

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**



**UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID-TLEMCCEN
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**



**DIVISION ETUDE ET PREDICTION DES MATERIAUX
UNITE DE RECHERCHE MATERIAUX ET ENERGIES RENOUVELABLES**

MEMOIRE DE MASTER

**EN
PHYSIQUE DE LA MATIÈRE CONDENSÉE**

Présenté par :

Yakil mohammed

THÈME

**Applications de la fonction W de Lambert en
physique de la matière condensée**

Soutenu le : 01 / 07 / 2017 devant le jury :

Mr. A. BENZAIK	Professeur	Président	Université de Sidi-Bel-Abbès
Mr. G. MERAD	Professeur	Examineur	Université de Tlemcen
Mr. A. HOUARI	Professeur	Encadreur	Université de Maghnia

Année Universitaire 2016 -2017

REMERCIEMENT

Je remercie d'abord ALLAH Le Tout Puissant.

Le présent travail a été effectué au sein de l'Unité de Recherche de Matériaux et des Energies Renouvelables (URMER) Division d'Etude et Prédiction des Matériaux (LEPM) à l'université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen.

J'aimerais, à travers ces lignes, remercier toutes les personnes qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à la réussite de ce mémoire de Master.

J'adresse mes sincères remerciements en premier à mon encadreur le professeur AHMED HOUARI de l'université de Maghnia, et je tiens à lui exprimer ma plus sincère gratitude pour sa patience et son intérêt continu au bon déroulement de ce travail et d'avoir proposé un tel sujet intéressant, aussi je le remercie pour toute l'aide et conseils qu'il m'a apporté.

Je tiens également à exprimer mes remerciements au Professeur GHOUTI MERAD de l'université de Tlemcen Division : Etude et Prédiction de Matériaux. Unité de Recherche Matériaux et Energies Renouvelables (URMER) pour avoir accepté d'examiner ce travail et d'avoir proposé une telle spécialité de physique intéressante.

Je voudrais aussi remercier le Professeur A. BENZAIK, professeur de l'université de Sidi-Bel-Abbès, pour m'avoir fait l'honneur de présider ce Jury.

Je remercie et je présente mes respects à toute l'Equipe de la Division d'Etude et Prédiction des Matériaux d'URMER pour leur gentillesse et leurs conseils qui m'ont aidé à bien terminer ce mémoire.

*Enfin, je tiens à remercier infiniment mes très chers **PARENTS** et ma famille pour le soutien et les conseils durant toute la période de la préparation de ce mémoire.*

Je remercie mille fois tous mes voisins, mes amis et mes collègues.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE

VI

CHAPITRE I : DEFINITION DE LA FONCTION W DE LAMBERT, SES PROPRIETES ET SON CALCUL

I.1. HISTORIQUE	2
I.2. DEFINITION	2
I.3. EXEMPLES ILLUSTRANT L'APPLICATION DE LA FONCTION W DANS LA RESOLUTION D'EQUATIONS NON-ALGEBRIQUES	4
I.4. PROPRIETES	5
I.4.1. IDENTITES FONDAMENTALES	5
I.4.2. DERIVEE ET INTEGRALE	5
I.4.3. DEVELOPPEMENT LIMITE	6
I.5. SOLUTIONS ET CALCUL DE LA FONCTION W	6
I.5.1. LA FORMULE DE W_0^+	7
I.5.2. LA PARTIE DE W_0^-	7
I.5.3. LA BRANCHE W_{-1}	8
I.5.3.1. APPROXIMATION POUR $(-\frac{1}{e} \leq x < -0.333)$	8
I.5.3.2. APPROXIMATION POUR $(-0.333 \leq x < 0.033)$	9
I.5.3.3. APPROXIMATION POUR $(-0.033 \leq x < 0)$	9

CHAPITRE II : APPLICATIONS DE LA FONCTION WDE **LAMBERT EN PHYSIQUE GENERALE**

II.1. APPLICATION DE LA FONCTION W A LA RESOLUTION D'UNE EQUATION GENERIQUE EN PHYSIQUE	13
II.2.1. MOUVEMENT D'UN PROJECTILE AVEC UNE RESISTANCE D'AIR QUADRATIQUE EN VITESSE	14
II.2.2 CALCUL DE LA CONSTANTE DE BOLTZMANN	16
II.2.3. LOI DE DEPLACEMENT DE WIEN	16
II. 2.4. CALCUL DE LA VARIANCE DE LA DISTRIBUTION GAUSSIENNE	18

CHAPITRE III : APPLICATION DE LA FONCTION W DE **LAMBERT EN PHYSIQUE DE LA MATIERE CONDENSEE**

III.1.LA TEMPERATURE D'EINSTEIN D'UN SOLIDE	21
III.2. LA TEMPERATURE D'UN SEMI-CONDUCTEUR INTRINSEQUE	22
III.3. LA TEMPERATURE D'UN MATERIAU EMETTEUR THERMO-IONIQUE	23
III.4. LA LONGUEUR DE PENETRATION D'UN CHAMP MAGNETIQUE DANS UN SUPRACONDUCTEUR	24
III.5. L'ENERGIE DE GAP D'UN SUPRACONDUCTEUR A LA TEMPERATURE (0 K)	26
CONCLUSION GENERALE	27
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	28
ANNEXE 1	31

INTRODUCTION GENERALE

En physique, en principe, on cherche toujours des solutions analytiques aux problèmes qui se posent du fait qu'elles sont exactes. Comparativement aux solutions numériques, les solutions analytiques sont transparentes car elles permettent la compréhension et la prédiction des comportements physiques lorsque les paramètres des équations mises en jeu varient. Mais, en général, à cause de la complexité et du non linéarité de la majorité des phénomènes physiques, on se retrouve avec des équations transcendentes comportant des fonctions polynomiales, logarithmiques et exponentielles d'une ou plusieurs variables. Les solutions de telles équations ne sont que très rarement analytiques. D'où la nécessité des méthodes numériques pour la résolution de telles équations. Seulement, les méthodes numériques ne donnent que des résultats approchés et de plus elles nécessitent un coût de calcul conséquent.

Afin de privilégier les solutions analytiques en physique et en d'autres domaines, dans un travail pionnier en 1996, Corless et al. [1] ont montré que la fonction W de Lambert peut fournir des solutions analytiques compactes (closed-form solutions) pour plusieurs équations qui n'étaient auparavant résolues que numériquement. Et depuis ce travail, les applications de cette fonction ne cessent de s'accroître dans différents domaines de physique, de mathématiques et d'ingénierie.

Dans ce travail, nous développons quelques applications de la fonction W de Lambert en physique et notamment en physique de la matière condensée. Pour cela, nous identifions d'abord les équations de physique pertinentes à l'application de cette fonction et ensuite nous montrons qu'elle fournit des solutions compactes à ces équations. Les équations identifiées couvrent différentes situations de la physique générale et quelques propriétés en physique de la matière condensée telles que les propriétés thermiques, électroniques et supraconductrices des solides.

Quant à l'organisation de ce mémoire, le chapitre I présente les concepts mathématiques liés à la fonction W de Lambert ainsi que ses propriétés principales. Aussi, ce chapitre illustre l'application de cette fonction à la résolution de quelques équations choisies comme exemples typiques. La méthode de calcul de cette fonction est développée à la fin de ce chapitre avec son implémentation à l'aide du logiciel Python.

Le chapitre II est réservé à quelques applications de la fonction W de Lambert en physique générale couvrant des exemples choisis de la mécanique classique, la physique quantique et la mécanique statistique. Le chapitre III est dédié au thème proprement dit de ce mémoire où nous appliquons la fonction W de Lambert à la résolution de quelques équations de la physique de la matière condensée. Enfin, nous récapitulons par une conclusion.

CHAPITRE I :

**DEFINITION DE LA FONCTION w DE LAMBERT, SES
PROPRIETES ET SON CALCUL**

I.1. HISTORIQUE :

La fonction W de Lambert a été introduite pour la première fois en 1758 dans les travaux de Lambert [2,3]. Ensuite, elle a été étudiée par Euler en 1779 [4]. Encore beaucoup plus tard, elle a été étudiée en 1959 par E. M. Wright [5] d'où elle porte le nom de W [6]. Ce n'est qu'en 1996, grâce au travail pionnier de Corless et al [1] que la fonction W de Lambert a connu beaucoup d'applications en physique, mathématiques et statistique.

