REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID – TLEMCEN

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option **: *Equations Différentielles***

Thème

Solvabilité d'une classe de problèmes aux limites associés à des équations différentielles fractionnaires

---

Présenté par : **Mme B. Leshaf Leila**

Membres de jury :

Mr. Yebdri Mustapha	***Président***
Mr. Mebkhout Benmiloud	***Examinateur***
Mr. Derhab Mohammed	***Examinateur***
Mme. N. Merzagui	***Encadreur***

Année universitaire :
2016-2017

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

En second lieu, mes remerciements vont à mon encadreur Mme N.Merzagui d'avoir accepter de diriger mon mémoire. Elle m'a guidé durant celui-ci et m'a apporté le soutien nécessaire, son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury professeur Yebdri Mustapha pour avoir accepter de présider le jury de ce mémoire, aux docteurs Mr. Mebkhout Benmiloud et Mr. Derhab Mohammed, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant d'examiner ce mémoire et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

DEDICACES

A cœur vaillant rien d'impossible
A conscience tranquille tout est accessible

Quand il y a la soif d'apprendre
Tout vient à point à qui sait attendre

Quand il y a le souci de réaliser un dessein
Tout devient facile pour arriver à nos fins

Malgré les obstacles qui s'opposent
En dépit des difficultés qui s'interposent

Les études sont avant tout
Notre unique et seul atout

Ils représentent la lumière de notre existence
L'étoile brillante de notre réjouissance

Comme un vol de gerfauts hors du charnier natal
Nous partons ivres d'un rêve héroïque et brutal

Espérant des lendemains épiques
Un avenir glorieux et magique

Souhaitant que le fruit de nos efforts fournis
Jour et nuit, nous mènera vers le bonheur fleuri

Aujourd'hui, ici rassemblés auprès des jurys,
Nous prions dieu que cette soutenance
Fera signe de persévérance
Et que nous serions enchantés
Par notre travail honoré

Je dédie ce mémoire à …

A ma très chère mère

A mon très cher Père

A mon très cher mari

A ma chère belle mère et mon cher beau père

A ma très chère sœur Asma, son mari et leur petite fille.

A ma très chère sœur Ikram.

A mon très cher frère Mohammed Anis.

A mes belles sœur Zolikha, Saadia, Chafika et leur maris.

A ma chère belles sœur Zakia et sa petite fille Nihadou.

A mes beaux frère Mokhtar, Sofiane et leur femmes.

A la petite princesse Djihane.

A tous les membres de ma famille, petits et grands

A ma chère et dynamique professeur Mme. Merzagui.

Table des matières

Abreviations

EDO :	Equation différentielle ordinaire
EDF	Equation différentielle fractionnaire
$e.v.n$	espace vectoriel normé

Introduction Générale

La modélisation d'ordre fractionnaire consiste à décrire les phénomènes physiques associés à des processus dont le comportement peut être régi par des équations differentielles ou des équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire.
Le calcul différentiel et intégral d'ordre fractionnaire a été étudié par un grand nombre de mathématiciens célèbres comme P. S. Laplace (1812), J. B. J. Fourier (1822), N. H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-1867), A. K. Grünwald (1867-1872) et A.V. Letnikov (1868-1872) [10].
Bien qu'il ne soit pas nouveau, le calcul fractionnaire est redevenu un sujet d'étude dans la deuxième moitié du XXème siècle. Le formalisme mathématique de la dérivation non entière associé au développement des outils informatiques a permis d'envisager des applications dans le domaine des sciences de l'ingénieur. Aujourd'hui, l'approche fractionnaire est ainsi appliquée pour la modélisation des dispositifs électriques (cf [1], [5], [6], [29] et [35]), pour la modélisation des conséquences des désastres naturel [43] ou pour la synthèse de la commande (cf [9], [30] et [31]). La modélisation d'ordre fractionnaire est aussi présente dans le domaine des sciences biologiques (les modèles des parties du corps humain) (cf [8], [15] et [41]) ou même des sciences humaines et sociales (la modélisation des comportements des marchés) [19].
L'existence de solutions pour des problèmes aux limites associés à des équations différentielles fractionnaires a été considérée par de nombreux auteurs (cf [14], [16], [21], [28], [33] et [34]).
Une branche importante de problèmes aux limites associés au p -Laplacian a été intoduite dans [24] comme modéle de l'écoulement d'un flot turbulent dans un milieu poreux; l'équation differentielle (p-Laplacien) est définie comme suit,

$$(\phi_p(x'(t)))' = f(t, x(t), x'(t)) \tag{1}$$

où

$$\phi_p(s) = |s|^{p-2}\, s \tag{2}$$

avec $p > 1$; ϕ_p est inversible et son opérateur inverse est ϕ_q, où $q > 1$ est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Au cours des dernières décennies de nombreux résultats sur la solvabilité de differents problèmes aux limites associés à l'équation (1) ont été obtenus, dans

le cas entier (cf [32] et [39]) et dans le cas fractionnaire (cf [7], [12], [25] et [26]). Dans ce mémoire nous nous interessons à la solvabilité de problèmes aux limites à deux points, associés au p-Laplacien fractionnaire de type suivant

$$\begin{cases} {}^cD^{\beta}_{0+}\phi_p({}^cD^{\alpha}_{0+}x(t)) = f(t, x(t)) \ ; \ t \in [0,1] \\ x(0) = \xi x(1), \ {}^cD^{\alpha}_{0+}x(0) = \eta D^{\alpha}_{0+}x(1). \end{cases} \tag{3}$$

où $0 < \alpha, \beta \leq 1$, $1 < \alpha + \beta \leq 2$; ${}^cD^{\alpha}_{0+}$ étant la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ est continue ; ξ et η sont des constantes réelles considérées dans un premier cas telles que $\xi = \eta = -1$ (problème anti periodique) et dans un deuxième cas $\xi > 0$ et $\eta < 1$ (problème.à deux points). Notez que lorsque $p = 2$, l'opérateur non linéaire ${}^cD^{\beta}_{0+}\phi_p({}^cD^{\alpha}_{0+})$ se réduit à l'opérateur linéaire ${}^cD^{\beta}_{0+}{}^cD^{\alpha}_{0+}$. Nous nous intéressons en particulier aux solutions positives de problèmes de type (3). Nous utiliserons des théorèmes de point fixe:
le premier, le théorème de point fixe de Schaefer, qui est une version du théorème de Schauder. Parfois, il est appelé le principe Leray-Schauder c'est un exemple du principe mathématique dit " les estimations à priori implique l'existence";
le second, le théorème de point fixe de Legett-Williams.
Ce travail est un developpement et une synthèse de travaux dus à T.Chen.[7] et W.Liu.[25]

Chapitre 1

Préliminaires

Sommaire

Dans ce chapitre, nous dressons une liste non exhaustive des principaux outils utilisés tout au long de ce mémoire. Nous rappelons également certains résultats généraux qui pour la plupart sont accompagnés de références à la bibliographie. Particulièrement et en plus de quelques notions d'analyse fonctionnelle, un petit aperçu sur les théorèmes de point fixe est introduit avant de présenter quelques connaissances de base et définitions nécessaires concernant la théorie du calcul fractionnaire.

1.1 Outils d'analyse fonctionnelle

Nous reprenons dans cette section certains énoncés de Brezis [2].

1.1.1 Espace fonctionnel

Soient E et F deux espaces de Banach .Par $C(E,F)$ nous denotons l'espace de Banach de toutes les fonctions f continues de E dans F muni de la norme.

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in E} \|f(x)\|_F$$

1.1.2 Application compacte , complétement continue

Soit Ω un ouvert de E.

Définition 1.1.1 *Une application continue $T : \Omega \subset E \rightarrow F$ est dite compacte si $T(\bar{\Omega})$ est relativement compacte. Elle est dite complétement continue, si l'image de tout sous ensembe borné de Ω est relativement compacte dans F.*

Parties équicontinues de $C(E,F)$

Définition 1.1.2 *Soit M une partie de $C(E,F)$. Soit x un point de E.*
1. On dit que M est une famille équicontinue en x si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall y \in E, \|x-y\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_F <, \forall f \in M.$$

2. On dit que M est équicontinue sur E, si M est équicontinue en tout $x \in E$.

1.1.3 Théoréme d'Ascoli-Arzela

Théorème 1.1 [38]*Une partie A de $C(E,F)$ est relativement compacte si et seulement si*
1. A est équicontinue.
2. Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact.

Remarque 1 *Dans un e.v.n de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées, et le théorème d'Ascoli-Arzela peut etre formulé dans ce cas comme suit*

Théorème 1.2 *Toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dans $C(E,\mathbb{R})$, qui est équicontinue et bornée contient une sous-suite uniformément convergente.*

1.1.4 Théorèmes de points fixes

Une solution d'une équation $T(x) = x$ est appelé un point fixe de T. Plusieurs problèmes en physique, chimie, biologie, économie conduisent à des modèles non linéaires, exprimés par des équations différentielles non linéaires et intégrales, dont la solvabilité a été établi par les différents théorèmes de point fixe.

L'origine de la théorie du point fixe, remonte à la dernière partie du XIXe siècle. Cette méthode est associée aux noms de mathématiciens célèbres tels que *Picard*, *Banach, Cauchy Lipshitz*, *Schauder* ... Le développement de la théorie du point fixe à donné un grand essort à l'analyse non linéaire.
Le Théorème du Point Fixe de *Banach* également attribué au mathématicien français Émile Picard, dit qu'une contraction d'un espace métrique complet à un point fixe unique. Ce théorème donne un comportement régulier du point fixe par rapport aux paramètres. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs. D'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas aux quels on peut appliquer ce théorème. Très différent, le théorème du point fixe de *Brouwer* est plus topologique, n'est pas constructif il garantit l'existence d'un point fixe d'une fonction continue définie de la boule unité fermée euclidienne sur elle-même sans apporter de méthode générale pour le trouver.
Le théorème du Point Fixe de *Schauder* est une généralisation du théorème du point fixe de *Brouwer* à des espaces vectoriels topologiques de dimension infinie et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est pas donc nécessaire d'établir des estimations sur la fonction, mais simplement sa continuité. Ceci donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le Théorème de *Picard*. Par contre, ce théorème ne donne aucun des avantages du théorème précédent. *Krasnoselskii* a combiné les deux principaux résultats de la théorie des points fixes qui sont les théorèmes de *Schauder* et de *Banach* dans un seul théorème (cf [18], [37], [36] et [42]). Ce théorème a connu plusieurs développements des variantes et des généralisations, le théorème de *Leggett- Williams* en est une. Dans la suite, nous faisons le point sur les deux théorèmes de point fixe, celui de *Schaefer* et celui de *Leggett- Williams*.

Théorème du point fixe de Schaefer

Le théorème de *Schaefer* est une variante du théorème de *Schauder*. Le théorème de *Schauder* fut d'abord démontré en 1930 par Schauder dans des cas particuliers, comme celui des espaces de Banach. Il conjectura le cas général dans le Scottish Book. En 1934, *Tychonoff* démontra le théorème dans le cas où C est compact et E est localement convexe [**?**]. Cette version est connue sous le nom de théorème du point fixe de *Tychonoff*. B. V. Singbal généralisa ce résultat au cas où C n'est pas compact [3]. Le cas général (sans l'hypothèse de convexité locale) fut finalement démontré par Robert Cauty en 2001 [4].
Il est souvent plus facile d'utiliser le théorème de *Scheafer*, la version plus simple du théoréme de *Schauder* avec la condition connue comme la condition de bord de Leray-Schauder.

Définition 1.1.3 *On dit que $T : E \longrightarrow E$ satisfait la condition de bord de Leray-Schauder s'il existe $r > 0$ tel que $\|x\| = r$ entraine $T(x) \neq \lambda x$ pour tout $\lambda > 1$.*

Par exemple s'il existe $r > 0$ tel que $||x|| = r$ entraine $\|T(x)\| \leq r$
alors f satisfait la condition de bord de Leray-Schauder.

Théorème 1.3 *(Théorème du point fixe de Schaefer) Soit $T : E \longrightarrow E$ une application compacte satisfaisant la condition du bord de Leray-Schauder. Alors T posséde un point fixe.*

Pour la preuve de ce théorème nous référons le lecteur à [20].

Autre formulation du théorème du point fixe de Schaefer

Théorème 1.4 [20] *Supposons que E est un espace de Banach et que $T : E \to E$ est une application compacte. Par ailleurs supposons que l'ensemble*

$$\bigcup_{0<\lambda<1} \{x \in E; x = \lambda T(x)\}$$

est borné. Alors T admet un point fixe.

