) > \frac{\lambda_n}{p} |u|^p, \text{ si } |u| \leq \beta.$$

Considérant

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}(J(u) + J(-u)), \quad (2.19)$$

nous voyons que

$$\Psi(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{p} |\nabla u|^p - F(x, u)\right] dx.$$

Soit $s \in \left]\frac{-\beta}{1+\left\|v_n^k\right\|_{L^\infty}}, \frac{\beta}{1+\left\|v_n^k\right\|_{L^\infty}}\right[$, alors $\left|sv_n^k\right| < \beta$ et

$$\begin{aligned}
\Psi\left(sv_n^k\right) &= \int_\Omega \frac{1}{p} \left|\nabla sv_n^k\right|^p dx - \int_\Omega F(x, sv_n^k) dx \\
&\leq \frac{1}{p}\left(\int_\Omega \left|\nabla sv_n^k\right|^p dx - \int_\Omega \lambda_n \left|sv_n^k\right|^p dx\right) \\
&\leq \frac{|s|^p}{p}[1 - \lambda_n] \int_\Omega \left|\nabla v_n^k\right|^p dx < 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après (2.19), $J\left(sv_n^k\right) < 0$ ou $J\left(-sv_n^k\right) < 0$, ce qui entraine

$\inf\limits_{E_k} J_k < 0.$
Delà nous concluons que $m_k < 0$. ■

Lemme 2.4.3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ il existe $u_k \in E_k \setminus \{0\}$, solution non radiale de (2.12) telle que $J(u_k) = m_k$. De plus, il existe $M > 0$ telle que*

$$\|u_k\| \leq M \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*. \tag{2.20}$$

Preuve: *L'ensemble E_k faiblement fermé convexe, et la fonctionnelle J est semi continue inferieurement et coercive dans E_k, par application du théorème (cf. (1.8) chap1) nous concluons que J est bornée inférieurement est atteint son minimum sur E_k c'est-à-dire il existe $u_k \in E_k$ tel que $m_k = \inf\limits_{E_k} J(u) = J(u_k)$.*
Ainsi qu'il a été déjà remarqué que, u_k est une solution faible du problème (2.12). Puisque $u_k \neq 0$ et u_k est impaire et $\frac{2\pi}{k}$ périodique en θ_{N-1}, alors u_k est une solution non radiale de (2.12).
Par définition de m_k et application du lemme $(2.4.2)$, nous avons,

$$m_1 \leq m_k = J(u_k) < 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*,$$

ce qui entraine,

$$|J(u_k)| < |m_1|. \tag{2.21}$$

Par conséquent, il existe $M > 0$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\|u_k\| < M. \tag{2.22}$$

En effet, si $(\|u_k\|)_k$ n'est pas bornée, il existe $k_0 \geq 1$; de telle sorte que $\|u_{k_0}\| \to +\infty$, alors la coercivité de la fonctionnelle J implique $\|J(u_{k_0})\| \to +\infty$, ce qui est une contradiction à (2.21). ■

A partir des lemmes ci-dessus $(2.4.1)$, $(2.4.2)$, le problème (2.12) admet une suite de solutions non radiales satisfaisant (2.22) et la démonstration du théorème (2.1) est achevée. ■

Exemple 2.4.1

Nous considérons (2.12) avec, $N = 4$, $p = 3$

$$f(|x|, u(x)) := u^{\frac{1}{3}} \cos\left(u.e^{-|x|^2}\right),$$

$$g(x) = \prod_{i=1}^{4} \sin x_i.$$

g est une fonction continue sur Ω borné.
g et f satisfont les hypothèses (H_1) et (H_2). L'application du théorème (2.1) donne l'existence d'une suite de solutions non radiales du problème (2.12).

Chapitre 3

Problème singulier

Sommaire

3.1 Introduction **38**

3.2 Formulation du problème **41**

3.3 Résultats **41**

3.3.1 Resultat d'existence 41

3.3.2 Résultat de bifurcation 46

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons des problèmes présentant des singularités du type suivant ,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta_p u = \mu \frac{g(|x|)|u|^{p-2}u}{|x|^p} + \lambda f(|x|, u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{array} \right. , \tag{3.1}$$

où, Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$ avec $\partial\Omega$ est un bord lisse, $0 \in \Omega$, $|x|$ est la norme euclidienne de x dans $\mathbb{R}^N$, λ et μ sont des paramètres positifs et f, g sont des fonctions radiales satisfaisant à certaines conditions précisées par la suite. Nous nous proposons de montrer l'existence de solutions nonradiales bien que tous les termes figurant dans l'équation differentielle sont radiaux. Nous commençons par donner un petit aperçu sur la recherche précédant notre travail et concernant le problème (3.1) .
Le problème (3.1) peut être écrit sous la forme plus générale,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta_p u = \mu \frac{g(x)|u|^{p-2}u}{|x|^p} + \varphi(\lambda, x, u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{array} \right. , \tag{3.2}$$

dans les dernières années, le problème (3.2) avec $\mu = 0$, $\varphi(\lambda, x, u) = \lambda f(u)$ a été largement étudié [73, 112, 160]. Dans le cas $p = 2$, il existe de nombreuses publications traitant *l'existence de solutions* pour (3.2), avec $\varphi(\lambda, x, u) = Q(x)|u|^{2^*-2}u + \lambda u$, telle que $2^* = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev [95, 163, 46, 148, 113, 81].
Quand $\mu \neq 0$, la situation est différente à cause de la présence du potentiel singulier. Les problèmes quasilinéaires avec singularité sont largement étudié dans la littérature, nous renvoyons le lecteur au livre de Drabek et al. [83] et pour l'existence et la multiplicité de résultats concernant le problème p-Laplacien singulier, voir [91, 92, 114, 135, 136], et les références qui y figurent. Les résultats dépendent en général de la relation entre λ et la meilleure constante dans l'inégalité de Hardy. Pour plus de commodité du lecteur, nous donnons un bref résumé de certains résultats anterieurs.
Dans [95] (2001), les auteurs par des méthodes variationnelles en particulier l'application du theorème de Brezis-Nirenberg [37] ont montré l'existence de solutions non triviales, pour le problème (3.2) quand $\varphi(\lambda, x, u) = Q(x)|u|^{2^*-2}u + \lambda u$, telle que $2^* = \frac{2N}{N-2}$, $N \geq 3$ et $Q(x) = 1$, $0 \leq \mu < \overline{\mu} = \frac{(n-2)^2}{4}$ et $\lambda > 0$.D. Ruiz et M. Willem [163] (2003) , ont étudié la solvabilité du problème (3.2). Ils ont établi l'existence de solutions positives pour $N \geq 3$ et $Q(x) = 1$, sous différentes hypothèses sur le domaine Ω; qui incluent certains types de domaines non bornés, ils ont utilisé la concentration de compacité; et le Principe de criticité Symmetrique [162].
Récemment, D. Caoa., P. Hana [46] (2004), ont étudié le problème (3.2) avec $Q(x) = 1$ et $\lambda > 0$. En utilisant la théorie de points critiques, ils ont montré l'existence d'une solution non triviale du problème (3.2) pour $N \geq 5$ et $0 \leq \mu < \frac{(n-2)^2}{4} - \frac{(n+2)^2}{4}$.
J. Chen [54] (2004), utilisant la méthode de l'itération de Moser, qui a été utilisée précédemment [57] a étudié le problème (3.2) dans le cas où $p = 2$, $g(x) = 1$, $\lambda = 1$, $N \geq 3$, $0 \leq \mu < \overline{\mu}$, et f localement lipschitzienne en u. Le même auteur en appliquant la même approche a établi la multiplicité des solutions dans [55] (2004), quand $\varphi(\lambda, x, u) = u^p + \lambda u^q$, $0 < q < 1$, et $0 \leq \mu < \overline{\mu} - 1$, $0 < \lambda < \bar{\lambda}$.
Dans [148] (2006) , le problème (3.2) est considéré avec $N \geq 5$ et $Q(x) = 1$, $\lambda = 0$. Par approche variationnelle les auteurs ont montré l'existence de solutions positives quand $0 < \mu < \overline{\mu} = \frac{(n-2)^2}{4}$.
Dans [113] (2007) , par méthode variationnelle [157] ils obtiennent l'existence de solutions non triviales de (3.2) quand $N \geq 5$, $Q(x)$, $\mu \in [0, \overline{\mu} - (\frac{N+2}{2})^2)$ et $\lambda > 0$.
Dans [81] (2008), L. Ding, C. Tang ont considéré un autre type de singularité

dans le problème elliptique semilinéaire suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \frac{u}{|x|^2} = \frac{|u|^{2^*(s)-2}}{|x|^s} u + \lambda f(x,u) & x \in \Omega \setminus \{0\} \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{3.3}$$

où $N \geq 3$ et $0 < \mu < \overline{\mu} - 1 = \frac{(n-2)^2}{4} - 1$, $0 \leq s < 2$, $2^*(s) = \frac{2(N-s)}{N-2}$ est l'exposant critique de Hardy-Sobolev, $\lambda > 0$; les auteurs ont appliqué le principe d'Ekeland pour montrer l'existence d'au moins une solution positive u_λ, pour problème (3.3) quand $\lambda \in (0, \lambda^*)$. De plus si f est non décroissante par rapport à la seconde variable alors le problème (3.3) possède au moins deux solutions positives pour tout $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Dans [143] (2001), Montefusco a considéré le problème (3.2) avec $\varphi(\lambda, x, u) = |u|^{q-2} u$ quand $1 < p < N$ et $p < q < p^*$, il a établi l'existence d'une solution pour $\mu \in (0, \left(\frac{N-p}{p}\right)^p)$, il a utilisé le principe de la concentration de compacité de P. L. Lions [136], il a montré la semicontinuité inférieure faible de certaines classes de functionelles. Faraci et Livrea [93] ont utilisè le résultat de Montefusco [143] et ont donné des résultats de bifurcation pour le problème p-Laplacian singulier.

Récemment, Kristaly et Varga [130] (2007) ont obtenu l'existence de trois solutions au problème (3.2) avec $g = 1$, par application du théorème de Bonanno [32], avec $\varphi(\lambda, x, u) = \lambda f(u)$. Tyagi [176] (2010), a généralisé ce résultat, lorsque $\varphi(\lambda, x, u) = \lambda a(x) f(u)$.

Concernant les types de solutions cherchées pour le problème(3.2), alors malgré le développement intense sur l'existence de solutions radiales pour le problème (3.2), sans terme singulier (c.à.d pour $\mu = 0$), ou avec terme singulier (pour $\mu \neq 0$) [173], [151], [75], [149], [61], [148], [94], [42], [26] et voir [16], [17], [120],les résultats sur l'existence de solutions non radiales est loin d'être aussi abondants. Au meilleur de notre connaissance, il n'y a que quelques articles sur ce sujet dans la littérature et concernant le cas régulier $\mu = 0$, [133], [151], [116], [117], [78], [148], [81], [150], [42], [183], [50], [124], avec terme singulier (pour $\mu \neq 0$) [125], [30], [122].