I.2. DEFINITION :

La fonction de Lambert notée, $W(x)$, est définie comme étant la fonction inverse de la fonction $f(x) = xe^x = y$ où e est la base du logarithme népérien [7]. Donc, on a $x = f^{-1}(y) = W(y)$. Par conséquent, la fonction W de Lambert vérifie la formule suivante : $W(y)e^{W(y)} = y$. Donc, la fonction W de Lambert est implicitement définie par l'équation transcendante:

$$W(x)e^{W(x)} = x \tag{I.1}$$

Par définition, le graphe de la fonction W est la courbe obtenue par symétrie du graphe (en vert dans la figure (I.1)) de la fonction $f(x) = xe^x$ par rapport à l'axe $y=x$. Le graphe de la fonction W est formé de deux branches réelles. La branche (en bleu dans la figure (I.1)) $W_0(x)$ appelée la branche principale qui est définie pour $x \geq -\frac{1}{e}$ et des valeurs de W_0 supérieures ou égales à -1 et la branche secondaire W_{-1} (en rouge dans la figure (I.1)) correspondant aux valeurs inférieures ou égales à -1 avec $-\frac{1}{e} \leq x < 0$. Une caractéristique de la fonction W de Lambert est qu'elle est bi-valuée dans l'intervalle $[-\frac{1}{e}, 0[$. Ceci est montré dans la figure (I.2).

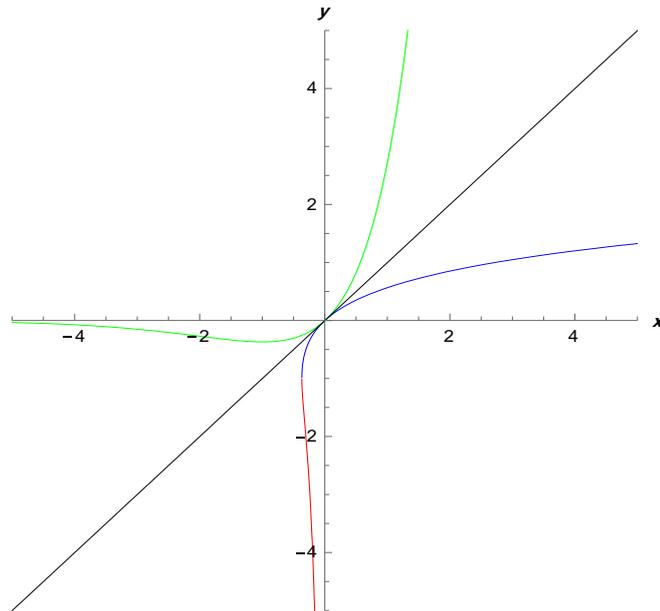
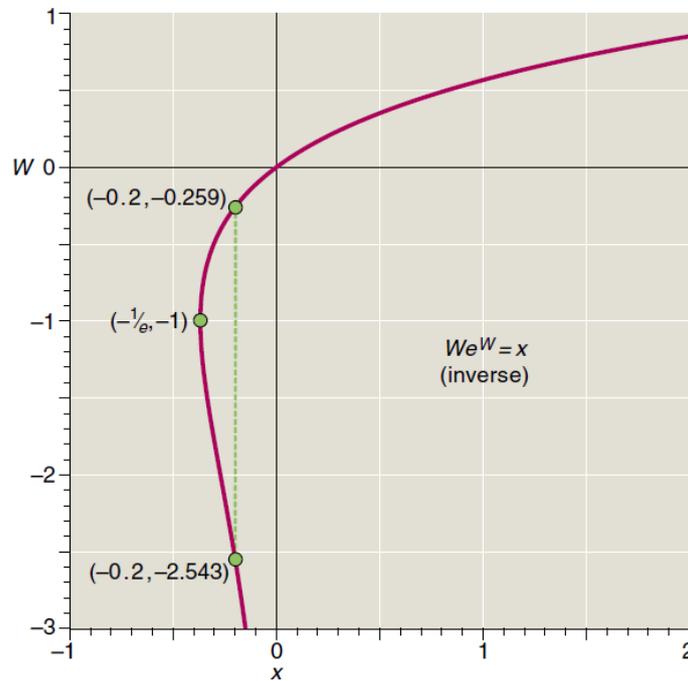


Figure (I.1) : La branche principale $W_0(x)$ en bleu et la branche secondaire $W_{-1}(x)$ en rouge.



Figure(I.2) : Dans l'intervalle $[-\frac{1}{e}, 0[$, W est une fonction bi-valuée [6].
Par exemple, au point $x = -0.2$, $W(x)$ prend deux valeurs soit $W_0 = -0.259$ ou $W_{-1} = -2.543$ [6].

Valeurs particulières:

x	$W_0(x)$	$W_{-1}(x)$
0	0	-
1	0.5671	-
e	1	-
$-\frac{1}{e}$	-1	-1
$\frac{1}{e}$	0.2784	-

I.3. EXEMPLES ILLUSTRANT L'APPLICATION DE LA FONCTION W DANS LA RESOLUTION D'EQUATIONS NON-ALGEBRIQUES:

L'importance de la fonction W de Lambert est de donner les solutions pour différentes équations non-algébriques incluant des fonctions exponentielles ou logarithmes [6]. La stratégie générale est de déplacer toutes les instances de l'inconnue d'un côté de l'équation et transformer l'équation initiale en la forme $f(x)e^{f(x)} = y$ [7]. A ce stade, et suite à la définition de la fonction W donnée par l'équation (I.1), la solution de l'équation $f(x)e^{f(x)} = y$ s'ensuit $f(x) = W(y)$ [7]

1-Résolution de l'équation : $x + e^x = 0$

On a: $x + e^x = 0 \Rightarrow x = -e^x \Rightarrow xe^{-x} = -1$

En mettant l'équation sous la forme $-xe^{-x} = 1$, on obtient comme solution :

$$-x = W_0(1) = -0.56714 \dots$$

2-Résolution de l'équation $e^{-x} = x$:

$e^{-x} = x \Rightarrow xe^x = 1 \Rightarrow x = W(1) = 0.56714 = \Omega$, appelée constante Omega.

3-Résolution de l'équation $x^2 = 2^x$:

$$x^2 = 2^x \Leftrightarrow x = 2^{\left(\frac{x}{2}\right)}$$

En utilisant le logarithme dans les deux côté de l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\ln x = \frac{x}{2} \ln 2 \Leftrightarrow x = e^{\frac{x}{2} \ln 2}$$

En rassemblant les instances de l'inconnue dans un côté de l'équation, on a: $xe^{-\left(\frac{x}{2} \ln 2\right)} = 1$

Donc, $-\frac{x}{2} \ln 2 e^{-\left(\frac{x}{2} \ln 2\right)} = -\frac{\ln 2}{2}$. Cette équation a pour solution: $x = -\frac{2}{\ln 2} W\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)$

Etant donné $-\frac{\ln 2}{2} < 0$ alors la formule obtenue donne deux solutions réelles :

$$x_0 = -\frac{2}{\ln 2} W_0\left(-\frac{\ln 2}{2}\right) \text{ et } x_1 = -\frac{2}{\ln 2} W_{-1}\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)$$

I.4. PROPRIETES :

I.4.1. IDENTITES FONDAMENTALES :

Par manipulations de l'équation(I.1), on obtient quelques identités relatives à la fonction W :

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{x}{e^{W(x)}} \\ W(x) &= \ln\left(\frac{x}{W(x)}\right) \\ e^{W(\ln x)} &= \frac{\ln x}{W(\ln x)} \\ e^{n W(x)} &= \left(\frac{x}{W(x)}\right)^n \end{aligned} \tag{I.2}$$

I.4.2. DERIVEE ET INTEGRALE :

D'après (I.1), on a [7]: $\frac{d}{dx}(W(x)e^{W(x)}) = 1$

$$W'(x)e^{W(x)} + W(x)W'e^{W(x)} = 1$$

$$W'(x)(1 + W(x))e^{W(x)} = 1$$

Donc la dérivée $W'(x)$ est de la forme:

$$\begin{aligned} W'(x) &= \frac{1}{(1+W(x))e^{W(x)}} \text{ Si } x \neq -\frac{1}{e} \\ &= \frac{W(x)}{x(1+W(x))} \text{ Si } x \neq 0 \text{ et } x \neq -\frac{1}{e} \end{aligned} \tag{I.3}$$

Pour intégrer $W(x)$, on utilise un changement de variable. On pose

$$w = W(x) \tag{I.4}$$

et on remplace dans (I.1), on obtient [1,7] :

$$dx = (w + 1)e^w dw$$

$$\int W(x)dx = \int w(w + 1) e^w dw$$

L'intégrale ci-dessus est maintenant intégrée par parties [8], ce qui donne :

$$\int W(x)dx = (w^2 - w + 1)e^w + C$$

$$= (W^2(x) - W(x) + 1)e^{W(x)} + C$$

$$\int W(x)dx = x \left(W(x) - 1 + \frac{1}{W(x)} \right) + C = xW(x) - x + e^{W(x)} + C \quad (I.5)$$

I.4.3. DEVELOPPEMENT LIMITE :

L'utilisation du théorème d'inversion de Lagrange [8,9] donne une série de Taylor pour la branche principale $W_0(x)$ au voisinage de 0 avec un rayon de convergence égal à $\frac{1}{e}$ et par la formule [10,11]:

$$W_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n \quad (I.6)$$

I.5. SOLUTIONS ET CALCUL DE LA FONCTION W :

Les solutions réelles de la fonction W de Lambert dépendent de l'intervalle de l'argument x . D'après le graphe(I.1), le nombre de solutions de la fonction $W(x)$ sont données [7] dans le tableau ci-dessous :

La valeur de x	Les solutions de $W(x)$
$x < -\frac{1}{e}$	Pas de solution réelle
$-\frac{1}{e} \leq x < 0$	Deux solutions réelles négatives
$x \geq 0$	Une seule solution réelle positive

Le calcul de la fonction $W(x)$ compte sur des approximations avec différentes valeurs de l'erreur relative. Chaque intervalle de x possède une formule approximative de calcul. On a deux formules d'approximation concernent les branches W_0^+ et W_0^- [12, 13, 14] et trois formules pour la branche W_{-1} pour trois intervalles [15].

