République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID DE TLEMCEN
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE
De MASTER
OPTION : Probabilités et Statistiques

Estimation d'un retard d'une équation différentielle stochastique

Soutenu le 27 septembre 2017 devant le jury:

Président	Prof. T.Mourid. .
Examinateur	doc. F.Boukhari.
Examinateur	doc. M.Dali.
Encadreur	doc. M.Benyahia.

Présenté par : **Sara HOUBAD**.

Année académique: 2017-2018

Remerciements

Je remercie Allah tout puissant qui nous aide et nous donne la patience, le courage et la volonté pour accomplir ce modeste travail.Je souhaiterais adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide.

Ces remerciements vont tout d'abord au corps professoral et administratif de la faculté de sience pour la richesse et la qualité des enseignements et aux professeurs qui font de grands efforts pour assurer à leur étudiants une formation actualisée.

Je remercie mon encadreure Madame W.BENYAHYA pour ses conseils précieux qui m'ont été énormément utiles ainsi que pour le soutient constant et bienveillant qu'elle m'a apporté.

J'en profite pour remercier avec tous mes sentiments de respect et de gratitude mes enseignants et particulièrement l'équipe de Probabilité-Statistiques qui ont été à la hauteur de leur tache et je leur en suis reconnaissante.

Tout le respect et mes vifs remerciements vont aussi aux membre du jury : M.T.Mourid, M. F.Boukhari, Mme.Dali.

Je remercie également toutes mes amies qui m'ont aidé, et qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, sans oublier mes camarades de parcours qui sont la source de la bonne ambiance et humeur et de la complicité qui ont régné pendant ces années.

Merci enfin à mes parents, mes sœurs, mon frère,et un merci spécial à ma tante pour son soutient qui n'a jamais cessé .

Table des Matières

Introduction

Dans ce travail, nous avons étudié un cas particulier déjà traité dans la thèse de doctorat de Madame W.BENYAHYA (voir [1]).

Nous étudions une classe de processus de diffusion à temps continu $X = (X_t, t \geq 0)$ solutions d'équations differentielles stochastiques où la dérive est une fonctionnelle de la trajectoire définie sur un passé de longueur finie. La dérive est définie par une mesure impliquant des retards. Plus précisement, nous considérons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{aligned} dX_t &= \left(\int_{\delta}^{1} X_{t-s} d\mu(s) \right) dt + \varepsilon dW(t) \qquad && t \in [\delta, T] \\ X_s &= x_0, && -1 \leq s \leq \delta \end{aligned} \tag{1}$$

où μ est une mesure positive de support $[\delta, 1]$ appellée mesure des retards et le coefficient de diffusion, $\varepsilon \in \,]0, 1]$ est supposé connu et $(W_t\ )$ est un processus de Wiener standard. Si la mesure μ est discrète nous retrouvons les équations differentielles stochastiques avec retards classiques.

Notre travail porte sur l'inférence statistique sur la dérive S (drift) définie par

$$S(t, \mu, X) = \int_{\delta}^{1} X_{t-s} d\mu(s)$$

plus particulièrement sur la mesure des retards μ à partir de l'observation d'une trajectoire complète $(X(t), t \in \ [\delta, T])$ et dans le cadre des petites diffusions $\varepsilon \to 0$.

Ce travail est composé de trois chapitres que nous résumons brièvement.

Dans le chapitre 1 donnons des rappels de base concernant les processus stochastiques ainsi que des résultats importants et des propriétés du mouvement brownien. nous rappelons égalment la notion de l'intégrale stochastique pour pouvoir définir une équation différentielle stochastique.

Dans le chapitre 2 nous considérons l'estimation de la densité de la mesure des retards dans un processus de type diffusion en estimant la coefficient dans un système de fonctions par la méthode du maximum de vraisemblance dans l'asymptotique des petites diffusions. Nous vérifions la convergence, la normalité asymptotique et l'efficacité de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Dans le chapitre 3 Nous donnons des simulations numériques de l'estimateur de maximum de vraisemblance.

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Généralité sur les processus stochastiques

1.1.1 Introduction

L'origine des processus stochastiques remonte aux progrès faits au début du XXe siècle dans certaines branches appliquées telles que la mécanique statistique (par Gibbs, Boltzmann, Poincaré, Smoluchowski et Langevin). Les bases théoriques ont été formulées plus tard (1930-1940). C'est durant cette période que le mot "stochastique", qui provient du grec stokhastikos "conjectural", a commencé à etre employé.

1.1.2 Définition des processus stochastiques

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et $\mathbb{T}$ un ensemble d'indices ($\mathbb{T} = [a, b]$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}^{+}$) .Un processus stochastique $X(t, \omega)$ à valeurs dans un espace mesurable (E, ε) est une application de $\mathbb{T}\times\Omega$ dans E est mesurable par rapport à la mesure du produit $\lambda.P$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$,Il est noté indifféremment $X(t, \omega)$ où $X_t(\omega)$. La fonction $t \longrightarrow X(t, \omega)$ est appelée trajectoire ou réalisation de X_t , à t fixé, la fonction $t \longrightarrow X(t, \omega)$ appelée une variable aléatoire . $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si X_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable. Le théorème de Kolmogorov assure l'existence des processus stochastiques. $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ est un processus centré si son espérance est nulle $\mathbb{E}(X_t) = 0$.

Si X_t est dans L^2 i.e. $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$.

La fonction moyenne du processus

$$m(t) = \mathbb{E}(X_t) = \int_\Omega X_t(\omega)\, dP(\omega)$$

La variance

$$\sigma^2(t) = \mathbb{E}\left[|X_t - \mathbb{E}(X_t)|^2\right]$$

La fonction de covariance

$$\Gamma(s,t) = \mathbb{E}(X_t X_s) - \mathbb{E}(X_t)\,\mathbb{E}(X_s)$$

La régularité des trajectoires est déterminée par le théorème de Kolmogorov.

Définition 1.1 *une filtration est une famille coissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $t \leq s$. La tribu $\mathcal{F}_t$ est une description mathématique de toute l'information dont on dispose à l'instant t.*

Définition 1.2 *Un processus $\{X_t, t \geq 0\}$ est dit adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ si pour chaque t, X_t est $\mathcal{F}_t-$ mesurable. Un processus adapté est celui pour lequel une description probabiliste est réalisable.*

1.1.3 Processus stochastiques particuliers

Définition 1.3 *Un processus est dit strictement stationnaire si pour tout entier n,tous réeles $t_1, t_2, ..., t_n$, et tous $h >$ 0 les vecteurs aléatoires $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ et $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, ..., X_{t_n+h})$ ont la même loi .*

Définition 1.4 *Un processus X_t est dit stationnaire (où faiblement stationnaire)si :*

1-son éspérance $\mathbb{E}(X_t)$ est une constante indépendante du temps. t.

2-sa fonction de corrélation $R(s,t)$ ne dépend que de la différence $\tau = t - s$.

3-$R(\tau)$ est continue (à l'origine).

Définition 1.5 *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus stochastique. Il est gaussien si toutes ses lois fini-dimensionnelles $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ sont gaussiennes ($\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_1, ..., t_n \in \mathbb{T}$). Un processus* *gaussien est entièrement déterminé par la donnée de sa valeur moyenne $m(t)$ et de sa fonction de corrélation $R(s,t)$.*

1.2 Mouvement Brownien

1.2.1 Introduction

Le mouvement brownien est à la fois un phénoméne naturel, et un objet mathématique. Le phénoméne naturel est le mouvement désordonné de particules en suspension dans un liquide. Il en résulte un mouvement très irrégulier de la grosse particule, qui a été décrit pour la première fois en 1827 par le biologiste Robert Brown alors quil observait du pollen de Clarkia pulchella (une espèce de fleur sauvage nordaméricaine), puis de diverses autres plantes, en suspension dans l'eau. La description physique la plus élémentaire du phénomène est la suivante:

1. Entre deux chocs, la grosse particule se déplace en ligne droite avec une vitesse constante.
2. La grosse particule est accélérée lorsqu'elle rencontre une molécule de fluide ou une paroi.

1.2.2 Construction d'un mouvement Brownien

Ce processus de diffusion peut être construit par différentes approches. Les définitions les plus usuelles du mouvement brownien sont les suivantes.

- Construction par un processus gaussien
- Construction par une limite d'une marche aléatoire
- Construction par le développement de Karhunen-Loève (D.K.L)

et celle la plus utilisée :

Construction par un processus gaussien

Un processus stochastique $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien ou un processus de Wiener si $W_0 = 0$ (on dit que W_t est issu de 0) et si pour tous réels $0 < t_1 < t_2 <\cdots< t_n$, les variables aléatoires $W_{t_1} - W_{t_0}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sont indépendants et suivent une distribution gaussienne telle que $\forall h > 0$

$$\mathbb{E}\left(W_{t+h} - W_t\right) = 0 \text{ et } \mathbb{E}\left(W_{t+h} - W_t\right)^2 = h$$

On dit que le mouvement brownien est standard si m=0 et $\sigma = 1$ et le vecteur $(W_{t_0}, W_{t_1}, ..., W_{t_n})$ est un vecteur gaussien donc le processus $(W_t)_{t\geq 0}$ suit une loi gaussienne de moyenne m_t et de variance σ_t.

On peut facilement simuler une trajectoire de mouvement brownien dans un intervalle de temps $[0, T]$, il suffit pour cela de posée un pas de temps $\Delta t > 0$ et d'écrire

$$W_{\Delta t} = W_{\Delta t} - W_0 \rightsquigarrow N(0, \Delta t) \rightsquigarrow \sqrt{\Delta t} N(0, 1)$$

Les accroissements $\left(W_{n\Delta t} - W_{(n-1)\Delta t}\right)$, avec $0 \leq n \leq N$ et $N > 0$,étant indépendants et gaussiens, il suffit donc de simuler une loi gaussienne

$$W_{t+\Delta t} - W_t \rightsquigarrow N(0, \Delta t) \rightsquigarrow \sqrt{\Delta t} N(0, 1)$$

Nous pouvons aussi simuler facilement une seule trajectoire brownienne de la façon suivante .Considérons la subdivision de l'intervalle de temps $[0, T]$ suivante $0 = t_1 < t_2 <\cdots< t_N < t_{N+1} = T$ avec $t_{i+1} - t_i = \Delta t$, pour $i = 1$ on a $W_0 = W_{t_1} = 0$. On donne l'algorithme suivant:

1. Générée une nouveau variable aléatoire Z de la distribution gaussienne $N(0, 1)$.
2. $i = i + 1$.
3. $W_{t_i} = W_{t_{i-1}} + Z\sqrt{\Delta t}$.
4. si $i \leq N + 1$, réitérez a l'étape 1.

La fonction BMN permet de simuler un mouvement brownien standard $\{W_t, t \geq 0\}$ dans l'intervalle du temps $[t_0, T]$ avec un pas $\Delta t = (T - t_0)/N$

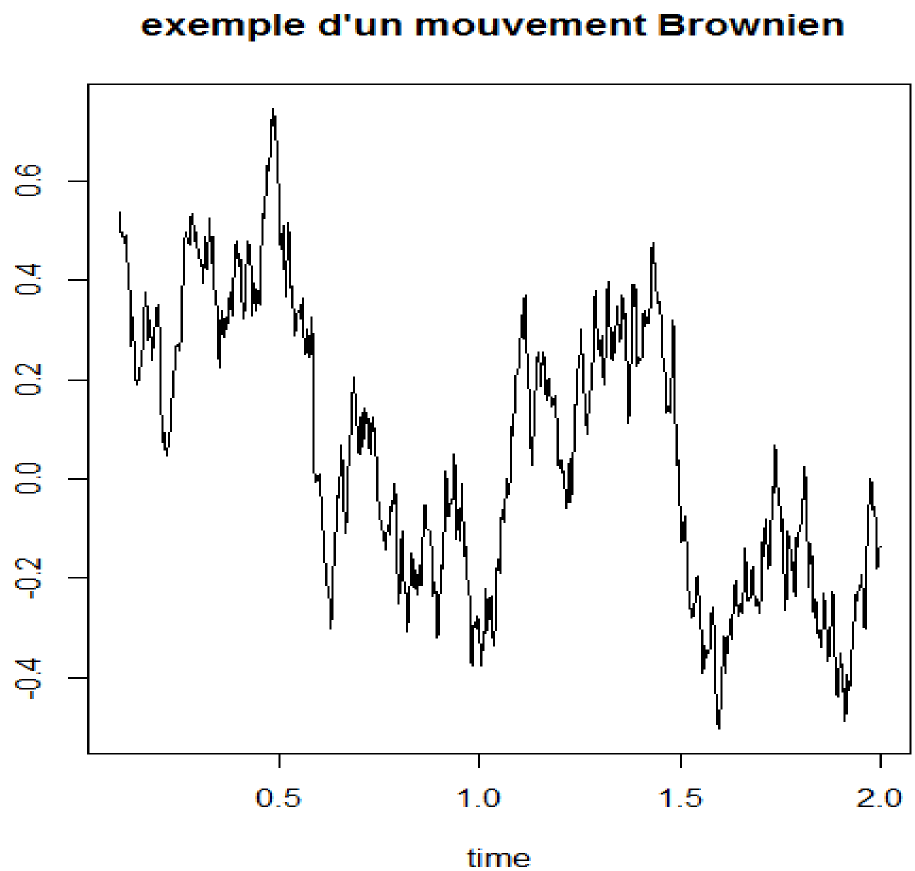

Figure 1.1 Trajectoire brownienne simulée a partir d'une distribution gaussienne

1.2.3 Continuité des trajectoires

Par définition, on dit qu'un processus aléatoire $\{X_t, t \geq 0\}$ est continu si

$$\lim_{h \longrightarrow 0} |X_{t+h} - X_t| = 0$$

Selon le type de convergence de cette variable aléatoire, on obtient une continuité plus ou moins forte.