Une question naturelle est de savoir si le nombre infini de solutions persiste dans le cas de présence de terme singulier dans l'équation originale. En particulier, le fait que le problème (3.2), avec terme singulier (c.a.d pour $\mu \neq 0$) possèdent une infinité de solutions non radiales. Dans cette étude, notre objectif principal inspiré par [4, 178] et [130, 176], est de montrer que le résultat obtenu par [4, 178] peut être étendue au p-Laplacien singulier avec un changement de signe de la non-linéarité et que les conditions introduites par [176] sur f peuvent être changées en considérant f avec une croissance"p-sublinéaire" en $u = 0$ (voir $(H_1)\,(iii)$).

3.2 Formulation du problème

Dans cette section, nous démontrons l'existence de solutions non radiales pour le problème (3.4)

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu \frac{g(|x|)|u|^{p-2}u}{|x|^p} + \lambda f(|x|, u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{3.4}$$

qui est étudié, avec $1 < p < N$, et λ, μ sont des paramètres positifs et la non-linéarité f et g satisfaisant les hypothèses suivantes:

(H_1) (i) $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est une fonction Carathéodory radiale, et impaire par rapport à la second variable, c.à.d

$$\text{pour presque tout } x \in \Omega, \text{ et tout } s \in \mathbb{R}. f(|x|, s) = -f(|x|, -s)$$

(ii) $\lim\limits_{|u| \to +\infty} \frac{f(|x|,u)}{|u|^{p-1}} = 0$,uniformément pour presque tout $x \in \Omega$.

(iii) $\lim\limits_{u \to 0} \frac{f(|x|,u)}{|u|^{p-1}} = +\infty$, uniformément pour presque tout $x \in \Omega$.

(H_3) $g : \Omega \to \mathbb{R}$, est une fonction de $L^\infty(\Omega)$, tel que $0 \leq g(|x|) \leq 1$, pour tout $x \in \Omega$.

En particulier, la condition $(H_1)\,(iii)$ signifie que la non-linéarité f a une croissance "p-sublinéaire" en $u = 0$. Ce genre de non-linéarités n'a pas été largement étudié dans le passé; au mieux de notre connaissance, dans la littérature, il est possible de ne trouver que peu d'articles sur ce sujet. Parmi lesquels, et pour $p = 2$, nous citons les travaux antérieurs de G. J. Butler [40] pour les équations différentielles ordinaires, le livre de M. A. Krasnoselskii, et al. [128], Sect. 22 et le papier de E. W. C. Van Groesen [179].

3.3 Résultats

3.3.1 Resultat d'existence

Nous établissons l'existence de solutions non radiales pour le problème aux limites (3.4) sous les hypothèses introduites .

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses* (H_1)*et* (H_3) *et pour tout* $\mu \in [0, C_{N,p}[$, $\lambda > 0$, *le problème* (3.4) *admet une suite de solutions non radiales bornée.*

Preuve: Pour prouver ce résultat, nous adaptons une approche variationnelle.
Pour tout $u \in \mathbb{R}$ et pour presque tous $x \in \Omega$, nous définissons F la primitive de f par

$$F(|x|, u) := \int_0^u f(|x|, s)\, ds.$$

Sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, muni de la norme $\|u\| := \left[\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}}$, nous définissons la fonctionnelle d'énergie J associé à (3.4) par,

$$J_{\mu,\lambda}(u) = \phi_\mu(u) - \lambda J(u). \tag{3.5}$$

Où,

$$\phi_\mu(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \frac{\mu}{p}\int_\Omega \frac{g(x)\,|u(x)|^p}{|x|^p} dx \quad \text{et} \quad J(u) = \int_\Omega F(|x|, u(x)) dx.$$

$J_{\mu,\lambda}$ est définie dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, pour $\mu \in [0, C_{N,p}[$, et $\lambda > 0$, $J_{\mu,\lambda}$ est une fonctionnelle différentiable, de dérivée $J'_{\mu,\lambda}(u) \in \left(W_0^{1,p}\right)^*(\Omega)$, donnée par,

$$\begin{aligned} J'_{\mu,\lambda}(u)v &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}\, \nabla v dx - \mu\int_\Omega \frac{g(x)}{|x|^p}\,|u(x)|^{p-1}\, v dx \\ &\quad -\lambda \int_\Omega f(|x|, u(x)) v dx. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Il est évident que, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est un point critique de la fonctionnelle $J_{\mu,\lambda}$, alors u est une solution faible du problème (3.4). Par conséquent, pour prouver l'existence de solutions faibles pour (3.4), il suffit de montrer l'existence de points critiques pour $J_{\mu,\lambda}$, pour certaines valeurs de μ et λ.
S'interéssant aux solutions non radiales pour le problème (3.4) nous montrons l'existence de points critiques pour $J_{\mu,\lambda}$ sur les ensembles E_k (2.16).
Les ensembles E_k sont des contraintes naturelles pour le problème (3.4) dans le sens que chaque point critique de la fonctionnelle d'énergie $J_{\mu,\lambda}$ associée à (3.4) sur E_k est un point critique de $J_{\mu,\lambda}$ sur l'ensemble $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Pour établir l'existence de points critiques de $J_{\mu,\lambda}$ sur E_k, nous montrons quelques lemmes auxilliaires.

Lemme 3.3.1 *Supposons que $\mu \in [0, C_{N,p}[$, alors ϕ_μ est une fonctionnelle faiblement semi continue inférieurement sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Preuve: A partir du principe de concentration de compacité [135, 136], Montefusco a prouvé dans [143], lorsque g est bornée inférieurement. que la fonctionnelle ϕ_μ est faiblement semi continue inférieurement.
Puisque g satisfait (H_3), la preuve du lemme (3.3.1) est similaire à la démonstration du résultat [th3.2 [143]] , de sorte que nous omettons les détails 1.3.1. ■

Lemme 3.3.2 *Pour tout $\mu \in [0, C_{N,p}[$, et λ un paramètre positif, la fonctionnelle $J_{\mu,\lambda}$ est faiblement semi continue inférieurement sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Preuve: *Soit $\mu \in [0, C_{N,p}[$, et λ est un paramètre positif, l'hypothèse $(H_1)(ii)$, implique l'existence de $\delta = \delta(\mu, \lambda) > 0$ tel que pour presque tous $x \in \Omega$, nous avons,*

$$|f(|x|, s)| < \left(1 - \frac{\mu}{C_{N,p}}\right)\left(\frac{\alpha(N,p)^p}{(1+\lambda)}\right)|s|^{p-1}, \tag{3.7}$$

quand $|s| > \delta$. En utilisant $(H_1)(i)$ et (3.7), pour tout s dans $\mathbb{R}$ et pour presque tous x dans Ω nous obtenons,

$$f(|x|, s) < \left(1 - \frac{\mu}{C_{N,p}}\right)\left(\frac{\alpha(N,p)^p}{(1+\lambda)}\right)|s|^{p-1} + \max_{|s|\le\delta}|f(|x|, s)|. \tag{3.8}$$

L'intégration de (3.8) donne

$$F(|x|, u) < \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\mu}{C_{N,p}}\right)\left(\frac{\alpha(N,p)^p}{(1+\lambda)}\right)|u|^p + \max_{|s|\le\delta}|f(|x|, s)|\,|u|. \tag{3.9}$$

Maintenant, utilsant (3.9) et l'injection compacte de $W_0^{1,p}(\Omega) \circlearrowleft L^p(\Omega)$, nous déduisons que J est faiblement semi continue inférieurement, et par suite se basant sur le lemme (3.3.1) $J_{\mu,\lambda}$ est une fonctionnelle faiblement semi continue inférieurement pour tous les $\mu \in [0, C_{N,p})$ et $\lambda > 0$. ■

Lemme 3.3.3 . *Pour tout $\mu \in [0, C_{N,p})$ et $\lambda > 0$, la fonctionnelle $J_{\mu,\lambda}$ est coercive dans l'ensemble E_k qui est faiblement fermé dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Preuve: *1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble E_k est convexe et fortement fermé dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, donc E_k est faiblement fermé dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, (cf. (1.6)).*
2. Maintenant, nous allons montrer que $J_{\mu,\lambda}$ est coercive sur E_k, (c-à-d $\lim\limits_{\substack{\|u\|\to+\infty \\ u\in E_k}} J_{\mu,\lambda}(u) = +\infty$).
D'après (3.9), nous avons pour chaque $\mu \in [0, C_{N,p})$, et $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(|x|, u)\,dx \quad &< \quad \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\mu}{C_{N,p}}\right)\alpha(N,p)^p(1+\lambda)^{-1}\int_\Omega |u|^p\,dx \\ &\quad + \max_{|s|\le\delta}|f(|x|, s)|\int_\Omega |u|\,dx. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Maintenant (H_3), (3.9) *et* (1.5), *impliquent que,*

$$\begin{aligned}
J_{\mu,\lambda}(u) &= \frac{1}{p}\int_{\Omega} |\nabla u|^p\, dx - \frac{\mu}{p}\int_{\Omega} \frac{g(x)\,|u(x)|^p}{|x|^p} dx - \lambda\int_{\Omega} F(|x|, u(x))\, dx \\
&\geq \frac{1}{p}\int_{\Omega} |\nabla u|^p\, dx - \frac{\mu}{p}\int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx - \lambda\int_{\Omega} F(|x|, u(x))\, dx \\
&\geq \frac{1}{p}\int_{\Omega} |\nabla u|^p\, dx - \frac{\mu}{pC_{N,p}}\int_{\Omega} |\nabla u|^p\, dx - \lambda\int_{\Omega} F(|x|, u(x))\, dx \\
&\geq \frac{1}{p}\left(1-\frac{\mu}{C_{N,p}}\right)\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p\, dx - \frac{\lambda}{(1+\lambda)}\left(\alpha(N,p)^p\int_{\Omega} |u|^p\, dx\right)\right) + \\
&\quad -\lambda\max_{|s|\leq\delta}|f(|x|, s)|\int_{\Omega}|u|\, dx,
\end{aligned}$$

utilisant les constantes d'injection de Sobolev, nous obtenons,

$$J_{\mu,\lambda}(u) \geq \frac{1}{p}\left(1-\frac{\mu}{C_{N,p}}\right)\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)\|u\|^p - \lambda\alpha(N,1)\max_{|s|\leq\delta}|f(|x|, s)|\,\|u\|. \quad (3.11)$$

D'après (3.11) *nous avons* $J_{\mu,\lambda} \to +\infty$ *quand* $\|u\| \to +\infty$. *Par conséquent,* $J_{\mu,\lambda}$ *est coercive dans* E_k.
Ainsi, par les lemmes (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3) *et utilisant la méthode directe de calcul variationnel, nous obtenons immédiatement que pour tout entier* $k \geq 1$, *il existe* $u_k \in E_k$ *telle que* $J_{\mu,\lambda}(u_k) = m_k$ *où*

$$m_k = \inf_{E_k} J_{\mu,\lambda}.$$

■

Lemme 3.3.4 *Pour tout entier* $k \geq 1$,

$$-\infty < m_1 \leq m_k < 0.$$

Preuve: D'après la coercivité de $J_{\mu,\lambda}$ sur E_1, nous obtenons clairement que $m_1 > -\infty$. En outre, de $E_k \subset E_1$, nous avons $m_1 \leq m_k$ pour tout entier $k \geq 1$. Pour prouver que $m_k < 0$ pour tout entier $k \geq 1$, nous considérons le domaine Ω_k, défini par,

$$\Omega_k := \left\{(r, \theta_2, ..., \theta_N) \in \Omega;\ \theta_N \in \left[0, \frac{\pi}{k}\right[\right\}.$$

Soit λ_1 la première valeur propre de $-\Delta_p$ sur $W_0^{1,p}(\Omega_k)$ et $v_1^k \in L^\infty(\Omega_k)$ la fonction propre associée a λ_1. Pour plus de détails sur la valeur propre de p-Laplacien (cf. [131]).