I.5.1. LA FORMULE DE W_0^+ :

Pour tout x supérieur ou égal à 0 ($x \geq 0$), la fonction ici a des valeurs strictement positives. En utilisant (I.4) dans (I.1), on a $x = we^w$ et cela donne [13] :

$$e^w = \frac{x}{w} \Rightarrow w = \ln\left(\frac{x}{\ln\frac{x}{w}}\right) \tag{I.6}$$

On modifie cette formule (I.6) à une suite d'approximation plus exacte de la forme [12]

$$w_0^{+n+1} = \ln\left(\frac{a^{n+1}x}{w_0^{+n}}\right), \quad n = 0, 1, \dots$$

n étant le pas d'itération et a le rapport de la suite, où le premier terme est :

$$w_0^{+0} = \ln(1 + a^0x)$$

Pour une bonne approximation avec un minimum d'erreur relative, nous avons examiné les différents schémas d'interpolation simple entre les suites de w_0^{+n} pour produire une approximation améliorée par une interpolation linéaire [12] :

$$(1 + \epsilon)w_0^{+n+1} - \epsilon w_0^{+n} = w_0^{+*n+1}$$

où ϵ est le paramètre de l'interpolation

Pour le cas de $n = 1$, $\epsilon \cong 0.4586887$, $a^2 = \frac{6}{5}$, $a^0 = a^1 = 2a^2$

$$w_0^{+*2} = (1 + \epsilon) \ln\left\{\frac{6x}{5 \ln[(12/5)(x/\ln(1+(12/5)x))]} \right\} - \epsilon \ln\left[\frac{2x}{\ln(1+2x)}\right] \tag{I.7}$$

La formule (I.7) nous donne une valeur approximative de W_0 pour tous $x \geq 0$ avec une erreur relative maximale inférieure à 0.2%.

I.5.2. LA PARTIE DE W_0^- :

Cette partie de la fonction est pour $-\frac{1}{e} \leq x < 0$ avec les valeurs de $W(x) \geq -1$

L'application du développement de la série de Taylor [16] sur (I.1) au voisinage de $\left(-\frac{1}{e}\right)$ [13,14] et l'utilisation de la méthode de la fraction continue [17] nous donnent une approximation de $W(x)$ dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ par la formule suivante [12,14]:

$$W(x) = -1 + \frac{\sqrt{\eta}}{1 + ((N_1\sqrt{\eta})/(N_2 + \sqrt{\eta}))} \tag{I.8}$$

avec:

$$\eta = 2 + 2e^1x$$

$$N_1 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(N_2 + \sqrt{2})$$

$$N_2 = 3\sqrt{3} + 6 - \frac{[(2237 + 1457\sqrt{2})e^1 - 4108\sqrt{2} - 5764]\eta}{(215 + 199\sqrt{2})e^1 - 430\sqrt{2} - 796}$$

La formule (I.8) est utilisée pour calculer les valeurs de la branche principale dans l'intervalle de x talque $-\frac{1}{e} \leq x < 0$ avec une erreur relative maximale est égale à 0.013%.

I.5.3. LA BRANCHE W_{-1} :

La branche W_{-1} concerne les valeurs de $W \leq -1$ pour $-\frac{1}{e} \leq x < 0$

Nous avons divisé cet intervalle de x à trois domaine et ceci nous donne une bonne approximation de W_{-1} avec une erreur relative maximale qui reste inferieure à 0.010% [15].

I.5.3.1. APPROXIMATION POUR $\left(-\frac{1}{e} \leq x < -0.333\right)$:

La fonction W au voisinage de $-\frac{1}{e}$ a une développement en série de la forme [1,15] :

$$W_{-1}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k p^k \quad (I.9)$$

Où :

$$p = -\sqrt{2(e^1x + 1)}$$

$$u_k = \frac{k-1}{k+1} \left(\frac{u_k + 2}{2} + \frac{\alpha_{k-2}}{4} \right) - \frac{\alpha_k}{2} - \frac{u_k - 1}{k+1}$$

$$\alpha_k = \sum_{j=2}^{k-1} u_j u_{k+1-j}$$

$$u_0 = -1, u_1 = 1, \alpha_0 = 2, \alpha_1 = -1$$

La série (I.9) est convergente dans l'intervalle $-\sqrt{2} \leq x < 0$ donc converge pour $-\frac{1}{e} \leq x < 0$ qui couvre tout le domaine d'existence de $W_{-1}(x)$. Les premiers termes de la série (I.9) sont [15]:

$$W_{-1}(x) = -1 + p - \frac{1}{3}p^2 + \frac{11}{72}p^3 - \frac{43}{540}p^4 + \frac{769}{17280}p^5 - \frac{221}{8505}p^6 \quad (\text{I.10})$$

I.5.3.2. APPROXIMATION POUR $(-0.333 \leq x < 0.033)$:

En appliquant l'approximation de la fonction rationnelle sur la fonction $W(x)$ basée sur un calcul standard (en évitant les fonctions spéciales), on trouve la formule [15] :

$$W_{-1}(x) = \frac{\sum_{l=0}^L a_l x^l}{1 + \sum_{m=1}^M b_m x^m} \quad (\text{I.11})$$

Cette formule(I.11) a une approximation de la forme [15] :

$$W_{-1}(x) = \frac{-8.0960 + 391.0025x - 47.4252x^2 - 4877.6330x^3 - 5532.7760x^4}{1 - 82.9423x + 433.8688x^2 + 1515.3060x^3} \quad (\text{I.12})$$

I.5.3.3. APPROXIMATION POUR $(-0.033 \leq x < 0)$:

Au voisinage du (0^-) le théorème de l'inversion de Lagrange donne une série asymptotique [18] de la forme [1,19] :

$$W(x) = \ln x - \ln \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{km} \frac{(\ln \ln x)^m}{(\ln x)^{k+m}} \quad (\text{I.13})$$

$c_{km} = \frac{(-1)^k}{m!} S[k+m, k+1]$ où $S[k+m, k+1]$ est le nombre cycle de Stirling [1]

La série (I.13) dans le développement ci-dessus doit être absolument convergent et peut être réarrangé sous la forme [11] :

$$W_{-1}(x) = L_1 - L_2 + \frac{L_2}{L_1} + \frac{(-2+L_2)L_2}{2L_1^2} + \frac{(6-9L_2+2L_2^2)L_2}{6L_1^3} + O\left(\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^4\right) \quad (\text{I.14})$$

où : $L_1 = \ln(-x)$, $L_2 = \ln[-\ln(-x)]$

Le tableau suivant résume les différentes équations utilisées pour le calcul de $W(x)$.

L'intervalle de x	Le nombre de solution	La formule de calcul
$x \geq 0$	1	$W_0^+(x) = (1 + \varepsilon) \ln \left\{ \frac{6x}{5 \ln[(12/5)(x/\ln(1 + (12/5)x))]} \right\} - \varepsilon \ln \left[\frac{2x}{\ln(1 + 2x)} \right]$ $\varepsilon \cong 0.4586887$
$-\frac{1}{e} \leq x < 0$	2	$W_0^-(x) = -1 + \frac{\sqrt{\eta}}{1 + ((N_1\sqrt{\eta})/(N_2 + \sqrt{\eta}))}$ $\eta = 2 + 2e^{1x}$ $N_1 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(N_2 + \sqrt{2})$ $N_2 = 3\sqrt{3} + 6 - \frac{[(2237 + 1457\sqrt{2})e^1 - 4108\sqrt{2} - 5764]\eta}{(215 + 199\sqrt{2})e^1 - 430\sqrt{2} - 796}$ <p style="text-align: center;">W_{-1}</p> <p style="text-align: center;">Pour : $-1/e \leq x \leq -0.333$</p> $W_{-1}(x) = -1 + p - \frac{1}{3}p^2 + \frac{11}{72}p^3 - \frac{43}{540}p^4 + \frac{769}{17280}p^5 - \frac{221}{8505}p^6$ $p = \sqrt{2(xe + 1)}$ <p style="text-align: center;">Pour : $-0.333 \leq x \leq -0.033$</p> $W_{-1}(x) = \frac{-8.0960 + 391.0025x - 47.4252x^2 - 4877.6330x^3 - 5532.7760x^4}{1 - 82.9423x + 433.8688x^2 + 1515.3060x^3}$ <p style="text-align: center;">Pour : $-0.033 \leq x < 0$</p> $W_{-1}(x) = L_1 - L_2 + \frac{L_2}{L_1} + \frac{(-2 + L_2)L_2}{2L^2} + \frac{(6 - 9L_2 + 2L_2^2)L_2}{6L_1^3}$ $+ \frac{(-12 + 36L_2 - 22L_2^2 + 3L_2^3)L_2}{12L_1^4}$ $+ \frac{(60 - 300L_2 + 350L_2^2 - 125L_2^3 + 12L_2^4)L_2}{60L_1^5}$ $L_1 = \ln(-x), L_2 = \ln[-\ln(-x)]$

Tableau (I.1) : Les solutions et les formules de calcul de $W(x)$ [7, 12, 15]

Un programme de calcul approximatif basé sur le tableau (I.1) de $W(x)$ est développé en annexe 1 en utilisant le langage Python.