Remarque 2 *Notons en particulier que pour appliquer le théorème de Schaefer, nous n'avons pas besoin de prouver qu'un certain ensemble est convexe ou compact. Le problème est reformulé pour montrer certaines estimations à priori pour l'opérateur T.*

Théorème du point fixe de Leggett-Williams

L'étude des phénomènes naturels et physiques peut par modélisation mathématique, être ramenée à l'étude de l'existence de solutions d'équations abstraites de type:

$$Tx = x \quad , x \in P \tag{1.1}$$

(où P est un ensemble fermé convexe d'un espace de Banach E), c'est-à-dire la recherche de point fixe d'un opérateur que l'on peut écrire sous la forme (1.1) . Le théorème du point fixe de *Krasnoselskii* permet de solutionner une certaine classe de problèmes différentiels, dont l'écriture abstraite est (1.1) . Le théorème du point fixe de *Krasnoselskii* pour des opérateurs définis sur un cône et ses généralisations, le théorème de *Leggett Williams* entre autres, ont été appliqués avec succès pour établir l'existence et la multiplicité de solutions pour des problèmes aux limites de différents types. Les solutions positives des équations différentielles ordinaires sont considérées dans plusieurs articles, notamment ceux de J. Henderson et H.Wang [13], K. Lan et J.R.L [22] et R. Ma [27].

Définition 1.1.4 *Soit E un espace de Banach. Un ensemble $P \subset E$, convexe fermé non vide est dit cône ssi:*
1. $u \in P \Rightarrow \lambda u \in P, \forall \lambda > 0$,
2. $u \in P, -u \in P \Rightarrow u = 0$.

Exemple 1.1.1 *Considérons l'ensemble suivant*

$$P := \{x \in C[0,1] : x(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in [0,1]\}$$

P est un cône.

Remarque 3 *Tout cône induit un ordre sur E, cet ordre est défini par*

$$u \leq v \overset{def}{\Longleftrightarrow} v - u \in P$$

Dans la suite, soient $E = (E, \|.\|)$ est un espace de Banach et P un cône de E.

Définition 1.1.5 *Une application continue $\omega : P \longrightarrow [0, +\infty)$ est dite concave sur P, si ω satisfait*

$$\omega(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda\omega(x) + (1-\lambda)\omega(y)$$

pour tout $x, y \in P$ et $\lambda \in [0,1]$

Exemple 1.1.2 *Pour $\sigma \in [0,1)$ la fonctionnelle ω définie par $\omega(x) = \min\limits_{t\in[\sigma,1]} x(t)$, pour tout $x \in P$, est concave.*
Pour $\sigma \in [0,1)$ on a

$$\begin{aligned} \omega(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \min_{t\in[\sigma,1]} (\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\geq \min_{t\in[\sigma,1]} \lambda x(t) + \min_{t\in[\sigma,1]} (1-\lambda)y(t) \\ &\geq \lambda \min_{t\in[\sigma,1]} x(t) + (1-\lambda) \min_{t\in[\sigma,1]} y(t) \\ &\geq \lambda\omega(x) + (1-\lambda)\omega(y) \end{aligned}$$

donc $\omega(x) = \min\limits_{t\in[\sigma,1]} x(t)$ est concave pour tout $x \in P$.

Notation 01 *Si P est un cône, notons par P° l'ensemble $P \backslash \{0\}$.*
Et pour a, b, d des constantes stictement positives. et ω une fonctionnelle définie positive. Notons par $P_d, \overline{P_d}$ et $P(\omega, a, b)$ les ensembles suivants:

$$P_d = \{x \in P : \|x\| < d\},$$

$$\overline{P_d} = \{x \in P : \|x\| \leq d\}$$

et

$$P(\omega, a, b) = \{x \in P : \omega(x) \geq a, \|x\| \leq b\}. \tag{1.2}$$

Définition 1.1.6 *$T : P^\circ \longrightarrow P^\circ$ un opérateur, $0 \leq \theta < 1$. Alors T est appelé opérateur θ-concave si pour tout $0 < k < 1$ et $u \in P^\circ$*

$$T(ku) \geq k^\theta Tu$$

Le lemme suivant donne l'existence d'un unique point fixe pour T un opérateur θ-concave , la démonstration de ce lemme est détaillé dans [11]

Lemme 1.1.1 *Si $0 \leq \theta < 1$ et $T : P^\circ \longrightarrow P^\circ$ est un opérateur θ-concave croissant. Alors T n'a qu'un seul point fixe dans P°.*

Le théorème de point fixe suivant donne l'existence d'au moins trois solutions positives, il s'agit du théorème de Leggett–Williams dont la preuve peut etre trouvée dans [11] ou [23].

Théorème 1.5 *Soit $E = (E, \|.\|)$ un espace de Banach, $P \subset E$ est un cône de E et $c > 0$ une constante. Supposons qu'il existe une fonctionnelle continue non négative concave ω sur P avec $\omega(x) \leq \|x\|$ pour tout $x \in \overline{P_c}$.*
Soit $T : \overline{P_c} \longrightarrow \overline{P_c}$ est un opérateur complétement continu. S'il exisite a,b et d avec $0 < d < a < b \leq c$, tel que
(i) $\{x \in P(\omega, a, b) : \omega(x) > a\} \neq \emptyset$ et $\omega(Tx) > a$ pour tout $x \in P(\omega, a, b)$,
(ii) $\|Tx\| < d$ pour tout $x \in \overline{P_d}$,
(iii) $\omega(Tx) > a$ pour tout $x \in P(\omega, a, c)$ avec $\|Tx\| > b$.
Alors, T admet au moins trois points fixes x_1, x_2 et x_3 dans $\overline{P_c}$ .vérifiant

$$\|x_1\| < a, \ b < \omega(x_2), \|x_3\| > a, \ \text{et } \omega(x_3) < b.$$

1.2 Rappels sur le Calcul Fractionnaire

Nous reprenons dans cette section certains énoncés de [16]

1.2.1 Fonctions spéciales

Fonction Gamma

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge naturellement la notion de factoriel aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

Définition 1.2.1 *Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$, la fonction Gamma est donnée par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

(cette intégrale est convergente pour tout $x > 0$).

Propriété Pour tout $x > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{1.3}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$$

$$\Gamma(x) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{n!x^n}{x(x+1)...(x+n)}$$

Quelques valeurs de la fonction Γ:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \approx 2.6789$$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}\Gamma(\frac{1}{3})} \\ &= \frac{6.2831}{1.7320 \times 2.6789} \\ &= \frac{6.2831}{4.6399} \\ &= 1.3541\end{aligned}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = 1.2341$$

La fonction Bêta

Définition 1.2.2 *Soient $x, y > 0$, la fonction Bêta est la fonction définie par :*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

Proposition 1.2.1 *La fonction Bêta est reliée aux fonctions Gamma par la relation suivante pour tout $x, y > 0$, on a:*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{1.4}$$

1.2.2 Définitions et Propriétés de l'intégrale et la dérivée fractionnaires

Proposition 1.2.2 *L'integrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\gamma > 0$, pour la fonction continue $u : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ est donné par:*

$$I_{0^+}^{\gamma} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} u(s) ds \tag{1.5}$$

Définition 1.2.3 *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\gamma > 0$, pour la fonction continue $u : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par:*

$$^{RL}D_{0^+}^{\gamma} u(t) = \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\gamma} u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\gamma-1} u(s) ds \tag{1.6}$$

avec $n = n_{RL} = [\gamma] + 1$ (n un entier naturel supérieur strictement à γ.)

Définition 1.2.4 $AC^n = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ et } \left(D^{n-1} f\right)(x) \in AC\,[a,b]\,, \left(D = \frac{d}{dx}\right) \right\},$

Définition 1.2.5 *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\gamma > 0$, pour la fonction $u : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, u \in AC^n$ est donnée par:*

$$^{c}D_{0^+}^{\gamma} u(t) = I_{0^+}^{n-\gamma} \frac{d^n u(t)}{dt^n} = \frac{1}{\Gamma(\gamma-n)} \int_0^t (t-s)^{n-\gamma-1} u^{(n)}(s) ds \tag{1.7}$$

avec

$$u^{(n)}(t) = \frac{d^n u(t)}{dt^n}$$

et

$$n = n_c = \begin{cases} n_{RL} \text{ si } n < \gamma < n+1 \\ -[-\gamma] \text{ si } n < \gamma \leq n+1 \end{cases}$$

Quelques Propriétés

Composition de la dérivée au sens de Riemann-Liouville avec l'opérateur d'intégration fractionnaire Si u est continue alors

$$^{RL}D_{0^+}^{\gamma} (I_{0^+}^{\gamma} u(t)) = u(t) \tag{1.8}$$

Si u est continue telle que $u^{(n-k)}(0)$ existent pour $k = 1, ..., n$ alors

$$I_{0^+}^{\gamma}\left({}^{RL}D_{0^+}^{\gamma}u(t)\right) = u(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{n-k}}{\Gamma(n-k+1)} u^{(n-k)}(0) \tag{1.9}$$

Relation entre la dérivée au sens de Caputo et la dérivée de Riemann Liouville Soit $p \geq 0$ (avec $n-1 \leq p < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$) supposons que u est une fonction continue telle que ${}^{c}D_{a}^{\gamma}$ et ${}^{RL}D_{a}^{\gamma}$ existent alors

$${}^{c}D_{0^+}^{\gamma}u(t) =^{RL} D_{0^+}^{\gamma}u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k}}{\Gamma(k+1)} u^{(k)}(0) \tag{1.10}$$

On déduit que si $u^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ on aura

$${}^{c}D_{0^+}^{\gamma}u(t) =^{RL} D_{0^+}^{\gamma}u(t)$$

Composition de la dérivée au sens de Caputo avec l'intégrale fractionnaire

Lemme 1.2.1 *Soit $\gamma > 0$ supposons que u, ${}^{c}D_{0^+}^{\gamma}u \in L(0,1)$. Alors on a les égalités suivantes:*

$${}^{c}D_{0^+}^{\gamma}I_{0^+}^{\gamma}u(t) = u(t) \tag{1.11}$$

$$I_{0^+}^{\gamma}\,{}^{c}D_{0^+}^{\gamma}u(t) = u(t) + c_0 + c_1 t + ... + c_{n-1}t^{n-1}. \tag{1.12}$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., n-1$, n un entier naturel supérieure strictement à γ.

Preuve: On a d'aprés (1.7)

$${}^{c}D_{0^+}^{\gamma}u(t) = I_{0^+}^{n-\gamma}u^{(n)}(t)$$

Appliquant (1.5) aux deux membre de l'égalité

$$I_{0^+}^{\gamma}\,{}^{c}D_{0^+}^{\gamma}u(t) = I_{0^+}^{\gamma}I_{0^+}^{n-\gamma}u^{(n)}(t) = I_{0^+}^{n}\frac{d^n}{dt^n}u(t). \tag{1.13}$$

on a par (1.6)

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{0^+}^{\gamma}u(t) &= (\frac{d^n}{dt^n})(I_{0^+}^{n-\gamma}u(t)) \\ {}^{RL}D_{0^+}^{n}u(t) &= (\frac{d^n}{dt^n})(I_{0^+}^{n-n}u(t)) \\ &= \frac{d^n}{dt^n}u(t) \end{aligned}$$

donc (1.13) devient:

$$I_{0^+}^{\gamma}\,{}^{c}D_{0^+}^{\gamma}u(t) = I_{0^+}^{n}\,{}^{RL}D_{0^+}^{n}u(t)$$

d'aprés (1) on a:

$$I_{0^+}^{n}\,{}^{RL}D_{0^+}^{n}u(t) = u(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} u^{(n-j)}(0) = I_{0^+}^{\gamma}\,{}^{c}D_{0^+}^{\gamma}u(t)$$

on pose $k = n - j$

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{\gamma}\,{}^{c}D_{0^+}^{\gamma}u(t) &= u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k}}{\Gamma(k+1)} u^{(k)}(0) = u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(0)}{k!} t^{k} \\ &= u(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k. \end{aligned}$$

avec $c_k = -\frac{u^{(k)}(0)}{k!}$. ■

Chapitre 2

Problème Anti Periodique

Sommaire

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de la solvabilité du problème suivant:

$$\begin{cases} {}^cD^{\beta}_{0+}\phi_p({}^cD^{\alpha}_{0+}x(t)) = f(t,x(t));\ t \in [0,1] \\ x(0) = -x(1),\ {}^cD^{\alpha}_{0+}x(0) = -D^{\alpha}_{0+}x(1). \end{cases} \tag{2.1}$$

Nous utiliserons le théoreme du point fixe de *Schaefer* pour montrer l'existence d'au moins une solution de (2.1).

2.2 Lemme auxilliaire

Dans cette section, nous introduisons un lemme necessaire pour établir le résultat principal.