Et soit v_1 la prolongation $\frac{2\pi}{k}$ périodique et impaire de v_1^k sur Ω. $v_1 \in E_k \cap L^\infty$. Pour tout $\lambda > 0$, nous pouvons choisir $A > 0$, vérifiant, $A\lambda > 2\lambda_1$, et par $(H_1)\,(iii)$ il existe $\alpha_A > 0$, tel que, pour tout $|u| \leq \alpha_A$ et pour presque tout $x \in \Omega$,

$$F(x,u) \geq \frac{1}{p} A\lambda\, |u|^p . \tag{3.12}$$

Alors, pour tout $s \in]0, \frac{\alpha_A}{\left\|v_1^k\right\|_{L^\infty}}[$, on obtient $sv_1^k \in E_k$ et $\left|sv_1^k\right| < \alpha_A$.
Ainsi, en utilisant (2.18) et (3.12), nous avons

$$\begin{aligned} J_{\mu,\lambda}(sv_k) &= \frac{1}{p}\int_\Omega \left|\nabla sv_1^k\right|^p dx - \frac{\mu}{p}\int_\Omega \frac{g(|x|)\left|sv_1^k\right|^p}{|x|^p} dx - \lambda\int_\Omega F\left(x, sv_1^k\right) dx \\ &\leq \frac{1}{p} s^p \lambda_1 \int_\Omega \left|v_1^k\right|^p dx - \frac{\mu}{p} s^p \int_\Omega \frac{g(|x|)\left|v_1^k\right|^p}{|x|^p} dx - \lambda s^p \frac{A}{p}\int_\Omega \left|v_1^k\right|^p dx. \end{aligned}$$

(H_3), et g positive impliquent,

$$J_{\mu,\lambda}(sv_k) \leq (\lambda_1 - A\lambda)\frac{1}{p} s^p \int_\Omega \left|v_1^k\right|^p dx < 0.$$

Ainsi, nous concluons que $m_k < 0$. ■

Lemme 3.3.5 *Il existe $M > 0$ tel que pour tout entier $k \geq 1$*

$$\|u_k\| \leq M.$$

Preuve: *u_k est une solution faible du problème (3.4) et $J_{\mu,\lambda}(u_k) = m_k$. Puisque $m_k < 0$ et $J_{\mu,\lambda}(0) = 0$, nous déduisons que $u_k \neq 0$. De plus, $u_k \in E_k$ est donc non radiale car elle est impaire par rapport à θ_{N-1}.*
Puisque,$m_1 \leq m_k = J_{\mu,\lambda}(u_k) < 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$|J_{\mu,\lambda}(u_k)| < |m_1| . \tag{3.13}$$

En utilisant la coercivité de $J_{\mu,\lambda}$, on en déduit l'existence d'une constante $M > 0$, de telle sorte que, pour tout entier $k \geq 1$,

$$\|u_k\| < M. \tag{3.14}$$

■

A partir des lemmes $(3.3.1)$, $(3.3.2)$, $(3.3.3)$, $(3.3.4)$ le problème (3.4) admet une suite de solutions non radiales satisfaisant (3.14) et la démonstration du théorème (3.1) est achevée. ■

3.3.2 Résultat de bifurcation

Nous nous intéressons à l'éxistence de points de bifurcation. Nous appelons point de bifurcation pour le problème (3.4) une valeur $(\mu, \lambda) \in [0, C_{N,p}[\times]0, +\infty[$ pour laquelle il existe une suite (μ_k, λ_k, u_k) de solutions de (3.4) avec pour tout entier $k \geq 1$, $u_k \neq 0$ et $(\mu_k, \lambda_k, u_k) \to (\mu, \lambda, 0)$ dans $[0, C_{N,p}[\times]0, +\infty[\times W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 3.2 *Pour tout* $\mu \in [0, C_{N,p})$, *et* $\lambda > 0$, $(\mu, \lambda, 0)$ *est un point de bifurcation pour le problème* (3.4).

Preuve: *Nous allons montrer que pour chaque* $(\mu, \lambda) \in [0, C_{N,p}[\times]0, +\infty[$ *,la suite de solutions non radiales* (u_k)*, obtenue par le théorème* (3.1)*, converge vers* 0*. Ce qui prouvera que 0 est un point de bifurcation pour le problème* (3.4).
Ainsi, nous établissons que de toute sous-suite de (u_k)*, il est possible d'extraire une sous-suite convergente vers zéro, ce sera suffisant pour prouver que toute la suite* (u_k) *converge vers zéro.*
Soit (u_{k_n}) *une suite extraite de* (u_k)*. Utilisant* (3.14)*, et la réflexivité de l'espace de Sobolev* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *nous en déduisons qu'il existe une sous-suite* $\left(u_{k_{n_j}}\right)$ *de* (u_{k_n}) *de telle sorte que* $u_{k_{n_j}} \rightharpoonup u$ *dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$*. Du fait que les ensembles* E_k *sont faiblement fermé dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \in E_k$*. Le théorème Ascoli- Arzelà (cf.* (1.3) *chap1), entraine la convergence forte de* $\left(u_{k_{n_j}}\right)$ *vers* u*.*
Nous allons prouver que $u \equiv 0$*, pour simplifier l'écriture, notons* $u_j := u_{k_{n_j}}$*.*
Pour chaque $y \in [0, R] \times [0, \pi]^{N-2}$ *rappelons que la fonction* $u_j(y, .)$ *est* $\frac{2\pi}{j}$ *périodique.*
Maintenant, supposons au contraire que $u \neq 0$ *alors il existe* $y_0 \in [0, R] \times [0, \pi]^{N-2}$ *et* $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ *tel que* $u(y_0, \theta_0) \neq 0$*. Posons,*

$$\begin{cases} \epsilon := |u(y_0, \theta_0)| \\ v_j(\theta) = u_j(y_0, \theta) \\ v(\theta) = u(y_0, \theta) \end{cases}.$$

Par la continuité de v*, il existe un intervalle* $J_0 \subset [-\pi, \pi]$*, tel que* $|v(\theta)| \geq \frac{\epsilon}{2}$ *pour tout* $\theta \in J_0$*. Par conséquent, et par la convergence uniforme de* v_j *vers* v*, nous déduisons qu'il existe* $j_0 \in \mathbb{N}$ *de sorte que, pour chaque* $j \geq j_0$, $|v_j(\theta)| \geq \frac{\epsilon}{2}$ *pour tous les* $\theta \in J_0$*.*
D'autre part, pour $j \geq j_0$*,. Mais si* $|J_0| > \frac{2\pi}{j}$*, alors* J_0 *doit contenir au moins un zéro de* v_j *(principe d'oscillation)*
Ce-ci est une contradiction avec $|v_j(\theta)| \geq \frac{\epsilon}{2}$ *pour tous les* $\theta \in J_0$*.* ■

Exemple 3.3.1 *Soit β un entier impair tel que $\beta > p-1 > 0$ et considérons la fonction f définie par*

$$f(|x|, u(x)) = u^{\frac{p-1}{\beta}} \sin|x|,$$

et

$$g(x) = 1 - e^{-|x|^2}.$$

Il est facile de voir que g et f satisfont les hypothèses (H_1) et (H_3). L'application du théorème 3.1 donne l'existence d'une suite de solutions non radiales du problème (3.4)*, pour chaque $\lambda > 0$ et $\mu \in [0, C_{N,p})$.*

Chapitre 4

Problème associé au spectre de Fučik

Sommaire

4.1 **Introduction** 48
4.2 **Formulation du problème** 50
4.3 **Résultat principal** 52

4.1 Introduction

Notre objectif, dans ce chapitre est d'étudier l'éxistence et la multiplicité de solutions non radiales pour un probléme du spectre de Fučik.
Nous commençons tout d'abord par donner un aperçu sur la solvabilité du problème aux limites de Dirichlet suivant et sa relation avec le spectre de l'opérateur Laplacien,

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) + h(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{4.1}$$

où Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $h \in L^2(\Omega)$.
Le problème (4.1) pour $f(u) = \lambda u$, peut être étudié en utilisant l'alternative de Fredholm [175]. Ce qui conduit à distinguer les cas où λ est ou non une valeur propre du Laplacien. Dans le cas général, il est bien connu que le comportement asymptotique des quotients

$$\frac{f(s)}{s} \text{ et } \frac{2F(s)}{s^2} \text{ où } F(s) = \int_0^s f(t)\,dt,$$

quand $s \to \pm\infty$ joue un role important dans l'étude de la solvabilité de (4.1).
Ainsi en notant par

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \tag{4.2}$$

la suite des valeurs propres du Laplacien et en posant

$$a := \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t}, \; b := \lim_{t\to-\infty} \frac{f(t)}{t}, \tag{4.3}$$

A.Ambrosetti et G.Prodi (cf. [9]) ont montré que pour des non-linéarités f qui ont un comportement asymétrique à l'infini, c'est à dire si $a < b$ et $a < \lambda_1 < b < \lambda_2$, le problème (4.1) admet une, deux ou aucune solution suivant la valeur de $\int_\Omega h\varphi_1 dx$, où $\varphi_1 > 0$ est la fonction propre associée à λ_1.
E.Dancer et S.Fučik observérent dans les années 70 que la résolution de problèmes de type (4.1) avec des non-linéarités asymétriques, au lieu de dépendre du spectre du Laplacien, dépend fortement de la position du couple (a, b) par rapport à l'ensemble Σ des couples de réels (α, β) pour lesquels le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \alpha u_+ - \beta u_- & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{4.4}$$

admet au moins une solution non triviale, où $u_\pm := \max(\pm u, 0)$ et $u = u_+ - u_-$ (cf. [102]). Dans ce cas quand $(\alpha, \beta) \in \Sigma$, le problème (4.4) est dit problème de résonnance.
Concernant ces problèmes, nous citerons le travail de D. G. Costa et M. Cuesta (cf. [62]) (1996) suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = \alpha u_+ - \beta u_- + f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{4.5}$$

avec $(\alpha, \beta) \in C_2$ (avec C_2 est la première courbe non triviale de Σ (cf. (1.12) chap1). Ils ont montré que si $(\alpha, \beta) \in C_2$ et f est sublinéaire au voisinage de ∞, et vérifie une condition de Landesman-Lazer, le problème (4.5) admet au moins une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$. le résultat est établi par méthode variationnelle en appliquant le théorème de Saddle-Point de Rabinowitz (cf. [156]).
Dans [56], en se basant sur le théorème de fonction implicite, les auteurs ont montré que (4.5) admet une solution non triviale pour chaque $(\alpha, \beta) \in \chi$ avec χ est un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^2$ disjoint avec le spectre de Fučik et contenant un point de la forme (c, c) de l'équation (4.4), et $f \in L^2(\Omega)$.
Des études similaires ont été faites pour l'opérateur p-Laplacien par [66], [76], [140], [14], [15], [43], [84], [165].
Les résultats sur l'existence de solutions non radiales associés au spectre de Δ est loin d'être aussi abondante. Au meilleur de notre connaissance, il n'y a que quelques articles sur ce sujet dans la littérature. Nous passons en revue certains de ces travaux.