Pour information, l'évaluation de la fonction $W(x)$ est programmée dans différents logiciels professionnels comme Mathematica où elle est nommée (*ProductLog*) et Maple où elle est nommée (*Lambert*).

CHAPITRE II :

**APPLICATIONS DE LA FONCTION W DE LAMBERT EN
PHYSIQUE GENERALE**

La fonction W de Lambert est très présente en physique. Elle fournit une méthode analytique pour calculer de nombreuses grandeurs physiques inconnues qui n'étaient auparavant accessibles que numériquement.

Ce chapitre expose quelques applications de la fonction W de Lambert en physique générale couvrant le mouvement d'un projectile, la constante de Boltzmann, la loi de déplacement de Wien et la distribution gaussienne.

II.1. APPLICATION DE LA FONCTION W A LA RESOLUTION D'UNE EQUATION GENERIQUE EN PHYSIQUE :

Notons que de nombreuses formules et équations couvrant différents domaines en physique peuvent être exprimées sous une même forme générale suivante:

$$Q(x) = A x^p e^{-Bx^q} \quad (\text{II.1})$$

où Q est une grandeur ou un paramètre physique, fonction d'une variable physique donnée x . A et B sont des fonctions explicites incorporant des constantes physiques et des paramètres qui ne dépendent pas de x . Les exposants p et q sont des nombres entiers ou rationnels non nuls, positifs ou négatifs, connus. A titre d'exemple, nous citons la densité des porteurs de charges $n_i(T)$ dans un semi-conducteur intrinsèque qui est donnée en fonction de la température T par : $n_i(T) = 2 \left(\frac{2\pi k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} (m_e m_h)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$ où m_e, m_h sont les masses effectives des électrons et des trous dans le semi-conducteur, E_g son énergie de gap et k_B et h sont les constantes de Boltzmann et Planck respectivement.

Supposons que Q dans (II.1) est accessible, soit à travers une mesure expérimentale ou par un calcul théorique et A et B sont supposés connus.

En effectuant des transformations élémentaires successives sur (II.1)

$$\begin{aligned} x^p e^{-Bx^q} &= \frac{Q}{A} \\ (x^p e^{-Bx^q})^{q/p} &= \left(\frac{Q}{A} \right)^{q/p} \\ x^q e^{-\frac{q}{p} Bx^q} &= \left(\frac{Q}{A} \right)^{q/p} \\ -\frac{q}{p} Bx^q e^{-\frac{q}{p} Bx^q} &= -\frac{q}{p} B \left(\frac{Q}{A} \right)^{q/p} \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

On remarque que (II.2) a la forme de l'équation suivante :

$$f(x)e^{f(x)} = y \quad (\text{II.3})$$

$$\text{où } f(x) = -\frac{q}{p} B x^q \text{ et } y = -\frac{q}{p} B \left(\frac{Q}{A}\right)^{q/p}$$

D'après (I.1), la résolution de (II.3) donne pour $f(x)$

$$f(x) = W(y) \quad (\text{II.4})$$

Alors, selon (II.4), on peut résoudre (II.2) pour obtenir pour x :

$$x = \left(-\frac{p}{q} \frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{q}} \left(W\left(-\frac{q}{p} B \left(\frac{Q}{A}\right)^{q/p}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \quad (\text{II.5})$$

Rappelons que, en physique, les fonctions mathématiques standards (*sin*, *ln*, *exp* etc....) sont sans dimension physique ainsi que leurs arguments. Par conséquent, le paramètre x dans (II.5) doit avoir la dimension physique du factor $\left(-\frac{p}{q} \frac{1}{B}\right)^{1/q}$ et l'argument $\left(-\frac{q}{p} B \left(\frac{Q}{A}\right)^{q/p}\right)$ de la fonction W de Lambert doit être sans dimension.

II.2.1. MOUVEMENT D'UN PROJECTILE AVEC UNE RESISTANCE D'AIR QUADRATIQUE EN VITESSE :

On considère un objet de masse m , lancé avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle θ avec le sol horizontal. Le mouvement de ce projectile, avec l'existence d'une résistance d'air quadratique en vitesse, est représenté par deux équations de mouvement : l'une suivant x et l'autre suivant y correspondant aux déplacements horizontal et vertical respectivement [20]:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -b v_x (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} \quad (\text{II.6})$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - b v_y (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} \quad (\text{II.7})$$

où b est le coefficient de résistance, g le champ gravitationnel, v_x et v_y sont les composantes x et y de la vitesse respectivement.

Si on considère les conditions initiales suivantes :

$$v_{x0} = v_0 \cos \theta, \quad x(0) = 0$$

$$v_{y0} = v_0 \sin \theta, \quad y(0) = 0$$

Les solutions de ces deux équations (II.6) et (II.7) avec une trajectoire de faible angle θ sont données par [20]:

$$X = \ln(1 + \tau u_{x0}) \quad (\text{II.8})$$

$$Y = -\frac{\tau}{2u_{x0}} - \frac{\tau^2}{4} + \left(\frac{u_{y0}}{u_{x0}} + \frac{1}{2u_{x0}^2}\right) \ln(1 + \tau u_{x0}) \quad (\text{II.9})$$

avec : $X = \frac{x}{VT}$, $Y = \frac{y}{VT}$, $\tau = \frac{t}{T}$, $u_{x0} = \frac{v_{x0}}{V}$, $u_{y0} = \frac{v_{y0}}{V}$, $V = \left(\frac{mg}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$ et $T = \frac{V}{g}$

CALCUL DE LA PORTEE R :

On remplace τ dans (II.8) et après substitution dans (II.9), on obtient :

$$Y = X \left[\frac{u_{y0}}{u_{x0}} + \frac{1}{2u_{x0}^2} \right] + \frac{1}{4u_{x0}^2} (1 - e^{2X}) \quad (\text{II.10})$$

La portée du projectile R est la valeur de x lorsque $y = 0$, d'où :

$$0 = R' \left[\frac{u_{y0}}{u_{x0}} + \frac{1}{2u_{x0}^2} \right] + \frac{1}{4u_{x0}^2} (1 - e^{2R'}) \quad (\text{II.11})$$

avec : $R' = \frac{R}{VT}$

L'équation (II.11) est une équation transcendante qui n'a été résolue jusqu'à maintenant que numériquement ou graphiquement. Cependant, les équations de ce type peuvent être résolues analytiquement à l'aide de la fonction W de Lambert [21] comme suit :

$$R' = -\frac{D}{C} - \frac{1}{2} W \left(\frac{-2D}{C} e^{-\frac{2D}{C}} \right) \quad (\text{II.12})$$

où $C = \left[\frac{u_{y0}}{u_{x0}} + \frac{1}{2u_{x0}^2} \right]$ et $D = \frac{1}{4u_{x0}^2}$

Après remplacement de C , D , u_{x0} , u_{y0} dans (II.12) avec $R = R'VT$, on obtient :

$$R = -\frac{m^2 g}{2b^2 v_0^2 \sin(2\theta) + 2bmg} - \frac{m}{2b} W \left(\frac{-mg}{bv_0^2 \sin(2\theta) + mg} e^{\frac{-mg}{bv_0^2 \sin(2\theta) + mg}} \right) \quad (\text{II.13})$$

CALCUL DU TEMPS DE VOL t_f :

Le temps de vol t_f est obtenu à partir de (II.8) en définissant $X = R'$ et $\tau = \tau_f$ de telle sorte que : $R' = \frac{R}{VT}$, $\tau_f = \frac{t_f}{T}$

D'après (II.13) [21] :

$$t_f = \frac{m}{bv_0 \cos \theta} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \left[W \left(\frac{-mg}{bv_0^2 \sin(2\theta) + mg} e^{\frac{-mg}{bv_0^2 \sin(2\theta) + mg}} \right) + \frac{mg}{bv_0^2 \sin(2\theta) + mg} \right] \right) - 1 \right] \quad (\text{I.14})$$

II.2.2 CALCUL DE LA CONSTANTE DE BOLTZMANN:

Dans la théorie cinétique des gaz, la distribution de Maxwell-Boltzmann de la vitesse des molécules dans un gaz parfait à l'équilibre thermique est donnée par :

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \quad (\text{II.15})$$

où m est la masse des molécules de gaz, T la température du gaz considéré et k_B est la constante de Boltzmann.