Lemme 2.2.1 *Pour $h \in C\,[0,1]$, l'unique solution du problème:*

$$\begin{cases} {}^cD^{\beta}_{0+}\phi_p({}^cD^{\alpha}_{0+}x(t)) = h(t) \\ x(0) = -x(1),\ {}^cD^{\alpha}_{0+}x(0) = -{}^cD^{\alpha}_{0+}x(1) \end{cases} \tag{2.2}$$

est définie, pour tout $t \in [0,1]$, *par*

$$\begin{aligned} x(t) &= I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}h(t)+Ah(t)\right)+Bh(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}h(\tau)d\tau+Ah(s)\right)ds+Bh(t) \end{aligned}$$

où

$$Ah(t)=-\frac{1}{2}I_{0^+}^{\beta}h(t)|_{t=1}=-\frac{1}{2\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\beta-1}h(s)ds,$$

et

$$\begin{aligned} Bh(t) &= -\frac{1}{2}I_{0^+}^{\alpha}\phi_q(I_{0^+}^{\beta}h(t)+Ah(t))|_{t=1} \\ &= -\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}h(\tau)d\tau+Ah(s)\right)ds \end{aligned}$$

Preuve: *Supposons que* $x(t)$ *vérifie* (2.2) *,alors pour tout* $t \in [0,1]$

$${}^cD_{0^+}^{\beta}\phi_p\left({}^cD_{0^+}^{\alpha}x(t)\right)=h(t)$$

Appliquons (1.5) *pour* $\gamma=\beta\leq 1$ *sur les deux membres de l'égalité:*

$$I_{0^+}^{\beta}\left({}^cD_{0^+}^{\beta}\phi_p({}^cD_{0^+}^{\alpha}x(t))\right)=I_{0^+}^{\beta}h(t)$$

D'aprés le lemme (1.2.1) *on a*

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{\beta}\left({}^cD_{0^+}^{\beta}\phi_p({}^cD_{0^+}^{\alpha}x(t))\right) &= \phi_p({}^cD_{0^+}^{\alpha}x(t))+c_0+c_1t+...+c_{n-1}t^{n-1} \\ &= I_{0^+}^{\beta}h(t) \end{aligned}$$

$n=-[-\beta]=1$ *car* $0<\beta\leq 1$*.donc,*

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{\beta}\left({}^cD_{0^+}^{\beta}\phi_p({}^cD_{0^+}^{\alpha}x(t))\right) &= \phi_p({}^cD_{0^+}^{\alpha}x(t))+c_0 \\ &= I_{0^+}^{\beta}h(t) \end{aligned}$$

Utilisant la condition d'anti-periodicité ${}^cD_{0^+}^{\alpha}x(0)=-{}^cD_{0^+}^{\alpha}x(1)$, *nous obtenons,*

$$\phi_p({}^cD_{0^+}^{\alpha}x(t))|_{t=0}=I_{0^+}^{\beta}h(t)|_{t=0}+c_0$$

$$\phi_p({}^cD_{0^+}^{\alpha}x(t))|_{t=1}=I_{0^+}^{\beta}h(t)|_{t=1}+c_0$$

ce qui entraine,

$$I_{0^+}^{\beta}h(t)|_{t=0}+c_0=-I_{0^+}^{\beta}h(t)|_{t=1}-c_0$$

Maintenant, puisque

$$I_{0^+}^{\beta} h(t)|_{t=0} = 0,$$

alors

$$2c_0 = -I_{0^+}^{\beta} h(t)|_{t=1}$$

c.à.d,

$$c_0 = -\frac{1}{2} I_{0^+}^{\beta} h(t)|_{t=1} = Ah(t)$$

Ainsi, nous avons

$$\phi_p({}^c D_{0^+}^{\alpha} x(t)) = I_{0^+}^{\beta} h(t) + Ah(t) \tag{2.3}$$

Appliquons l'inverse de ϕ_p *à* (2.3)

$$\phi_q\left(\phi_p({}^c D_{0^+}^{\alpha} x(t))\right) = \phi_q\left(I_{0^+}^{\beta} h(t) + Ah(t)\right)$$

$${}^c D_{0^+}^{\alpha} x(t) = \phi_q\left(I_{0^+}^{\beta} h(t) + Ah(t)\right)$$

Appliquons (1.5) *pour* $\gamma = \alpha > 0$ *sur les deux membres de l'égalité:*

$$I_{0^+}^{\alpha}\left({}^c D_{0^+}^{\alpha} x(t)\right) = I_{0^+}^{\alpha}\left(\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta} h(t) + Ah(t)\right)\right)$$

$$x(t) + c_1 = I_{0^+}^{\alpha}\left(\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta} h(t) + Ah(t)\right)\right)$$

$c_1 \in \mathbb{R}$

$$x(t) = I_{0^+}^{\alpha}\left(\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta} h(t) + Ah(t)\right)\right) + c_1$$

Utilisant la condition $x(0) = -x(1)$*.*

$$x(t)|_{t=0} = I_{0^+}^{\alpha}\left(\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta} h(t) + Ah(t)\right)\right)|_{t=0} + c_1$$

$$x(t)|_{t=1} = I_{0^+}^{\alpha}\left(\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta} h(t) + Ah(t)\right)\right)|_{t=1} + c_1$$

puisque

$$I_{0^+}^{\alpha}\left(\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta} h(t) + Ah(t)\right)\right)|_{t=0} = 0$$

$$c_1 = -I_{0^+}^{\alpha}\left(\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta} h(t) + Ah(t)\right)\right)|_{t=1} - c_1$$

$$c_1 = -\frac{1}{2} I_{0^+}^{\alpha}\left(\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta} h(t) + Ah(t)\right)\right)|_{t=1} = Bh(t)$$

■

Conséquence
Conséquence du lemme (2.2.1) $x \in C\,[0,1]$ est une solution du problème (2.1) si et seulment si

$$x(t) = Tx(t)$$

avec $T : C\,[0,1] \longrightarrow C\,[0,1]$ est l'opérateur définie par:

$$\begin{aligned} Tx(t) &= I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(t) + ANx(t)\right) + BNx(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right. \\ &\left. -\frac{1}{2\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right) ds \\ &-\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right. \\ &\left. -\frac{1}{2\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right) ds \end{aligned}$$

où $N : C\,[0,1] \longrightarrow C\,[0,1]$ est l'opérateur de Nemytskii qui est défini pour tout $t \in [0,1]$ par:

$$Nx(t) = f(t, x(t))$$

Il est clair que les points fixes de l'opérateur T sont des solutions du probléme (3)

2.3 Résultat principal

Théorème 2.1 *Soit $f : [0.1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Supposons qu'il existe des fonctions positives (non identiquement nulles) $a, b \in C\,[0,1]$ telles que pour tout $t \in [0,1]$ et $u \in \mathbb{R}$.*

$$|f(t,u)| \leq a(t) + b(t)\,|u|^{p-1} \tag{2.4}$$

Alors le problème (2.1) *admet au moins une solution si la propriété est vérifier*

$$\frac{3^q\,\|b\|_\infty^{q-1}}{2^q\Gamma(\alpha+1)(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} < 1. \tag{2.5}$$

Preuve: La preuve est donnée en 2 étapes:
Etape 1: $T : C\,[0,1] \longrightarrow C\,[0,1]$ est complétement continue.
Soit $\Omega \subset C\,[0,1]$ un sous ensemble ouvert. La continuité de f implique la continuité de T et $T(\bar{\Omega})$ est borné.

Il existe une constante $K > 0$ tel que pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et pour tout $t \in [0,1]$

$$\left| I_{0^+}^{\beta} Nx + ANx \right| \leq K$$

Ainsi d'aprés le théoréme d'Ascoli-Arzela il suffit de prouver que
$T(\bar{\Omega}) \subset C[0,1]$ est équicontinue.
Pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$, $x \in \bar{\Omega}$, nous avons,

$$\begin{aligned} |Tx(t_2) - Tx(t_1)| &= \Big| I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(t) + ANx(t)\right) + BNx(t)\ |_{t=t_2} \\ &\quad - I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(t) + ANx(t)\right) + BNx(t)|_{t=t_1} \Big| \end{aligned}$$

avec

$$ANx(t) = -\frac{1}{2} I_{0^+}^{\beta} Nx(t)|_{t=1} = -\frac{1}{2\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} Nx(s) ds,$$

et

$$BNx(t) = -\frac{1}{2} I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(t) + ANx(t)\right)|_{t=1}$$

Alors

$$\begin{aligned} |Tx(t_2) - Tx(t_1)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big| \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s) + ANx(s)\right) ds \\ &\quad - \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s) + ANx(s)\right) \Big| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big| \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(t) + ANx(t)\right) ds \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s) + ANx(s)\right) ds \\ &\quad - \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s) + ANx(s)\right) ds \Big| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big| \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}\right] \phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s) + ANx(s)\right) ds \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s) + ANx(s)\right) ds \Big| \end{aligned}$$

Par la majoration de la valeur absolue de l'integrale on a

$$\begin{aligned} |Tx(t_2) - Tx(t_1)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big\{ \int_0^{t_1} \big| \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}\right] \\ &\quad \times \phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s) + ANx(s)\right) ds \big| \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \left| (t_2 - s)^{\alpha-1}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s) + ANx(s)\right) \right| ds \Big\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

On a d'aprés (2)

$$\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx+ANx\right)=\left|I_{0^+}^{\beta}Nx+ANx\right|^{q-2}\left(I_{0^+}^{\beta}Nx+ANx\right) \tag{2.7}$$

Appliquons la valeur absolue sur (2.7)

$$\left|\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s)+ANx(s)\right)\right|=\left|I_{0^+}^{\beta}Nx+ANx\right|^{q-1}\leq K^{q-1} \tag{2.8}$$

Alors

$$\begin{aligned}
(2.6) &\leq \frac{K^{q-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^{t_1}\left|(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\right|ds+\int_{t_1}^{t_2}\left|(t_2-s)^{\alpha-1}\right|ds\right]\\
&\leq \frac{K^{q-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^{t_1}\left|(t_1-s)^{\alpha-1}-(t_2-s)^{\alpha-1}\right|ds+\int_{t_1}^{t_2}\left|(t_2-s)^{\alpha-1}\right|ds\right]\\
&\leq \frac{K^{q-1}}{\Gamma(\alpha)}\left\{\left[\frac{-1}{\alpha}(t_1-s)^{\alpha}\right]_0^{t_1}-\left[\frac{-1}{\alpha}(t_2-s)^{\alpha}\right]_0^{t_1}+\left[\frac{-1}{\alpha}(t_2-s)^{\alpha}\right]_{t_1}^{t_2}\right\}\\
&\leq \frac{K^{q-1}}{\Gamma(\alpha)}\left\{\frac{1}{\alpha}(t_1)^{\alpha}-\left[-\frac{1}{\alpha}(t_2-t_1)^{\alpha}+\frac{1}{\alpha}(t_2)^{\alpha}\right]+\frac{1}{\alpha}(t_2-t_1)^{\alpha}\right\}\\
&= \frac{K^{q-1}}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left[(t_1)^{\alpha}-(t_2)^{\alpha}+2(t_2-t_1)^{\alpha}\right]
\end{aligned}$$

puisque t^{α} est uniformement continue sur $[0,1]$,alors $T(\bar{\Omega})\subset C[0,1]$ est équicontinue.

Etape2: Soit l'ensemble

$$\Omega=x\in C[0,1]/x=\lambda^{q-1}Tx,\lambda\in]0,1[\tag{2.9}$$

Maintenant il reste a montrer que l'ensemble Ω est borné.