Propriété 1.1 *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* $\{W_t, t \geq 0\}$ *un mouvement brownien standard .On a*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}\left(|W_{t+h} - W_t| > \varepsilon\right) = 0$$

Le mouvement brownien a de nombreuse propriétés dont certaines peuvent être prise comme définition.

Définition 1.6 *Un mouvement brownien (standard) réel est un processus gaussien centré* $(W_t)_{t \geq 0}$ *à trajectoires continues de fonction de covariance*

$$K(s,t) = \min(s,t) = s \wedge t.$$

Soit $W = (W_t)_{t \geq 0}$ *une famille de variables sléatoires indéxées par le temps. on dit que* W *est un mouvement brownien si c'est un procssus à trajectoires continues tel que*

1. *pour* $t \geq 0$ *:* $W_t \rightsquigarrow N(0,t)$.
2. *pour tout* $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ *, les variables aléatoires* $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes .*

Définition 1.7 *Le mouvement Brownien est une martingale soit* $(W_t)_{t \geq 0}$ *un mouvement Brownien alors*

- W_t *est une martingale continu à temps continus.*
  - $W_t^2 - t$ *est une martingale*
  - *pour tout réel* α *,*$\exp(\alpha W_t - \frac{\alpha^2}{2} t)$ *est une martingale .*

1.2.4 Propriétés en loi du mouvement brownien

Propriété 1.2 *La densité de* $\Delta W = \left(W_{t_1} - W_{t_0}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}\right)$ *est donée par*

$$f_{\Delta W}(x_1, ..., x_n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi (t_j - t_{j-1})}} \exp\left(\frac{-x_j^2}{2\left((t_j - t_{j-1})\right)}\right).$$

Propriété 1.3 *la densité* $W = (W_{t_1}, ..., W_{t_n})$ *est*

$$f_W(x_1, ..., x_n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi (t_j - t_{j-1})}} \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{-(x_j - x_{j-1})^2}{2((t_j - t_{j-1}))} \right).$$

Proposition 1 *Soit* W_t *un mouvement browien standard. On a presque surment ,*

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} \sup \frac{W_t}{\sqrt{t}} &= +\infty \text{ , } \lim_{t\to 0} \sup \frac{W_t}{\sqrt{t}} = +\infty \\ \lim_{t\to+\infty} \inf \frac{W_t}{\sqrt{t}} &= -\infty \text{ , } \lim_{t\to 0} \inf \frac{W_t}{\sqrt{t}} = -\infty \\ \lim_{t\to+\infty} \frac{W_t}{t} &= 0 \end{aligned}$$

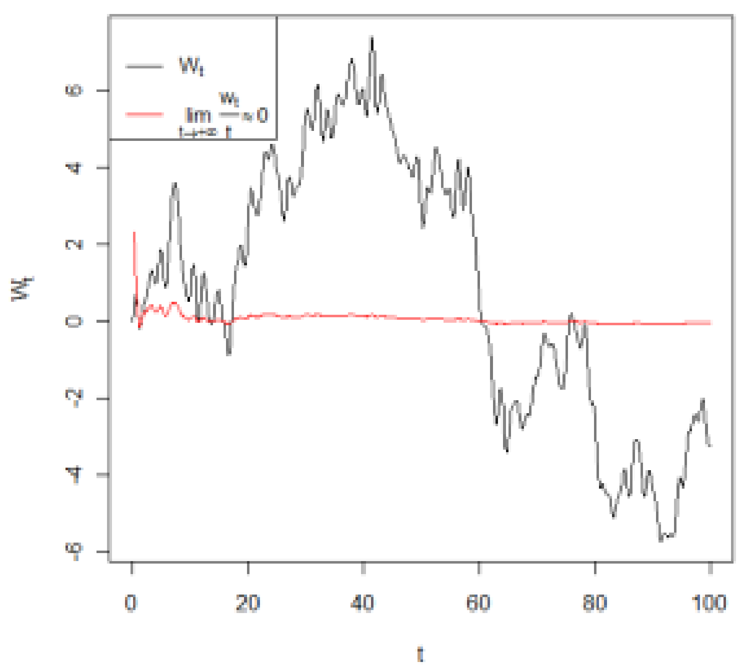

Figure1.2 *la limit de mouvement brownien standard par rapport au temps* $(cf, [5])$

Propriété 1.4 ***Si*** $(W_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement brownien, alors il en est de même pour les proces-*

sus suivants:

1. *Autosimilarité (propriété d"échelle). Pour* $c > 0, X_t = \dfrac{1}{\sqrt{c}} W_{ct}$ *est un mouvement brownien standard .*

2. *Inversion du temps. Le* X_t *défini par* $X_t = tW_{\frac{1}{t}}$ *si* $t \neq 0$ *et* $X_0 = 0$ *est un mouvement brownien standard .*

3. *Retournement du temps.Le processus retourné à l'instant T,* $X_t = W_T - W_{T-t}$ *est encore un mouvement brownien sur* $[0, T]$ *.*

1.3 Intégrales stochastiques

1.3.1 L'intégrale d'Itô

On considère une espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathcal{F}_t$, muni d'une suite de tribu croissantes pour l'inclusion . On appelle tribu des présisibles sur $\Omega \times [0, +\infty[$ la plus petite tribu rendant mesurable tous les processus continus adaptés à la filtration $\mathcal{F}_t$.. Un processus ou un ensemble est prévisibles s'il est mesurable par rapport à cette tribu.Supposons donné un processus de Wiener standard W_t , adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$ et tel que pour tout $0 \leq s \leq t$ l'accroissement $W_t(\omega) - W_s(\omega)$ soit indépendant de $\mathcal{F}_t$ .Sur un intervalle de temps $[0, t]$,on note $\mathbb{H}^2$ l'ensemble des processus $f_t(\omega)$ définis pour $t \in [0, t]$, $\mathcal{F}_t$−-mesurable et de carré intégrable presque sûrement . Dans ces conditions,si f dans $\mathbb{H}^2$ et si $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1} = t$ est subdivision de l'intervalle $[0, t]$, , alors f est indépendant des incréments $W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$, en d'autre termes f est prévisible. Pour toute fonction f de $\mathbb{H}^2$. On définit l'intégrale stochastique d'Itô comme la limite dans L^2 des accroissements ci-dessous (on notera que toutes les limites de cette section sont des limites quadratiques, i.e. dans L^2) .On définit ainsi l'intégrale stochastique comme la limite des sommes Riemann.

$$I_t(f) = \int_0^t f(t, \omega)\, dW(t, \omega) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} f(t_i, \omega) \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right)$$

Le but de l'intégrale stochastique est de donner un sens à des équations de la forme

$$\frac{dX_t}{dt} = b(X_t) + \sigma(X_t)\frac{dW_t}{dt} \tag{1.1}$$

Le problème est que, comme nous l'avons mentionné, les trajectoires du processus de Wiener ne sont pas différentiables, ni même à variations bornées.

Comme dans le cas des équations différentielles ordinaires, on interprete une solution de l'équation différentielle (1.1) comme une solution de l'équation intégrale

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s)\,dW_s.$$

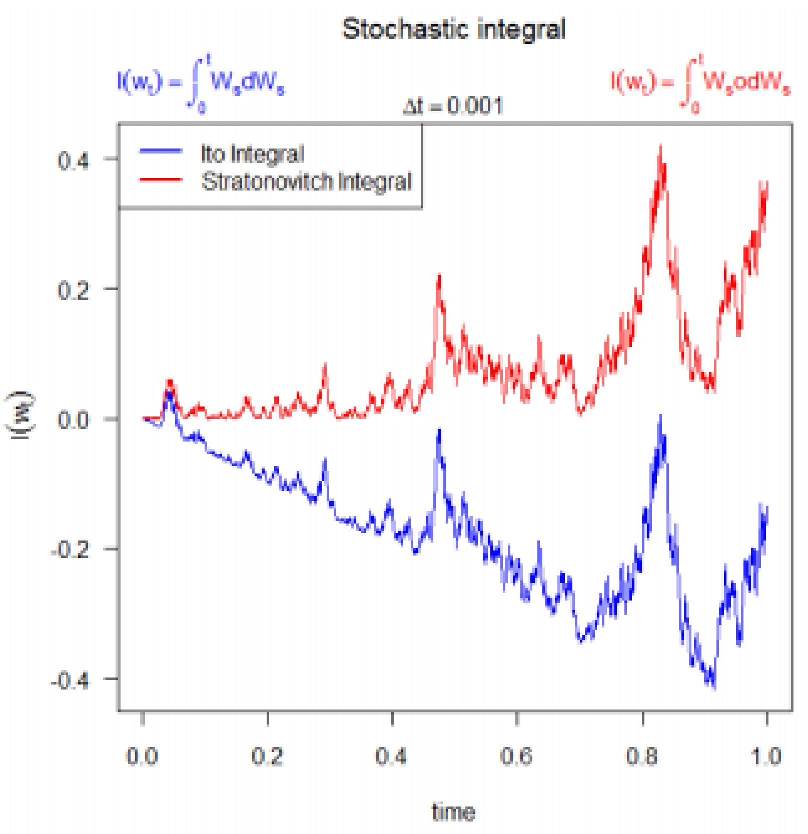

Figure 1.3 Simulation de lintégrale stochastique d'Itô $(cf, [5])$

On a de plus quelques propriétés complémentaires liées la dépendance aléatoire de f .

Propriété 1.5 *Pour tout f , $g \in \mathbb{H}^2$ et tout s,t tels que $0 < s < t$, on a*

- $t \longrightarrow I_t(f)$ *est à trajectoire continue P-p.s.*
- $I(f) = (I_t(f))_{t\geq 0}$ *est adapté à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.
- $\mathbb{E}(I_t(f)) = 0,$ *et* $Var(I_t(f)) = \mathbb{E}\left(\int_0^t f_s^2 ds\right)$.
- $\mathbb{E}\left((I_t(f) - I_s(f))^2 / \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t f_u^2 du / \mathcal{F}_s\right)$.
- $\mathbb{E}[I_t(f) I_s(g)] = \mathbb{E}\int_0^{t\wedge s} f_u g_u du.$
- $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} (I_{t-s}(f) - I_s(g))^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left(\int_s^{s+T} f_u^2 du\right)$
- ***Inégalité de Lenglart* :** *Pour tout $\delta > 0$ et $\gamma > 0$*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t f_s(\omega)\, dW_s\right| > \delta\right) \leq \frac{\gamma}{\delta^2} + \mathbb{P}\left(\|f(\omega)\|^2 > \gamma\right) \tag{1.2}$$

- *Si pour tout m≥ 1 on a* $\int_0^T \mathbb{E}|f_t|^{2m} dt < \infty,$ *alors*

$$\mathbb{E}(I_T(f))^{2m} \leq [m(2m-1)]^m T^{m-1}\int_0^T \mathbb{E}|f_t|^{2m} dt \tag{1.3}$$

- *Enfin on a*

$$\mathbb{E}\exp\left(\int_0^T f_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T f_t^2 dt\right) \leq 1 \tag{1.4}$$

Corollaire 1.1 • *Si pour tout $t \in [0,T]$ la somme* $\int_0^t \mathbb{E}\left(f_s^2\right) ds < \infty$ *alors l'intégrale stochastique $I_t(f)$ est une martingale .*

- ***Isométrie d Ito : si*** $\int_0^t \mathbb{E}\left(f_u^2\right) du < \infty$ *on a*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t f_s dW_s\right)^2\right] = \int_0^t \mathbb{E}\left(f_s^2\right) ds \tag{1.5}$$

- *D'aprés la définition le processus $I(f)$ est gaussien centré de covariance*

$$Cov\left(I_t(f), I_s(f)\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge s} f_u^2 du\right).$$

Supposons que pour tout $\varepsilon \in [0,1]$ et pour tout $\theta \in \Theta$, où Θ est non vide , on a le processus stochastique vectoriel $\left\{l_t^{(\varepsilon)}(\theta), 0 \leq t \leq T\right\} \in \mathbb{H}^2$,et notons par $|.|$ la norme matricielle . Le lemme suivant $(cf.[12])$ nous le théoreme central limite pour l'intégrale stochastique :

Lemme 1.1 *Si la convergence*

$$P - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T l_t^{(\varepsilon)}(\theta)\, l_t^{(\varepsilon)}(\theta)^T dt = \sigma(\theta)$$

où $0 < \sigma(\theta) < \infty$,est uniforme en $\theta \in \Theta$ alors l'intégrale stochastique $\int_0^T l_t^{(\varepsilon)}(\theta)\, dW_t$ *est uniformément asymptotiquement normale avec les paramètres $(0, \sigma(\theta))$.*

1.3.2 Processus d'Itô

On appelle processus d'Itô, un processus $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \ , \ t \in [0,T] \tag{1.6}$$

avec

1. b=$\{b_t, 0 \leq t \leq T\}$ et $\sigma = \{\sigma_t, 0 \leq t \leq T\}$ sont des processus adaptés à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.
2. $\mathbb{P}\left(\int_0^T |b_s|\, ds < \infty\right) = 1.$
3. $\mathbb{P}\left(\int_0^T |\sigma_s|^2\, ds < \infty\right) = 1.$

Ecrit sous sa forme différentielle, le processus d'Itô devient

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t. \tag{1.7}$$

1.3.3 Formule d'Itô

Soit le processus stochastique X vérifiant

$$X_{t_2} - X_{t_1} = \int_{t_1}^{t_2} b_s\left(X_s\right) ds + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_s\left(X_s\right) dW_s$$

on note sous forme différentielle

$$dX_t = b_t\left(X_t\right) dt + \sigma_t\left(X_t\right) dW_t$$

La formule d'Itô permet de déterminer de manière générale l'effet d'un changement de variables sur différentielle stochastique. Si $f\left(t, x\right)$ est une fonction de classe C^2 alors $Y_t = f\left(t, X_t\right)$ est aussi un processus d'Itô et il admet une intégrale stochastique par au meme processus de Wiener donnée par la formule d'Itô .

$$dY_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\left(t, X_t\right) + b_t \frac{\partial f}{\partial x}\left(t, X_t\right) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(t, X_t\right)\right) dt + \sigma_t \frac{\partial f}{\partial x}\left(t, X_t\right) dW_t.$$

1.4 Equations différentielles stochastiques

1.4.1 introduction et définitions

De manière informelle, on appelle équation différentielle stochastique une équation différentielle ordinaire perturbée par un terme stochastique. Plus précisément, c'est une équation du type suivant :

$$dX_t = b\,(t, X_t)\,dt + \sigma\,(t, X_t)\,dW_t, \qquad X_0 = x_0 \tag{1.8}$$

Dans cette équation, dW_t est la différentielle d'un mouvement brownien standard W_t, et b, σ sont les coefficients de l'équation (ce sont des fonctions de($\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), et $x_0 \in \mathbb{R}$ est la valeur initiale. Tous ces termes sont donnés. La notation (1.8) est la plus usuelle.