Physiquement, $f(v)dv$ donne la probabilité de trouver une molécule du gaz avec le module de vitesse dans l'intervalle $[v, v + dv]$.

Si on réécrit (II.15) sous la forme (II.1), on obtient :

$$Ax^{-3/2} e^{-Bx^{-1}} = Q \quad (\text{II.16})$$

avec $x = k_B A \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{m}{T} \right)^3 v^4 \right)^{1/2}$, $B = \frac{1}{2} \frac{mv^2}{T}$, $p = -3/2$, $q = -1$ et $Q = f$. En utilisant (II.5) pour résoudre (II.16), on obtient :

$$x = -\frac{2B}{3} \frac{1}{W\left(-\frac{2B}{3} \left(\frac{Q}{A}\right)^{2/3}\right)} \quad (\text{II.17})$$

On remplace x , Q , A et B dans (II.17) par leurs expressions et après simplification, on obtient pour k_B :

$$k_B = -\frac{1}{3} \frac{mv^2}{T} \frac{1}{W\left(-\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/3} (fv)^{2/3}\right)} \quad (\text{II.18})$$

Ainsi, en mesurant T , la température du gaz considéré, et en connaissant la masse m des molécules de gaz, l'équation (II.18) fournit une formule analytique compacte pour la détermination de la constante de Boltzmann k_B . Notons que (II.18) présente l'avantage de déterminer k_B indépendamment des autres constantes physiques. Pour une valeur moyenne de k_B , il faut évaluer l'expression donnée par (II.18) pour différentes valeurs mesurées de f correspondant à différentes valeurs mesurées de v à différentes températures mesurées à l'aide de différents gaz parfaits.

II.2.3. LOI DE DEPLACEMENT DE WIEN :

Le spectre de radiation du corps noir est une fonction de la longueur d'onde λ et la température T . Si on note $\rho(\lambda, T)$ la puissance émise selon la loi de Planck alors [22,23]:

$$\rho(\lambda, T) = \frac{8\pi hc/\lambda^5}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1} \quad (\text{II.19})$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide et k_B la constante de Boltzmann.

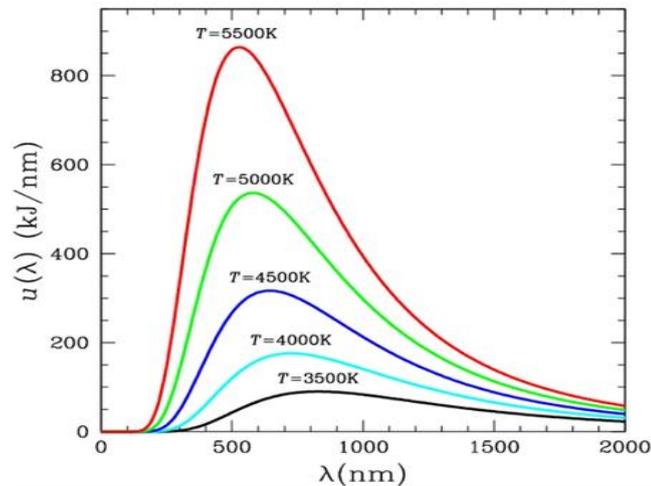


Figure (II.1) : La puissance émise en fonction de la longueur d'onde λ [24]

La longueur d'onde λ_{max} correspondant à la valeur maximale de ρ obéit à la loi de déplacement de Wien : $\lambda_{max} T = b$

où b est la constante de déplacement de Wien.

D'après le spectre de radiation, la valeur de λ_{max} est obtenue en résolvant l'équation $\frac{\partial \rho}{\partial \lambda} = 0$. Après simplification, on obtient l'équation transcendante suivante :

$$(x - 5)e^x = -5 \quad (\text{II.20})$$

où : $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$

Mettons (II.20) sous la forme (II.3):

$$(x - 5)e^{x-5} = -5e^{-5} \quad (\text{II.21})$$

En appliquant (II.4) à (II.21), on obtient :

$$x = 5 + W(-5e^{-5}) \quad (\text{II.22})$$

D'après (II.22), on peut calculer la constante de Wien analytiquement sans recours à une méthode numérique comme on faisait avant [23] c'est-à-dire:

$$b = \frac{hc/k_B}{5 + W(-5e^{-5})} \quad (\text{II.23})$$

II. 2.4. CALCUL DE LA VARIANCE DE LA DISTRIBUTION GAUSSIENNE :

La distribution gaussienne ou normale est la distribution statistique la plus utilisée dans l'analyse scientifique. Elle est également souvent utilisée en physique pour la description statistique des variables physiques aléatoires dont les distributions ne sont pas connues. La forme fonctionnelle de la distribution gaussienne est

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \tag{II.24}$$

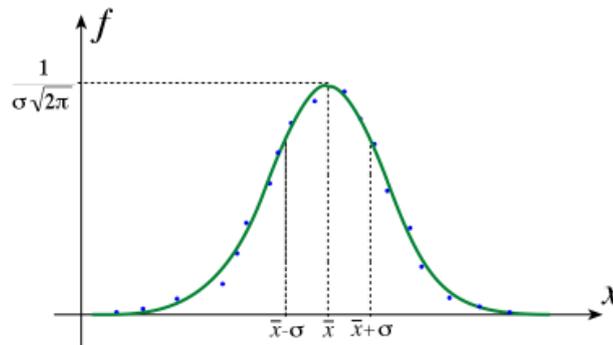


Figure (II.2) :La courbe de Gauss, $\bar{x} = \mu$ [25]

où μ est la moyenne de x (espérance ou centre), σ l'écart-type (la largeur). La variable x est mesurée ou calculée par simulation.

Supposons qu'une variable physique aléatoire soit normalement distribuée avec une moyenne nulle $\mu = 0$ (pour simplifier) et une variance inconnue σ^2 . Nous nous efforçons de trouver l'inconnue σ^2 en supposant que la valeur y de la fonction de distribution gaussienne est supposée connue à certaines valeurs x de la variable physique aléatoire considérée [26]. À partir de (II.24), nous écrivons

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} \tag{II.25}$$

En réécrivant (II.25) sous la forme (II.1)

$$AX^{-1}e^{-B X^{-2}} = Q \tag{II.26}$$

on a l'inconnue $X = \sigma$, $A = (2\pi)^{-1/2}$, $B = \frac{x^2}{2}$, $p = -1$, $q = -2$ et $Q = y$. En utilisant (II.5) pour résoudre l'équation (II.26), on obtient :

$$X = \left(-\frac{1}{2B}\right)^{-1/2} \left(W\left(-2B\left(\frac{Q}{A}\right)^2\right)\right)^{-1/2} \tag{II.27}$$

En remplaçant X, Q, A et B dans (II.27) par leurs expressions et après simplification on obtient pour σ [26] :

$$\sigma = \frac{x}{\sqrt{-W(-2\pi(xy)^2)}} \quad (\text{II.28})$$

L'équation (II.28) fournit une expression analytique pour une évaluation alternative de la variance de la fonction de distribution gaussienne. Pour une valeur moyenne de σ , nous devons évaluer l'expression donnée par (II.28) pour différentes valeurs de y correspondant à différentes valeurs de x .

CHAPITRE III :

**APPLICATION DE LA FONCTION W DE LAMBERT EN PHYSIQUE
DE LA MATIERE CONDENSEE**

Ce chapitre est consacré à l'application de la fonction W de Lambert en physique de la matière condensée. Particulièrement, à l'aide de cette fonction, nous montrons dans ce chapitre qu'on peut analytiquement calculer diverses propriétés physiques des solides telles que la température d'Einstein d'un solide, la température d'un semi-conducteur intrinsèque, la température d'un matériau émetteur thermo-ionique, la longueur de pénétration d'un champ magnétique dans un supraconducteur et l'énergie de gap d'un matériau supraconducteur à la température 0 K.

III.1.LA TEMPERATURE D'EINSTEIN D'UN SOLIDE:

Dans le modèle d'Einstein, un solide constitué de N atomes ayant chacun 3 degrés de liberté peut être traité comme un ensemble de $3N$ oscillateurs distincts vibrant à la même fréquence ω_E dite fréquence d'Einstein.