Dans [184], l'auteur a étudié l'existence d'une suites de solutions positives non radiales de certaines équations elliptiques semilinéaires dans un anneau de $\mathbb{R}^N$. Dans [182] (1994), le problème considéré est

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^{2^*-1} & u > 0 \quad x \in \Omega_r \\ u = 0 & \quad x \in \partial\Omega_r \end{cases}, \tag{4.6}$$

où $\Omega_r = \left\{x \in \mathbb{R}^N \setminus r < |z| < r+1\right\}$ avec $r > 0$ et $2^* := \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev. Ils ont montré pour chaque $0 < \lambda < \pi^2$, il existe une constante positive $R(\lambda, n)$ telle que pour $r > R(\lambda, n)$, le problème (4.6) possède au moins n solutions non radiale dans $\Omega_r \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 4$. La méthode utilisée est variationnelle introduite par Coffman [59].
Le problème considéré dans [150] (2008) est

$$\begin{cases} -\Delta u = bu_+ - \varphi_1 & x \in B \\ u = 0 & x \in \partial B \end{cases}, \tag{4.7}$$

où B est la boule unité de $\mathbb{R}^N$, centrée à l'origine, et b est un paramètre positif, φ_1 est la première fonction propre de l'opérateur Laplacien. En appliquant le Théorème du coI, ils ont prouvé l'existence d'au moins une solution non radiale quand $b > \lambda_1$.
Motivées par les travaux [5], [182], [150] et [62], nous nous interessons dans ce chapitre à l'existence de solutions non radiales pour un problème de résonnance nous considérons un problème du type (4.5) où la perturbation f est une non linéarité radiale (i.e. $f(x, u) = f(|x|, u)$). Nous montrerons l'existence d'au moins une solution non radiale en utilisant le Théorème du col (1.11).

4.2 Formulation du problème

Dans ce chapitre, nous supposerons que l'opérateur Laplacien admet une valeur propre généralisée (au sens de Fucik) $(\alpha, \beta) \in C_2$ (1.12), qui est non radiale (2.2.1) c'est à dire qu'il existe $u^* \neq 0$, $u^* \in E_k$ (pour un certain k), solution de,

$$-\int_\Omega \Delta u^* v dx = \int_\Omega \left(\alpha u_+^* - \beta u_-^*\right) v dx, \ \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega); \tag{4.8}$$

où $(\alpha, \beta) \in C_2$ (avec C_2 est la première courbe non triviale de Σ voir (1.12) (cf. chap. I). Dans ce cas en prenant $v = u^*$ dans (4.8) et en opérant une intégration par parties, nous obtenons,

$$\int_\Omega |\nabla u^*|^2 dx = \alpha \int_\Omega \left(u_+^*\right)^2 dx + \beta \int_\Omega \left(u_-^*\right)^2 dx. \tag{4.9}$$

Maintenant, considèrons φ_1 fonction propre classique associée à la première valeur propre λ_1,de l'opérateur Laplacien appartenant à $E_{k'}$, (pour un certain k')
$\varphi_1$vérifie alors

$$\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2 \, dx = \lambda_1 \int_\Omega (\varphi_1)^2 \, dx.$$

Se basant sur (1.14) et sans perde de généralité nous pouvons écrire que $\varphi_1 \neq tu^*$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (même dans le cas où k est un multiple de k', ou inversement) et par suite φ_1 ne vèrifie pas une équation similaire à (4.9)

$$\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2 \, dx \neq \alpha \int_\Omega (\varphi_1)_+^2 \, dx + \beta \int_\Omega (\varphi_1)_-^2 \, dx,$$

or

$$\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2 \, dx = -\int_\Omega (\Delta\varphi_1)\,\varphi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega (\varphi_1)^2 \, dx,$$

d'où

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \int_\Omega (\varphi_1)^2 \, dx - \alpha \int_\Omega (\varphi_1)_+^2 \, dx - \beta \int_\Omega (\varphi_1)_-^2 \, dx \\ = \; & \lambda_1 \int_\Omega \left(\varphi_{1+} - \varphi_{1-}\right)(\varphi_1) \, dx - \alpha \int_\Omega \varphi_{1+}\varphi_1 dx + \beta \int_\Omega \varphi_{1-}\varphi_1 dx \\ = \; & (\lambda_1 - \alpha) \int_\Omega \varphi_{1+}\varphi_1 dx + (\beta - \lambda_1) \int_\Omega \varphi_{1-}\varphi_1 dx; \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire,

$$\int_\Omega \left(\varphi_{1+} - \frac{\beta - \lambda_1}{\alpha - \lambda_1}\varphi_{1-}\right)\varphi_1 dx \neq 0.$$

Le problème suivant considéré est donc une perturbation de (4.4) par une non-linéarité radiale f,

$$\begin{cases} -\Delta u = \alpha u_+ - \beta u_- + f(|x|, u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{4.10}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ avec $N \geq 3$.
f vérifie les hypothèses suivantes:

(H_1) (i) : $\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est une fonction Carathéodory radiale, et impaire par rapport à la second variable, c.à.d

pour presque tout $x \in \Omega$, et tout $s \in \mathbb{R}.f(|x|, s) = -f(|x|, -s)$

(ii) $\lim\limits_{|u|\to+\infty} \frac{f(|x|,u)}{u} = 0$, uniformément pour presque tout $x \in \Omega$.

(iii) $\lim\limits_{u\to 0} \frac{f(|x|,u)}{u} = +\infty$, uniformément pour presque tout $x \in \Omega$.

(H_4) $\lim\limits_{|u|\to\infty} [uf(|x|,u) - 2F(|x|,u)] = +\infty$, uniformément pour presque tout $x \in \Omega$.

Où

$$F(|x|,u) := \int_0^u f(|x|,s)\,ds. \tag{4.11}$$

Remarque 7 *Si l'hypothèse* $(H_1)\,(ii)$ *est vérifiée:*
c.à.d $\lim\limits_{|u|\to+\infty} \frac{f(|x|,u)}{u} = 0$, *uniformément pour presque tout* $x \in \Omega$, *nous avons*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon > 0;\ \ |u| > A_\varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{f(|x|,u)}{u}\right| \leq \varepsilon.$$

Ce qui entraine,

$$|f(|x|,u)| \leq \varepsilon\,|u| \ \text{ pour tout } \ |u| > A_\varepsilon.$$

D'aprés $(H_1)\,(i)$ f est continue en u, alors pour tout $u \in \mathbb{R}$.

$$|f(|x|,u)| \leq \varepsilon\,|u| + \max_{|s|\leq A_\varepsilon} |f(|x|,s)|. \tag{4.12}$$

4.3 Résultat principal

Nous montrons l'existence de solutions nonradiales pour le problème aux limites (4.10) le resultat est formulé comme suit,

Théorème 4.1 *Pour* $(\alpha,\beta) \in C_2$, *et sous l'hypothèses* (H_1) *et* (H_4), *le problème* (4.10) *admet aux moins une solution non radiale.*

Preuve: Pour prouver ce résultat, nous adoptons une approche variationnelle en appliquant le Théorème du col (cf. (1.12) Chap 1).
Sur $W_0^{1,2}(\Omega)$, muni de la norme $\|u\| := \left[\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$, nous définissons la fonctionnelle d'énergie J associée à (4.10) par,

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \alpha\,(u_+)^2) - \beta\,(u_-)^2\right) dx - \int_\Omega F(|x|,u)dx. \tag{4.13}$$

Où F est définie par (4.11).

J est une fonctionnelle différentiable, de dérivée $J'(u) \in \left(W_0^{1,2}\right)^* (\Omega)$, donnée, pour tout $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, par

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega \left(|\nabla u| \nabla v - \alpha (u_+) v + \beta (u_-) v\right) dx - \int_\Omega f(|x|, u(x)) v dx. \quad (4.14)$$

Évidemment, si $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ est un point critique de la fonctionnelle J (4.13), alors u est une solution faible de problème (4.10).
Pour obtenir la multiplicité de solutions non radiales nous chercherons des points critiques de J dans les ensembles E_k (2.14). Nous introduisons quelque résultats auxilliaires énoncés sous forme de lemmes.

Lemme 4.3.1 *Si f vérifie les hypothèses (H_1) et (H_4), alors J satisfait la condition de Palais-Smale de Cerami (cf. $(1.3.7)$ Chap 1).*

Preuve: *Soit $(u_n) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ telle que $J(u_n) \to c$ et*

$$(1 + \|u_n\|) \|J'(u_n)\| \to 0.$$

Montrons qu'elle admet une sous-suite convergente.
Dans notre cas, de (4.12), condition de croissance sur f, il suffit de vérifier que (u_n) est bornée dans $W_0^{1,2}(\Omega)$.
Supposons au contraire, que $\|u_n\| \to \infty$ donc, il exists $\Omega_0 \subset \Omega$, $|\Omega_0| > 0$, $|u_n(x)| \to \infty$ p.p. $x \in \Omega_0$ alors d'une part,

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} \int_\Omega [u_n f(|x|, u_n(x)) - 2F(|x|, u_n(x))] dx \quad (4.15) \\ = & \lim_{n\to\infty} (2I(u_n) - (J'(u_n), u_n)) \\ = & 2c. \end{aligned}$$

Et d'autre part, par (H_4), nous avons

$$[u_n(x) f(|x|, u_n(x)) - 2F(|x|, u_n(x))] dx = +\infty \ p.p.x \in \Omega_0,$$

la remarque (7) nous permet d'écrire,

$$u_n(x) f(|x|, u_n(x)) - 2F(|x|, u_n(x)) \geq -M \quad p.p.x \in \Omega,$$

pour un $M > 0$ et nous concluons que

$$\begin{aligned} & \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega [u_n(x) f(|x|, u_n(x)) - 2F(|x|, u_n(x))] dx \\ & \geq \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega_0} [u_n(x) f(|x|, u_n(x)) - 2F(|x|, u_n(x))] dx - M \ |\Omega \diagdown \Omega_0| \\ = & +\infty. \end{aligned}$$

Ce ci est une contradiction.avec (4.15). ■

Lemme 4.3.2 *Si (H_1) et (H_4) sont vérifiées alors $\lim_{|s|\to\infty} F(|x|, s) = -\infty$.*

Preuve: *Si f vérifie (H_4), par définition de la limite, pour tout $A > 0$ il existe un $B_A > 0$ tel que, pour presque tout $x \in \Omega$*

$$f(|x|, s)s - 2F(|x|, s) \geq A, \ \forall |s| \geq B_A, \tag{4.16}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{F(|x|, s)}{s^2}\right) = \frac{f(|x|, s)s - 2F(|x|, s)}{s^3}. \tag{4.17}$$

En utilisant (4.16) *et par l'intégration de* (4.17) *sur* $[s, \bar{s}] \subset [B_A, \infty]$ *nous obtenons,*

$$\frac{F(|x|, \bar{s})}{\bar{s}^2} - \frac{F(|x|, s)}{s^2} \geq -\frac{A}{2}\left(\frac{1}{\bar{s}^2} - \frac{1}{s^2}\right),$$

maintenant utilisant $(H_1)\,(ii)$*, nous déduisons,*

$$F(|x|, s) \leq -\frac{A}{2}, \ \forall s \geq B_A, \ p.p.x \in \Omega.$$

De manière analogue, nous montrons que

$$F(|x|, s) \leq -\frac{A}{2}, \ \textit{pour tout } s \leq -B_A \textit{ et p.p } x \in \Omega. \tag{4.18}$$

Comme A est arbitraire, nous concluons que le lemme est vérifié. ■

Maintenant, considérons le sous-espace propre associé à λ_1

$$V = \langle \varphi_1 \rangle = \left\{ u \in W_0^{1,2}(\Omega) ; \ u = t.\varphi_1, \ t \in \mathbb{R} \right\},$$

où $\varphi_1$est la fonction propre associée à λ_1.
Et le sous espace propre E associé à (α, β) défini par:

$$E = \langle u^* \rangle = \left\{ u \in W_0^{1,2}(\Omega) ; \ u = t.u^*, \ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nous avons alors le résultat suivant:

Lemme 4.3.3 *Si* (H_1), (H_4) *sont vérifiées alors*
(i) $\lim\limits_{\|u\| \to \infty, \ u \in V} J(u) = -\infty$.
(ii) $\lim\limits_{u \in E} J(u) > -\infty$.