Définition 1.8 *Rechercher une solution de l'équation (1.8) consistera à rechercher un processus* $\{X_t, t \geq 0\}$ *satisfaisant l'équation intégrale :*

$$X_t = x_0 + \int_0^t b\,(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma\,(s, X_s)\,dW_s \tag{1.9}$$

où la seconde intégrale est une intégrale stochastique.

Définition 1.9 *Quand les coeficients* b *et* σ *ne dependent pas du temps et sont seulement des fonctions sur* $\mathbb{R}$*, on dit que l'équation est homogène.*

Le coefficient b est appelé le coefficient de dérive, tandis que σ est le coefficient de diffusion. Un processus qui résout l'équation (1.8) .

1.4.2 Existence et unicité des solutions d'une EDS

Soit T> 0, $b\,(t, x)$ une fonction mesurable de $[0, T]\ \times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\sigma\,(t, x)$ une fonction mesurable de $[0, T]\ \times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

1- Condition de croissance : il existe une constante C telle que

$$|b\,(t, x)| + \sigma\,(t, x) \leq C\,(1 + |x|)$$

2-Condition de Lipschitz : il existe une constante K telle que

$$|b\,(t,x) - b\,(t,y)| + |\sigma\,(t,x) - \sigma\,(t,y)| \leq K\,|x-y|$$

3-X_0 est une variable indépendante de la tribu $\sigma\,\{W_s, s \geq 0\}$ et $\mathbb{E}\,|X_0|^2 < \infty$

Alors l'équation différentielle stochastique d'Itô (1.8) admet une solution unique X_t dont presque toutes les réalisations sont continues et vérifiant $\mathbb{E}\left(\sup\limits_{t\in[0,T]} |X_t|^2\right) < \infty$.

Chapitre 2

Estimation de la densité des retards

2.1 Introduction et définition

Dans ce travail, nous considérons un processus de type diffusion $X^{\varepsilon} = (X_t^{\varepsilon}, t \in [-1, T])$ pour $\varepsilon \in]0, 1]$, défini sur un espace de probabilité complet $(\Omega, A, P, (\mathcal{F}_t))$ et solution de l'équation diffrentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t^{\varepsilon} = \left(\int_{\delta}^{1} X_{t-s}^{\varepsilon} \mu(ds)\right) dt + \varepsilon dW_t \quad , t \ [\delta, T] \\ X_s^{\varepsilon} = x_0 \qquad\qquad\qquad\qquad si \quad -1 \ \leq s \ < \delta \end{cases} \tag{2.1}$$

où

. $(W_t,\ t \in \mathbb{R}^+,\ (\mathcal{F}_t))$ est un processus de Wiener adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ qui est difinit sur l'espace $(\Omega, A, P, (\mathcal{F}_t))$.

.μ une mesure positive sur $[\delta, 1]$, $\delta > 0$.

.x_0 est une constante strictement positive .

Nous associons à (2.1) l'équation différentielle déterministe suivante:

$$\begin{cases} \dfrac{dX_t^0}{dt} = \displaystyle\int_{\delta}^{1} X_{t-s}^0 \ \mu(ds) \ , \ \ t \in [\delta, T] \\ X_s^0 = x_0 \qquad\qquad si \ -1 \leq s < \delta \end{cases} \tag{2.2}$$

pour ε petit l'équation (2.1) est considérée comme des petites perturbation de l'équation(2.2).Pour une mesure à variation finies ,l'équation (2.1) admet une solution unique presque sùrement .

Nous étudions dans ce chapitre le problème de l'éstimation de la mesure μ dans le cas où elle admet une densité par rapport la mesure de Lebesgue admettant le dévelopement suivant :

$$f(s) = \frac{d\mu}{ds}(s) = cg(s) \tag{2.3}$$

où $g(s)$ est une fonction comme défini dans $L^2([1,\delta])$ et c est le coefficient de f.

Notons par $\left(C_{[\delta,T]}, \mathcal{F}\right)$ l'éspace des fonctions réelles continue définies sur $[\delta, T]$, où $\mathcal{F} = \cup_{t\geq\delta}\mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ et $\mathbb{P}^\varepsilon$ la mesure induite dans $\left(C_{[\delta,T]}, \mathcal{F}\right)$ par les processus solutions de (2.1).

Notre objectif est l'estimation du paramètre $\theta = c \in \Theta =]0, D]$ où $D > 0$ à partir de l'observation d'une trajectoire complète $X^\varepsilon = (X_t^\varepsilon, t \in [\delta, T])$ de (2.1).Nous construisons les estimateurs du maximum de vraisemblance et nous étudions leurs propriétés asymtotiques quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. Nous utilisons la théorie générale de Ibragimov-Hasminski (cf.[7],[12]) pour montrer que la famille des lois $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ induites par les processus solutions de (2.1) vérifient la condition LAN (normalité asymptotique locale).

2.1.1 Estimateur du maximum de vraisemblance :

Pour $X^\varepsilon = (X_t^\varepsilon, t \in [\delta, T])$ une observation d'une trajectoire compléte de (2.1), l'éstimateur du maximum de vraisemlance $\hat{\theta}_\varepsilon$ est solution de

$$L\left(\hat{\theta}_\varepsilon, \theta_0, X\right) = \sup_{\theta\in\bar{\Theta}} L(\theta, \theta_0, X) \tag{2.4}$$

où $L(\theta_\varepsilon, \theta_0, X)$ désigne le rapport de vraisemblance qui est définit par :

$$L(\theta, \theta_0, X) = \frac{d\mathbb{P}_\theta^\varepsilon}{d\mathbb{P}_{\theta_0}^\varepsilon}(X^\varepsilon) \quad , \theta \in \Theta \tag{2.5}$$

avec θ_0 est une valeur fixée du paramètre θ et $\overline{\Theta}$ la ferméture de Θ dans $\mathbb{R}$, si (2.4) admet plusieurs solutions $\hat{\theta}_\varepsilon$désigne l'une d'entre elles.

2.1.2 Processus de rapport de vraisemblance :

Notons $Z_{\varepsilon,\theta}(u)$ le processus de rapport de vraisemblance calculé pour l'observation X^ε vérifiant (2.1):

$$Z_{\varepsilon,\theta}(u) := \frac{d\mathbb{P}_{\theta+\Phi_\varepsilon(\theta)u}}{d\mathbb{P}_\theta}(X^\varepsilon) \ , \quad u \in \mathbb{R}$$

où $\theta \in \Theta$.Les valeurs $\theta + \Phi_\varepsilon(\ \theta)\, u$ correspondent aux autres valeurs possibles du paramètre pour une normalisation adéquate Φ_ϵ qui est une fonction dans $\mathbb{R}$ telle que $\theta + \Phi_\varepsilon(\ \theta)\, u \in \Theta$.

Le processus $(Z_{\varepsilon,\theta}(u), u \in \mathbb{R})$ est défini seulement pour tout u tel que :

$$u \in \quad U_{\varepsilon,\theta} := \Phi_\varepsilon^{-1}(\Theta - \theta) \subset \mathbb{R}$$

2.1.3 Condition LAN :

Une notion de base qui joue un role crucial dans cette étude est la condition de normalité asymptotique locale de LeCam(LAN condition). On dit que la famille de lois($\mathbb{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in]0, D]$) vérife la condition LAN en un point $\theta_0 \in \Theta$ quand ε tend vers 0 si le rapport de vraisemblance admet, sous une normalisation adéquate $\Phi_\varepsilon(\ \theta_0)$,la représentation suivante :

$$Z_{\varepsilon,\theta}(u) = \exp\left\{u\Delta_\varepsilon(\theta_0, X^\varepsilon) - \frac{1}{2}u^2 + \Psi_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon)\right\}, \quad u \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

où Δ_ε et Ψ_ε sont des variables alèatoires vérfiant sous $\mathbb{P}_\theta^\varepsilon$:

$$\Delta_\varepsilon(\theta_0, X^\varepsilon) \Longrightarrow N(0,1)$$

en loi dans $\mathbb{R}$ quand ε tend vers 0 et

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \Psi_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon) = 0 \text{ en probabilité}$$

2.2 Notations et Hypothèses :

Nous considérons l'équation différentielle stochastique (2.1) dans le cas où la mesure admet une densité par rapport la mesure de Lebesgue de la forme (2.3). L'équation (2.1) se transforme en

$$\begin{cases} dX_t^{\varepsilon} = \left(c \ \int_{\delta}^{1} X_{t-s}^{\varepsilon} \ g\left(s\right) \ ds\right) dt + \varepsilon dW_t & si \ \ t \in [\delta, T] \\ X_s = x_0 & si \ \ -1 \leq s < \delta \end{cases} \tag{2.7}$$

Nous notons par $\theta = c$ le paramètre estimer appartenant l'espace paramétrique $\Theta =]0; D]$ où $D > 0$ et $\mathbb{P}_{\theta}^{\varepsilon}$ désigne la loi du processus de type diffusion $(X_t^{\varepsilon}, t \in [\delta, T])$ solution de (2.7) induite sur l'espace des trajectoires $\left(C_{[\delta,T]}, \mathcal{F}\right)$. Pour θ une valeur fixée du paramétre dans Θ et une observation dune trajectoire complète $X_t^{\varepsilon} = (X_t^{\varepsilon}, t \in [\delta, T])$ de (2.7), rappellons que l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) $\hat{\theta}_{\varepsilon}$ est défini comme une solution de l'équation

$$\frac{d\mathbb{P}_{\hat{\theta}_{\varepsilon}}^{\varepsilon}}{d\mathbb{P}_{\theta_0}^{\varepsilon}} \left(X^{\varepsilon}\right) = \sup_{\theta \in \bar{\Theta}} \frac{d\mathbb{P}_{\theta}^{\varepsilon}}{d\mathbb{P}_{\theta_0}^{\varepsilon}} \left(X^{\varepsilon}\right) \tag{2.8}$$

où $\bar{\Theta}$ désigne la fermeture de Θ.

En notant $\mathbb{P}_{\theta_0}^{\varepsilon} = \mathbb{P}_0$ la loi du processus de Wiener et en posant :

$$S_t\left(X^{\varepsilon}, \theta\right) := \begin{cases} c \ \int_{\delta}^{1} X_{t-s}^{\varepsilon} \ g\left(s\right) \ ds & si \quad t \in [\delta, T] \\ 0 & si \qquad [0, \delta[\end{cases}$$

la vraisemblance est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{P}_{\theta}^{\varepsilon}}{d\mathbb{P}_{\theta_0}^{\varepsilon}} \left(X^{\varepsilon}\right) &= \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T S_t\left(X^{\varepsilon}, \theta\right) \ dX_t^{\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T \left(S_t\left(X^{\varepsilon}, \theta\right)\right)^2 \ dt\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\delta}^T S_t\left(X^{\varepsilon}, \theta\right) \ dX_t^{\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_{\delta}^T \left(S_t\left(X^{\varepsilon}, \theta\right)\right)^2 \ dt\right) \end{aligned}$$

Dans la suite, nous conservons la première forme la vraisemblance.