Nous avons,

$$\begin{aligned}
|ANx(t)| &= \left|-\frac{1}{2}I_{0^+}^{\beta}Nx(t)|_{t=1}\right|=\left|-\frac{1}{2\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-s)^{\beta-1}f(s,x(s))ds\right|\\
&\leq \frac{1}{2\Gamma(\beta)}\int_0^1\left|(1-s)^{\beta-1}f(s,x(s))\right|ds\\
&\leq \frac{1}{2\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-s)^{\beta-1}\left|f(s,x(s))\right|ds
\end{aligned}$$

par (2.4)

$$\begin{aligned}
|ANx(t)| &\leq \frac{1}{2\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-s)^{\beta-1}(a(s)+b(s)\left|x(s)\right|^{p-1})ds\\
&\leq \frac{1}{2\Gamma(\beta)}(\|a\|_\infty+\|b\|_\infty\|x\|_\infty^{p-1})\int_0^1(1-s)^{\beta-1}ds
\end{aligned}$$

Utilisant la définition (1.2.2)

$$|ANx(t)| \leq \frac{1}{2\Gamma(\beta)}(\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1})B(1,\beta)$$

La propriété (1.4) implique,

$$|ANx(t)| \leq \frac{1}{2\Gamma(\beta)}(\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1})\frac{\Gamma(1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1)}$$

Alors pour tout $t \in [0,1]$

$$|ANx(t)| \leq \frac{1}{2\Gamma(\beta+1)}(\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1})$$

la monotonie de s^{q-1} entraine,

$$\begin{aligned}
|BNx(t)| &= \left| -\frac{1}{2} I_{0^+}^{\alpha} \phi_q \left(I_{0^+}^{\beta} Nx(t) + ANx(t) \right) |_{t=1} \right| \\
&= \left| -\frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \phi_q \left(I_{0^+}^{\beta} Nx(t) + ANx(t) \right) ds \right| \\
&\leq \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \left| \phi_q \left(I_{0^+}^{\beta} Nx(s) + ANx(s) \right) \right| ds
\end{aligned}$$

Utilisant (2.8)

$$\begin{aligned}
|BNx(t)| &\leq \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \left| I_{0^+}^{\beta} Nx(s) + ANx(s) \right|^{q-1} ds \\
&\leq \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \left(\left| I_{0^+}^{\beta} Nx(s) \right|^{q-1} + |ANx(s)|^{q-1} \right) ds
\end{aligned}$$

d'aprés la preuve (2.2.1) on a

$$Ah(t) = -\frac{1}{2} I_{0^+}^{\beta} h(t)|_{t=1},$$

ce qui entaine,

$$I_{0^+}^{\beta} Nx(t)|_{t=1} = -2ANx(t)$$

$$\left| I_{0^+}^{\beta} Nx(t)|_{t=1} \right| = |-2ANx(t)| = 2ANx(t)$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
|BNx(t)| &\leq \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \left(|2ANx(s)|^{q-1} + |ANx(s)|^{q-1} \right) ds \\
&\leq \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \left(3^{q-1} |ANx(s)|^{q-1} \right) ds \\
&\leq \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \frac{3^{q-1}}{2^{q-1} (\Gamma(\beta+1))^{q-1}} (\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1})^{q-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds
\end{aligned}$$

Utilisant la définition (1.2.2)

$$|BNx(t)| \leq \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \frac{3^{q-1}}{2^{q-1}(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} (\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1})^{q-1} B(1,\alpha)$$

La propriété (1.4) implique que pour $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned} |BNx(t)| &\leq \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \frac{3^{q-1}}{2^{q-1}(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} (\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1})^{q-1} \frac{\Gamma(1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &\leq \frac{3^{q-1}}{2^q\Gamma(\alpha+1)(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} (\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1})^{q-1} \quad (2.10) \end{aligned}$$

Utilisant la définition de Ω (2.9)

$$x(t) = \lambda^{q-1} Tx(t)$$

$$\begin{aligned} |x(t)| &= \left|\lambda^{q-1} Tx(t)\right| \\ &\leq \left|1^{q-1} Tx(t)\right| \\ &= |Tx(t)| \\ &= \left|I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(t) + ANx(t)\right) + BNx(t)\right| \\ &\leq \left|I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(t) + ANx(t)\right)\right| + |BNx(t)| \end{aligned}$$

on a,

$$\begin{aligned} |BNx(t)| &= \left|-\frac{1}{2} I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(t) + ANx(t)\right)|_{t=1}\right| \\ |BNx(t)| &= \frac{1}{2}\left|I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(t) + ANx(t)\right)|_{t=1}\right| \\ 2|BNx(t)| &= \left|I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(t) + ANx(t)\right)|_{t=1}\right| \end{aligned}$$

donc de (2.10) on obtient pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq 2|BNx(t)| + |BNx(t)| \\ &\leq 3|BNx(t)| \\ &\leq 3\frac{3^{q-1}}{2^q\Gamma(\alpha+1)(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} (\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1})^{q-1} \\ &\leq \frac{3^{q}}{2^q\Gamma(\alpha+1)(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} (\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1})^{q-1} \quad (2.11) \end{aligned}$$

De (2.5) et (2.11) nous pouvons voir qu'il existe une constante $M > 0$; telle que

$$\|x\|_\infty \leq M$$

Conclusion les conditions du théorème du point fixe de Schaefer sont vérifiées, ce qui entraine que T admet un point fixe qui est la solution de (2.1).

■

2.4 Exemple d'application

Exemple 2.4.1 *Considérons le problème anti-périodique suivant: pour tout* $t \in [0,1]$

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\frac{1}{2}}\phi_3\left(D_{0^+}^{\frac{3}{4}}x(t)\right) = \frac{1}{10}x^2(t) + \cos t \\ x(0) = -x(1),\ D_{0^+}^{\frac{3}{4}}x(0) = -D_{0^+}^{\frac{3}{4}}x(1) \end{cases} \tag{2.12}$$

avec $p = 3, q = \frac{3}{2}, \alpha = \frac{3}{4}, \beta = \frac{1}{2}$ *et* $f(t,x(t)) = \frac{1}{10}x^2(t) + \cos t$.
choisissant $a(t) = 1, b(t) = \frac{1}{10}$ *alors* $\|a(t)\|_\infty = 1, \|b(t)\|_\infty = \frac{1}{10}$
par le théoréme (2.1) *on a*

$$\begin{aligned} |f(t,x)| &\leq a(t) + b(t)\,|x|^{p-1} \\ &\leq 1 + \frac{1}{10}\,|x|^{3-1} \\ &\leq 1 + \frac{1}{10}x^2 \end{aligned}$$

on a de (2.12) *la fonction* f *est continue et*

$$\begin{aligned} |f(t,x)| &= \left|\frac{1}{10}x^2 + \cos t\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{10}x^2\right| + |\cos t| \\ &\leq \frac{1}{10}x^2 + 1 \end{aligned}$$

par un simple calcul on a

$$\frac{3^q\,\|b\|_\infty^{q-1}}{2^q\Gamma(\alpha+1)(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} = \frac{3^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}\Gamma(\frac{3}{4}+1)(\Gamma(\frac{1}{2}+1))^{\frac{1}{2}}} < 1$$

ce qui vérifie les hypothéses du théoréme (2.1)
Alors le problème (2.12) *admet au moins une solution.*

Chapitre 3

Problème à deux points

Sommaire

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de la solvabilité du problème suivant:

$$\begin{cases} {}^cD_{0^+}^{\beta}\phi_p({}^cD_{0^+}^{\alpha}x(t)) = f(t,x(t));\ t\in[0,1] \\ x(0)=\xi x(1),\ {}^cD_{0^+}^{\alpha}x(0)=\eta D_{0^+}^{\alpha}x(1). \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $0<\xi<1$ et $0<\eta<1$.
Nous transformons d'abord le probléme (3.1) en un problème équivalent de recherche de point fixe, puis nous présentons des résultats sur la non-existence, l'unicité et la multiplicité de solutions positives pour le problème (3.1).
Les résultats sont obtenus par l'application du théorème de point fixe dans un cône. Nous utiliserons les notations suivantes :

$$E = C\,[0,1] \tag{3.2}$$

$$P=\{x\in C\,[0,1] : x\,(t)\geq 0 \text{ pour tout } t\in[0,1]\} \tag{3.3}$$

$$\omega = \min_{t\in[\sigma,1]} x(t) \tag{3.4}$$

3.2 Lemmes auxiliaires

Dans cette section, nous présentons un résultat auxiliaire necessaire pour établir le résultat principal.

Lemme 3.2.1 *Pour $h \in E$, l'unique solution du problème:*

$$\begin{cases} {}^cD^{\beta}_{0^+}\phi_p({}^cD^{\alpha}_{0^+}x(t)) = h(t) \\ x(0) = \xi x(1),\ {}^cD^{\alpha}_{0^+}x(0) = \eta {}^cD^{\alpha}_{0^+}x(1) \end{cases} \tag{3.5}$$

est définie, pour tout $t \in [0,1]$, par

$$\begin{aligned} x(t) &= I^{\alpha}_{0^+}\phi_q\left(I^{\beta}_{0^+}h(t) + Ah(t)\right) + Bh(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}h(\tau)d\tau + Ah(s)\right)ds + Bh(t) \end{aligned}$$

où

$$Ah(t) = \frac{\phi_P(\eta)}{1-\phi_P(\eta)} I^{\beta}_{0^+}h(t)|_{t=1} = \frac{\phi_P(\eta)}{1-\phi_P(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\beta-1}h(s)ds$$

et

$$\begin{aligned} Bh(t) &= \frac{\xi}{1-\xi} I^{\alpha}_{0^+}\phi_q(I^{\beta}_{0^+}h(t) + Ah(t))|_{t=1} \\ &= \frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}h(\tau)d\tau + Ah(s)\right)ds \end{aligned}$$

Preuve: *Supposons que $x(t)$ vérifie le problème (3.5) alors pour tout $t \in [0,1]$ on a*

$$ {}^cD^{\beta}_{0^+}\phi_p\left({}^cD^{\alpha}_{0^+}x(t)\right) = h(t) \tag{3.6}$$

Appliquons (1.5) pour $\gamma = \beta \leq 1$ sur les deux membres de (3.6), pour obtenir:

$$I^{\beta}_{0^+}\left({}^cD^{\beta}_{0^+}\phi_p({}^cD^{\alpha}_{0^+}x(t))\right) = I^{\beta}_{0^+}h(t)$$

Le lemme (1.2.1) entraine

$$\begin{aligned} I^{\beta}_{0^+}\left({}^cD^{\beta}_{0^+}\phi_p({}^cD^{\alpha}_{0^+}x(t))\right) &= \phi_p({}^cD^{\alpha}_{0^+}x(t)) + c_0 + c_1t + \dots + c_{n-1}t^{n-1} \\ &= I^{\beta}_{0^+}h(t) \end{aligned}$$

où $n = -[-\beta] = 1$ car $0 < \beta \leq 1$. ■

Comme conséquence du lemme précédent, nous avons le résultat suivant:

Lemme 3.2.2 *$x \in E$ est une solution du problème (3.1), si et seulement si,*

$$x = Tx$$

où, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} Tx(t) &= I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(t) + ANx(t)\right) + BNx(t) \qquad (3.7) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau, x(\tau))d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1} f(\tau, x(\tau))d\tau\right) ds \\ &\quad + \frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau, x(\tau))d\tau\right. \\ &\quad \left. + \frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1} f(\tau, x(\tau))d\tau\right) ds \end{aligned}$$

où $N : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ est l'opérateur de Nemytskii associé à f et qui est défini pour tout $t \in [0,1]$ par:

$$Nx(t) = f(t, x(t)) \qquad (3.8)$$

3.3 Résultats principaux

3.3.1 Résultat 1

Le théorème suivant fournit des conditions sur la nonlinéarité impliquant l'absence de solutions positives pour le problème (3.1)

Théorème 3.1 *Si pour tout $(t, x) \in [0,1] \times [0, +\infty)$*

$$f(t, x(t)) \leq (m_1 x)^{p-1} = \phi_p(m_1 x) \qquad (3.9)$$

où m_1 est une constante positive telle que

$$m_1 < (1-\xi)\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}(\Gamma(\beta+1))^{q-1} \qquad (3.10)$$

Alors le problème (3.1) n'admet pas de solution positive .

Preuve: Considérons P et E définis par (3.2) et (3.3). Si le problème (3.1) admet une solution positive $x(t) \in P$. avec x non identiquement nul, alors on a:

$$
\begin{aligned}
|x(t)| &= |Tx(t)| \\
&= \left| I_{0^+}^{\alpha} \phi_q \left(I_{0^+}^{\beta} Nx(t) + ANx(t) \right) + BNx(t) \right| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right.\right. \\
&\quad \left. + \frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right) ds \\
&\quad + \frac{\xi}{1-\xi} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right) ds \right|
\end{aligned}
$$

Utilisant la majoration de la valeur absolue d'une intégrale.

$$
\begin{aligned}
|Tx(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left| (t-s)^{\alpha-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right) ds \right| \\
&\quad + \frac{\xi}{1-\xi} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left| (1-s)^{\alpha-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right) ds \right|
\end{aligned}
$$

utilisant la croissance de $\phi_q(s)$ pour s positive, et q conjugué de p, nous obtenons alors

$$
\begin{aligned}
|Tx(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} |f(\tau, x(\tau))| \, d\tau \right. \\
&\quad \left. + \frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1} |f(\tau, x(\tau))| \, d\tau \right) ds \\
&\quad + \frac{\xi}{1-\xi} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} |f(\tau, x(\tau))| \, d\tau \right. \\
&\quad \left. + \frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1} |f(\tau, x(\tau))| \, d\tau \right) ds
\end{aligned}
$$

(3.9) nous donne

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}\left|(m_1 x(\tau))^{p-1}\right| d\tau\right.\\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}\left|(m_1 x(\tau))^{p-1}\right| d\tau\right) ds\\
&+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}\left|(m_1 x(\tau))^{p-1}\right| d\tau\right.\\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}\left|(m_1 x(\tau))^{p-1}\right| d\tau\right) ds
\end{aligned}$$

d'aprés (2)

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left((m_1\|x\|)^{p-1}\right)^{q-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}d\tau\right.\\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}d\tau\right) ds\\
&+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\left((m_1\|x\|)^{p-1}\right)^{q-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}d\tau\right.\\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}d\tau\right) ds
\end{aligned}$$

puisque $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,alors $(p-1)(q-1)=1$

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| &\leq m_1\|x\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}d\tau\right.\\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}d\tau\right) ds \qquad (3.11)\\
&+m_1\|x\|\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}d\tau\right.\\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}d\tau\right) ds \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