Preuve: *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous considèrons l'ensemble suivant.*

$$\Omega_k := \left\{ (r, \theta_1, ..., \theta_{N-1}) \in \Omega; \ \theta_{N-1} \in \left[0, \frac{\pi}{k}\right) \right\}.$$

Soit λ_1 la première valeur propre de $-\Delta$ dans $W_0^{1,2}(\Omega_k)$ et $\varphi_1^k \in W_0^{1,2}(\Omega_k)$, la fonction propre associée à λ_1.

nous considèrons φ_1 *le prolongement impaire de* φ_1^k*dans* Ω*; alors:* $\varphi_1 \in E_k \cap L^\infty$ *et nous avons*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|\nabla\varphi_{_1}\right|^2 dx &= 2k\int_{\Omega_k} \left|\nabla\varphi_1^k\right|^2 dx = 2k\lambda_1 \int_{\Omega_k} \left|\varphi_{_1}^k\right|^2 dx && (4.19)\\ &= \lambda_1 \int_\Omega \left|\varphi_{_1}\right|^2 dx. && (4.20)\end{aligned}$$

De $(H_1) - (iii)$*, nous déduisons que pour* $\lambda_1 > 0$, $\exists\epsilon_{\lambda_1} = \epsilon_1$*,tel que si* $|u| < \epsilon_1$ *alors*

$$\frac{f(r,u)}{u} > 2\lambda_1,$$

ce qui entraine,

$$\int_0^u f(r,s)\,ds > \int_0^u 2\lambda_1 s ds.$$

Et par suite

$$F(r,u) \geq \lambda_1 |u|^2 \;\; pout\ tout\ \; |u| < \epsilon_1.$$

Soit $u = t\varphi_1$*, nous avons pour* $t \geq 0$

$$\begin{aligned} J(t\varphi_1) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla t\varphi_1|^2 - \left(\alpha\left(t\varphi_{1+}\right)^2 + \beta\left(t\varphi_{1-}\right)^2\right)\right)dx \\ &\quad -\int_\Omega F(|x|, t\varphi_1)dx \\ &= \frac{t^2}{2}\int_\Omega \left(|\nabla\varphi_1|^2 - \left(\alpha\left(\varphi_{1+}\right)^2 + \beta\left(\varphi_{1-}\right)^2\right)\right)dx \\ &\quad -\int_\Omega F(|x|, t\varphi_1)dx \\ &= \frac{t^2}{2}\int_\Omega \left(\lambda_1\varphi_1^2 - \left(\alpha\left(\varphi_{1+}\right)^2 + \beta\left(\varphi_{1-}\right)^2\right)\right)dx \\ &\quad -\int_\Omega F(x, t\varphi_1)dx \\ &\leq \frac{-\lambda_1 t^2}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 dx - \int_\Omega \left(\alpha\left(\varphi_{1+}\right)^2 + \beta\left(\varphi_{1-}\right)^2\right)dx < 0. \end{aligned}$$

Nous obtenons $\lim\limits_{|t|\to\infty} J(t\varphi_1) = -\infty$.

(ii) *Pour* $u = tu^*$ *nous avons*

$$\begin{aligned} J(tu^*) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla tu^*|^2 - \frac{1}{2}\left(\alpha\left(tu_+^*\right)^2) + \beta\left(tu_-^*\right)^2\right)\right)dx - \int_\Omega F(|x|, tu^*)dx. \\ &= \frac{t^2}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u^*|^2 - \frac{1}{2}\left(\alpha\left(u_+^*\right)^2) + \beta\left(u_-^*\right)^2\right)\right)dx - \int_\Omega F(|x|, tu^*)dx. \end{aligned}$$

En utilisant (4.9)

$$\int_{\Omega} |\nabla u^*|^2 \, dx = \alpha \int_{\Omega} \left(u_+^*\right)^2 dx + \beta \int_{\Omega} \left(u_-^*\right)^2 dx,$$

nous obtenons

$$J\left(tu^*\right) = -\int_{\Omega} F(|x|, tu^*) dx.$$

D'aprés (H_1) *et* $\lim_{|s| \to \infty} F(|x|, s) = -\infty$*, il existe une consante* $D > 0$ *telle que* $F(|x|, s) < D$ *d'où pour tout* $u \in E$

$$J\left(u\right) \geq -D \left|\Omega\right|.$$

Ce ci achève la preuve de (ii). ∎

Par le résultat suivant, nous montrons que la fonctionnelle J présente une géométrie du lemme du col.
Soit $E_m = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,;\ u\left(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, .\right) \text{ impaire, et } \frac{2\pi}{m} \text{ périodique}\right\}$ où $m = p\,\mathrm{gcd}(k, k')$

Lemme 4.3.4 *Il existe* $T > 0$ *tel que*

$$\max\left\{J\left(T\varphi_1\right), J\left(-T\varphi_1\right)\right\} < \inf_{h \in \Gamma} \max_{t \in [-1,1]} J\left(h\left(t\right)\right),$$

avec

$$\Gamma = \left\{h \in C\left([-1, 1], E_m\right) \diagdown h\left(\pm 1\right) = \pm T\varphi_1\right\}.$$

Preuve: *D'aprés le lemme* (4.3.3) *(i) il est possible de choisir* $T > 0$ *tel que*

$$\max\left\{J\left(T\varphi_1\right), -J\left(T\varphi_1\right)\right\} < \inf_{u \in E} J\left(u\right),$$

soit $h \in C\left([-1, 1], E_m\right)$*,* $h(\pm 1) = \pm T\varphi_1$

$$\left(\int_{\Omega} \left(h\left(1\right)_+ - \frac{\beta - \lambda_1}{\alpha - \lambda_1} h\left(1\right)_-\right) \varphi_1 dx\right) \left(\int_{\Omega} \left(h\left(-1\right)_+ - \frac{\beta - \lambda_1}{\alpha - \lambda_1} h\left(-1\right)_-\right) \varphi_1 dx\right) < 0$$

Alors, par continuité, et en utilisant le théorème du valeur intermédiaires, il existe $\xi_0 \in]-1, 1[$ *tel que*

$$\int_{\Omega} \left(h\left(\xi_0\right)_+ - \frac{\beta - \lambda_1}{\alpha - \lambda_1} h\left(\xi_0\right)_-\right) \varphi_1 dx = 0;$$

c-à-d $h\left(\xi_0\right) \in E$*. Par conséquent, on a*

$$\max_{\xi \in [-1,1]} J\left(h\left(\xi\right)\right) \geq J\left(h\left(\xi_0\right)\right) \geq \inf_E J \geq \max\left\{J\left(T\varphi_1\right), -J\left(T\varphi_1\right)\right\}.$$

∎

Nous appliquons le théorème (cf. (1.12) Chap 1) à la fonctionnelle J avec $K = [-1, 1]$, $K_0 = \{\xi_0\}$ pour conclure que c est une valeur critique de J où

$$c = \inf_{h\in\Gamma} \max_{t\in K} J\left(h\left(t\right)\right).$$

Ce qui prouve l'existence d'une solution du problème (4.10) et achève la démonstration du théorème (4.1). ■

Exemple 4.3.1 *Nous considérons* (4.10) *avec,*

$$f(|x|, u\left(x\right)) := -g(x)\ln|u|\,,$$

où pour $x \in \Omega = B\left(0,1\right)$ boule unité de $\mathbb{R}^3$, $g(x) := \begin{cases} |x| \text{ si } x_i \neq 0, \forall i \\ \exp\displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_i \quad \text{ailleurs} \end{cases},$

f satisfait les hypothèses (H_1) et (H_4). L'application du théorème (4.1) donne l'existence d'une solution non radiale du problème (4.10).

Conclusion

Une étude variationnelle de certains problèmes faisant intervenir l'opérateur Laplacien et p-Laplacien a été présentée dans cette thèse. Nous avons été essentiellement concernées par l'étude de l' existence et la multiplicité de solutions non radiales de problème de Dirichlet dans le cas de perte de symétrie [74]. Nous avons aussi démontré l'existence de solutions non radiales, pour un problème singulier (lacune de compacité), et un résultat de bifurcation [27], se basant sur des résultats du à Lions [135]. Les résultats ont été établis par minimisation sous contraintes.
Dans une autre direction nous avons abordé un problème de résonnance par rapport au spectre de Fucik pour le Laplacien (cf. [68]). Nous avons determiné des conditions suffisantes permettant l'existence de solutions non radiales en utilisant le lemme du col.

Perspectives

- Nous nous intéressons à l'étude de l'existence de solutions non radiales dans le cas de lacunes de compacité et d'éventuelles bifurcations depuis les points frontières. Nous généraliserons partiellement certains résultats [38], [39], [119].
- Nous nous intéressons à l'étude de l'existence de solutions non radiales pour de problèmes de Dirichlet homogènes associé à un opérateur non local. On améliore partiellement le résultat de [167].

Bibliographie

[1] H. Aduen, A. Castro, Infinitely many non radial solutions to a superlinear Dirichlet problem. Proc. Amer. Math. Soc. 131(2003), $p.835 - 843$.

[2] H. Aduén, A. Castro, J. Cossio, Uniqueness of large radial solutions and existence of nonradial solutions for a superlinear Dirichlet problem in annulii. J. Math. Anal. Appl. 337 (2008), p.348–359.

[3] N. Alaa, M. Iguernane, Weak periodic solutions of some quasilinear parabolic equations with data measures. JIPAM. 3, Issue 3, 46(2002).

[4] F. Alessio, W. Dambrosio, Multiple solutions to a Dirichlet problem on bounded symmetric domains. J. Math. Anal. Appl. 235(1999), $p.217 - 226$.

[5] A. Amadori, F. Gladiali, A nonradial bifurcation resule with applications supercritical problems. Math App. (2016) .

[6] A. Ambrosetti, A perturbation theorem for superlinear boundary value problems. Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin-Madison, Tech. Sum. Report # . 1446 (1974) .