L'estimateur EMV $\hat{\theta}_{\varepsilon}$vérifie l'équation suivante :

$$A_{\varepsilon} \hat{\theta}_{\varepsilon} = Y_{\varepsilon} \Longrightarrow \hat{\theta}_{\varepsilon} = \frac{Y_{\varepsilon}}{A_{\varepsilon}}$$

où A_ε définie par :

$$A_\varepsilon = \int_\delta^T \left(V^\varepsilon(t)\right)^2 dt$$

et

$$Y_\varepsilon = \int_\delta^T V^\varepsilon(t)\, dt$$

avec

$$V^\varepsilon(t) = \int_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon g(s)\, ds$$

Nous rappellons la propriété de la normalité asymptotique locale (LAN condition ou condition de LeCam) qui joue un rôle fondamental dans ce type de problème ([6], [7]). La famille des lois $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in]0, D])$ vérifie la condition LAN en un point $\theta \in]0, D]$ si le rapport de vraisemblance

$$Z_{\varepsilon,\theta}(u) := \frac{d\mathbb{P}_{\theta+\Phi_\varepsilon(\theta)u}}{d\mathbb{P}_\theta}(X^\varepsilon), u \in \mathbb{R} \tag{2.9}$$

admet la représentation suivante

$$Z_{\varepsilon,\theta}(u) = \exp\left\{u\Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon) - \frac{1}{2}u^2 + \Psi_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon)\right\}, \quad u \in \mathbb{R} \tag{2.10}$$

telle que sous $\mathbb{P}_\theta^\varepsilon$ on a:

$$\Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon) \Longrightarrow N(0,1) \quad \text{dans } \mathbb{R} \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0$$

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} \Psi_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon) = 0 \;\; \text{en } \mathbb{P}_\theta^\varepsilon - \text{probabilité}$$

Si la famille de mesures $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ est LAN en tout point $\theta \in \Theta$; on dit qu'elle est LAN sur Θ. La famille des lois $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ vérifie la condition LAN uniforme si nous avons les relations précédentes pour tout compact $K \subset \Theta$, et pour toutes les suites $(\theta_n) \subset K$,$(u_n) \subset \mathbb{R}$, $u_n \longrightarrow u$ vérifiant ($\theta_n + \Phi_\varepsilon(\theta_n)\, u_n) \in \Theta$.

D'autre par, notons par $\mathbf{W}_{e,2}$ l'espace des fonctions de perte w définies sur $\mathbb{R}$ continues symétriques non identiquement nulles vérifiant :

$\cdot\ w\ (0) = 0$

$\cdot$ pour tout $c > 0$ les ensembles $\{u \;/\; w(u) < u\ \}$ sont convexes

$\cdot\ w(u) \leq \exp\left(\gamma\ u^2\right)$ pour $\gamma > 0$ quand $u \longrightarrow \infty$

Si la famille $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ satisfait la condition LAN en tout point $\theta \in \Theta$ alors pour tout estimateur $\hat{\theta}_\varepsilon$, et $w \in \mathbf{W}_{e,2}$, nous avons l'inégalité suivante (dite aussi borne de Hàjek) :

$$\lim_{\delta \to 0} \liminf_{\varepsilon \to 0} \sup_{\|\theta - \theta_0\| < \delta} \mathbb{E}_\theta^\varepsilon \left[w \left(\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0) \left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta \right) \right) \right] \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} w(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right) dx \qquad (2.11)$$

Les estimateurs qui réalisent l'égalité dans (2.11) sont dits asymptotiquement efficaces ([6].)

C1. la fonction g est continue et d'intégrale positif $\left(\int_\delta^1 g(s)\, ds > 0 \right)$

2.3 Théorèmes

Le théorème suivant donne la condition LAN de LeCam de la famille de lois $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ solution de (2.7) et la borne de Hàjek.

Théorème 2.1 *Sous la condition C1, la famille des lois $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ solution (2.7) vérifie la condition LAN (2.10) avec Φ_ε définie par*

$$\Phi_\varepsilon(\theta) = \varepsilon I^{-\frac{1}{2}}(\theta)$$

où

$$I(\theta) = \int_0^T \left(q_s\left(X^0\right) \right)^2 ds$$

$$q_s\left(X^0\right) = \frac{\partial S_s}{\partial \theta}\left(X^0, \theta\right)$$

et

$$\Delta_\varepsilon\left(\theta, X^0\right) = \int_0^T u q_t\left(X^0\right) dW_t$$

la fonction risque admet la minoration suivante (Inégalité de Hàjek) : pour tout estimateur $\hat{\theta}_\varepsilon, \theta_0 \in \Theta$ et $w \in \mathbf{W}_{e,2}$

$$\lim_{\eta \to 0} \liminf_{\varepsilon \to 0} \inf_{\widetilde{\theta}_\varepsilon} \sup_{\|\theta - \theta_0\| < \eta} \mathbb{E}_\theta^\varepsilon \left[w \left(\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0) \left(\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta \right) \right) \right] \geq \mathbb{E}\left(w(\xi) \right)$$

où ξ est une valeur aléatoire gaussien centré réduit dans $\mathbb{R}$.

Lestimateur du maximum de vraisemblance du paramétre θ est défini par (2.8). Le théorème suivant donne la convergence, la normalité asymptotique et la convergence des moments de tout ordre de cet estimateur.

Théorème 2.2 *Sous la condition **C1,** l' estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_\varepsilon$ vérifie sous $\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_0}$ et uniformément sur tout compact K de Θ, les propriétés suivantes :*

1. $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \hat{\theta}_\varepsilon = \theta_0$ *en probabilité plus précisement,* $\forall \beta > 0$

$$\sup_{\theta_0 \in K_0} \mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_0} \left(\left| \hat{\theta}_\varepsilon - \theta_0 \right| > \beta \right) \leq C_1 \exp \left(\frac{-C_2 \beta}{\varepsilon^2} \right)$$

où $C_1 > 0$ *et* $C_2 > 0.$

2.

$$\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0) \left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta \right) \Longrightarrow_{\varepsilon \longrightarrow 0} \xi$$

où $\xi \hookrightarrow N(0,1)$ *dans* $\mathbb{R}$.

3. Pour tout $p > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}^{\varepsilon}_{\theta} \left| \Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0) \left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta \right) \right|^p = \mathbb{E} |\xi|^p$$

4. L'estimateur $\hat{\theta}_\varepsilon$ *est asymptotique efficace.*

Pour montrer ces deux théorèmes, nous suivons [7] et (chap.2 de [10]). Pour cela nous avons besoin d'établir les lemmes suivants qui montrent que la famille des processus de vraisemblance $(Z_{\varepsilon,\theta}(u), u \in \mathbb{R})$ est tendue dans $C_0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues tendant vers 0 l'infini.

Lemme 2.1 *Sous la condition **C1,**pour tout compact K de $\overline{\Theta}$,$\forall m > L$ et $R > 0$,on a*

$$\sup_{\theta \in K} \sup_{\{u_1, u_2 \in U_{\theta,\varepsilon} : \|u_j\| < R \ , \ j=1,2\}} |u_1 - u_2|^{-m} \mathbb{E}_\theta \left| Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_2) - Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_1) \right| \leq C(1 + R^m)$$

où $U_{\theta,\varepsilon} = \Phi_\varepsilon^{-1}(\Theta - \theta)$.

Lemme 2.2 *Sous la condition **C1** , $\forall \varepsilon > 0$, $\forall u \in U_{\theta,\varepsilon}$ et pour tout compact K de Θ, on a*

$$\sup_{\theta \in K} \mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta} \left(Z_\varepsilon(u) \geq e^{-\gamma u^2} \right) \leq C e^{-\gamma u^2}$$

où $\gamma > 0$ *et* $C > 0$.

Le théorème 2.1 implique la convergence des lois de dimensions finies du processus de vraisemblance $(Z_{\varepsilon,\theta}(u), u \in \mathbb{R})$. Par suite, des Lemmes 2.1 et 2.2 le processus $(Z_{\varepsilon,\theta}(u), u \in \mathbb{R})$ converge faiblement dans $C_0(\mathbb{R})$ vers un processus $(Z_\theta(u), u \in \mathbb{R})$. La preuve des résultats du théoréme 2.2 suivent les mêmes étapes que celle du Théorème 1.1 p.174 de [7] ou du Théorème 5.3.3 p.188 de [10]. Les résultats sur les estimateurs de Bayes sont obtenus de façon similaires.

2.4 Preuves

Preuve: du théorème 2.1 .soit Soit $u \in \mathbb{R}$ pour montrer le théorème on unitilise comme dans [7], le changement de variable $u = I^{\frac{1}{2}}(\theta)\, v$ où $I(\theta)$ vérifié la condition **C1.** La condition LAN (2.9) se transforme donc

$$\begin{aligned} Z_{\varepsilon,\theta}(u) &= \frac{d\mathbb{P}_{\theta+\Phi_\varepsilon(\theta)u}}{d\mathbb{P}_\theta}(X^\varepsilon) = \frac{d\mathbb{P}_{\theta+\varepsilon v}}{d\mathbb{P}_\theta} \\ &= \exp\left[v\ I^{\frac{1}{2}}(\theta)\,\Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon) - \frac{1}{2}v^2 I(\theta) + \Psi_\varepsilon\left(\theta, I^{\frac{1}{2}}(\theta)\, v, X^\varepsilon\right)\right] \end{aligned}$$

telle que sous $\mathbb{P}_\theta^\varepsilon$

$$I^{\frac{1}{2}}(\theta)\,\Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon) \Longrightarrow N(0, I(\theta)) \text{ dans } \mathbb{R} \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Psi_\varepsilon\left(\theta, I^{\frac{1}{2}}(\theta)\, v, X^\varepsilon\right) = 0 \text{ en probabilité}$$

Par suite l'observation X^ε vérifie (2.7) ,le théorème de Girsanov ([11]. chap 7) donne

$$\begin{aligned} Z_{\varepsilon,\theta}(u) &= \frac{d\mathbb{P}_{\theta+\varepsilon v}}{d\mathbb{P}_\theta}(X^\varepsilon) \\ &= \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T (S_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - S_t(X^\varepsilon, \theta)\ )\, dX_t^\varepsilon - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T \left(S_t^2(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - S_t^2(X^\varepsilon, \theta)\right)\, dt\right) \end{aligned}$$

où

$$S_t(X^\varepsilon, \theta) = c\int_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon g(s)\, ds$$

et

$$S_t\left(X^{\varepsilon},\theta+\varepsilon u\right)=\left(c+\varepsilon u\right)\int_{\delta}^{1}X_{t-s}^{\varepsilon}g\left(s\right)ds$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\ln Z_{\varepsilon,\theta} &= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T\left(S_t\left(X^{\varepsilon},\theta+\varepsilon u\right)-S_t\left(X^{\varepsilon},\theta\right)\ \right)dX_t^{\varepsilon}- \\
&\quad \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T\left(S_t^2\left(X^{\varepsilon},\theta+\varepsilon u\right)-S_t^2\left(X^{\varepsilon},\theta\right)\right)dt \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T\left(S_t\left(X^{\varepsilon},\theta+\varepsilon u\right)-S_t\left(X^{\varepsilon},\theta\right)\ \right)\left[dX_t^{\varepsilon}-S_t\left(X^{\varepsilon},\theta\right)dt\right]- \\
&\quad \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T\left(S_t\left(X^{\varepsilon},\theta+\varepsilon u\right)-S_t\left(X^{\varepsilon},\theta\right)\right)^2dt \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\left(S_t\left(X^{\varepsilon},\theta+\varepsilon u\right)-S_t\left(X^{\varepsilon},\theta\right)\ \right)dW_t- \\
&\quad \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T\left(S_t\left(X^{\varepsilon},\theta+\varepsilon u\right)-S_t\left(X^{\varepsilon},\theta\right)\right)^2dt
\end{aligned}$$

$$:=A_{1,\varepsilon}-A_{2,\varepsilon} \tag{2.12}$$

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
A_{1,\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\left(S_t\left(X^{\varepsilon},\theta+\varepsilon u\right)-S_t\left(X^{\varepsilon},\theta\right)\ \ -u\ \varepsilon q_t\left(X^0\right)\right)dW_t+ \\
&\quad \int_0^T uq_t\left(X^0\right)dW_t
\end{aligned}$$

où $q_t\left(X^0\right)=\dfrac{\partial S_t}{\partial\theta}\left(X^0,\theta\right)$ et X^0 la solution du système détermniste (2.2), posons

$$\Delta\left(\theta,X^0\right)=\int_0^T uq_t\left(X^0\right)dW_t$$

Alors la variable $\Delta\left(\theta,X^0\right)$ est gaussien de variance

$$I\left(\theta\right)=\int_0^T q_s\left(X^0\right)^2ds$$

Ecrivons

$$A_{1,\varepsilon}:=\Pi_{\varepsilon}\left(u\right)+\Delta\left(\theta,X^0\right)$$

où

$$\Pi_\varepsilon(u)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T\left(S_t(X^\varepsilon,\theta+\varepsilon u)-S_t(X^\varepsilon,\theta)\ \ -u\ \varepsilon q_t\left(X^0\right)\right)dW_t$$

Montrons que sous $\mathbb{P}_\theta^\varepsilon$ la variable aléatoire $\Pi_\varepsilon(u)$ tend vers 0 quand $\varepsilon\longrightarrow 0$.

Pour $\alpha>0$, $\gamma>0$, par l'inégalité de Lenglart, nous avons (cf. [11])

$$\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(|\Pi_\varepsilon(u)|>\alpha\right)\le\frac{\gamma}{\alpha^2}+\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T\left(S_t(X^\varepsilon,\theta+\varepsilon u)-S_t(X^\varepsilon,\theta)\ \ -u\ \varepsilon q_t\left(X^0\right)\right)^2dt>\gamma\right)$$

Pour le second terme ci-dessus, nous allons appliquer l'inégalité de Markov.