En opérant le calcul intégral,

$$\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}d\tau=\left[-\frac{1}{\beta}(s-\tau)^{\beta}\right]_0^s=\frac{1}{\beta}s^{\beta} \qquad (3.13)$$

(3.12) devient:

$$\begin{aligned}|Tx(t)| &\leq m_1\|x\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\beta}s^\beta+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\beta}\right)\\ &+m_1\|x\|\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\\ &\times\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\beta}s^\beta+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\beta}\right)\end{aligned}$$

La propriété (1.3) et $s \leq 1$ permettent d'obtenir:

$$\begin{aligned}|Tx(t)| &\leq m_1\|x\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}s^\beta+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right)ds\\ &+m_1\|x\|\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\\ &\times\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}s^\beta+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right)ds\\ &\leq m_1\|x\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right)ds\\ &+m_1\|x\|\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\\ &\times\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right)\end{aligned}$$

Et par suite,

$$\begin{aligned}|Tx(t)| &\leq m_1\|x\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds\right]\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right)\\ &+m_1\|x\|\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}ds\right]\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right.\\ &\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right)\end{aligned}$$

le calcul

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}t^\alpha \tag{3.14}$$

entraine que:

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| &\leq m_1 \|x\| \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)} \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \right) \\
&\quad + m_1 \|x\| \frac{\xi}{1-\xi} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)} \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \right) \\
&= m_1 \|x\| \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \phi_q \left(\frac{1}{\left(1-\phi_p(\eta)\right)\Gamma(\beta+1)} \right) \\
&\quad + m_1 \|x\| \frac{\xi}{1-\xi} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \phi_q \left(\frac{1}{\left(1-\phi_p(\eta)\right)\Gamma(\beta+1)} \right)
\end{aligned}$$

Maintenant par (2) et $t \leq 1$ on obtient

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| &\leq m_1 \|x\| \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1} (\Gamma(\beta+1))^{q-1}} \\
&\quad + m_1 \|x\| \frac{\xi}{(1-\xi)\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1} (\Gamma(\beta+1))^{q-1}}
\end{aligned}$$

Ce qui revient à écrire:

$$|Tx(t)| \leq m_1 \|x\| \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1} (\Gamma(\beta+1))^{q-1}} \left(\frac{1-\xi+\xi}{1-\xi} \right)$$

La defintion de m_1 (3.10) entraine alors

$$|Tx(t)| \leq m_1 \|x\| \frac{1}{(1-\xi)\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1} (\Gamma(\beta+1))^{q-1}} < \|x\|$$

Ce qui est une contradiction avec $|x(t)| = |Tx(t)|$ .Alors le problème (3.1) n'admet pas de solution positive dans P. ■

3.3.2 Résultat2

Dans la suite, nous établissons l'existence d'une solution positive unique au problème (3.1).

Théorème 3.2 *Si $f : [0,1] \times (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ est croissante en x, et il existe une constante $0 \leq \theta < 1$ telle que pour tout $(t,x) \in [0,1] \times (0,+\infty)$,et tout $0 < k < 1$.*

$$f(t,kx) \geq k^{(p-1)\theta} f(t,x) \tag{3.15}$$

Alors le problème (3.1) admet une solution positive unique.

Preuve: $f : [0,1]\times(0,+\infty)\longrightarrow(0,+\infty)$, entraine que l'opérateur T est défini sur P° a valeur dans P° $(T : P^{\circ}\longrightarrow P^{\circ})$. Pour tous $x_1, x_2\in P^{\circ}$ avec $x_1\leq x_2$ par la monotonie de f et la fonction puissance x^{q-1}, nous avons pour tout $t\in[0,1]$

$$Tx_2(t)-Tx_1(t)\geq 0$$

ainsi T est croissante dans P°.
Ensuite, nous prouvons que T c'est un opérateur θ-concave. à partir de (3.15), pour tout $0<k<1$, $x\in P^{\circ}$, il est facile de voir que

$$\begin{aligned}
T(kx)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,kx(\tau))d\tau\right.\\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,kx(\tau))d\tau\right)ds\\
&+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,kx(\tau))d\tau\right.\\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,kx(\tau))d\tau\right)ds
\end{aligned}$$

utilisant la croissance de $\phi_q(s)$ pour s positive, et q conjugué de p,nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
T(kx)(t) &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}\left(k^{(p-1)\theta}f(\tau,x(\tau))\right)d\tau\right.\\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}\left(k^{(p-1)\theta}f(\tau,x(\tau))\right)d\tau\right)ds\\
&+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}\left(k^{(p-1)\theta}f(\tau,x(\tau))\right)d\tau\right.\\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}\left(k^{(p-1)\theta}f(\tau,x(\tau))\right)d\tau\right)ds
\end{aligned}$$

d'aprés (2)

$$\begin{aligned}
T(kx)(t) &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left(k^{(p-1)\theta}\right)^{q-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right.\\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right)ds\\
&+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}\left(k^{(p-1)\theta}\right)^{q-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right.\\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right)ds
\end{aligned}$$

puisque $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,alors $(p-1)(q-1)=1$

$$\begin{aligned}
T(kx)(t) &\geq k^{\theta}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right.\\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right)ds\\
&+k^{\theta}\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right.\\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right)ds\\
&= k^{\theta}T(x)(t)
\end{aligned}$$

Ce qui implique que T est un opérateur θ-concave. Par le lemme (1.1.1), le problème (3.1) a une solution positive unique.

■

Enfin, nous étudions la multiplicité des solutions positives de problème (3.1) .

3.3.3 Résultat 3

Maintenant, se basant sur le théorème (1.5), nous considérons l'existence de trois solutions positives de problème (3.1).

Théorème 3.3 *Soit $f:[0,1]\times[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$ continue. Supposons qu'il existe des constantes positives a et c telles que*

$$a<\left(\phi_p(\eta)\right)^{q-1}(1-\sigma)^{\beta(q-1)}\left[(1-\xi)\sigma^{\alpha}+\xi(1-\sigma)^{\alpha}\right]c$$

et que les hypothèses suivantes soient satisfaites

(H1) *Il existe une constante*

$$0<m_2\leq(1-\xi)\Gamma(\alpha+1)(\Gamma(\beta+1))^{q-1}(1-\phi_p(\eta))^{q-1} \tag{3.16}$$

telle que pour tout$(t,x)\in[0,1]\times[0,c]$

$$f(t,x)\leq(m_2c)^{p-1} \tag{3.17}$$

(H2) *Il existe une constante m_3 telle que*

$$\frac{(1-\xi)\Gamma(\alpha+1)(\Gamma(\beta+1))^{q-1}(1-\phi_p(\eta))^{q-1}}{\left(\phi_p(\eta)\right)^{q-1}(1-\sigma)^{\beta(q-1)}\left[(1-\xi)\sigma^{\alpha}+\xi(1-\sigma)^{\alpha}\right]}\leq m_3<m_2\frac{c}{a} \tag{3.18}$$

telle que pour tout $(t,x)\in[\sigma,1]\times[a,c]$

$$f(t,x)>(m_3a)^{p-1} \tag{3.19}$$

(H3) *Il existe une constante*

$$0 < m_4 < (1-\xi)^{p-1}(\Gamma(\alpha+1))^{p-1}\Gamma(\beta+1)(1-\phi_p(\eta))$$

telle que

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}\sup_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x)}{x^{p-1}} = m_4 \tag{3.20}$$

Alors, le problème (3.1) *admet au moins trois solutions positives.*

Preuve: la preuve est donnée en 4 étapes chacune de ces étapes permet la verification d'une des conditions du théorème de Legett Williams pour pouvoir l'appliquer
Etape1: Sous (H1) et utilisant le lemme (3.2.2) pour tout $x \in \overline{P_c}$, nous avons pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
|x(t)| &= |Tx(t)| \\
&= \left| I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(t) + ANx(t)\right) + BNx(t)\right| \\
&= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right.\right. \\
&\quad \left. +\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right) ds \\
&\quad +\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right. \\
&\quad \left.\left. +\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right) ds\right|
\end{aligned}$$

Utilisant les propriétés de la valeur absolue,

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|(t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right.\right. \\
&\quad \left.\left. +\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right) ds\right| \\
&\quad +\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \left|(1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right.\right. \\
&\quad \left.\left. +\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right) ds\right|
\end{aligned}$$

Utilisant la croissance de $\phi_q(s)$ pour s positive, avec q le conjugué de p, nous obtenons

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}\left|f(\tau,x(\tau))\right|d\tau\right. \\
& \left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}\left|f(\tau,x(\tau))\right|d\tau\right)ds \\
& +\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}\left|f(\tau,x(\tau))\right|d\tau\right. \\
& \left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}\left|f(\tau,x(\tau))\right|d\tau\right)ds
\end{aligned}$$

(3.9) nous donne

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}\left|(m_2c)^{p-1}\right|d\tau\right. \\
& \left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}\left|(m_2c)^{p-1}\right|d\tau\right)ds \\
& +\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}\left|(m_2c)^{p-1}\right|d\tau\right. \\
& \left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}\left|(m_2c)^{p-1}\right|d\tau\right)ds
\end{aligned}$$

d'aprés (2)

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left((m_2c)^{p-1}\right)^{q-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}d\tau\right. \\
& \left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}d\tau\right)ds \\
& +\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\left((m_2c)^{p-1}\right)^{q-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}d\tau\right. \\
& \left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}d\tau\right)ds
\end{aligned}$$

puisque $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,alors $(p-1)(q-1)=1$

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| \leq & m_2c\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}d\tau\right. \\
& \left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}d\tau\right)ds \\
& +m_2c\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}d\tau\right. \\
& \left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}d\tau\right)ds \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Utilisant (3.13) ,l'inégalité (3.21) devient:

$$\begin{aligned}|Tx(t)| &\leq m_2c\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\beta}s^\beta+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\beta}\right)\\ &\quad +m_2c\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\beta}s^\beta+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\beta}\right)\end{aligned}$$

La propriété (1.3) et $s \leq 1$ entraine :

$$\begin{aligned}|Tx(t)| &\leq m_2c\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}s^\beta+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right)ds\\ &\quad +m_2c\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}s^\beta+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right)ds\\ &\leq m_2c\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right)ds\\ &\quad +m_2c\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right)ds\end{aligned}$$

Et par suite,

$$\begin{aligned}|Tx(t)| &\leq m_2c\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds\right]\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right)\\ &\quad +m_2c\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}ds\right]\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right)\end{aligned}$$

le calcul (3.14) , donne:

$$\begin{aligned}|Tx(t)| &\leq m_2c\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right)\\ &\quad +m_2c\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right)\\ &= m_2c\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha\phi_q\left(\frac{1}{\left(1-\phi_p(\eta)\right)\Gamma(\beta+1)}\right)\\ &\quad +m_2c\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\phi_q\left(\frac{1}{\left(1-\phi_p(\eta)\right)\Gamma(\beta+1)}\right)\end{aligned}$$

Maintenant par (2) et $t \leq 1$ nous obtenons

$$\begin{aligned}|Tx(t)| &\leq m_2c\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}\left(\Gamma(\beta+1)\right)^{q-1}}\\ &\quad +m_2c\frac{\xi}{(1-\xi)\,\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}\left(\Gamma(\beta+1)\right)^{q-1}}\end{aligned}$$

ce qui revient à écrire:

$$|Tx(t)| \leq m_2 c \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}(\Gamma(\beta+1))^{q-1}}\left(\frac{1-\xi+\xi}{1-\xi}\right)$$