[7] A. Ambrosetti, On the existence of multiple solutions for a class of nonlinear boundary value problems. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 49(1973), $p.195 - 204$.

[8] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Funct. Anal. 14(1973), $p.349 - 381$.

[9] A. Ambrosetti, G. Prodi, A primer in non linear Analisis. 34 Cambridge studes in advanced mathematic. Cambridge Univercity Press. (1993).

[10] A. Ambrosetti, M. Badiale, Variational perturbative methods and bifurcation of bound states from the essential spectrum. Proc. Roy. Soc. Edinburgh A. 128(1998), $p.\ 1131 - 1161$.

[11] A. Anane, N. Tsouli, On the second eigenvalue of the p-Laplacian. in Nonlinear Partial Differential Equations,(Eds.), Pitman Res. Notes in Math. 343 (1996) , $p.1 - 9$.

[12] A. Aftalion, F. Pacella, Qualitative properties of nodal solutions of semilinear elliptic equations in radially symmetric domains. C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 339 (2004), $p.$ $339 - 344$.

[13] D. Arcoya, L. Boccardo, Some remarks on critical point theory for nondifferentiable functionals. NoDEA Nonlinear Differential Equations and Appl. 6(1999), $p.$ $79 - 100$.

[14] M. Arias, J. Campos,M. Cuesta, J-P. Gossez, Asymmetric elliptic problems with indefinite weights. Ann. I. H. Poincaré. 19 (2002) , $p.$ $581 - 616$.

[15] M. Arias, J. Campos, M. Cuesta and J-P. Gossez, An asymmetric Neumann problem with weights. Ann. I. H. Poincaré. 25 (2002) , $p.$ $267 - 280$.

[16] S. Bae, Classification of positive solutions of semilinear elliptic equations with Hardy term. dynamical systems supplement. (2013) , $p.31 - 39$.

[17] S. Bae, On Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations with Hardy Term. Hanbat National University. Daejeon $305 - 719$, Republic of Korea.

[18] P. Baras and J. Goldstein, The heat equation with a singular potential. Trans. Amer. Math. Soc. 294(1984), $p.$ $121 - 139$.

[19] A. Bahri, H. Berestycki, A perturbation method in critical point theory and applications. Trans. Amer. Math. Sco. 267(1981), $p.$ $1 - 32$.

[20] P. Bartolo, V. Benci and D. Fortunato, Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with "strong" resonance at infinity. Nonlinear Anal. 7(1983), $p.$ $981 - 1012$.

[21] T. Bartsch, M. Willem, Infinitely many nonradial solutions of a Euclidean scalar field equation. J. Funct. Anal. 117(1993), $p.$ $447 - 460$.

[22] T. Bartsch, Infinitely many solutions of a symmetric Dirichlet problem. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 20 (1993) , $p.$ $1205 - 1216$.

[23] T.Bartsch, Radial and nonradial solutions of a nonlinear scalar field equation. World Congress of Nonlinear Analysts. $J - IV$ (1996) , $p.$ $537 - 547$.

[24] C. Batkam, Radial and nonradial solutions of a strongly indefinite elliptic system on $\mathbb{R}^N$. Afr. Mat. 26(2015), $p.65 - 75$.

[25] A. Ben Mabrouk, M. Ben Mohamed, Nonradial solutions of a mixed concave-convex elliptic problem. J. Partial Differ. Equ. 24(2011), $p.$ $313-323$.

[26] C. Bereanu, P. Jebelean, P. J. Torres. Positive radial solutions for Dirichlet problems with mean curvature operators in Minkowski space. Journal of Functional Analysis. (2013), $p.$ $270-287$.

[27] N. Bekkouche, N. Daoudi-Merzagui, M. Hellal, On the multiplicity of non radial solutions for singular elliptic equations. Afrika Mathematika. $27\,(2016)$, $p.$ $1-9$.

[28] N. Bekkouche, N. Daoudi-Merzagui, Existence of non radial solutions for a problem of resonance with respect to the Fučik spectrum.(Soumis).

[29] H. Berestycki, M. Esteban, Existence and bifurcation of solutions for an elliptic degenerate problem. Journal of differential equation. 134(1997), $p.$ $3-25$.

[30] M. F. Bidaut-Véron, L. Véron, Nonlinear elliptic equations on compact Riemannian manifolds and asymptotics of Emden equations. Invent. Math. 106(1991), $p.$ 489–539.

[31] L. Boccardo, F. Murat, J.P. Puel, Existence results for some quasilinear parabolic equations. Nonlinear Anal. 13(1989), $p.$ $373-392$.

[32] G. Bonanno, Some remarks on a three critical points theorem. Nonlinear Anal. 54, (2003), $p.$ $651-665$.

[33] H. Brezis, J. M. Coron and L. Nirenberg, Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz, Commun. Pure Appl. Math. 33(1980), $p.$ $667-684$.

[34] H. Brezis, E. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. Proc. Amer. Math. Soc. 88(1983), $p.$ $486-490$.

[35] H. Brezis, J. L. Vazquez, Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems. Rev. Univ. Complutense. 10(1997), $p.$ $443-469$.

[36] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Masson, Paris, (1983).

[37] H. Brezis, L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. Comm. Pure Appl. Math. 36(1983), $p.$ $437-477$.

[38] B. Buffoni, L. Jeanjean, Bifurcation from the essential spectrum towards regular values. J. Reine Angew. Math. 445(1993) , p.1-29.

[39] B. Buffoni, L. Jeanjean, Minimax characterisation of solutions for a semi-linear elliptic equation with lack of compactness. Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non-lin. 10(1993), p. 377–404.

[40] G. J. Butler, Rapid oscillation non extendability on the existence of periodic solution to second order nonlinear ordinary differential equations. J. Dif. Eq. 22(1976), $p.467 - 477$.

[41] G. J. Butler, Periodic solutions of sublinear second order differential equations. J. Math. Anal. Appl. 62 (1978) , $p.676 - 690$

[42] M. Calanchi, B. Ruf, Radial and non radial solutions for Hardy–Hénon type elliptic systems. Calculus of Variations and Partial Differential Equations. (2010), p. $111 - 133$.

[43] J. Campos, Espectro de Fučik para operadores elipticos. Thèse, Universidad de Granada, (1996).

[44] F. Catrina, On a Brezis-Nirenberg type problem. Electronic Journal of Differential Equations. 146(2006), p. $1 - 10$.

[45] F. Catrina, Z.Q. Wang, On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: sharp constants, existence (and nonexistence), and symmetry of extremal solutions. Comm. Pure Appl. Math. 54(2001), $p.229 - 258$.

[46] D. Caoa, P. Hana, Solutions for semilinear elliptic equations with critical exponents and Hardy potential. J. Differential Equations. 205(2004), p. $521 - 537$.

[47] D. Cao, P. Han, A note on the positive energy solutions for elliptic equations involving critical sobolev exponents. Applied Mathematics Letters. 16(2003), p. $1105 - 1113$.

[48] A. Castro, M. B. Finan, Existence of many positive nonradial solutions for a superlinear Dirichlet problem on thin annuli. Nonlinear Differential Equations, Electron. J. Diff. Equs. (EJDE), Conf. 05(2000), $p.21 - 31$.

[49] A. Castro, A. Kurepa, Infinitely many radially symmetric solutions to a superlinear Dirichlet problem in a ball. Proc. Amer. Math. Soc. 101(1987), p. $57 - 64$.

[50] F. Catrina, M. Furtado, M. Montenegro, Positive solutions for nonlinear elliptic equations with fast increasing weights. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 137 (2007) , p. $1157 - 1178$.

[51] G. Cerami, An existence criterion for the critical points on unbounded manifolds(Italian). J. Rend. Sci. Mat. Fis. Chim. Geol. 112(1978), p. $332 - 336$.

[52] G. Cerami, On the existence of eigenvalues for a nonlinear boundary value problem. (Italian), Ann. Mat. Pura Appl. (4) 124(1980), p. $161 - 179$.

[53] G. Cerami, Un criterio di esistenza per i punti critici su variet'a ilimitate,Rend. Ist. Lomb. Sci. Lett. 112 (1978), p. 332–336.

[54] J. Chen, Exact local behavior of positive solutions for a semilinear elliptic equation with Hardy term. Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004) , p. $3225 - 3229$.

[55] J. Chen, Multiple positive solutions for a class of nonlinear elliptic equations. J Math. Anal. Appl. 295 (2004) , p. $341 - 354$.

[56] L. Chong, L. Shujie, L. Zhaoli, P. Jianzhong, On the Fučik spectrum, J. Differential Equations. 244(2008), p. $2498 - 2528$.

[57] K. S. Chou, C. W. Chu, On the best constant for a weighted Sobolev-Hardy inequality. J. London Math. Soc. 48(1993), p. $137 - 151$.

[58] A. O. Claudianor, L. R. de Freitas, Multiplicity of nonradial solutions for a class of quasilinear equations on annulus with exponential critical growth. Topol. Methods Nonlinear Anal. 39(2012), p. $243 - 262$.

[59] C.V. Coffman, A nonlinear boundary value problem with many positive solutions. J. Di .Equa. 54 (1984), p. 429 - 637.

[60] C. V. Coffman, A minimum-maximum principle for a class of nonlinear integral equations. J. Analyse Math. 22(1969), p.$391 - 419$.

[61] A. Contreras, M. del Pino, Nodal bubble-tower solutions to radial elliptic problems near criticality. Discrete and Continuous Dynamical Systems. 6(2006), p. $525 - 539$.

[62] D. G. Costa, M. Cuesta, Existance results for resonant perturbations of the Fučik spectrum. Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of the Juliusz Schauder Center. 8(1996), p. $295 - 314$.

[63] R. Courant, Dirichlet's Principle. Interscience Publishers, "Pure and Applied Mathematics" a series of Texts and Monographs, New York. 3 (1967).

[64] R. Courant, D. Hilbert, Methods of mathematical physics, Intersience. New-York. (1943).

[65] J. Cronin, Fixed points and topological degree in nonlinear analysis. Mathematical surveys. AMS. (1964).

[66] M. Cuesta, D. De Figueiredo, J-P. Gossez, The begining of the Fučik spectrum of p-Laplacian. J. Diff. Equat. 159 (1999) , p. $212-238$.

[67] M. Cuesta, J.P. Gossez, A variational approach to nonresonance with respect to the Fučik spectrum. Nonlinear Anal. TMA. 19(1992), p. $487-500$.

[68] M. Cuesta, Etude de la résonance et du spectre de Fučik des opérateurs laplacien et p-Laplacien. Thèse, Université Libre de Bruxelles, (1993).

[69] M. Cuesta, Généralisations non linéaires du spectre et applications a quelques EDP elliptiques. Habilitation a Diriger des Recherches,Université du Littoral Cote D'opale. $(2004-2005)$.

[70] M. Cuesta, D. De Figueiredo, J-P. Gossez,A nodal domain property for the p-Laplacian, C. R. Acad. Sci. Paris, t. Série I.330 (2000), p. 669–673.

[71] B. Dacorogna, Direct methods in the calculus of variations. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, Berlin/New York. 78 (1989).

[72] E.N. Dancer, Shusen Yan, On the superlinear Lazer–McKenna conjecture. J. Differential Equations. 210(2005), p. $317-351$.