D'une part, on a

$$\begin{aligned}S_t(X^\varepsilon,\theta+\varepsilon u)-S_t(X^\varepsilon,\theta)-u\varepsilon q_t\left(X^0\right) &= \left[S_t(X^\varepsilon,\theta+\varepsilon u)-S_t\left(X^0,\theta+\varepsilon u\right)\right]\\ &\quad-\left[S_t(X^\varepsilon,\theta)-S_t\left(X^0,\theta\right)\right]\\ &\quad+\left[S_t\left(X^0,\theta+\varepsilon u\right)-S_t\left(X^0,\theta\right)\right]\\ &\quad-u\varepsilon q_t\left(X^0\right)\end{aligned}$$

Comme

$$V^\varepsilon(t)=\int_\delta^1X_{t-s}^\varepsilon g(s)\,ds\ ,\ \ V^0(t)=\int_\delta^1X_{t-s}^0g(s)\,ds$$

nous en déduisons

$$S_t(X^\varepsilon,\theta+\varepsilon u)-S_t\left(X^0,\theta+\varepsilon u\right)=(c+\varepsilon u)\left[V^\varepsilon(t)-\ V^0(t)\right]\tag{2.13}$$

et

$$S_t(X^\varepsilon,\theta)-S_t\left(X^0,\theta\right)=c\left[V^\varepsilon(t)-\ V^0(t)\right]\tag{2.14}$$

La différence entre les expressions (2.10) et (2.11) est égale à

$$\varepsilon u\ \left[V^\varepsilon(t)-\ V^0(t)\right]$$

par le changement de variable $v = t - s$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
V^{\varepsilon}(t) - V^{0}(t) &= \int_{\delta}^{1} \left(X_{t-s}^{\varepsilon} - X_{t-s}^{0} \right) g(s)\, ds \\
&= \int_{t-1}^{t-\delta} \left(X_{v}^{\varepsilon} - X_{v}^{0} \right) g(t-v)\, dv
\end{aligned}
$$

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1, l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, les propriétés du processus de Wiener et la condition **C1** , nous obtenons pour tout $t \in [0, T]$:

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\theta} \left(S_t(X^{\varepsilon}, \theta + \varepsilon u) - S_t(X^{\varepsilon}, \theta) - u\ \varepsilon q_t\left(X^0\right) \right)^2 \\
= \ & \mathbb{E}_{\theta} \ \left[\varepsilon u \ \left(V^{\varepsilon}(t) - \ V^{0}(t) \right) + \left(S_t\left(X^0, \theta + \varepsilon u\right) - S_t\left(X^0, \theta\right) \right) - u \varepsilon q_t\left(X^0\right) \right] \\
= \ & \mathbb{E}_{\theta} \ \left[\varepsilon u \ \int_{t-1}^{t-\delta} \left(X_v^{\varepsilon} - X_v^0 \right) g(t-v)\, dv - \varepsilon \xi_{\varepsilon}(t) \right]^2 \\
\leq \ & \varepsilon_{\theta}^2 \mathbb{E}_{\theta} \ \left[\sup_{0 \leq v \leq T} \left| X_v^{\varepsilon} - X_v^0 \right| \ u \int_{t-1}^{t-\delta} g(t-v)\, dv - \xi_{\varepsilon}(t) \right]^2 \\
\leq \ & \varepsilon_{\theta}^2 \mathbb{E}_{\theta} \ \left[K_1 \varepsilon \sup_{0 \leq v \leq T} |W_t|\, u \int_{t-1}^{t-\delta} g(t-v)\, dv - \xi_{\varepsilon}(t) \right]^2 \\
\leq \ & \varepsilon^2 \left(\varepsilon^2 K_2 + 2\xi_{\varepsilon}^2(t) \right)
\end{aligned}
$$

où $\xi_{\varepsilon}(t) \longrightarrow 0$ est le reste de formule de Taylor ,$K_1 > 0$ et $K_2 > 0$.

Donc ,

$$
\sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E}_{\theta} \left[S_t(X^{\varepsilon}, \theta + \varepsilon u) - S_t(X^{\varepsilon}, \theta) - u \varepsilon q_t\left(X^0\right) \right]^2 \leq \varepsilon^2 \Gamma_{\varepsilon}
$$

où $\Gamma_{\varepsilon} \longrightarrow 0$ car $\xi_{\varepsilon}(t) \rightarrow 0$ avec ε et $K_2 > 0$ on déduit que

$$
\mathbb{P}_{\theta}^{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \left(S_t(X^{\varepsilon}, \theta + \varepsilon u) - S_t(X^{\varepsilon}, \theta) \ \ - u\ \varepsilon q_t\left(X^0\right) \right)^2 dt > \gamma \right) \leq \frac{1}{\gamma^2} T \Gamma_{\varepsilon}
$$

suite,par l'inégalité de lenglart, on déduit que $\Pi_{\varepsilon}(u) \longrightarrow 0$ en probabilité quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Pour $A_{2,\varepsilon}$ définie dans (2.12), on a

$$
A_{2,\varepsilon} := \frac{1}{2} \left(K_{\varepsilon,u}(X^{\varepsilon}) + u^2 I(\theta) \right)
$$

où

$$K_{\varepsilon,u}\left(X^{\varepsilon}\right)=\frac{1}{\varepsilon^{2}}\int_{0}^{T}\left(\left(S_{t}\left(X^{\varepsilon},\theta+\varepsilon u\right)-S_{t}\left(X^{\varepsilon},\theta\right)\right)^{2}dt\ \ -u^{2}I\left(\theta\right)\right)$$

Montrons que $K_{\varepsilon,u}\left(X^{\varepsilon}\right)\longrightarrow 0$ en probabilité. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

nous avons

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{E}_{\theta}\left(\dfrac{1}{\varepsilon^{2}}\displaystyle\int_{0}^{T}\left[\left(S_{t}\left(X^{\varepsilon},\theta+\varepsilon u\right)-S_{t}\left(X^{\varepsilon},\theta\right)\right)^{2}-u^{2}\varepsilon^{2}q_{t}^{2}\left(X^{0}\right)\right]dt\right)\\ \leq & \left[\dfrac{1}{\varepsilon^{2}}\mathbb{E}_{\theta}\left(\displaystyle\int_{0}^{T}\left(\left(S_{t}\left(X^{\varepsilon},\theta+\varepsilon u\right)-S_{t}\left(X^{\varepsilon},\theta\right)\right)-u\varepsilon q_{t}\left(X^{0}\right)\right)^{2}dt\right)\right]^{\frac{1}{2}}\times\\ & \left[\dfrac{1}{\varepsilon^{2}}\mathbb{E}_{\theta}\left(\displaystyle\int_{0}^{T}\left(\left(S_{t}\left(X^{\varepsilon},\theta+\varepsilon u\right)-S_{t}\left(X^{\varepsilon},\theta\right)\right)+u\varepsilon q_{t}\left(X^{0}\right)\right)^{2}dt\right)\right]^{\frac{1}{2}}\end{array}$$

la premier facteur ci-dessus a été étudié précédement et tend vers 0 avec ε. Pour le deuxième facteur , nous avons

$$\begin{array}{rl} & \dfrac{1}{\varepsilon^{2}}\mathbb{E}_{\theta}\left(\displaystyle\int_{0}^{T}\left(\left(S_{t}\left(X^{\varepsilon},\theta+\varepsilon u\right)-S_{t}\left(X^{\varepsilon},\theta\right)\right)+u\varepsilon q_{t}\left(X^{0}\right)\right)^{2}dt\right)\\ = & \mathbb{E}_{\theta}\left(\displaystyle\int_{0}^{T}\left(\left(\dfrac{S_{t}\left(X^{\varepsilon},\theta+\varepsilon u\right)-S_{t}\left(X^{\varepsilon},\theta\right)}{\varepsilon}\right)+uq_{t}\left(X^{0}\right)\right)^{2}dt\right)\\ = & \mathbb{E}_{\theta}\left(\displaystyle\int_{0}^{T}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\left(S_{t}\left(X^{\varepsilon},\theta+\varepsilon u\right)-S_{t}\left(X^{\varepsilon},\theta\right)\right)+uq_{t}\left(X^{0}\right)\right)^{2}dt\right)\\ \leq & \mathbb{E}_{\theta}\left(\displaystyle\int_{0}^{T}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\left(c\varepsilon V^{\varepsilon}\left(t\right)\right)+uq_{t}\left(X^{0}\right)\right)^{2}dt\right)\\ \leq & \mathbb{E}_{\theta}\left(\displaystyle\int_{0}^{T}\left(2\left(cV^{\varepsilon}\left(t\right)\right)^{2}+2u^{2}q_{t}^{2}\left(X^{0}\right)\right)dt\right)\\ \leq & \mathbb{E}_{\theta}\left(\displaystyle\int_{0}^{T}\left(2\left(c\left(V^{\varepsilon}\left(t\right)\right)+V^{0}\left(t\right)-V^{0}\left(t\right)\right)^{2}+2u^{2}q_{t}^{2}\left(X^{0}\right)\right)dt\right)\\ \leq & \mathbb{E}_{\theta}\left(\displaystyle\int_{0}^{T}\left(2c^{2}\left(2\left(V^{\varepsilon}\left(t\right)-V^{0}\left(t\right)\right)^{2}+2\left(V^{0}\left(t\right)\right)^{2}\right)+2u^{2}q_{t}^{2}\left(X^{0}\right)\right)dt\right)\\ \leq & C_{1}\displaystyle\int_{0}^{T}\left(c^{2}\left(\mathbb{E}_{\theta}\left(V^{\varepsilon}\left(t\right)-V^{0}\left(t\right)\right)^{2}+2\left(V^{0}\left(t\right)\right)^{2}\right)+2u^{2}q_{t}^{2}\left(X^{0}\right)\right)dt\\ \leq & C_{3}\varepsilon^{2}+C_{4}\end{array}$$

où $C_3, C_4 > 0$ et on a utilisé le fait que

$$\mathbb{E}_\theta \left(V^\varepsilon (t) - V^0 (t)\right)^2 \leq C^{'} \varepsilon^2$$

et

$$V^0 (t) < \infty \quad \text{sur} \ \ [0,T]$$

par conséquent

$$\mathbb{E}_\theta \left|K_{\varepsilon,u} (X^\varepsilon)\right| \leq \Gamma_\varepsilon \times \left(C_2 \varepsilon^2 + C_3\right)$$

et comme $\Gamma_\varepsilon \longrightarrow 0$ donc $K_{\varepsilon,u} (X^\varepsilon) \longrightarrow 0$ en probabilité quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, par suite on en déduit que

$$Z_{\varepsilon,\theta} (u) = \exp \left\{ u \Delta \left(\theta, X^0\right) - \frac{1}{2} u^2 I (\theta) + \Psi_{\varepsilon,\theta} (u) \right\}$$

où

$$\forall \ u \in \mathbb{R} \ , \ \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \Psi_{\varepsilon,\theta} (u) = 0 \text{ en probabilité}$$

D'où la condition LAN pour la famille des lois $(\mathbb{P}^\varepsilon_\theta)_{\theta \in \Theta}$ induite par la solution de (2.7) .la minoration du risque est une conséquence directe de théorème 12.1 p.162 dans [7]. ■

Preuve: du lemme 2.1 Soit K compact de Θ , posons $\theta_i = \theta + \varepsilon u_i$ $(i = 1, 2)$ où $u_i \in \mathbb{R}$ et $\theta = c$, $\theta_i \in K$

Posons

$$\begin{aligned} \Delta X^\varepsilon_t &= S_t (X^\varepsilon, \theta_1) - S_t (X^\varepsilon, \theta_2) \\ &= (\theta + \varepsilon u_1) V^\varepsilon (t) - (\theta + \varepsilon u_2) V^\varepsilon (t) \\ &= \varepsilon (u_1 - u_2) V^\varepsilon (t) \end{aligned}$$

Le rapport de vraisemblence pour deux valeurs θ_1 et θ_2 du paramètre est

$$\frac{d\mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_1}}{d\mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_2}} (X^\varepsilon) = \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \Delta X^\varepsilon_t dW_t - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X^\varepsilon_t)^2 \, dt \right)$$

Soit $m > 1$.Posons $V(T) = \left(\frac{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_1}}{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_2}}\right)^{\frac{1}{m}}$, de la définition de $Z_{\varepsilon,\theta}(u)$, on a

$$\begin{aligned} V(T) &= \left(\frac{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_1}}{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_2}}\right)^{\frac{1}{m}} \\ &= \left(\frac{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta+\varepsilon u_1}}{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta}} \times \frac{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta}}{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta+\varepsilon u_2}}\right)^{\frac{1}{m}} \\ &= \left(\frac{Z_{\varepsilon,\theta}(u_1)}{Z_{\varepsilon,\theta}(u_2)}\right)^{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