Quantitativement, le modèle d'Einstein donne la capacité calorifique pour un volume constant à la température T [27]

$$C_V = 3Nk_B \left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \frac{e^{-\frac{\theta_E}{T}}}{\left(e^{-\frac{\theta_E}{T}} - 1\right)^2} \quad (\text{III.1})$$

où θ_E est la température d'Einstein du solide donné par $\theta_E = \frac{\hbar\omega_E}{k_B}$ et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ avec k_B et h étant les constantes de Boltzmann et Planck respectivement.

Aux basses températures, $T \ll \theta_E$, la formule (III.1) devient

$$C_V = 3Nk_B \left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 e^{-\frac{\theta_E}{T}} \quad (\text{III.2})$$

Bien que le modèle d'Einstein ne décrit pas correctement le comportement de la capacité calorifique aux basses températures (puisque celle-ci est décrite par le modèle de Debye), le modèle d'Einstein garde son importance historique intacte comme la première application de la mécanique quantique dans la théorie de la capacité calorifique des solides.

En réécrivant (III.2) sous la forme (II.1), on a :

$$Ax^2 e^{-Bx} = Q \quad (\text{III.3})$$

D'où : $x = \theta_E$, $A = \frac{3Nk_B}{T^2}$, $B = \frac{1}{T}$, $p = 2$, $q = 1$, $Q = C_V$.

En utilisant (II.5) pour résoudre (III.3), on obtient

$$x = -\frac{2}{B} W\left(-\frac{B}{2} \left(\frac{Q}{A}\right)^{1/2}\right) \quad (\text{III.4})$$

En remplaçant Q et les termes A et B dans (III.4) par leurs expressions et après simplification, on obtient pour θ_E :

$$\theta_E = -2TW\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{c_v}{Nk_B}\right)^{1/2}\right) \quad (\text{III.5})$$

L'équation (III.5) fournit une formule analytique compacte pour une détermination de la température d'Einstein d'un solide par une mesure directe de sa capacité calorifique à basse température.

III.2. LA TEMPERATURE D'UN SEMI-CONDUCTEUR INTRINSEQUE :

Dans les semi-conducteurs intrinsèques, la concentration des porteurs des charges en fonction de la température T est donnée par la formule [28] :

$$n_i = 2 \left(\frac{2\pi k_B T}{h^2}\right)^{3/2} (m_e m_h)^{3/4} e^{-\frac{E_g(T)}{2k_B T}} \quad (\text{III.6})$$

où m_e, m_h sont les masses effectives des électrons et les trous dans le semi-conducteur, $E_g(T)$ l'énergie de gap en fonction de T .

$$\text{Selon [29,30], } E_g(T) = E_g(0) - \alpha T \quad (\text{III.7})$$

où $E_g(0)$ est l'énergie de gap à 0 et α une constante caractéristique du matériau semi-conducteur.

En remplaçant (III.7) dans (III.6), on obtient pour n_i :

$$n_i = 2 \left(\frac{2\pi k_B T}{h^2}\right)^{3/2} (m_e m_h)^{3/4} e^{\alpha/2k_B} e^{-\frac{E_g(0)}{2k_B T}} \quad (\text{III.8})$$

En réécrivant (III.8) sous la forme (II.1) on obtient :

$$Ax^{3/2} e^{-Bx^{-1}} = Q \quad (\text{III.9})$$

$$\text{où } x = T, A = 2 \left(\frac{2\pi k_B (m_e m_h)^{1/2}}{h^2}\right)^{3/2} e^{\alpha/2k_B}, B = \frac{1}{2} \frac{E_g(0)}{k_B}, p = 3/2, q = -1 \text{ et } Q = n_i$$

En utilisant (II.5) pour résoudre (III.9), on obtient :

$$x = \frac{2}{3} B \frac{1}{W\left(\frac{2}{3} B \left(\frac{A}{Q}\right)^{2/3}\right)} \quad (\text{III.10})$$

En remplaçant x , Q , A et B dans (III.10) par leurs expressions, on obtient la formule de T :

$$T = \frac{1}{3} \frac{E_g(0)}{k_B} \frac{1}{W\left(\frac{2^{5/3}}{3} \frac{\pi}{h^2} \frac{1}{n_i^{2/3}} \sqrt{m_e m_h} e^{\alpha/3k_B} E_g(0)\right)} \quad (\text{III.11})$$

Supposons que dans un semi-conducteur intrinsèque les paramètres m_e , m_h , $E_g(0)$ et α sont connus. Par une mesure de la concentration des porteurs n_i , via l'effet Hall par exemple, l'équation (III.11) nous fournit une expression analytique pour déterminer la température T des semi-conducteurs intrinsèques.

III.3. LA TEMPERATURE D'UN MATERIAU EMETTEUR THERMO-IONIQUÉ :

Le phénomène de l'émission thermo-ionique dans un métal est provoqué par l'augmentation de la température de ce métal. Suite à une énergie thermique suffisante acquise par les électrons du métal, ces derniers surmontent la barrière énergétique de surface et finissent par sortir du métal [31, 32].

La description théorique de ce phénomène est due à Richardson qui présente une relation entre la densité du courant électrique J dans un métal et sa température T par [31] :

$$J = A_R T^2 e^{-\frac{\phi}{k_B T}} \quad (\text{III.12})$$

où A_R est la constante de Richardson,

ϕ est le travail de sortie ou le travail d'extraction du métal.

A l'aide de la fonction W , on peut extraire la température T du métal analytiquement comme suit :

En réécrivant (III.12) sous la forme (II.1), on obtient :

$$A x^2 e^{-B x^{-1}} = Q \quad (\text{III.13})$$

avec $A = A_R$, $x = T$, $B = \frac{\phi}{k_B}$, $Q = J$, $p = 2$, $q = -1$.

En utilisant (II.5) pour résoudre (III.13), on obtient :

$$x = \frac{B}{2W\left(\frac{B(A)}{2(Q)}\right)^{1/2}} \quad (\text{III.14})$$

En remplaçant x, Q, A et B dans (III.14) par leurs expressions, on obtient pour la température du métal T [33] :

$$T = \frac{\phi}{2k_B W\left(\frac{\phi}{2k_B}\left(\frac{AR}{J}\right)^{1/2}\right)} \quad (\text{III.15})$$

Le travail de sortie du matériau émetteur est déterminé à partir de mesures d'effet photoélectrique [34]. En mesurant la densité du courant électrique dans le métal, l'équation (III.15) fournit une formule analytique pour déterminer la température T à laquelle l'émetteur considéré émet des électrons.

III.4. LA LONGUEUR DE PENETRATION D'UN CHAMP MAGNETIQUE DANS UN SUPRACONDUCTEUR :

La longueur de pénétration d'un champ magnétique dans un matériau supraconducteur est une grandeur caractéristique de ce dernier. Elle représente la profondeur de pénétration du champ magnétique appliqué dans ce matériau supraconducteur [35]. D'où l'importance de la détermination de cette longueur.

La pénétration d'un champ magnétique dans un supraconducteur est une conséquence de l'effet Meissner. La longueur de pénétration λ est obtenue en résolvant l'équation de London [36]. En supposant que le champ magnétique B est parallèle à l'axe z (voir fig.(III.1)), il va disparaître d'une façon exponentielle suivant l'axe x en obéissant à la loi suivante:

$$B(x) = B_0 e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad (\text{III.16})$$

où B_0 est l'intensité du champ magnétique à la surface du supraconducteur.

Rappelons que la densité du courant électrique J dans le supraconducteur est reliée au champ magnétique appliqué B par l'équation de Maxwell:

$$\mu_0 \vec{J} = \overrightarrow{rot} \vec{B} \quad (\text{III.17})$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide.

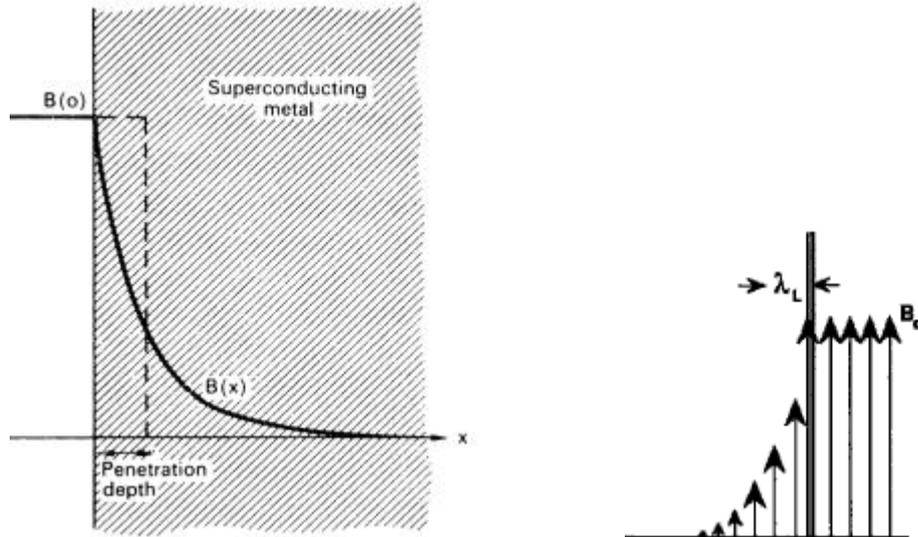


Figure (III.1) : Pénétration d'un champ magnétique dans un supraconducteur. [37,38]

Suivant la géométrie adoptée, en remplaçant (III.17) dans (III.16), on obtient :

$$\mu_0 J = \frac{B_0}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \Rightarrow J(x) = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad (III.18)$$

En réécrivant (III.18) sous la forme (II.1), on obtient :

$$AX^{-1}e^{-BX^{-1}} = Q \quad (III.19)$$

où $Q = J(x)$, $A = \frac{B_0}{\mu_0}$, $X = \lambda$, $p = -1$, $B = x$, $q = -1$.