La defintion de m_2 (3.16) entraine alors

$$|Tx(t)| \leq m_2 c \frac{1}{(1-\xi)\,\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} \leq c,$$

ainsi $T : \overline{P_c} \longrightarrow \overline{P_c}$. Montrons que $T : \overline{P_c} \longrightarrow \overline{P_c}$ est complètement continue.
Tout d'abord, de la continuité de f et x^{q-1}, découle la continuité de $T : \overline{P_c} \longrightarrow \overline{P_c}$ et par suite la fermeture de $T(\overline{P_c})$ de plus il existe une constante $M_1 > 0$ tel que

$$\left|I_{0^+}^{\beta} Nx(t) + ANx(t)\right| \leq M_1$$

pour tout $t \in [0,1]$.
Il existe t_1, t_2 tel que $0 < t_1 < t_2 < 1$ et pour tout $x \in \overline{P_c}$ nous avons:

$$\begin{aligned}
|Tx(t_2) - Tx(t_1)| &= \Big| I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(t) + ANx(t)\right) + BNx(t)\,|_{t=t_2} \\
&\quad - I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(t) + ANx(t)\right) + BNx(t)|_{t=t_1}\Big| \\
&\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s) + ANx(s)\right)ds\right. \\
&\quad \left. - \int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s) + ANx(s)\right)\right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(t) + ANx(t)\right)ds\right. \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s) + ANx(s)\right)ds \\
&\quad \left. - \int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s) + ANx(s)\right)ds\right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}\right]\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s) + ANx(s)\right)ds\right. \\
&\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s) + ANx(s)\right)ds\right|
\end{aligned}$$

utilisant les propriétés de la valeur absolue,

$$\begin{aligned}
|Tx(t_2) - Tx(t_1)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\int_0^{t_1}\left|\left[(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}\right]\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s) + ANx(s)\right)\right|ds\right. \\
&\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2}\left|(t_2-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s) + ANx(s)\right)\right|ds\right\}
\end{aligned}$$

utilisant la definition de ϕ_q (2)

$$\begin{aligned}
|Tx(t_2)-Tx(t_1)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\int_0^{t_1}\left|(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\right.\right. \\
&\quad \times\left|I_{0^+}^{\beta}Nx(s)+ANx(s)\right|^{q-2}\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s)+ANx(s)\right)\Big|\,ds \\
&\quad +\int_{t_1}^{t_2}\left|(t_2-s)^{\alpha-1}\left|I_{0^+}^{\beta}Nx(s)+ANx(s)\right|^{q-2}\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s)+ANx(s)\right)\right|ds\Bigg\}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Appliquons la valeur absolue sur $\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s)+ANx(s)\right)$

$$\begin{aligned}
\left|\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s)+ANx(s)\right)\right| &= \left|\left|I_{0^+}^{\beta}Nx(s)+ANx(s)\right|^{q-2}\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(s)+ANx(s)\right)\right| \\
&= \left|I_{0^+}^{\beta}Nx+ANx\right|^{q-1}\leq M_1^{q-1}
\end{aligned}$$

Maintenant (3.22), permet d'écrire:

$$\begin{aligned}
|Tx(t_2)-Tx(t_1)| &\leq \frac{M_1^{q-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^{t_1}\left|(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\right|ds+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds\right] \\
&\leq \frac{M_1^{q-1}}{\Gamma(\alpha)}\left\{\left[\frac{-1}{\alpha}(t_1-s)^{\alpha}\right]_0^{t_1}-\left[\frac{-1}{\alpha}(t_2-s)^{\alpha}\right]_0^{t_1}+\left[\frac{-1}{\alpha}(t_2-s)^{\alpha}\right]_{t_1}^{t_2}\right\} \\
&\leq \frac{M_1^{q-1}}{\Gamma(\alpha)}\left\{\frac{1}{\alpha}(t_1)^{\alpha}-\left[-\frac{1}{\alpha}(t_2-t_1)^{\alpha}+\frac{1}{\alpha}(t_2)^{\alpha}\right]+\frac{1}{\alpha}(t_2-t_1)^{\alpha}\right\} \\
&= \frac{M_1^{q-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(t_1)^{\alpha}-(t_2)^{\alpha}+2(t_2-t_1)^{\alpha}\right]
\end{aligned}$$

Si $|t_2-t_1|\longrightarrow 0$ alors $\frac{M_1^{q-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(t_1)^{\alpha}-(t_2)^{\alpha}+2(t_2-t_1)^{\alpha}\right]\longrightarrow 0$
Par application du théorème d'Arzela-Ascoli , $T\,:\,\overline{P_c}\longrightarrow\overline{P_c}$ est compact.
Donc $T:\overline{P_c}\longrightarrow\overline{P_c}$ est complètement continue.
Etape2: Soit $b=c>a$ et considérons la fonction constante $x_0(t)=\frac{a+b}{2}$, pour tout $t\in[0,1]$alors $\omega(x_0)=\frac{a+b}{2}>a$ et $\|x_0\|=\frac{a+b}{2}<b$. Ainsi utilisant (1.2), $x_0\in\{x\in P(\omega,a,b):\omega(x)>a\}$, par suite $\{x\in P(\omega,a,b):\omega(x)>a\}\neq\emptyset$.
Maintenant, prouvons que $\omega(Tx)>a$ pour tout $x\in P(\omega,a,b)$.
En fait $x\in P(\omega,a,b)$ implique que $a\leq x(t)\leq b$, pour tout $t\in[\sigma,1]$ et l'hypothèse (H2) implique

$$\begin{aligned}
Tx(t) &= I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(t)+ANx(t)\right)+BNx(t) \\
&\geq I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\left(ANx(t)\right)+BNx(t)
\end{aligned}$$

Notons par T^* l'opérateur défini par:

$$T^*x(t):=I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\left(ANx(t)\right)+BNx(t) \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} T^*x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_\sigma^1 (1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right)ds \\ &+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_\sigma^1 (1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right)ds \end{aligned}$$

(3.19) nous donne

$$\begin{aligned} T^*x(t) &> \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_\sigma^1 (1-\tau)^{\beta-1}(m_3a)^{p-1}d\tau\right)ds \\ &+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_\sigma^1 (1-\tau)^{\beta-1}(m_3a)^{p-1}d\tau\right)ds \end{aligned}$$

par (2) on a

$$\begin{aligned} T^*x(t) &> \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{(m_3a)^{p-1}}{\Gamma(\beta)}\int_\sigma^1 (1-\tau)^{\beta-1}d\tau\right)^{q-1}ds \qquad (3.24) \\ &+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^1 (1-s)^{\alpha-1}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{(m_3a)^{p-1}}{\Gamma(\beta)}\int_\sigma^1 (1-\tau)^{\beta-1}d\tau\right)^{q-1}ds, \end{aligned}$$

Utilisant (3.13) et (1.3) ,l′inegalité (3.24) devient,

$$\begin{aligned} T^*x(t) &> \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{(m_3a)^{p-1}}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^{\beta}\right)^{q-1}ds \\ &+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^1 (1-s)^{\alpha-1}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{(m_3a)^{p-1}}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^{\beta}\right)^{q-1}ds \\ &> \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{(m_3a)^{p-1}}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^{\beta}\right)^{q-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\ &+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{(m_3a)^{p-1}}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^{\beta}\right)^{q-1}\int_\sigma^1 (1-s)^{\alpha-1}ds \end{aligned}$$

les calculs

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^1 (1-s)^{\alpha-1}ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(1-\sigma)^{\alpha}$$

entrainent que:

$$\begin{aligned}
T^*x(t) &> \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{(m_3a)^{p-1}}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^\beta\right)^{q-1}\\
&+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(1-\sigma)^\alpha\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{(m_3a)^{p-1}}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^\beta\right)^{q-1}\\
&= \frac{((m_3a)^{p-1})^{q-1}}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^\beta\right)^{q-1}\\
&+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{((m_3a)^{p-1})^{q-1}}{\Gamma(\alpha+1)}(1-\sigma)^\alpha\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^\beta\right)^{q-1}
\end{aligned}$$

puisque $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ alors $(p-1)(q-1)=1$, et par suite

$$\begin{aligned}
T^*x(t) &> \frac{m_3a}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^\beta\right)^{q-1}\\
&+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{m_3a}{\Gamma(\alpha+1)}(1-\sigma)^\alpha\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^\beta\right)^{q-1}
\end{aligned}$$

Puisque $t\geq\sigma$

$$\begin{aligned}
T^*x(t) &\geq \frac{m_3a}{\Gamma(\alpha+1)}\sigma^\alpha\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^\beta\right)^{q-1}\\
&+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{m_3a}{\Gamma(\alpha+1)}(1-\sigma)^\alpha\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^\beta\right)^{q-1}\\
&\geq \frac{m_3a}{\Gamma(\alpha+1)}\sigma^\alpha\frac{\left(\phi_p(\eta)\right)^{q-1}}{\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}}\frac{1}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^{q-1}}(1-\sigma)^{\beta\left(q-1\right)}\\
&+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{m_3a}{\Gamma(\alpha+1)}(1-\sigma)^\alpha\frac{\left(\phi_p(\eta)\right)^{q-1}}{\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}}\frac{1}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^{q-1}}(1-\sigma)^{\beta\left(q-1\right)}\\
&= \frac{m_3a\left(\phi_p(\eta)\right)^{q-1}}{\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}\left(\Gamma(\beta+1)\right)^{q-1}}(1-\sigma)^{\beta\left(q-1\right)}\left(\sigma^\alpha+\frac{\xi}{1-\xi}(1-\sigma)^\alpha\right)\\
&= m_3a\frac{\left(\phi_p(\eta)\right)^{q-1}(1-\sigma)^{\beta\left(q-1\right)}}{\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}\left(\Gamma(\beta+1)\right)^{q-1}}\left(\frac{\sigma^\alpha(1-\xi)+\xi(1-\sigma)^\alpha}{1-\xi}\right)\\
&= m_3a\frac{\left(\phi_p(\eta)\right)^{q-1}(1-\sigma)^{\beta\left(q-1\right)}\sigma^\alpha(1-\xi)+\xi(1-\sigma)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}\left(\Gamma(\beta+1)\right)^{q-1}(1-\xi)}
\end{aligned}$$

(3.18) implique que

$$T^*x(t)\geq a$$

et par suite,

$$Tx(t) \geq a$$

ce qui implique que $\omega(Tx) > a$ pour tout $x \in P(\omega, a, b)$.Par conséquent, la condition (i) du théoreme (1.5) est satisfaite.

Etape3 : Utilisant la définition de $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \sup\limits_{t \in [0,1]} \frac{f(t,x)}{x^{p-1}} = m_4$, il est facile de voir de (H3) que pour tout $t \in [0,1]$ .et pour tout $\varepsilon > 0$,il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que, $0 \leq x < \delta$. $\left| \frac{f(t,x)}{x^{p-1}} - m_4 \right| < \varepsilon$

$$f(t,x) < (m_4 + \varepsilon)x^{p-1} \tag{3.25}$$

Prenons,

$$\varepsilon < (1-\xi)^{p-1}(\Gamma(\alpha+1))^{p-1}\Gamma(\beta+1)(1-\phi_p(\eta)) - m_4$$

Pour $0 < d < \min\{\delta, a\}$, prouvons que $\|Tx\| < d$ pour tout $x \in \overline{P_d}$.
En fait, pour tout $x \in \overline{P_d}$, et pour tout $t \in [0,1]$,nous avons,

$$\begin{aligned}
|x(t)| &= |Tx(t)| \\
&= \left| I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\left(I_{0^+}^{\beta}Nx(t) + ANx(t)\right) + BNx(t)\right| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau \right.\right. \\
&\quad \left. + \frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right) ds \\
&\quad + \frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right) ds\right|
\end{aligned}$$

Utilisant les propriétés de la valeur absolue,

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|(t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right) ds\right| \\
&\quad + \frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \left|(1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right) ds\right|
\end{aligned}$$

utilisant la croissance de $\phi_q(s)$ pour s positive, et q conjugué de p,nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}|f(\tau,x(\tau))|\,d\tau\right. \\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}|f(\tau,x(\tau))|\,d\tau\right)ds \\
&+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}|f(\tau,x(\tau))|\,d\tau\right. \\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}|f(\tau,x(\tau))|\,d\tau\right)ds
\end{aligned}$$

(3.25) nous donne

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}\left|(m_4+\varepsilon)(x(\tau))^{p-1}\right|d\tau\right. \\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}\left|(m_4+\varepsilon)(x(\tau))^{p-1}\right|d\tau\right)ds \\
&+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}\left|(m_4+\varepsilon)(x(\tau))^{p-1}\right|d\tau\right. \\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}\left|(m_4+\varepsilon)(x(\tau))^{p-1}\right|d\tau\right)ds
\end{aligned}$$

et de (2),

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left((m_4+\varepsilon)\|x\|^{p-1}\right)^{q-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}d\tau\right. \\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}d\tau\right)ds \\
&+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\left((m_4+\varepsilon)\|x\|^{p-1}\right)^{q-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}d\tau\right. \\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}d\tau\right)ds
\end{aligned}$$

puisque $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,alors $(p-1)(q-1)=1$

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| &\leq (m_4+\varepsilon)^{q-1}\|x\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}d\tau\right.\\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}d\tau\right)ds\\
&+(m_4+\varepsilon)^{q-1}\|x\|\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}d\tau\right.\\
&\left.+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}d\tau\right)ds \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

En opérant le calcul (3.13), (3.26) devient:

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| &\leq (m_4+\varepsilon)^{q-1}\|x\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\beta}s^\beta+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\beta}\right)\\
&+(m_4+\varepsilon)^{q-1}\|x\|\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\beta}s^\beta+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\beta\Gamma(\beta)}\right).
\end{aligned}$$

La propriété (1.3) et $s\leq 1$ permettent d'obtenir:

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| &\leq (m_4+\varepsilon)^{q-1}\|x\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\\
&\times\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}s^\beta+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right)ds\\
&+(m_4+\varepsilon)^{q-1}\|x\|\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}\\
&\times\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}s^\beta+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right)ds\\
&\leq (m_4+\varepsilon)^{q-1}\|x\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\\
&\times\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right)ds\\
&+(m_4+\varepsilon)^{q-1}\|x\|\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}ds\\
&\times\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right)ds
\end{aligned}$$

Et par suite,

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| &\leq (m_4+\varepsilon)^{q-1}\|x\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds\right] \\
&\times\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right) \\
&+(m_4+\varepsilon)^{q-1}\|x\|\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}ds\right] \\
&\times\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right)
\end{aligned}$$

le calcul (3.14) entraine que:

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| &\leq (m_4+\varepsilon)^{q-1}\|x\|\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right) \\
&\quad+(m_4+\varepsilon)^{q-1}\|x\|\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right) \\
&= (m_4+\varepsilon)^{q-1}\|x\|\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}\phi_q\left(\frac{1}{\left(1-\phi_p(\eta)\right)\Gamma(\beta+1)}\right) \\
&\quad+(m_4+\varepsilon)^{q-1}\|x\|\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\phi_q\left(\frac{1}{\left(1-\phi_p(\eta)\right)\Gamma(\beta+1)}\right)
\end{aligned}$$

Maintenant par (2) et $t \leq 1$ on obtient

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| &\leq (m_4+\varepsilon)^{q-1}\|x\|\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} \\
&\quad+(m_4+\varepsilon)^{q-1}\|x\|\frac{\xi}{(1-\xi)\,\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}(\Gamma(\beta+1))^{q-1}}
\end{aligned}$$

ce qui revient à écrire:

$$|Tx(t)| \leq (m_4+\varepsilon)^{q-1}\|x\|\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}(\Gamma(\beta+1))^{q-1}}\left(\frac{1-\xi+\xi}{1-\xi}\right)$$

La defintion de m_4 (3.20) entraine alors

$$|Tx(t)| \leq (m_4+\varepsilon)^{q-1}d\frac{1}{(1-\xi)\,\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} < d$$

Ce qui implique que $\|Tx\| < d$.pour tous $x \in \overline{P_d}$.
Etape4: Prouvons que $\omega(Tx) > a$, pour tout $x \in P(\omega, a, c)$ avec $\|Tx\| > b$.