[73] E.N. Dancer, On the Dirichlet problem for weakly nonlinear elliptic partial differential equations. Proc. Roy. Soc. 76 (1977) , p. $283-300$.

[74] N. Daoudi-Merzagui, N. Bekkouche, A. Boucherif, L. Li, Existence of Many Nonradial Solutions for a Perturbed Dirichlet Problem. Applied Mathematical Sciences. 10(2016) , p. $1047-1056$.

[75] D. G. De Figueiredo, B. Ruf, Existence and Non-Existence of Radial Solutions for Elliptic Equations with Critical Exponent in $\mathbb{R}^2$. Communications on Pure and Applied Mathematics. XLVIII (1995)

[76] D. De Figueiredo, J.-P.Gossez, On the first curve of the Fučik spectrum of an elliptic operator. Di . Int. Equat. 7(1994), p. $1285-1302$.

[77] E. De Giorgi, Teoremi di semicontinuita nel calcolo delle variazioni. lecture notes. Istituto Nazionale di Alta Matematica. 69 (1968).

[78] D. G. DE Figuiredo, P. N. Srikanth, S. Santra, Non radially symmetric solutions for a superlinear Ambrosetti- prodi type problem in a ball. Communications in Contemporary Mathematics. (2005), p. $849 - 866$.

[79] R. Didier, Des Mathématiques dans la Mécanique Quantique. Universit e de Nantes. conférence de (2005) .

[80] L. Dingyang, Y. Xuxin, Nonradial solutions for semilinear Schrödinger equations with sign-changing potential. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. (2015), p. $16 - 12$

[81] L, Ding., C, Tang, Existence and multiplicity of positive solutions for a class of semilinear elliptic equations involving Hardy term and Hardy–Sobolev critical exponents. J. Math. Anal. Appl.339(2008), p. $1073-1083$

[82] Y. Ding, Nonradial solutions of a semilinear elliptic equation. Acta Math. Sci. (English Ed.) 10(1990), p. $229 - 239$.

[83] P. Drabek, A. Kufner, F. Nicolosi, Quasilinear elliptic equations with degenerations and singularities. Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications. Walter de Gruyter Co. Berlin 5(1997).

[84] P. Drabek, Solvability and Bifurcations of Nonlinear Equations. Pitman Research Notes in Mathematics. 264 (1992).

[85] I. Duca, Palais-Smale condition for multi-time actions that produce Poisson-gradient PDEs. BSG Proc. 14, Geometry Balkan Press. (2007), p. $63 - 67$.

[86] Ekeland, Ivar.Convexiy Methods in Hamiltoniam Mechanics.N.Y.:Springer-Verlag, (1990).

[87] A. R. El Amrouss, Critical point theorems and applications to differential equations. Acta Math. Sin., Engl. Ser. 21(2005), p. $129 - 142$.

[88] A. R. El Amrouss, Multiplicity results for semilinear elliptic problems with resonance. Nonlinear Anal. 65(2006), p. $634 - 646$.

[89] A. R. El Amrouss,Nontrivial solutions of semilinear equations at resonance. J.Math. Anal. Appl. 325(2007), p. $19 - 35$.

[90] B. Escoubés, J. Leite-Lopes, Source et evolution de la physique quantique. EDP Sciences. (2005) .

[91] E. Fabes, D. Jerison, C. Kenig, The Wiener test for degenerate elliptic equations. Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 32 (1982) , p. $151 - 182$.

[92] E. Fabes, C. Kenig, R. Serapioni, The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations. Comm in P.D.E. 7 (1982) , *p*. $77 - 116$.

[93] F. Faraci, R. Livrea, Bifurcation theorems for nonlinear problems with lack of compactness. Ann. Polon. Math. 82 (2003) , *p*.$77 - 85$

[94] A. Farina, On the classification of solutions of the Lane–Emden equation on unbounded domains of $\mathbb{R}^N$. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 87 (2007) , *p*. $537 - 561$.

[95] A. Ferrero, F. Gazzola, Existence of solutions for singular critical growth semilinear elliptic equations. J. Differ. Equ. 177(2001), *p*. $494 - 522$.

[96] V. Felli, M. Schneider, Perturbation results of critical elliptic equations of Caffarelli–Kohn–Nirenberg type. Journal of Differential Equations. 19(2003), *p*. 121–142.

[97] P. Filomena, P. N. Srikanth, Nonradial solutions of a nonhomogeneous semilinear elliptic problem with linear growth. J. Math. Anal. Appl. 341(2008), *p*.$131 - 139$.

[98] D. Fortunato, G. Palmieri, Remarks on the Yamabe problem and the Palais-Smale condition. Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 75(1986), *p*. 47–65.

[99] G. Francesca, G. Massimo, N. Sérgio, Nonradial solutions for the Hénon equation in $\mathbb{R}^N$. Adv. Math. 249(2013), *p*.$1 - 36$.

[100] B. Franchi, R. Serapioni, Pointwise Estimates for a Class of Strongly Degenerate Elliptic Operators a Geometrical Approch. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 14(1987), *p*. $527 - 56$.

[101] D. Frédéri,P. Henri, Initiation a la simulation numérique en mécanique des fluides :éléments d'analyse numérique. Cours ENSTA MF307-6 juin. (2003) .

[102] S. Fučik, Solvability of Boundary Value Problems with Homogeneous Ordinary Differential Operators, Reidel. Boston. (1980) .

[103] S. Fučik, J. Necas, J. Soucek, V. Soucek, Spectral Analysis of Nonlinear Operators. Lect. Notes Math. Springer-Verlag, (1973).

[104] T. Gallay, Theorie de la mesure et de l′integration. Université Joseph Fourier, Grenoble, (2009) .

[105] T. Gallouët, O. Kavian, Résultats d′exitance et de non existance pour certains problèmes demi-linéaire à l′infini. Ann. Fac. Sci. de Toulouse, (1981).

[106] J. P. Garcia Azorero and I. Peral, Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems. J. Differential Equations. 144(1998), $p.$ $441-476$.

[107] B. Gidas, W-M. Ni, L. Ni renberg, Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$,.Advances in Math., Supplementary Studies 7A (1981), $p.$ $369-402$.

[108] F. Gladiali, M. Grossi, S. L.N. Neves, Nonradial solutions for the Hénon equation in. Advances in Mathematics. 249(2013), $p.$ $1-36$.

[109] W. Gordon, Physical variational principles which satisfy the Palais-Smale condition. Bull. Am. Math. Soc. 78(1972), $p.$ $712-716$.

[110] J. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear oscillations dynamical systems and bifurcations of vector fields. Appl. Math. Sciences 42(1983).

[111] J.Guo, Y-F.Peng, S-M Guo., Study on the nonradial solutions for a semilinear elliptic equation with Hardy term. (Chinese) Acta Math. Appl. Sin. 36(2013), $p.$ $666-679$.

[112] D. D. Hai, On a class of sublinear quasilinear elliptic problems. Proc. Amer. Math. Soc. 131, (2003) , $p.$ $2409-2414$

[113] P. Han, Z. Liu, Solutions for a singular critical growth problem with a weight, Math. Anal. Appl. 327(2007), $p.$ $1075-1085$

[114] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, O. Martio, Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Oxford. Mathematical. Monographs, The Cleredon Press, Oxford University Press, New York (1993).

[115] J. A. Hempel, Multiple solutions for a class of nonlinear elliptic boundary value problems. Indiana Univ. Math. J. 20(1971), $p.983-996$.

[116] N. Hirano, N. Mizoguchi, Nonradial solutions of semilinear elliptic equations on annuli. J. Math. Soc. Japan. 46(1994), $p.$ $111-117$.

[117] J. Iaia, H. Warchall, Nonradial solutions of a semilinear elliptic equation in two dimensions. J. Differential Equations. 119(1995), $p.$ $533-558$.

[118] Y. Jahbri, The Mountain Pass theorem. Variants, Generalizations and Some Applications, Cambridge University Press, (2003).

[119] L. Jeanjean, Solution in spectral gaps for a nonlinear equation of Schrödinger type. J. Diff. Equat. 112 (1994), $p.$ $53-80$.

[120] W, Jeong, Y, Lee, Stable solutions and finite Morse index solutions of nonlinear elliptic equations with Hardy potential. Department of Mathematics, POSTECH, Pohang, Kyungbuk Republic of Korea. (2013) , p. $784-790$.

[121] Q. Jin, Y. Li and H. Xu, Symmetry and asymmetry: the method of moving spheres, Adv. Differential Equations $13(2008), p.601-640$.

[122] Q. Jin, Y. Li and H. Xu, Symmetry and asymmetry: the method of moving spheres, Adv. Differential Equations, $13(2008), 601-640$

[123] Y. Kabeya, Existence of a nonradial solution to an elliptic equation with the homogeneous Neumann condition. (Japanese) Studies on structure of solutions of nonlinear PDEs and its analytical methods (Japanese) (Kyoto, (1999)).

[124] R. Kajikiya, Non-radial least energy solutions of the generalized Hénon equation. Journal of Differential Equations, $(2012), p.\ 1987-2003$.

[125] G. Karali, C. Sourdis, Radial and bifurcating non-radial solutions for a singular perturbation problem in the case of exchange of stabilities. Annales de l'Institut Henri Poincare. Non Linear Analysis. $29\,(2012)\,, p.131-170$.

[126] O. Kavian, Quelques remarques sur le spectre demi-linéaire de certains opérateurs autoadjoints, (preprint).

[127] O. Kavian, Introductiona la théoriedes points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag, (1983).

[128] M. A. Krasnosel'skii, A. I. Perov, A. I. Povolotskii, and P. P. Zabreiko, Plane Vector Fields. Academic Press. New York, (1966) .

[129] A. Kristaly, V. V. Motreanu, Cs. Varga, A minimax principle with a general Palais-Smale condition. Comm. Appl. Anal. 9(2005), $p\ .285-297$.

[130] A. Kristaly, C. Varga, Multiple solutions for elliptic problems with singular and sublinear potentials. Proc. Amer. Math. Soc. $135\,(2007)$, p. $2121-2126$.

[131] S. Th. Kyrits, Positive solutions for p- Laplacian equations with concave terms. Discrete and Continous Dynamical Systems Supplement. $(2011)\,, p.922-930$.

[132] P. D. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws II, Comm. Pure Appl. Math. 10(1957), p. $537-566$.

[133] S. Lin, Existence of positive nonradial solutions for nonlinear elliptic equations in annular domains. Trans. Amer. Math. Soc. 332(1992), $p.$ $775 - 791$.

[134] E. Lindgren, P. Lindqvist, Fractional eigenvalues. NO-7491 Trondheim, Norway (2012).

[135] P.L. Lions, The concentration–compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1. Rev Mat Iberoamericana1. (1985), $p.$ $145 - 201$.

[136] P.L. Lions, The concentration–compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 2. Rev Mat Iberoamericana1. (1985), $p.$ $45 - 121$.

[137] C. Loir, Exercices de mathématiques pour l'agrégation : Analyse1, $p.150 - 151$.

[138] C. Magalhaes, Semilinear elliptic problem with gossing of multiple eigenvalues. Comm. Part. Diff. Equat. 15 (1990), $p.1265 - 1292$.