En utilisant (II.5) pour résoudre (III.19), on obtient :

$$X = -\frac{B}{W\left(-\frac{QB}{A}\right)} \quad (III.20)$$

En remplaçant X , Q , A et B dans (III.20) par leurs expressions, on obtient pour λ :

$$\lambda = -\frac{x}{W\left(\frac{J(x)x\mu_0}{B_0}\right)} \quad (III.21)$$

En supposant la valeur B_0 connue et en mesurant la densité du courant J à une certaine profondeur x bien déterminée du supraconducteur, (III.21) fournit une expression analytique pour déterminer la longueur de pénétration λ de ce supraconducteur.

III.5. L'ENERGIE DE GAP D'UN SUPRACONDUCTEUR A LA TEMPERATURE 0 K:

À basse température, la chaleur spécifique électronique d'un matériau supraconducteur est donnée en fonction de T avec $T \ll T_c$ par la relation suivante [39] :

$$C_{es} = 1.34 \gamma T_c \left(\frac{\Delta(0)}{k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{\Delta(0)}{k_B T}} \quad (\text{III.22})$$

où T_c est la température critique du supraconducteur, γ le coefficient de chaleur spécifique électronique à l'état normal donné par $\gamma = 2 \frac{\pi^2}{3} k_B^2 N(E_f)$ avec $N(E_f)$ étant la densité des états électroniques à l'énergie de Fermi E_f .

En utilisant la formule de BCS [39] reliant l'énergie de gap $\Delta(0)$ à T_c par $\frac{\Delta(0)}{k_B T_c} = 1.76$

l'équation (III.22) peut s'écrire sous la forme :

$$C_{es} = 0.76 \gamma T \left(\frac{\Delta(0)}{k_B T} \right)^{5/2} e^{-\frac{\Delta(0)}{k_B T}} \quad (\text{III.23})$$

En réécrivant (III.23) sous la forme (II.1), on obtient :

$$Ax^{5/2} e^{-Bx} = Q \quad (\text{III.24})$$

où $x = \Delta(0)$, $A = \frac{0.76 \gamma}{k_B^{5/2} T^{3/2}}$, $B = \frac{1}{k_B T}$, $p = 5/2$, $q = 1$, $Q = C_{es}$.

En utilisant (II.5) pour résoudre (III.24), on obtient :

$$x = -\frac{5}{2B} W \left(-\frac{2B}{5} \left(\frac{Q}{A} \right)^{2/5} \right) \quad (\text{III.25})$$

En remplaçant x , Q , A et B dans (III.25) par leurs expressions, on obtient pour $\Delta(0)$ [26]:

$$\Delta(0) = -\frac{5}{2} k_B T W \left(-\frac{2}{5} \left(\frac{C_{es}}{0.76 \gamma T} \right)^{2/5} \right) \quad (\text{III.26})$$

En considérant un supraconducteur conventionnel avec le coefficient γ connu, par une mesure de sa chaleur spécifique électronique à basse température C_{es} à la température T , l'équation (III.26) fournit une formule analytique compacte pour une détermination de l'énergie de gap $\Delta(0)$ du supraconducteur à la température zéro.

CONCLUSION

Depuis l'attrait d'attention de Corless et al. [1] datant de 1996 sur l'utilité importante de la fonction W de Lambert, cette dernière a connu une accélération significative en nombre d'applications dans divers domaines de recherche y compris la physique. L'intérêt principal dans l'usage de cette fonction réside dans le fait qu'elle fournit des solutions analytiques à des équations transcendentes qui n'étaient résolues auparavant qu'en utilisant des méthodes numériques qui sont souvent lourdes et redondantes.

Notre objectif dans ce mémoire est d'appliquer la fonction W de Lambert dans la résolution d'une catégorie d'équations sélectionnées couvrant différents thèmes de la physique de la matière condensée et de mettre les résultats analytiques trouvés à la disposition des chercheurs intéressés.

Pour cela, nous avons d'abord familiarisé le lecteur avec les concepts mathématiques liés à la fonction W en précisant sa définition, listant quelques-unes de ses propriétés et présentant les formules mathématiques de son calcul.

Bien que le calcul de cette fonction est maintenant intégré dans la majorité des logiciels de programmation professionnels (Mathematica, Maple etc.), nous avons réalisé une routine écrite dans le langage de programmation Python permettant le calcul de W sur la base de quelques formules mathématiques approximatives.

Afin d'illustrer l'applicabilité de la fonction W en physique générale, nous avons d'abord remarqué qu'un bon nombre d'équations et de formules en physique peuvent être exprimées sous une même forme générique. En résolvant l'équation transcendente générique associée à l'aide de la fonction W , nous avons appliqué la solution analytique trouvée à différentes équations appartenant à la catégorie de cette équation générique. Les équations que nous avons choisies de la physique générale sont sélectionnées de la mécanique classique, la physique quantique et la mécanique statistique.

Pour la réalisation de l'objectif de ce mémoire, nous avons appliqué cette fois-ci la solution analytique générique mentionnée ci-dessus à la résolution d'une multitude d'équations sélectionnées de la physique de la matière condensée. Les résultats obtenus offrent des formules analytiques aux spécialistes pour la détermination de différentes propriétés physiques des solides telles que la température d'Einstein d'un solide, la température d'un semi-conducteur intrinsèque, la température d'un matériau émetteur thermo-ionique, la longueur de pénétration d'un champ magnétique dans un matériau supraconducteur et l'énergie de gap d'un matériau supraconducteur à la température 0 K .

Étant donné que les applications de la fonction W de Lambert en physique en général et en physique de la matière condensée en particulier sont loin d'être exhaustives, le présent travail reste fragmentaire. Il est à compléter par d'autres applications dans le futur.

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES:

- [1] R. M. Corless¹, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, D. E. Knuth, *On the Lambert W Function*, Advances in Computational Mathematics. 5 (1996) 329-359.
- [2] J.H. Lambert, *Observationes variae in mathesin puram*, Acta Helvetica physico-mathematico-anatomico-botanico-medica, Basel. 3 (1758) 128-168.
- [3] J.H. Lambert, *Observations Analytiques*, in Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres, Berlin. 1(1772).
- [4] L. Euler, *De serie Lambertina plurimisque eius insignibus proprietatibus*, Leonhardi Euleri Opera Omnia, Ser. 1, Opera Mathematica. 6 (1921) (orig.date 1779) 350-369.
- [5] E.M. Wright, *Solution of the equation $e^z = a^n$* , Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 65 (1959) 193-203.
- [6] Brian Hayes, *Why W ?*, American Scientist. 93 (2005) 104-109.
- [7] Seán Stewart, *A new elementary function for our curricula*, Australian Senior Mathematics Journal 19 (2). (2008) 8-26.
- [8] E.C.Titchmarsh, M.A, F.R.S, *The theory of functions*, 2nd edn (1952), Oxford university press.
- [9] C. Caratheodory, *Theory of Functions of a Complex Variable* Vol 2, edn(1981).Chelsea Pub Co.
- [10] Jonathan M.Borwein, Scott B.Lindstrom, *Meetings with Lambert W and other special functions in optimization and Analysis*, Pure and Applied Functional Analysis. 1 (2016) 361-396.
- [11] Tomas P.Dence, *A Brief Look into the Lambert W Function*, Applied Mathematics. 4 (2013) 887-892.
- [12] D.A. Barry, J-Y.Parlange, L.Li, H.Prommer, C.J.Cunningham, F.Stagnitti, *Analytical approximations for real values of the Lambert W-function*, Mathematics and Computers in Simulation. 53 (2000) 95-103.
- [13] D.A.Barry, P.J.Culligan-Hensley, S.J.Barry, *Real Values of the W-Function*, ACM Transactions on Mathematical Software. 21 (1995) 161-171.