Nous avons $a \leq x(t) \leq c$, pour tout $t \in [\sigma, 1]$ alors de (H2), on peut voir que

$$\begin{aligned} Tx(t) &= I^{\alpha}_{0^+}\phi_q\left(I^{\beta}_{0^+}Nx(t) + ANx(t)\right) + BNx(t) \\ &\geq T^*x(t) = I^{\alpha}_{0^+}\phi_q\left(ANx(t)\right) + BNx(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T^*x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_\sigma^1 (1-\tau)^{\beta-1}f(\tau, x(\tau))d\tau\right)ds \\ &+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_\sigma^1 (1-\tau)^{\beta-1}f(\tau, x(\tau))d\tau\right)ds \end{aligned}$$

(3.19) nous donne

$$\begin{aligned} T^*x(t) &> \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_\sigma^1 (1-\tau)^{\beta-1}(m_3a)^{p-1}d\tau\right)ds \\ &+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_\sigma^1 (1-\tau)^{\beta-1}(m_3a)^{p-1}d\tau\right)ds \end{aligned}$$

par (2) on a

$$\begin{aligned} T^*x(t) &> \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{(m_3a)^{p-1}}{\Gamma(\beta)}\int_\sigma^1 (1-\tau)^{\beta-1}d\tau\right)^{q-1}ds \qquad (3.27) \\ &+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^1 (1-s)^{\alpha-1}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{(m_3a)^{p-1}}{\Gamma(\beta)}\int_\sigma^1 (1-\tau)^{\beta-1}d\tau\right)^{q-1}ds \end{aligned}$$

En utilisant (3.13) et (1.3) , (3.27) devient

$$\begin{aligned} T^*x(t) &> \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{(m_3a)^{p-1}}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^\beta\right)^{q-1}ds \\ &+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^1 (1-s)^{\alpha-1}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{(m_3a)^{p-1}}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^\beta\right)^{q-1}ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{(m_3a)^{p-1}}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^\beta\right)^{q-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\ &+\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{(m_3a)^{p-1}}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^\beta\right)^{q-1}\int_\sigma^1 (1-s)^{\alpha-1}ds \end{aligned}$$

les calculs

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^1 (1-s)^{\alpha-1}ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(1-\sigma)^\alpha$$

entrainent que:

$$
\begin{aligned}
T^{*}x(t) &> \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{(m_3a)^{p-1}}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^{\beta}\right)^{q-1} \\
&\quad +\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(1-\sigma)^{\alpha}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{(m_3a)^{p-1}}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^{\beta}\right)^{q-1} \\
&= \frac{((m_3a)^{p-1})^{q-1}}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^{\beta}\right)^{q-1} \\
&\quad +\frac{\xi}{1-\xi}\frac{((m_3a)^{p-1})^{q-1}}{\Gamma(\alpha+1)}(1-\sigma)^{\alpha}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^{\beta}\right)^{q-1}
\end{aligned}
$$

puisque $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ alors $(p-1)(q-1)=1$ d'où

$$
\begin{aligned}
T^{*}x(t) &> \frac{m_3a}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^{\beta}\right)^{q-1} \\
&\quad +\frac{\xi}{1-\xi}\frac{m_3a}{\Gamma(\alpha+1)}(1-\sigma)^{\alpha}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^{\beta}\right)^{q-1}
\end{aligned}
$$

et $t\geq\sigma$, permet d'écrire

$$
\begin{aligned}
T^{*}x(t) &\geq \frac{m_3a}{\Gamma(\alpha+1)}\sigma^{\alpha}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^{\beta}\right)^{q-1} \\
&\quad +\frac{\xi}{1-\xi}\frac{m_3a}{\Gamma(\alpha+1)}(1-\sigma)^{\alpha}\left(\frac{\phi_p(\eta)}{1-\phi_p(\eta)}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(1-\sigma)^{\beta}\right)^{q-1} \\
&\geq \frac{m_3a}{\Gamma(\alpha+1)}\sigma^{\alpha}\frac{\left(\phi_p(\eta)\right)^{q-1}}{\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}}\frac{1}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^{q-1}}(1-\sigma)^{\beta(q-1)} \\
&\quad +\frac{\xi}{1-\xi}\frac{m_3a}{\Gamma(\alpha+1)}(1-\sigma)^{\alpha}\frac{\left(\phi_p(\eta)\right)^{q-1}}{\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}}\frac{1}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^{q-1}}(1-\sigma)^{\beta(q-1)} \\
&= \frac{m_3a\left(\phi_p(\eta)\right)^{q-1}}{\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}\left(\Gamma(\beta+1)\right)^{q-1}}(1-\sigma)^{\beta(q-1)}\left(\sigma^{\alpha}+\frac{\xi}{1-\xi}(1-\sigma)^{\alpha}\right) \\
&= m_3a\frac{\left(\phi_p(\eta)\right)^{q-1}(1-\sigma)^{\beta(q-1)}}{\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}\left(\Gamma(\beta+1)\right)^{q-1}}\left(\frac{\sigma^{\alpha}(1-\xi)+\xi(1-\sigma)^{\alpha}}{1-\xi}\right) \\
&= m_3a\frac{\left(\phi_p(\eta)\right)^{q-1}(1-\sigma)^{\beta(q-1)}\sigma^{\alpha}(1-\xi)+\xi(1-\sigma)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}\left(\Gamma(\beta+1)\right)^{q-1}(1-\xi)}
\end{aligned}
$$

(3.18) implique que

$$T^{*}x(t)\geq a$$

et par suite
$$Tx(t) \geq a$$
ce qui implique que $\omega(Tx) > a$ pour tout $x \in P(\omega, a, c)$.Par conséquent, la condition (iii) du théoreme (1.5) est satisfaite.
Conclusion: toutes les conditions du théoreme (1.5) sont satisfaites, le probléme (3.1) admet alors au moins trois solutions positives. ■

3.4 Exemples

Exemple 3.4.1 *: nous présentons un exemple où les conditions du théorème* (3.1) *se trouvent vérifiées.*
Considérons le problème suivant
$$\begin{cases} D_{0^+}^{\frac{1}{2}}\phi_{\frac{3}{2}}\left(D_{0^+}^{\frac{2}{3}}x(t)\right) = \frac{(1+t^2)\sqrt{x(t)}}{20}, \ t \in [0,1] \\ x(0) = \frac{1}{2}x(1), \ D_{0^+}^{\frac{2}{3}}x(0) = \frac{1}{2}D_{0^+}^{\frac{2}{3}}x(1) \end{cases} \tag{3.28}$$
avec $p = \frac{3}{2}, q = 3, \alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{2}, \xi = \frac{1}{2}, \eta = \frac{1}{2}$ *et*
$$f(t, x(t)) = \frac{(1+t^2)\sqrt{x(t)}}{20}$$
Nous avons alors,
$$\begin{aligned} & (1-\xi)\,\Gamma(\alpha+1)\left(1-\phi_p(\eta)\right)^{q-1}(\Gamma(\beta+1))^{q-1} \\ = \ & \left(1-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}+1\right)\left(1-\phi_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\right)^2 \\ = \ & \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\Gamma\left(\frac{2}{3}+1\right)\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\right)^2 \\ = \ & \frac{1}{2}(1-0.7071)^2\,\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \end{aligned}$$
Sachant que $\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 1.3541$ *et* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ *on obtient*
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1-0.7071)^2\,\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 &= \frac{0.0857}{3} \times 1.3541 \times \frac{\pi}{4} \\ &\approx 0.0301 \end{aligned}$$
posons donc $m_1 = \frac{1}{100} < 0.0301$
Alors on peut voir que pour tout $(t, x) \in [0,1] \times (0, +\infty)$,
$$f(t,x) = \frac{(1+t^2)\sqrt{x}}{20} \leq \frac{2\sqrt{x}}{20} = \frac{\sqrt{x}}{10}$$

et,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}}{10} &= \sqrt{\frac{x}{100}} = \left(\frac{1}{100}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (m_1x)^{\frac{3}{2}-1} = (m_1x)^{p-1}\end{aligned}$$

ce qui entraine

$$f(t,x) \leq (m_1x)^{p-1}$$

les hypothéses du théoréme (3.1) *sont vérifiées alors le problème* (3.28) *n'admet pas de solution positive.*

Exemple 3.4.2 *:l' exemple suivant vérifie les conditions du théorème* (3.2) *,*

$$\left\{\begin{array}{c} D^{\beta}_{0^+}\phi_2\left(D^{\alpha}_{0^+}x(t)\right) = (1+t^2)\sqrt[4]{x(t)}; t \in [0,1] \\ x(0) = \xi x(1),\ D^{\alpha}_{0^+}x(0) = \eta D^{\alpha}_{0^+}x(1) \end{array}\right. \tag{3.29}$$

où $0 < \alpha, \beta \leq 1, 1 < \alpha + \beta \leq 2$ *et* $0 < \xi, \eta > 1$ *sont arbitraires*
posons $\theta = \frac{1}{4}$*,alors pour tout* $(t,x) \in [0,1] \times (0+\infty)$ *et pour tout* $0 < k < 1$

$$\begin{aligned} f(t,kx) &= \left(1+t^2\right)\sqrt[4]{kx} \\ &= \left(1+t^2\right)(kx)^{\frac{1}{4}} \\ &= k^{\frac{1}{4}}\left(1+t^2\right)\sqrt[4]{x} \\ &= k^{\frac{1}{4}}f(t,x) \end{aligned}$$

par le théoréme (3.2) *le problème* (3.29) *admet une unique solution positive*

Exemple 3.4.3 *: nous présentons un exemple où les conditions du théorème* (3.3) *se trouvent vérifiées.*
Soit

$$\left\{\begin{array}{c} D^{\frac{2}{3}}_{0^+}\phi_3\left(D^{\frac{1}{2}}_{0^+}x(t)\right) = f(t,x(t)),\ \textit{pour } t \in [0,1] \\ x(0) = \frac{1}{3}x(1),\ D^{\frac{1}{2}}_{0^+}x(0) = \frac{3}{4}D^{\frac{1}{2}}_{0^+}x(1) \end{array}\right. \tag{3.30}$$

C.à.d , $p = 3, q = \frac{3}{2}, \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{2}{3}, \xi = \frac{1}{3}, \eta = \frac{3}{4}$ *.*
avec,

$$f(t,x) = \left(1+t^2\right)\left\{\begin{array}{ll} \frac{x^2}{40} & (t,x) \in [0,1] \times \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ \frac{1599}{80}x - \frac{799}{80} & (t,x) \in [0,1] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right), \\ 10 & (t,x) \in [0,1] \times [1, +\infty). \end{array}\right.$$

Les constantes du théorème sont alors:
$a = 1, c = 50, \sigma = 0, m_2 = \frac{1}{5}, m_3 = 2$ *et* $m_4 = \frac{1}{20}$,