[139] F. Marlène, Application de la théorie de la transversalité topologique à des problèmes non linéaires pour des équations différentielles ordinaires. Instytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk(Warszawa). (1990).

[140] A. Martin Salort, Convergence rates in a weighted Fučik Problem, Advanced Nonlinear Studies. 14(2014), $p.$ $385 - 402$.

[141] J. Mawhin, M. Willem, Critical Point Theory and Hamiltonian Systems,Appl. Math. Sci. Springer-Verlag, New York. 74 (1989)

[142] I. Meghea, Some results obtained in dynamical systems using a variational calculus theorem. BSG Proc. Geometry Balkan Press. 16 (2009), $p.$ $91 - 98$.

[143] E. Montefusco, Lower semicontinuity of functionals the concentration-compactness principle. J. Math. Anal. Appl. 263, (2001), $p.$ $264 - 276$.

[144] J. Moser, On Harnack's theorem for elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math.14(1961), $p.$ $577 - 591$.

[145] A. Munnier., Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles, Institut Elie Cartan. $2007 - 2008$.

[146] M. Musso, J. Wei, Nonradial Solutions to Critical Elliptic Equations of Caffarelli–Kohn–Nirenberg Type. Oxford Journals. Issue. 18 (2012), $p.$ $4120 - 4162$.

[147] K. Nagasaki, T. Suzuki, Radial and nonradial solutions for the nonlinear eigenvalue problem $\Delta u + \lambda e^u = 0$ on annuli in $\mathbb{R}^N$. J. Differential Equations. 87(1990), p. $144 - 168$.

[148] H. Norimichi, S. Naoki, Existence of positive solutions for a semilinear elliptic problem with critical Sobolev and Hardy terms. Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), p. $2585 - 2592$

[149] A. Orpel, On the existence of positive radial solutions for a certain class of elliptic BVPs, J. Math. Anal. Appl. 299(2004), p. $690 - 702$.

[150] F, Pacella, P.N, Srikanth, Nonradial solutions of a nonhomogeneous semilinear

elliptic problem with linear growt, Journal of Mathematical Analysis and Applications. 341 (2008), p. $131 - 139$.

[151] F. Pacard, Radial and nonradial solutions of $-\Delta u = \lambda f(u)$ on an annulus of $\mathbb{R}^N$ $N \geq 3$. J. Differential Equations. 101(1993), p. $103 - 138$.

[152] R. S. Palais, Morse theory on Hilbert manifolds. Topology. 2(1963), p. $299 - 340$.

[153] R. S. Palais, S. Smale, A generalized Morse theory. Bull. Am. Math. Soc. 70(1964), p. $165 - 172$.

[154] N. Point, J.H. Saiac. Equations aux dérivées partielles - mathématiques et méthodes numériques. Cours de l'ESCPI. (2005).

[155] A. Porretta, J. Vovelle, L^l solution to first order hyperbolic equations in bounded domains. Comm. Partial Diff. Equ. 28(2003), p. $381 - 403$

[156] P. H. Rabinowitz, Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations, Nonlinear Analysis (L. Cesari, R. Kannan andH. F. Weinberger, eds.), Academic Press. (1978), p. $161 - 177$.

[157] P. H. Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. CBMS. Reg Conf ser. Math. 65MS, Providence, R.I, (1986).

[158] P. H. Rabinowitz, Variational methods for nonlinear eigenvalue problems. Indiana Univ. Math. J. 23(1974), p. $729 - 754$.

[159] P. H. Rabinowitz, Variational methods for nonlinear eigenvalue problems, Eigenvalues of Non-linear problems. C.I.M.E.,Ediz. Cremonese, Rome, (1974) .

[160] J. S. Raymond, On the multiplicity of solutions of the equations $-\Delta u = \lambda f(u)$. J. Diff. Eq. 180 (2002) , p. $65 - 88$.

[161] M. Ribot, Systèmes d'équations aux dérivées partielles pour la biologie. modèles, analyse numérique et simulations. (2014).

[162] P. S. Richard, The Principle of Symmetric Criticality. Commun.Math. Phys. 69(1979), $p.19 - 30$.

[163] D. Ruiz, M. Willem, Elliptic problems with critical exponents and Hardy potential. J. Diff. Eq. 190 (2003) , p. $524 - 538$.

[164] B. Ruf, on nonlinear elliptic problems with jumping nonlinearities, Ann. Math. Pura. Appl. 28 (1981) , p. $133 - 151$.

[165] B. Rynne, The Fučik spectrum of general Sturm–Liouville problems, J. Differ. Eq. 161(2000), p. 87–109.

[166] M. Schechter, The Fučik spectrum, Indiana Univ. Math. J. 43(1994), p. $1140 - 1157$.

[167] R. Servadei, E. Valdinoci, Mountain Pass solutions for non-local elliptic operators, J. Math. Anal. Appl. 389(2012), p. $887 - 898$.

[168] B. L. Shekhter, On existence and zeros of solutions of a nonlinear two-point boundary value problem, J. Math. Anal. Appl. 97 (1983) , $p.1 - 20$.

[169] S. Smale, Morse theory and a non-linear generalization of the Dirichlet problem. Ann. of Math. 80(1964), $p.382 - 396$.

[170] P.N. Srikanth, Sanjiban Santra, A note on the superlinear Ambrosetti–Prodi type problem in a ball. in: Contributions to Nonlinear Analysis, in: Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 66 (2006) , p. $505 - 518$.

[171] M. Struve, Variationnel methods applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Springer-Verlags. (1999) .

[172] C. Sulem, P.L. Sulem, The nonlinear Schrodinger equation. Self-focusing and wave collapse. Applied Mathematical Sciences, 139. Springer-Verlag, New York, (1999).

[173] S.Sun Lin, On the Existence of Positive RadialSolutions for Nonlinear Elliptic Equations in Annular Domains. Journal of differential equations. 81(1989), p. $221 - 233$.

[174] G. Talenti, Best constants in Sobolev inequality. Ann. Math. Pura Appl. 110 (1976) , p. $353 - 372$.

[175] T. Tao, A proof of the Fredholm alternative. archive. (2011).

[176] J. Tyagi, Existence of nontrivial solutions for singular quasilinear equations with sign changing non linearity. Elec. J. Diff. Eq. 117 (2010) , p. $1 - 9$.

[177] C. Udrişte, Simplified multitime maximum principle. Balkan J. Geom. Appl. 14(2009), p. $102 - 119$.

[178] E.W.C. Van Groesen, Existence of multiple normal mode trajectories on convex energy surfaces of even classical hamiltonian systems. J. Differential Eq. 57 (1985) , p. $70 - 89$.

[179] E.W.C. Van Groesen, Applications of natural constraints in critical point theory to boundary value problems on domains with rotation symmetry. Arch. Math. 44 (1985) , $p.171 - 179$.

[180] Vedran Sohinger, Lecture notes for 18.155 on concentration compactness and soliton solutions for the nls equation. CiteSeerX, (2013)(www.math.upenn.edu).

[181] Z. Wang, M. Willem, Existence of many positive solutions of semilinear elliptic equations on annulus, Amer Math Soc. 127 (1999) , p. $1711-1714$.

[182] Z-Q. Wang, Nonradial solutions of nonlinear Neumann problems in radially symmetric domains. Topology in nonlinear analysis (Warsaw, (1994)), $p.85 - 96$.

[183] Z. Wang, Nonradial positive solutions for a biharmonic critical growth problem. Communications on Pure and Applied Analysis. (2011), p. 517-545.

[184] Y. Yan Li, Existence of many positive solutions of semilinear elliptic equations on annulus, J. Diff Equa. 83(1990), p. 348-367.

[185] G.Q.Zhang, K.C.Chang, Lectures on variational methods, Higher Education Press. (2011).

[186] P.E. Zhidkov, D. Korteweg, Vries and nonlinear Schrődinger equations qualitative theory, Lecture Notes in Mathematics,1756, Springer-Verlag, Berlin. (2001).

الملخص : هذه الأطروحة، تهتم بقضايا الوجود وتعدد الحلول غير قطري لفئة المشاكل من نوع (Dirichlet) المرتبطة للمعادلات التفاضلية الجزئية بيضاوية الشكل.

للقيام بذلك وضعنا شروط بسيطة وكافيه لحل هذه المشاكل بحيث الاجزاء اللاخطية تعتبر "ف فرعية الخط". ويستند نهجنا في هده التباينية علي نظرية الحد المباشرو نظرية المرتفع.

وغالبا ما نستعمل هده المشاكل المعتبرة في هذه الأطروحة لنمذجة الظواهر الفيزيائية (التشتت والتركيز).

أثبتنا فى الجزء لأول وجود وتعدد الحلول غير قطري لمشكلة (Dirichlet) في حالة فقدان التماثل.ثانيا، قمنا بمعالجة مشكلة التفرد (تماسك الفجوة)، ووجدنا نتيجة تانية للتفرع. واخيرا درسنا مشكلة الرنين في ما يتعلق بشعاع فوشيك بالنسبة للابلاس .

الكلمات المفتاحية : مشكلة ديريشلي، المعادلات التفاضلية الجزئية بيضاوية الشكل; مشكلة التفرد ; مشكلة الرنين ; حل غير قطرى ;القيمة الخاصة ;الحل الدورى ;نظرية الحد المباشر ; شعاع فوشيك ;شرط بالي-سمال ; نظرية المرتفع.

Résumé : Dans cette thèse, nous nous sommes intéressées aux questions d'existence et de multiplicité de solutions non radiales pour une classe de problèmes de Dirichlet associés à des équations aux dérivées partielles elliptiques. Pour ce faire, nous avons déterminé des conditions simples et suffisantes permettant la solvabilité de ces problèmes dans le cas où les non linéarités considérées ont une croissance "p-sublinéaire". Notre approche est variationnelle basée sur minimisation sous contraintes et lemme du col.

Les problèmes considérés dans notre thèse sont souvent utilisés pour modéliser les différents phénomènes de la physique (dispersion et concentration).

Nous avons étudié un problème de Dirichlet soumis à une perturbation, dans le second nous abordons un problème de Dirichlet dans le cas de présence de singularité et par la suite, nous avons étudié un problème de résonance par rapport au spectre de Fucik pour le Laplacien.

Mots clés : Problème de Dirichlet, équations aux dérivées partielles elliptiques; solution non radiale; solution périodique ; Minimisation sous contraintes; valeur propre; problème de singularité; problème de résonance; spectre de Fucik; lemme du col

Abstract: In this thesis, we investigated the existence and the multiplicity of nonradial solutions for a class of Dirichlet problems associated to elliptic partial differential equations.To do this, we have determined simple and sufficient conditions allowing the solvability of these problems in the case where the nonlinearities considered have a "p-sublinear" growth. Our approach is variational based on minimization under constraints and Mountain Pass Theorem.

The problems considered in our thesis are often used to model the different phenomena of physics (Dispersion and concentration).

We studied to a perturbation a problem of Dirichlet, in the second we address a Dirichlet problem in the case of singularity presence and subsequently we studied a problem of resonance with respect to the Fucik spectrum for the Laplacian.

Key words and phrases: Dirichlet problem; Elliptic partial differential equations; non radial solution ; under constraint minimization; eigenvalue; Problem of singularity; resonance problem; Fucik Spectrum; the Palais Smale condition; Mountain Pass Theorem ; periodic solution.