Ecrivons $V(t) = \exp(Y(t))$ où le processus $Y(t)$ est tel que $Y(0) = 0$.la formule Itô pour $V(t) := f(t, Y(t))$ donne

$$\begin{aligned} dV(t) &= \left[f'_t(t, Y(t)) + f'_y(t, Y(t))\left(-\frac{1}{2m\varepsilon^2}(\Delta X^{\varepsilon}_t)^2\right) + \frac{1}{2}f''_{yy}(t, Y(t))\left(\frac{1}{m^2\varepsilon^2}(\Delta X^{\varepsilon}_t)^2\right)\right]dt \\ &\quad + f'_y(t, Y(t))\left(-\frac{1}{m\varepsilon}(\Delta X^{\varepsilon}_t)\right)dW_t \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} dV(t) &= \left[\left(-\frac{1}{2m\varepsilon^2}(\Delta X^{\varepsilon}_t)^2\right)e^{Y(t)} + \left(\frac{1}{2m^2\varepsilon^2}(\Delta X^{\varepsilon}_t)^2 e^{Y(t)}\right)\right]dt \\ &\quad + \left(\frac{1}{m\varepsilon}(\Delta X^{\varepsilon}_t)\right)e^{Y(t)}dW_t \end{aligned}$$

comme $V(0) = 1$, on en déduit

$$V(T) = 1 + \frac{1-m}{2m^2\varepsilon^2}\int_0^T (\Delta X^{\varepsilon}_t)^2 V(t)\,dt + \frac{1}{m\varepsilon}\int_0^T (\Delta X^{\varepsilon}_t) V(t)\,dW_t$$

d'une part , nous avons

$$\mathbb{E}_\theta \left| Z_{\varepsilon}^{\frac{1}{m}}(u_2) - Z_{\varepsilon}^{\frac{1}{m}}(u_1) \right|^m = \mathbb{E}_\theta \left| Z_{\varepsilon}^{\frac{1}{m}}(u_2)\left(1 - \frac{Z_{\varepsilon}^{\frac{1}{m}}(u_1)}{Z_{\varepsilon}^{\frac{1}{m}}(u_2)}\right)\right|^m$$

de $(a+b)^m \leq 2^{m-1}(a^m+b^m)$, l'inégalitée de Holder avec les exposants m et $\dfrac{m}{m-1}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta \left| Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_2) - Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_1) \right|^m &= \mathbb{E}_\theta \left| \left(\frac{d\mathbb{P}_{\theta_2}^\varepsilon}{d\mathbb{P}_\theta^\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m}} (1 - V(T)) \right|^m \\
&= \mathbb{E}_\theta \left| (1 - V(T)) \right|^m \left| \frac{d\mathbb{P}_{\theta_2}^\varepsilon}{d\mathbb{P}_\theta^\varepsilon} \right| \\
&= \mathbb{E}_{\theta_2} \left| (1 - V(T)) \right|^m \\
&= \mathbb{E}_{\theta_2} \left| \frac{1-m}{2m^2\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2 V(t)\, dt + \frac{1}{m\varepsilon} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon) V(t)\, dW_t \right|^m \\
&\leq 2^{m-1} \left[\mathbb{E}_{\theta_2} \left(\left| \left(\frac{1-m}{2m^2\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2 V(t)\, dt \right)^m \right| \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{m\varepsilon} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon) V(t)\, dW_t \right)^m \right) \right] \\
&\leq 2^{m-1} \left(\frac{1-m}{2m^2\varepsilon^2} \right) \mathbb{E}_{\theta_2} \left(T^{m-1} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} V^m(t)\, dt \right) \\
&\quad + 2^{m-1} \left(\frac{1}{m\varepsilon} \right) \mathbb{E}_{\theta_2} \left(T^{m-1} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^m V^m(t)\, dt \right) \\
&\leq \frac{C_1}{\varepsilon^{2m}} \int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2} \left((\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} V^m(t) \right) dt + \frac{C_2}{\varepsilon^m} \int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2} \left((\Delta X_t^\varepsilon)^m V^m(t) \right) dt
\end{aligned}$$

où $C_1, C_2 > 0$. Pour le premier terme de l'inégalité ci-dessus, du fait que le processus $(V^m(t), t \in [0,T])$ est une martingale par rapport à la tribu $\mathcal{F}_t$, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2} \left((\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} V^m(t) \right) dt \\
=\ & \mathbb{E}_{\theta_2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} \left(\mathbb{E}_{\theta_2} V^m(T) / \mathcal{F}_t \right) dt \\
=\ & \int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2} \mathbb{E}_{\theta_2} \left((\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} V^m(T) / \mathcal{F}_t \right) dt \\
=\ & \int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2} \left((\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} V^m(T) \right) dt \\
=\ & \mathbb{E}_{\theta_2} \left(V^m(T) \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} \right) dt \\
=\ & \mathbb{E}_{\theta_1} \left(\int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^{2m}\, dt \right)
\end{aligned}$$

En faisant le même calcul pour le second terme, nous arrivons à :

$$\mathbb{E}_\theta \left| Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_2) - Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_1) \right|^m \le \frac{C_1}{\varepsilon^{2m}} \int_0^T \mathbb{E}_{\theta_1} (\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} dt + \frac{C_2}{\varepsilon^m} \int_0^T \mathbb{E}_{\theta_1} (\Delta X_t^\varepsilon)^m dt$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_1} (\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} &= \mathbb{E}_{\theta_1} (\varepsilon (u_1 - u_2) V^\varepsilon (t))^{2m} \\ &= \varepsilon^{2m} \mathbb{E}_{\theta_1} \left((u_1 - u_2)^{2m} V^\varepsilon (t)^{2m} \right) \\ &= \varepsilon^{2m} (u_1 - u_2)^{2m} \mathbb{E}_{\theta_1} \left(V^\varepsilon (t)^{2m} \right) \end{aligned}$$

et en appliquant l'inégalité de hölder avec les exposants $\dfrac{2m}{2m-1}$ et $2m$ on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_1} \left(V^\varepsilon (t)^{2m} \right) &= \mathbb{E}_{\theta_1} \left(\int_\delta^1 X_{t-s} g(s)\, ds \right)^{2m} \\ &\le \mathbb{E}_{\theta_1} \left[\left(\int_\delta^1 X_{t-s}^{2m} ds \right)^{\frac{1}{2m}} \left(\int_\delta^1 g^{\frac{2m}{2m-1}} (s) \right)^{\frac{2m-1}{2m}} \right]^{2m} \\ &\le \mathbb{E}_{\theta_1} \left(\int_\delta^1 X_{t-s}^{2m} ds \right) \left(\int_\delta^1 g^{\frac{2m}{2m-1}} (s) \right)^{2m-1} \\ &\le K_1 \int_\delta^1 \sup_{\theta \in K} \sup_{0 \le s \le T} \mathbb{E}_{\theta_1} |X_s|^{2m} ds \quad := K_2 \end{aligned}$$

par suite

$$\mathbb{E}_{\theta_1} (\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} \le K_2 \varepsilon^{2m} |u_1 - u_2|^{2m}$$

de même, de l'inégalité

$$\mathbb{E}_{\theta_1} (\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} \le K_3 \varepsilon^m |u_1 - u_2|^m$$

on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta \left| Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_2) - Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_1) \right|^m &\le C_1' |u_1 - u_2|^m + C_2' |u_1 - u_2|^m \\ &\le K_4 |u_1 - u_2|^m (1 + R^m) \end{aligned}$$

Finalement

$$\sup_{\theta\in\Theta} \sup_{\left\{u_1,u_2\in U_{\theta,\varepsilon}:\|u_j\|<R\ ,\ j=1,2\right\}} |u_{1-}u_2|^{-m}\,\mathbb{E}_\theta\left|Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_2)-Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_1)\right|\leq C\left(1+R^m\right)$$

où $C>0$.D'où le lemme. ■

Preuve: du lemme 2.2 . Soit a vérifiant $0<a<\dfrac{1}{2}$, $b>0$ et $u\in\mathbb{R}$.Notons $\theta_i=\theta+\varepsilon u_i$, $i=1,2$

Par l'inégalité de Markov et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(Z_\varepsilon(u)\geq e^{-\gamma u^2}\right) &\leq e^{\alpha\gamma u^2}\ \mathbb{E}_\theta\left(Z_\varepsilon(u)\right)^\alpha \\
&\leq e^{\alpha\gamma u^2}\mathbb{E}_\theta\left[\exp\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\int_0^T\left(\Delta X_t^\varepsilon\right)dW_t-\frac{\alpha}{2\varepsilon^2}\int_0^T\left(\Delta X_t^\varepsilon\right)^2dt\right)\right] \\
&\leq e^{\alpha\gamma u^2}\mathbb{E}_\theta\left[\exp\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\int_0^T\left(\Delta X_t^\varepsilon\right)dW_t-\frac{b}{2\varepsilon^2}\int_0^T\left(\Delta X_t^\varepsilon\right)^2dt\right.\right. \\
&\quad\left.\left.+\frac{(b-a)}{2\varepsilon^2}\int_0^T\left(\Delta X_t^\varepsilon\right)^2dt\right)\right] \\
&\leq e^{\alpha\gamma u^2}\mathbb{E}_\theta\left[\exp\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\int_0^T\left(\Delta X_t^\varepsilon\right)dW_t-\frac{b}{2\varepsilon^2}\int_0^T\left(\Delta X_t^\varepsilon\right)^2dt\right)\right. \\
&\quad\left.\times\exp\left(\frac{(b-a)}{2\varepsilon^2}\int_0^T\left(\Delta X_t^\varepsilon\right)^2dt\right)\right] \\
&\leq e^{\alpha\gamma u^2}\mathbb{E}_\theta\left[\exp\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\int_0^T\left(\Delta X_t^\varepsilon\right)dW_t-\frac{b}{2\varepsilon^2}\int_0^T\left(\Delta X_t^\varepsilon\right)^2dt\right)\right. \\
&\quad\left.\times\exp\left(\frac{(b-a)}{2\varepsilon^2}\int_0^T\left(\Delta X_t^\varepsilon\right)^2dt\right)\right] \\
&\leq e^{\alpha\gamma u^2}\mathbb{E}_\theta\left[\exp\left(\frac{2\alpha}{\varepsilon}\int_0^T\left(\Delta X_t^\varepsilon\right)dW_t-\frac{b}{\varepsilon^2}\int_0^T\left(\Delta X_t^\varepsilon\right)^2dt\right)\right]^{\frac{1}{2}}\times \\
&\quad\exp\mathbb{E}_\theta\left[\left(\frac{(b-a)}{\varepsilon^2}\int_0^T\left(\Delta X_t^\varepsilon\right)^2dt\right)\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

où $\Delta X_t^\varepsilon=S_t\left(X^\varepsilon,\theta_1\right)-S_t\left(X^\varepsilon,\theta_2\right)$.Par le théoème 6.1 p216 de [**?**], on a :

$$\mathbb{E}_\theta\left[\exp\left(\int_0^T\left(\frac{2\alpha}{\varepsilon}\Delta X_t^\varepsilon\right)dW_t-\frac{1}{2}\int_0^T\left(\frac{2a}{\varepsilon^2}\Delta X_t^\varepsilon\right)^2dt\right)\right]\leq 1$$

si on choisit $b=2a^2$; on aura donc

$$\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(Z_\varepsilon(u)\geq e^{-\gamma u^2}\right)\leq e^{\alpha\gamma u^2}\left[\mathbb{E}_\theta\left(\exp\left(\frac{-a(1-2a)}{\varepsilon^2}\int_0^T(\Delta X_t^\varepsilon)^2\,dt\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Posons $A=\Delta X_t^\varepsilon$ et $B=\Delta X_t^0$.En utilisant l'inégalité $-A^2\leq -B^2+2|B||B-A|$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(Z_\varepsilon(u)\geq e^{-\gamma u^2}\right) &\leq e^{\alpha\gamma u^2}\left[\mathbb{E}_\theta\left(\exp\left(\frac{-a(1-2a)}{\varepsilon^2}\int_0^T\left(\Delta X_t^0\right)^2dt\right.\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\left.+\frac{2a(1-2a)}{\varepsilon^2}\int_0^T\left|\Delta X_t^0\right|\left|\Delta X_t^\varepsilon-\Delta X_t^0\right|dt\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq e^{\alpha\gamma u^2}\left[\mathbb{E}_\theta\left(\exp\left(\frac{-a(1-2a)}{\varepsilon^2}\int_0^T\left(\Delta X_t^0\right)^2dt\right)\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\times\exp\left(\frac{2a(1-2a)}{\varepsilon^2}\int_0^T\left|\Delta X_t^0\right|\left|\Delta X_t^\varepsilon-\Delta X_t^0\right|dt\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{2.15}$$

Pour majorer le membre de droite (2.15), on minore et on majore $\left|\Delta X_t^0\right|\left|\Delta X_t^\varepsilon-\Delta X_t^0\right|$.Minorons maintenant $\Delta X_t^0=S_t\left(X^0,\theta_1\right)-S_t\left(X^0,\theta_2\right)$. Pour $0\leq t\leq T$ et $u=u_1-u_2\in U_{\theta,\varepsilon}$, on applique la formule de taylor à l'ordre 1 pour avoir

$$\Delta X_t^0=\varepsilon u\dot{S}\left(\hat{\theta},X^0\right)$$

Donc

$$\left(\Delta X_t^0\right)^2=\varepsilon^2\left(u\dot{S}\left(\hat{\theta},X^0\right)\right)^2=\varepsilon^2u^2I\left(\hat{\theta}\right)$$

où $\hat{\theta}\in B(\theta,\varepsilon|u|)$ (boule dans $\mathbb{R}$ de centre θ et de rayon $\varepsilon|u|$) et $\dot{S}$ est la dérivée de S par rapport à θ. La condition **C1** implique que $I(\theta)$ est positive (cf. [1] lemme2.3 de l'annexe page 40), il existe donc $\beta>0$ tel que

$$\left(\Delta X_t^0\right)^2\geq\varepsilon^2\beta u^2$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{-a\left(1-2a\right)}{\varepsilon^{2}}\int_{0}^{T}\left(\Delta X_{t}^{0}\right)^{2}dt\right) &\leq \exp\left(\frac{-a\left(1-2a\right)}{\varepsilon^{2}}\varepsilon^{2}\beta u^{2}\right)\\ &\leq \exp\left(L_{a}u^{2}\right)\end{aligned}$$