- [14] D.A. Barry, J-Y. Parlange, G.C.Sander, M.Sivaplan, *A class of exact solution for Richards' equation*, Journal of Hydrogy. 142 (1993) 29-46.
- [15] François Chapeau-Blondeau, Abdelilah Monir, *Numerical Evaluation of the Lambert W Function and Application to Generation of Generalized Gaussian Noise With Exponent $\frac{1}{2}$* , IEEE. 50 (2002) 2160-2164.
- [16] Claudio Canuto, Anita Tabacco, *Mathematical Analysis I*, 2nd edn (2015), Springer pp. 225-250.
- [17] C.D.Olds, *Continued fractions*, New Mathematical Library, Random House New York. (1963).
- [18] William Paulsen, *asymptotic analysis and perturbation theory*, (2013). Chapman and Hall/CRC.
- [19] Abdolhossein Hoorfar, Mehdi Hassani, *Inequalities on the Lambert W function and Hyperpower function*, JIPAM. 9 (2008) (5pp).
- [20] G.W.Parker, *Projectile motion with air resistance quadratic in the speed*, Am.J.Phys. 45 (1977) 606-610.
- [21] Chokri Hadj Belgacem, *Range and flight time of quadratic resisted projectile motion using the Lambert W function*, Europ. J. Physics.35 (2014) 055025 (7pp).
- [22] Seán M.Stewart, R.Barry Johnson, *Black body radiation*, (2017), CRC Press pp. 41-45.
- [23] Sree R.Valluri, Robert M.Corless, David J.Jeffrey, *Some applications of the Lambert W function to physics*, Can. J. Physics. 78 (2000) 823-831.
- [24] <http://fr.academic.ru/dic.nsf/frwiki/1068720>
- [25] <http://www.physique-appliquee.net/physique/mathematique/statistique/statistique.html>
- [26] Ahmed Houari, *Some analytical results in physics using the Lambert W function*, Math. Scientist. 40 (2015) 29-30.
- [27] Kittel C, *Introduction to Solid State Physics*, 5th edn (1976). New York:Wiley pp.127-138.
- [28] Bube.R.H,*Electrons in solids :An Introductory Survey*, Academic Press (1981), New York pp. 127-138.
- [29] Y.P.Varshni, *Temperature dependence of the energy gap in semiconductors*, Physica. 34 (1967) 149-154.

- [30] G.G.Macfarlane, T.P.McLean, J.E.Quarrington., V.Roberts, *Fine Structure in the Absorption-Edge Spectrum of Ge*, Phys. Rev. 108 (1957) 1377
- [31] Giuseppe Grosso, Giuseppe Pastori Parravicini, *solide state physics*. Academic Press (2000) pp. 88-89.
- [32] Kittel C, *Introduction to Solid State Physics*, 5th edn (1976). New York:Wiley
- [33]Ahmed Houari, *Additional applications of the Lambert W function in physics*, Europ. J. Physics. 34 (2013) 695-702.
- [34] PHYWE Planck's 'Quantum of Action' from the Photoelectric Effect LEP 5.1.05(Göttingen: PHYWE)
- [35] Charles P.Poole.Jr, Horacio A.Farach, Richard J.Creswick, Ruslan Prozorov, *Superconductivity*.2nd edn(2007). Academic Press pp. 150-153.
- [36] Kittel C, *Introduction to Solid State Physics*, 5th edn (1976). New York:Wiley pp. 349-352.
- [37]<http://appliedsc.epfl.ch/course/displayHTM.asp?cFile=electrodynamique/default&pTit le=Cours%20Applications%20de%20la%20Supraconductivite%20-%20Electrodynamique>
- [38] Charles P.Poole,Jr, Horacio A.Farach, Richard J.Creswick, *Superconductivity*.2nd edn (2007). Academic Press pp. 156.
- [39] Neil W.Ashcroft, N.David Mermin, *Solid State Physics*. Holt, Rinehart and Winston (1976), New York pp. 744-746

ANNEXE 1

Programme Python pour calculer $W(x)$

```
##### programme de calcul de la fonction W de Lambert #####
#-----approximation de [5]-----
import math
x=float(input('entrer la valeur de x : '))
epsilon=0.4586887

if x==0:
    wOP=0
    print("la valeur de wOP[%f]= "%(x),wOP)

elif x < (-1/(math.exp(1))):
    print("pas de solution réelle pour [x=%f] "%(x))

#-----pour -1/e < x < 0 -----

elif x < 0 :

#-----WON / W0 pour valeur négative (x < 0) on utilise l'approximation [5]-----

    mu=2+2*(math.exp(1))*x
    n2=3*2**(1/2)+6-mu*((2237+1457*2**(1/2))*math.exp(1)-4108*2**(1/2)-5764)/
    ((215+199*2**(1/2))*math.exp(1)-430*2**(1/2)-796)
    n1=(1-1/2**(1/2))*(n2+2**(1/2))
    wON=-1+mu**(1/2)/(1+((n1*mu**(1/2))/(n2+mu**(1/2))))
    print("la valeur de w0-[%f]= "%(x),wON)

#-----Wnt / W-1 la branche secondaire on utilise l'approximation de [6]-----

    if x >= -1/(math.exp(1)) and x < -0.333 :

        p=-((2*(math.exp(1))*x+1)**(1/2))
        w=-1+p-1/3*p**2+11/72*p**3-43/540*p**4+769/17280*p**5-221/8505*p**6
        print("la valeur de w-1[%f]= "%(x),w)

    elif x >= -0.333 and x <= -0.033 :

        w=(-8.0960+391.0025*x-47.4252*x**2-4877.6330*x**3-5532.7760*x**4)/
        (1-82.9423*x+433.8688*x**2+1515.3060*x**3)
        print("la valeur de w-1[%f]= "%(x),w)

    elif x > -0.033 and x < 0:

        l1=math.log(-x)
        l2=math.log(-math.log(-x))
        w=l1-l2+l2/l1+((-2+l2)*l2)/(2*l1**2)+((6-9*l2+2*l2**2)*l2)/
        (6*l1**3)+((-12+36*l2-22*l2**2+3*l2**3)*l2)/
        (12*l1**4)+(60-300*l2+350*l2**2-125*l2**3+12*l2**4)*l2/(60*l1**5)

        print("la valeur de w-1[%f]= "%(x),w)

#-----pour 0 < x /WOP/ W0 pour valeur positives (0 < x) on utilise l'approximation [5]-----

else:
    wOP=(1+epsilon)*math.log(6*x/(5*math.log(2.4*(x/(math.log(1+(2.4*x)))))))
    -(epsilon*math.log((2*x)/math.log(1+(2*x))))

    print("la valeur de w0+[%f]= "%(x),wOP)
```

Applications de la fonction W de Lambert en physique de la matière condensée.

Résumé :

Dans ce travail, nous présentons d'abord les concepts mathématiques liés à la fonction W de Lambert et nous illustrons son utilité et son importance dans la résolution *analytique* de quelques équations transcendantes qui n'étaient résolues auparavant que numériquement. Ensuite, nous montrons que les solutions *analytiques* basées sur cette fonction sont applicables dans la résolution d'équations dans différentes situations en physique générale. Enfin, nous présentons des applications de la fonction W de Lambert en physique de la matière condensée pour une détermination *analytique* de quelques propriétés thermiques, électroniques et supraconductrices des solides.

Mots clé : *Fonction W de Lambert- Equations transcendantes - Résolution analytique- Température d'Einstein - Semi-conducteur intrinsèque- Emetteur thermo-ionique - Supraconducteur Conventionnel.*

Applications of Lambert W function in condensed matter physics.

Abstract :

In this work, we first present relevant mathematical concepts to the Lambert W function and illustrate its utility and importance in solving *analytically* some transcendental equations which were previously solved only numerically. Then, we show that *analytical* solutions based on this function are applicable in solving equations occurring in different general physics situations. Finally, we present applications of the Lambert W function in condensed matter physics for an *analytical* determination of some thermal, electronic and superconducting properties of solids.

Key words: *Lambert W function – Transcendental equations- Analytical resolution – Einstein temperature -*

Intrinsic semiconductor - Thermo-ionic Emitter – Conventional superconductor.

تطبيقات الدالة W ل لامبارت في فزياء المادة المكثفة

ملخص :

في هذه الأطروحة نوضح المفهوم الرياضي للدالة W للامبارت ونبين طريقة استخدامها لنتمكن من استخلاص الحل التحليلي لبعض المعادلات المتعدية التي كانت تعتمد سابقا على الطريقة الرقمية.

كذلك نوضح أن الحلول التي تقدمها هذه الدالة يمكن تطبيقها في تخصص الفيزياء وذلك في حالات عدة.

وفي الأخير نعرض تطبيقات الدالة W في تخصص المادة المكثفة, وهذا لإيجاد بعض الخصائص الحرارية, الإلكترونية والنواقل فائقة التوصيل للمواد.

الكلمات المفتاحية: الدالة W للامبارت- المعادلات المتعدية- الحل التحليلي- حرارة أينشتاين- أنصاف الموصلات الجوهرية- البواعث- الحرارة الأيونية- النواقل الفائقة التوصيل.