Nous avons bien

$$a < \left(\phi_p(\eta)\right)^{q-1}(1-\sigma)^{\beta(q-1)}\left[(1-\xi)\sigma^\alpha + \xi(1-\sigma)^\alpha\right]c$$

en effet,

$$\begin{aligned} 1 &< \left(\phi_3(\frac{3}{4})\right)^{\frac{1}{2}}(1)^{\frac{2}{3}\frac{1}{2}}(1-\frac{1}{3})0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}(1-0)^{\frac{1}{2}}50 \\ 1 &< \frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times 50 \\ 1 &< \frac{50}{4} + 12.5 \end{aligned}$$

a.*vérifions l'hypothése (H1)*

$$\begin{aligned} & (1-\xi)\Gamma(\alpha+1)(\Gamma(\beta+1))^{q-1}(1-\phi_p(\eta))^{q-1} \\ =\; & (1-\frac{1}{3})\Gamma(\frac{1}{2}+1)(\Gamma(\frac{2}{3}+1))^{\frac{1}{2}}(1-\phi_3(\frac{3}{4}))^{\frac{1}{2}} \\ =\; & \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{\frac{2}{3}\Gamma(\frac{2}{3})}\sqrt{\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)} \end{aligned}$$

sachant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \Gamma(\frac{2}{3}) = 1.3541$ *on obtient*

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{\frac{2}{3}\Gamma(\frac{2}{3})}\sqrt{\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)} &= \frac{\sqrt{\pi}}{3}\sqrt{\frac{2}{3}1.3541}\sqrt{(1-0.5625)} \\ &= 0.5908\times\sqrt{0.9027}\times\sqrt{0.4375} \\ &= 0.5908\times 0.9501\times 0.6614 \\ &\approx 0.3712 \end{aligned}$$

d'où $m_2 = \frac{1}{5} = 0.2 \leq 0.3712$

$$\begin{aligned} (m_2 c)^{p-1} &= \left(\frac{50}{5}\right)^2 \\ &= 10^2 = 100 \end{aligned}$$

pour tout $(t,x) \in [0,1]\times[0,50]$
on distingue 3 cas
1.*pour tout* $(t,x) \in [0,1]\times[0,\frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \left(1+t^2\right)\frac{x^2}{40} \\ &< 2\frac{\frac{1}{4}}{40} = \frac{1}{80} = 0.0125 \end{aligned}$$

Alors

$$f(t,x) \leq (m_2c)^{p-1}$$

2.*pour tout* $(t,x) \in [0,1] \times [\frac{1}{2},1)$

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \left(1+t^2\right)\left(\frac{1599}{80}x - \frac{799}{80}\right) \\ &< 2\left(\frac{1599}{80} - \frac{799}{80}\right) = 20 \end{aligned}$$

Alors

$$f(t,x) \leq (m_2c)^{p-1}$$

3.*pour tout* $(t,x) \in [0,1] \times [1,50]$

$$\begin{aligned} f(t,x) &= 10\left(1+t^2\right) \\ &\leq 20 \end{aligned}$$

Alors

$$f(t,x) \leq (m_2c)^{p-1}$$

b.*vérifions l'hypothése (H2)*

$m_3 = 2 < 18.56 = \frac{m_2c}{a}$

$$(m_3a)^{p-1} = 2^2 = 4$$

pour tout $(t,x) \in [0,1] \times [1,50]$ *on a*

$$f(t,x) = 10$$

ce qui entraine

$$f(t,x) > (m_3a)^{p-1}$$

c.*vérifions l'hypothése (H3)*

$$\begin{aligned} & (1-\xi)^{p-1}(\Gamma(\alpha+1))^{p-1}\Gamma(\beta+1)(1-\phi_p(\eta)) \\ = \ & \left(1-\frac{1}{3}\right)^2\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\right)^2\Gamma\left(\frac{2}{3}+1\right)\left(1-\phi_3(\frac{3}{4})\right) \\ = \ & \frac{4}{9}\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{2}{3} \times 1.3541\left(1-\frac{9}{16}\right) \\ \approx \ & 0.1378 \end{aligned}$$

d'où

$$0 < m_4 < (1-\xi)^{p-1}(\Gamma(\alpha+1))^{p-1}\Gamma(\beta+1)(1-\phi_p(\eta))$$

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \sup\limits_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x^{p-1}} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \sup\limits_{t\in[0,1]} 2\frac{\frac{x^2}{40}}{x^2} = \frac{1}{20} = m_4$

les hypothèses du théorème (3.3) *se trouvent vérifiées le problème* (3.30) *admet alors au moins trois solutions positives.*

Toutes les conditions du théorème (3.3) *se trouvent vérifiées ;le problème* (3.30) *admet au moins trois solutions positives.*

Conclusion Générale

Une étude de la solvabilité de certains problèmes aux limites associés à des équations differentielles fractionnaires faisant intervenir l'opérateur p-Laplacien a été présentée dans ce Mémoire. Nous avons été essentiellement concernées par l'étude de l' existence et la multiplicité de solutions pour deux types de problèmes aux limites à deux points.
Les résultats ont été établis par applications de théorèmes de points fixes.Des exemples d'application sont présentés à la fin des chapitres 2 et 3.

Bibliographie

[1] N.,Sabatier J., Briat O., VinassaJ M., Fractional non-linear modelling of ultracapacitors, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Elsevier, Volume 15, Issue 5, pp. 1327-1337, May 2010.

[2] Brezis H., Analyse fonctionnelle - Théorie et applications, Masson, Paris,1983.

[3] Bonsall F.F., Lectures on some fixed point theorems of functional analysis, Bombay, 1962, Appendix.

[4] Cauty R., « Solution du problème de point fixe de Schauder », dans Fund. Math., vol. 170, 2001, p. 231-246.

[5] Cao H., Deng Z., Li X., Yang J., Qin Y., Dynamic modeling of electrical characteristics of solid oxide fuel cells using fractional derivatives; International Journal of Hydrogen Energy, Volume 35, Issue 4, pp.1749-1758, February 2010.

[6] Caponetto R., Dongola G., Fortuna L., Graziani S., Strazzeri S., A Fractional Model for IPMC Actuators, IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceedings, IMTC 2008, pp. 2103-2107, 12-15 May 2008.

[7] ChenT., Liu W., An anti-periodic boundaryvalue problem for the fractional differential equation with a p-Laplacian operator, Applied Mathematics Letters, vol. 25, pp. 1671–1675, 2012.

[8] Craiem D., Armentaro O., R.L., Arterial viscoelasticity: a fractional derivative model, 28th Annual International Conference of the IEEE on Engineering in Medicine and Biology Society, EMBS 06, pp. 1098-1101, August 30 2006-September 3 2006.

[9] Doye I., Zasadzinski M., Radhy N., Bouaziz E.A., Robust Controller Design for Linear Fractional-Order Systems with Nonlinear Time-Varying Model Uncertainties, 17th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED ’09, pp. 821-826, Thessaloniki, 24-26 June 2009.

[10] Gorenflo R., Mainardi F., Fractional Calculus Integral and Differential Equations of Fractional Order, Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer Verlag, pp. 223 – 276, Wien and New York 1997.

[11] Guo D. J., Lakshmikantham V., Nonlinear problems in abstract cones, Academic Press, Boston,MA, 1988.

[12] Han Z., Lu H., Sun S and Yang D., "Positive solutions to boundary-value problems of p-Laplacian fractional differential equations with a parameter in the boundary," Electronic Journal of Differential Equations, vol. 2012, no. 213, pp. 1–14, 2012.

[13] Henderson J., Wang H., Positive solutions for nonlinear eigenvalue problems, J. Math. Anal.Appl. 208 (1997) 252–259.

[14] Heymans N., Podlubny I., Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives. Rheol. Acta,45(5), (2006),765-771.

[15] Ianescu C.M., De Kayser R., Time Domain Validation of a Fractional Order Model for Human Respiratory System, The 14th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference, MELECON 2008, pp. 89-95, Ajaccio, 5-7 May 2008.

[16] Kilbas A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations,Elsevier, Amsterdam, 2006.

[17] Kong X. and Li H., Positive Solutions to a Fractional-Order Two-Point BoundaryValue Problem with p-Laplacian Operator, Mathematical Analysis, Volume 2013.

[18] Krasnoselskii M.A., Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations, Cambridge University Press, NewYork, 1964.

[19] Kulish V.V., Chan W.K., Fractional Model of Market Behavior: a New Modeling Approach, International Conference on Cyberworlds, pp. 289-296, 23-25 November 2005.

[20] Kumlin P., A Note on Fixed Point Theory, TMA 401/MAN 670 FunctionalAnalysis 2003/2004, Mathematics, Chalmers & GU.

[21] Lakshmikantham V., Theory of fractional functional differential equations, Nonlinear Anal. TMA, 69(10), 15, (2008), 3337-3343.

[22] Lan K., Webb J.R.L, Positive solutions of some three-point boundary value problems via fixed point theory, Nonlinear Anal. 47 (2001) 4319–4332.

[23] Leggett R.W and Williams L.R., Multiple positive fixed points of non-linear operators on ordered Banach spaces, Indiana Univ. Math. J. 28(1979), no. 4, 673–688.

[24] Leibenson L.S., General problem of the movement of a compressible fluid in a porous medium, Izvestiya Akademii Nauk Kirgizskoi SSR, vol. 9, pp. 7–10, 1983.

[25] Liu W., Jia M and Xiang X., "On the solvability of a fractional differential equation model involving the p-Laplacian operator", Computers and Mathematics with Applications, vol. 64, no. 10, pp. 3267–3275, 2012.

[26] Lu H and Han Z., Existence of positive solutions for boundary-value problem of fractional differential equation with p-laplacian operator, American Journal of Engineering and Technology Research, vol. 11, pp. 3757–3764, 2011.

[27] Ma R., Positive solutions of a nonlinear three-point boundary-value problems, Electron.Journal of Different. Equat. 34 (1999) 1–8.

[28] Mahto L., Abbas S., Favini A., Analysis of Caputo impulsive fractional order differential equations with applications,Int. J. Diff. Equs,(2013), Article ID 704547, 11 pages.

[29] Martinez R., Bolea Y., Grau A., Martinez H., Fractional DC/DC converter in solar-powered electrical generation systems, IEEE Conference on Emerging Technologies & Factory Automation, ETFA 2009, pp. 1-6, 22-25 September 2009.

[30] Ostalczyk P.,The non-integer difference of the discrete-time function and its application to the control system synthesis, International Journal of Systems Science, Volume 31, Issue 12, pp. 1551-1561, December 2000.

[31] Oustaloup A., La commande CRONE, Hermès science publications, Paris, 1991.

[32] O'Regan D., Lv H., and Zhang C., "Multiple positive solutions for the one dimensional singular p-Laplacian," Applied Mathematics and Computation, vol. 133, pp. 407–422, 2002.

[33] Ozdemir N., Karadeniz D., Iskender B.B., Fractional optimal control problem of a dis-tributed system in cylendercal coordinates, Physics Letter A, 373(2), (2009), 221-226.

[34] Podlubny I., Fractional Differential Equations. Academic Press, London, 1999.

[35] Racewicz S., Riu D., Retière N., Chrzan P.J., Non linear half-order modeling of synchronous machine, IEMDC 2009, Miami, Florida,pp. 778-783, 3-6 May 2009.

[36] Smart D.R., Fixed PointTheorems, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[37] Schaeffer H., Uber die Methode dera priori-Schranken, Math. Ann.129 , pp.415-416, 1955.

[38] Schwartz., Analyse I, Théorie des ensembles et Topologie, page 346.

[39] Wang Y and Hou C., "Existence of multiple positive solutions for one-dimensional p-Laplacian", Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 315, no. 1, pp. 144–153, 2006.

[40] Wang J and Xiang H., "Upper and lower solutions method for a class of singular fractioal boundary-value problems with p-laplacian operator", Abstract and Applied Analysis, vol. 2010, Article ID 971824, 12 pages, 2010.

[41] Xu M.Y., Liu J.G., Study on the Viscoelasticity of Cancellous Bone Based on Higher-Order Fractional Models, The 2nd International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering, ICBBE 2008, pp. 1733-1736, 16-18 May 2008.

[42] Zeidler E., Nonlinear functional analysis and its applications, I.Fixed-point theorems, Springer-Verlag, Berlin,1993.

[43] Zhao C., Zhao Y., Liu Y., Li Y., Luo L., Fractional Personnel Losing Modeling Approach and Application, International Conference on Computational Intelligence and Software Engineering, CiSE 2009, pp. 1-4, 11-13 December 2009.

Résumé

Dans ce mémoire nous avons présenté quelques résultats d'existence et de multiplicité de solutions pour des problèmes aux limites à deux points associés à des équations différentielles d'ordre fractionnaire faisant intervenir l'opérateur p-Laplacien.
Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe, en particulier le théorème de point fixe de Schaefer et le théorème de point fixe de Leggett Williams.

Abstract

In this paper, we have presented some results of existence and multiplicity of solutions for two-point boundary problems associated with differential equations of fractional order involving the p-Laplacian operator.
These results were obtained by the application of the fixed point theory, in particular the Schaefer fixed point theorem and Leggett Williams' fixed point theorem.