Majorons maintenant $\left|\Delta X_{t}^{0}\right|$ et $\left|\Delta X_{t}^{\varepsilon}-\Delta X_{t}^{0}\right|$ pour $0\leq t\leq T$ et $u\in U_{\theta,\varepsilon}$. Comme la fonction $g\left(s\right)$ est continue sur $[\delta,1]$ donc bornée par M, on en déduit que

$$\begin{aligned}X_{t}^{0} &= x_{0}+\int_{0}^{t}\left(c\int_{\delta}^{1}X_{v-s}^{\varepsilon}g\left(s\right)\ ds\right)dv\\ &\leq x_{0}+\int_{0}^{t}\left(c\int_{\delta}^{1}X_{v-s}^{\varepsilon}g\left(s\right)\ ds\right)dv\\ &\leq x_{0}+Mc\int_{0}^{t}\left(\int_{t-1}^{\delta-1}X_{u}^{\varepsilon}du\right)dv\\ &\leq x_{0}+M_{1}\int_{0}^{t}X_{u}^{\varepsilon}\ du\end{aligned}$$

où $M_{1}=MTc$.Par suite, le lemme de Granwall (cf.[11]) donne

$$X_{t}^{0}\leq x_{0}e^{M_{1}t}$$

La fonction $X_{t}^{0}=x_{0}$ pour $t<\delta$. Alors pour tout $t\in[\delta,2\delta]$ et $s\in[\delta,1]$, $X_{t-s}^{0}=x_{0}$.Par conséquent, de la condition **C1** on en déduit

$$\frac{dX_{t}^{0}}{dt}=x_{0}c\int_{\delta}^{1}g\left(s\right)ds\ >0$$

Par induction X_{t}^{0} est strictement croissante $[\delta,T]$ (cf. preuve du lemme en annexe). Par suite

$$x_{0}\leq\quad X_{t}^{0}\leq\ x_{0}e^{M_{1}t}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left|\Delta X_t^0\right| &= \left|S_t\left(X^0,\theta+\varepsilon u\right)-S_t\left(X^0,\theta\right)\right| &(2.16)\\
&= \left|(c+\varepsilon u)\int_\delta^1 X_{t-s}^0 g(s)\,ds - c\int_\delta^1 X_{t-s}^0 g(s)\,ds\right| \\
&= \left|\varepsilon u\int_\delta^1 X_{t-s}^0 g(s)\,ds\right| \\
&\le \varepsilon\left|u\right|\int_{t-1}^{\delta-1}\left|X_u^0 g(t-s)\right|du \\
&\le \varepsilon M\left|u\right|\int_0^T X_u^0 du \\
&\le \varepsilon\ x_0 M\left|u\right|\int_0^T e^{M_1 t}du := \varepsilon\ M_2\left|u\right|
\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
\left|\Delta X_t^\varepsilon-\Delta X_t^0\right| &= \left|\varepsilon u\int_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon g(s)\,ds - \varepsilon u\int_\delta^1 X_{t-s}^0 g(s)\,ds\right| &(2.17)\\
&\le \varepsilon\left|u\right|\int_\delta^1\left|X_{t-s}^\varepsilon - X_{t-s}^0\right| g(s)\,ds \\
&\le \varepsilon\left|u\right|\int_\delta^1\sup_{\delta\le u\le t}\left|X_u^\varepsilon - X_u^0\right| g(t-u)\,du \\
&\le \varepsilon\left|u\right|\left(C\varepsilon\sup_{\delta\le u\le t}\left|W_t\right|\right)M_3 \\
&\le \varepsilon^2 M_4\sup_{\delta\le u\le t}\left|W_t\right|\left|u\right|
\end{aligned}$$

En utilisant la majoration suivante (cf. p.18 de [12])

$$\mathbb{E}_\theta\left(\exp\left(l\sup_{0\le t\le T}\left|W_t\right|\right)\right)\le 2\left(1+Tl^2\right)\exp\left(\frac{1}{2}Tl^2\right)$$

et les relation (2.17) et (2.16), on obtient

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\theta\left(\exp\left(\frac{2a\,(1-a)}{\varepsilon^2}\int_0^T\left|\Delta X_t^0\right|\left|\Delta X_t^\varepsilon-\Delta X_t^0\right|dt\right)\right)\\
\leq\ & \mathbb{E}_\theta\left(\exp\left(2a\,(1-a)\,\varepsilon M_2M_4T\,|u|\sup_{0\leq t\leq T}|W_t|\right)\right)\\
\leq\ & \mathbb{E}_\theta\left(\exp\left(\varepsilon M_aT\,|u|\sup_{0\leq t\leq T}|W_t|\right)\right)\\
\leq\ & 2\left(1+T\varepsilon^2M_a^2u^2\right)\exp\left(\frac{1}{2}T\varepsilon^2M_a^2u^2\right)\\
\leq\ & 2\exp\left(\frac{3}{2}T\varepsilon^2M_a^2u^2\right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(Z_\varepsilon\,(u)\geq e^{-\gamma u^2}\right) &\leq 2e^{\alpha\gamma u^2}e^{-L_au^2}\left(2e^{\frac{3}{2}T\varepsilon^2M_a^2u^2}\right)\\
&\leq 2e^{u^2\left(\alpha\gamma-L_a+\frac{3}{2}T\varepsilon^2M_a^2\right)}
\end{aligned}$$

Si on choisit α et γ tels que $L_a\geq 2T\varepsilon^2M_a^2$, $0\leq\gamma\leq\dfrac{1}{4\,(a+1)}\,L_a$, nous arrivons à

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(Z_\varepsilon\,(u)\geq e^{-\gamma u^2}\right) &\leq 2e^{u^2\left(\alpha\gamma-L_a+\frac{3}{2}L_a\right)}\\
&\leq 2e^{u^2\left(\alpha\gamma-L_a+\frac{3}{2}L_a\right)}\\
&\leq 2e^{u^2\left(\alpha\gamma-\frac{1}{4}L_a\right)}\\
&\leq 2e^{u^2(\alpha\gamma-(a+1)\gamma)}\\
&\leq 2e^{\gamma u^2}
\end{aligned}$$

D'où lemme . ■

Preuve: du théorème2.2 Pour la démonstration de ce théoème, nous suivons le théorème 1.1 .p174 de [7]. Soit K compact de Θ. Dans la suite on note θ pour θ_0.Posons $\hat{u}=\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta)\left(\hat{\theta}_\varepsilon-\theta\right)$. De la définition de $\widehat{\theta}_\varepsilon$ et des équivalences des lois induites par les solutions de (2.1), $\hat{u}$ vérifie :

$$Z_{\varepsilon,\theta}\,(\hat{u})=\sup_{u\in U_{\varepsilon,\theta}}Z_{\varepsilon,\theta}\,(u)$$

Les relations du processus $(Z_{\varepsilon,\theta}(u), \quad u \in \mathbb{R})$ sont dans $C_0(\mathbb{R})$ (cf.[7]) .

Notons par $\mu_{\varepsilon,\theta}$ la loi du processus $Z_{\varepsilon,\theta}(\cdot)$ induite sur cet espace. On déduit de la condition LAN, la convergence des lois de dimention finies du processus $Z_{\varepsilon,\theta}(\cdot)$ uniformément par rapport à θ dans K. Des lememes 2.1 et 2.2, on en déduit que la famille des processus $\left(\mu_{\varepsilon,\theta}, \ \theta \in \Theta\right)$ est relativement compact dans $C_0(\mathbb{R})$ uniformément pour $\theta \in K$ (cf. [7]). Donc

$$\mu_{\varepsilon,\theta} \Longrightarrow \mu_\theta \quad \text{quand } \varepsilon \longrightarrow 0$$

Où μ_θ est la loi du processus défini par

$$Z_\theta(u) = \exp\left[u\xi - \frac{1}{2}u^2\right]$$

avec la loi de la variable ξ est normal $N(0,1)$. la convergence est uniforme par rapport à $\theta \in K$.

1)**Convergence en probabilité** D'une part, des lemmes 2.1 et 2.2, on déduit comme dans ([7], p.433) , pour tout $l > 0$

$$\sup_{\theta \in K} \mathbb{P}_\theta^\varepsilon \left(\sup_{|u| \geq l} Z_{\varepsilon,\theta}(u) > \exp\left(\left(-\frac{\gamma}{4}\right) l^2\right)\right) \leq C \exp\left(\left(-\frac{\gamma}{8}\right) l^2\right) \tag{2.18}$$

où $\gamma > 0$ et $C > 0$. il en résult des formules (2.14) et (2.18) et $Z_{\varepsilon,\theta}(0) = 1$, pour tout $\beta > 0$

$$\begin{aligned}
& \sup_{\theta \in K} \mathbb{P}_\theta^\varepsilon \left[\left|\hat{\theta}_\varepsilon - \theta\right| > \beta\right] \\
= & \sup_{\theta \in K} \mathbb{P}_\theta^\varepsilon \left[|\Phi_\varepsilon(\theta)\hat{u}| > \beta\right] \\
= & \sup_{\theta \in K} \mathbb{P}_\theta^\varepsilon \left[\sup_{|u| > \beta|\Phi_\varepsilon(\theta)|^{-1}} Z_{\varepsilon,\theta}(u) > \sup_{|u| < \beta|\Phi_\varepsilon(\theta)|^{-1}} Z_{\varepsilon,\theta}(u) \geq Z_{\varepsilon,\theta}(0)\right] \\
\leq & \sup_{\theta \in K} \mathbb{P}_\theta^\varepsilon \left[\sup_{|u| > \beta|\Phi_\varepsilon(\theta)|^{-1}} Z_{\varepsilon,\theta}(u) > 1\right] \\
\leq & C_1 \exp\left(-\frac{\gamma}{8}\beta^2 |\Phi_\varepsilon(\theta)|^{-2}\right) \\
\leq & C_1 \exp\left(-\frac{\gamma}{8}\beta^2 \frac{|I(\theta)|}{\varepsilon^2}\right) \\
\leq & C_1 \exp\left(\frac{-C_2}{\varepsilon^2}\beta\right)
\end{aligned}$$

le majorant ci-dessus tend vers 0 quand ε tend vers 0, d'où la convergence de l'éstimateur.

2) **Normalitée asymptotique :**

Soit D un pavé borné de $\mathbb{R}$ tel que :

$$\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(\hat{u} \in \partial D\right) = 0$$

où ∂D est la frontière de D. Considérons les fonctionnelles L_D et $L_{\partial D}$ définies sur $C_0\left(\mathbb{R}\right)$ par :

$$L_D\left(h\right) = \sup_D h(x) \qquad \text{et} \qquad L_{D^c}\left(h\right) = \sup_{D^c} h(x)$$

L_D et $L_{\partial D}$ sont continues par rapport à la métrique uniforme sur $C_0\left(\mathbb{R}\right)$. Comme le processus $Z_\theta\left(\cdot\right)$ atteint son maximum au point $\xi \hookrightarrow N\left(0,1\right)$, alors

$$\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(\ L_D\left(Z_\theta\right) -\ L_{D^c}\left(Z_\theta\right) = 0\right) =\ \mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(\xi \in \partial D\right) = 0$$

Soit A_ε les points de $\mathbb{R}$ où le processus $Z_{\varepsilon,\theta}\left(\cdot\right)$ atteine son maximum, puisque $Z_{\varepsilon,\theta} \Longrightarrow\ Z_\theta$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(A_\varepsilon \subset D\right) &= \quad \mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(\ L_D\left(Z_\theta\right) -\ L_{D^c}\left(Z_\theta\right) > 0\right) \\ &= \ \mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(\xi \in D\right) \end{aligned}$$

or le diamètre de A_ε tend vers 0 en probabilité avec ε, donc

$$\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(\hat{u} \in D\right) \longrightarrow\ \mathbb{P}_\theta\left(\xi \in D\right)$$

d'où la convergence en loi.

3) **Convergence des moments**

On a pour tout $p > 0$

$$\begin{aligned}
& \sup_{\varepsilon \in]0,1[} \sup_{\theta \in K} \mathbb{E}_{\theta}^{\varepsilon} \left| \Phi_{\varepsilon}^{-1}(\theta) \left(\hat{\theta}_{\varepsilon} - \theta \right) \right|^{p} \\
\leq & \sup_{\varepsilon \in]0,1[} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)^{p} \times \sup_{\theta \in K} \mathbb{P}_{\theta}^{\varepsilon} \left[\left| \hat{\theta}_{\varepsilon} - \theta \right| \left| \Phi_{\varepsilon}^{-1}(\theta) \right| > l \right] \\
\leq & \left[1 + C \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)^{p} \right] \exp\left(\frac{-\gamma}{8} \, l^{2} \right) \\
< & \infty
\end{aligned}$$

Donc la famille des variables aléatoires $\left(|\hat{u}|^{p}, \, \varepsilon \in]0,1[\right)$ est uniformément intégrables où $\hat{u} = \Phi_{\varepsilon}^{-1}(\theta) \left(\hat{\theta}_{\varepsilon} - \theta \right)$. le résultat se réduit de la normalité asymptotique obtenue précedement et de [8] p.32.

4) **Efficacité asymptotique**

Les estimateurs qui réalisent l'inégalité dans le théorème ci-dessus (borne de Hàjek) pour tout $\theta_0 \in \Theta$, sont dites asymptotiquement efficaces. Pour l'étude du risque quadratique, on considére les fonctions ω de la forme $\omega(x) = |x|^{d}$, $d > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Comme la famille des lois $(\mathbb{P}_{\theta}^{\varepsilon}, \; \theta \in \Theta)$ est LAN en tout point de Θ, pour montrer l'efficacité des estimateurs il suffit de prouver qu'il existe λ dans $]0,1]$ tel que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{|\theta - \theta_0| < \left| \Phi_{\varepsilon}^{-1}(\theta_0) \right|^{\lambda}} \mathbb{E}_{\theta}^{\varepsilon} \left| \Phi_{\varepsilon}^{-1}(\theta_0) \left(\widehat{\theta}_{\varepsilon} - \theta \right) \right|^{d} = \mathbb{E} \left| \xi \right|^{d} \tag{2.19}$$

(cf. [10]p.77). Pour tout $\theta_0 \in \Theta$, on a l'identité suivante :

$$\begin{aligned}
& \sup_{|\theta - \theta_0| < \left| \Phi_{\varepsilon}^{-1}(\theta_0) \right|^{\lambda}} \mathbb{E}_{\theta}^{\varepsilon} \left| \Phi_{\varepsilon}^{-1}(\theta_0) \left(\hat{\theta}_{\varepsilon} - \theta \right) \right|^{d} \\
= & \sup_{|\theta - \theta_0| < \left| \Phi_{\varepsilon}^{-1}(\theta_0) \right|^{\lambda}} \mathbb{E}_{\theta}^{\varepsilon} \left[\left| \left(\frac{\Phi_{\varepsilon}^{-1}(\theta_0)}{\Phi_{\varepsilon}^{-1}(\theta_0)} + 1 - 1 \right) \left(\Phi_{\varepsilon}^{-1}(\theta_0) \left(\hat{\theta}_{\varepsilon} - \theta \right) \right) \right|^{d} \right]
\end{aligned}$$

Donc pour montrer(2.19) , il suffit de vérifier les deux affirmations suivantes :

a)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{|\theta - \theta_0| < \left| \Phi_{\varepsilon}^{-1}(\theta_0) \right|^{\lambda}} \left| \Phi_{\varepsilon}(\theta) \, \Phi_{\varepsilon}^{-1}(\theta_0) - 1 \right| = 0$$

or ceci découle du fait que $\Phi_{\varepsilon}(\theta) = \varepsilon I^{-\frac{1}{2}}(\theta)$ et que $I(\theta)$ est uniformément continu sur le compact K.

b)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{|\theta - \theta_0| < \left|\Phi_{\varepsilon}^{-1}(\theta_0)\right|^{\lambda}} \mathbb{E}_{\theta}^{\varepsilon} \left|\Phi_{\varepsilon}^{-1}(\theta_0)\left(\hat{\theta}_{\varepsilon} - \theta\right)\right|^{d} = \mathbb{E}\left|\xi\right|^{d}$$

qui n'est autre que la convergence des moments établie en 3) . D'où le théorème . ■

Chapitre 3

Simulations

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous simulons des trajectoires de processus de diffusion par la méthode d'Euler-Maruyama (cf,[2],[3], [4]). Pour l'analyse statistique des estimateurs nous utilisons le logiciel **R** à l'aid du package **Sim.DiffProc** (Simulation of Diffusion Processes). Nous simulons des trajectoires du mouvement brownien à l'aide de la bibliothèque "far" développée par J.Damons et S.Guillas (Modelization for Functional AutoRegressive processes Package: far Version: 0.6-0 (2005-01-10) License: LGPL-2.1 version 2.14.0 (31-10-2011) du logiciel R). Plus précisement, elle utilise la décomposition de Karhunen Loève du mouvement brownien sur l'intervalle $[\delta, T]$:

$$W_u = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{2T} Y_j^* \frac{\sin\left[(j-1/2)\,\frac{\pi u}{T}\right]}{\pi\,(j-1/2)}, \qquad u \in [\delta.T]$$

où Y_j^* sont des variables aléatoires i.i.d $N\ (0,1)$et où les sommes infinies sont approximées par des sommes finies (cf. [9]) .Par la suite, à l'aide de la la méthode d'Euler-Maruyama nous simulons des trajectoires de processus de diffusions définies par les EDS ci dessous. Les graphes sont obtenus par le Logiciel R qui possède des possibilités pour explorer les données et illustrer les comportements des estimateurs.

3.2 Estimation d'un paramètre

Nous simulons les trajectoires de processus de diffusion vérifiant l'équation différentielle stochastique suivante (ces simulations sont présentés dans la thèse de doctorat de M Benyahia (voir [1]):

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = \left(c_1 \int\limits_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon \, g\,(s)\, ds \right) dt + \varepsilon dW_t \quad \text{si} \quad t \in [\delta, T] \\ X_s = x_0 \qquad\qquad\qquad \text{si} \quad -1 \leq s < \delta \end{cases}$$

on choisit $c_1 = 0.5$, $\delta = 0.1$, $x_0 = 2$, $T = 2$ et posons $g\,(s) = cos((pi/2) * s)$.

La figure suivante présente une trajectoire observée de $(X_t^\varepsilon, t \in [\delta, T])$ pour $\varepsilon = 0.99$

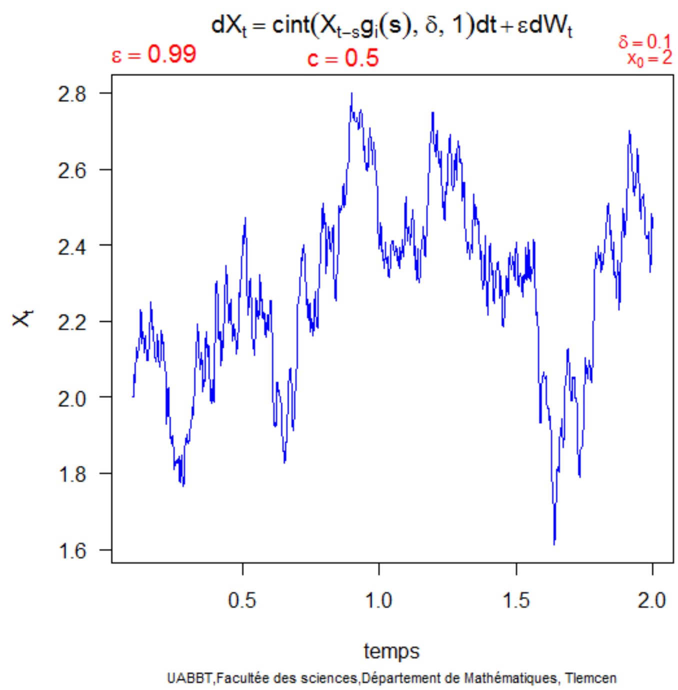

Figure 1

La figure suivante présente une trajectoire observée de $(X_t^\varepsilon, t \in [\delta, T])$ pour $\varepsilon = 0.01$

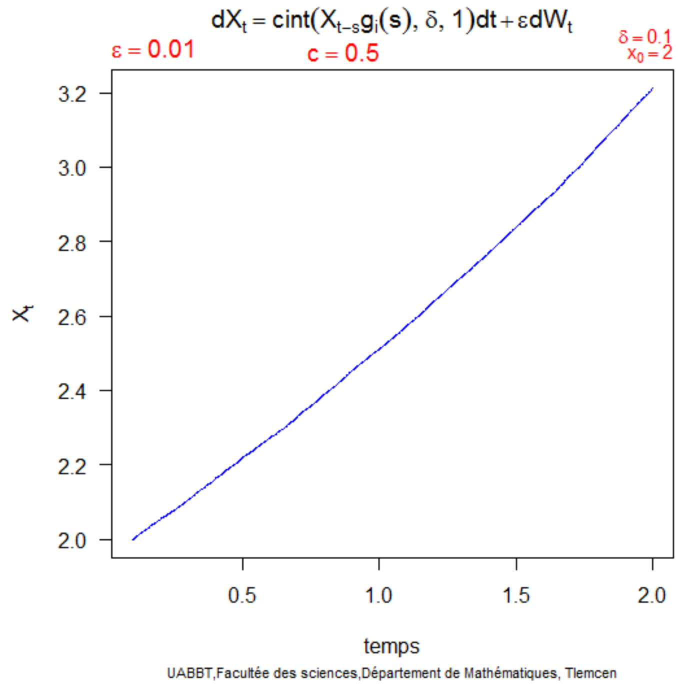

Figure 2

3.2.1 Comportement de l'estimateur EMV

La figure 3 présente le comportement de l' estimateur EMV $\hat{c}_1$ du coefficient $c_1 = 0.5$ quand ε tend vers 0

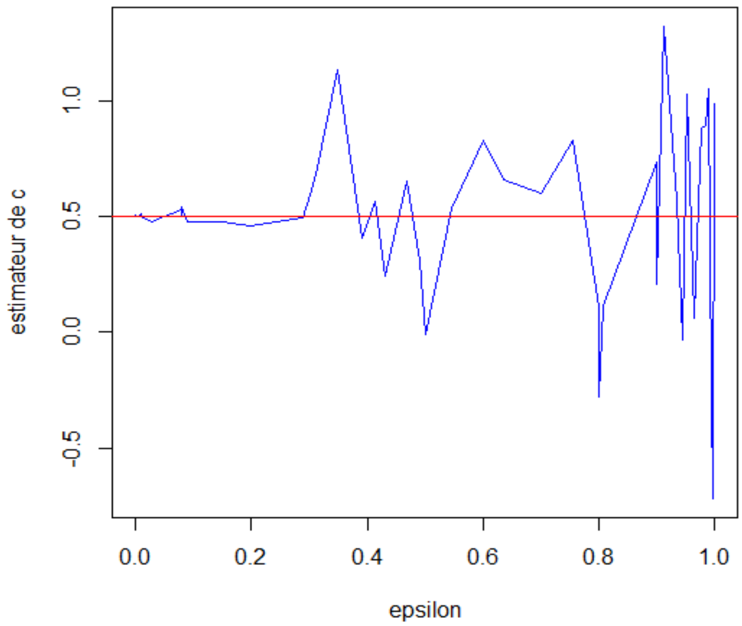

Figure 3

3.2.2 Conclusion

Nous remarquons que dans la simulation il y 'a un bon comportement des estimateurs quand ε tend vers 0.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié un cas particulier déjà étudié dans la thèse du doctorat de Madame W.BENYAHYA dans (voir [1]), nous avons étudié l'estimation paramétrique d'un drift dans un processus de type diffusion avec une mesure des retards par la théorie générale de Ibragimov-Hasminski (cf,[7]) et Y. Kutoyants(cf,[10]). Nous avons supposé que la mesure des retards admet une densité avec un developpement fini sur un systeme de fonctions données. Nous avons étudié les estimateurs du maximum de vraisemblance. Nous avons aussi présenté des simulations numériques pour illuster le comportement de cet estimateur.

Bibliographie

[1] **Benyahia Wahiba**,Estimation paramétrique de la densité des retards dans un processus de diffusion, Thèse de Doctorat en sciences Mthématiques, 2012.

[2] **Boukhetala K-Guidoum A** : Sim.Diff Proc: Simulation of Diffusion processes, *2011. R package version 2.0.*

[3] **Carletti M** : Numerical solution of stochastic differential problems in the biosciences. *Journal of Computational and Applied Mathematics 185, 2006, 422-440..*

[4] **Chenggui Y-Xuerong M** : Convergence of the Euler–Maruyama method for stochastic differential equations with Markovian switching. *Mathematics and Computers in Simulation 64, 2004, 223–235.*

[5] **Guidoum Arselane**, Conception dun Pro Logiciel Interactif sous R pour la simulation de processus de Diffusion, Mémoire de Magister en Probabilités & Statistiques, Université de Houari Boumedienne, 2012.

[6] **Hàjek J** : Local asymptotic minimax and admissibility in estimation. *In 6-th Proc Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab., 1972, 1, 175-194.*

[7] **Ibragimov I.A-Hasminski R.Z** : *Statistical Estimation: Asymptotic theory.* Springer, New York, 1981.

[8] **Billingsley P** : *Convergence of probability Measures,* Wiley, New York, 1968.

[9] **Pumo B** : Prediction of continuous time processes by C(0.1) - valued autoreghressive process. *Statist. Inf. Stoch. Proc. I, 1998, 139-153.*

[10] **Kutoyants Yu**. : *Parameter Estimation For Stochastic Processus*. Berlin, Heldermann, 1984.

[11] **Lipster R.S-Shiryaev A.N** : *Statistics of Random Processus*, *vol. 1*, Springer, New York, 2000.

[12] **Kutoyants Yu:** Identication of Dynamical Systems with small noise. Kluwer,Dordrecht, 1994.

Résumé

Nous concéderons l'estimation de la densité de la mesure des retards dans un processus de type diffusion en estimant ces coefficients dans un système de fonctions par la méthode du maximum de vraisemblance EMV dans l'asymptotique des petites diffusions, nous utilisons la théorie générale de Ibragimov-Hasminski, et de Kutoyants pour établir la normalité asymptotique locale LAN (LeCam condition), la convergence, la normalité asymptotique et l'efficacité des estimateurs. Nous donnons aussi des simulations numériques sur les estimateurs EMV.

Abstract :

We study the estimation of the delay measure density in type diffusion processes. We consider the maximum likelihood of a finite number of density coefficients by the Ibragimov-Hasminski and Kutoyants approach. For these estimators we give the LAN condition , consistency, asymptotic normality and effenciency . We also present some numerical simulations on maximum likelihood of estimators of the parameters.

ملخص:

في هذه المذكرة نناقش تقدير كثافة احتمال ا لقياس في سيرورة عشوائية من نوع التشتت و هذا عن طريق تقدير معلماته بواسطة طريقة الإمكان الأكبر ، فبالنسبة لهذه الطريقة سنعتمد على النتائج العامة ل Ibragimov-Hasminski و kutoyants من اجل الحصول على الاعتدال التقارب الموضعي، التقارب ،الاعتدال و الفعالية .

.