REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
NISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCEN

THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité: Géométrie Différentielle

Par :

ABDELMALEK Mohammed

Sur le thème

Sur les sous-variétés d'espaces pseudo-riemanniens

Soutenue publiquement le 09/11/2017 à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr DIB Hacen	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mr BENALILI Mohammed	Professeur	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
Mr RAHMANI Noureddine	Professeur	Université USTO Oran	Examinateur
Mr BEKKAR Mohammed	Professeur	Université Es Senia Oran	Examinateur
Mr LANSARI Azzedine	Professeur	Université de Tlemcen	Examinateur

Laboratoire de Systèmes Dynamiques et Applications (SDA)
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie

Remerciements

Je tiens, tout d'abord, à exprimer toutes ma reconnaissance et ma gratitude à mon Directeur de recherche, le Professeur Mohammed Benalili, pour son soutien académique, ses précieuses orientations et ses encouragements.

Mes remerciements vont également à Monsieur Dib Hacen, Professeur à l'Université de Tlemcen, qui a accepté de présider le jury.

Je remercie Monsieur Noureddine Rahmani, Professeur à l'Université d'USTOran, Monsieur Mohammad Bekkar, Professeur à l'Université ES Senia Oran et Monsieur Azzedine Lansari, Professeur à l'Université de Tlemcen, d'avoir examiner ma thèse et de participer à mon jury. Je les remercie tous pour leurs disponibilité, les remarques et les suggestions sur mon travail.

Je remercie aussi l'équipe sympathique du département de Mathématiques.

Un grand merci aussi à tous mes collègues du groupe de géométrie différentielle.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

DEDICACES

Au nom du dieu le clément et le miséricordieux louange à ALLAH le tout puissant

Je dédie cette thèse …

A la mémoire de mon frère ….

A mes très chers parents

Affable, honorable, aimable : vous représentez pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

Vos prières et vos bénédictions m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études.

Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que vous méritez pour tous les sacrifices que vous n'avez cessé de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte.

Vous avez fait plus que des parents puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études.

Je vous dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse Dieu, le tout puissant, vous préserver et vous accorder santé, longue vie et bonheur.

A ma très chère femme

Quand je t'ai connu, j'ai trouvé la femme de ma vie, mon âme sœur et la lumière de mon chemin.

Ma vie à tes cotés est remplie de belles surprises.

Tes sacrifices, ton soutien moral et matériel, ta gentillesse sans égal, ton profond attachement m'ont permis de réussir mes études.

Que dieu réunisse nos chemins pour un long commun serein et que ce travail soit témoignage de ma reconnaissance et de mon amour sincère et fidèle.

A mon ange Anes

Tous les mots ne sauraient exprimer mon amour, tu es la joie de ma vie. J'espère que ma thèse sera pour toi une source de fierté et qu'elle sera un exemple à suivre. Ta joie de vivre et ton sourire ont été pour moi le meilleur encouragement que je puisse avoir. Que Dieu te garde et te protège.

À mes très chères sœurs.
À mes très chers neveux et nièces Rofaida, Mido, Amir, Aymen et Moussa.
À toutes mes amies, et surtout Isamil, Tareq et Zakaria.

À tous ceux que j'aime et qui me sont chers, je dédie ce travail en témoignage de ma profonde gratitude et inestimable respect.

Table des Matières

Introduction

Une question fondamentale en géométrie différentielle est l'étude des surfaces (resp hypersurfaces) à courbure moyenne constante (plongées ou immergées) dans l'espace Euclidien.

En 1951, Hopf à introduit une classification des surfaces à courbure moyenne constante; il a prouvé un résultat concernant les sphères en dimension 2 formulé dans le théorème suivant :

Théorème 0.1 *[23] Soit S une surface simplement connexe, à courbure moyenne constante, alors S est une sphère ronde.*

La préoccupation qui en découle est : peut-on étendre le résultat précédent dans le cas des surfaces de genre quelconque? Hopf avait conjecturé que la réponse est oui.

Dans une séries de trauvaux entre 1956 et 1962, Alexandrov avait prouvé cette conjecture d'abord dans le cas des surfaces plongées, et ensuite en dimension arbitraire, bien que le théorème de Hopf soit faux en dimensions supérieures comme l'a montré plus tard Hsiang [24].

Théorème 0.2 *(Alexandrov [1]) Soit $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ une hypersurface à courbure moyenne constante. Si S est plongée, alors c'est une sphère ronde.*

Reilly avait démontré le résultat précédent moyennant une approche différente reposant sur le développement d'une série de formules d'intégration (Voir [37]).

En 1988, Ros [40] a étendu le théorème précédent au cas des hypersurfaces fermées (compactes sans bord) plongées dans l'espace Euclidien à courbure scalaire constante.

Notons que dans le théorème d'Alexandrov, l'hypothèse de plongement est nécéssaire. Cependant il existe des surfaces compactes à courbure moyenne constante immergées dans $\mathbb{R}^3$. Citons à titre d'exemple les tores de Wente [46]. D'autres exemples ont été construits par Hsiang, Tang, Yau en dimension supèrieure [24].

Une généralisation de la courbure moyenne et la courbure scalaire, est la courbure moyenne d'ordre supérieure H_r, $r = 1, , , n$, qui est définie par les fonctions élémentaires symétriques des courbures principales de l'immersion.

En effet, H_1 est la courbure moyenne et H_2 définit une quantité géométrique qui est en relation avec la courbure scalaire.

Il est donc naturel d'essayer de généraliser les résultats précédents au cas des hypersurfaces à courbure moyenne d'ordre supérieure H_r constante.

En 1988, Ros a montré que son résultat précédent reste valide pour r arbitraire. Explicitement, il a démontré le théorème suivant:

Théorème 0.3 *[39] Soit Σ^{n-1} une hypersurface compacte, plongée dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$. Si H_r est constante pour un certain $r = 1, .., n$, alors Σ^{n-1} est une sphère.*

Koreevar a prouvé ce dernier résultat différement; il a fait usage de la méthode de reflexion d'Alexandrov. Il a aussi démontré que cette méthode reste applicable dans le cas des hypersurfaces de l'espace hyperbolique [28].

Considérons maintenant le cas des surfaces (resp hypersurfaces) à bord. Le cas le plus simple est lorsque le bord est sphérique, il est conjecturé que le disque et la calotte sphérique sont les seules surfaces compactes, à courbure moyenne constante, plongées dans $\mathbb{R}^3$, et enturées par un cerle.

En 1986 , Koiso [27] a donné une réponse partielle à ce problème. Il avait montré qu'une hypersurface de $\mathbb{R}^{n+1}$, de courbure moyenne constante non nulle et de bord Σ^{n-1}, compacte et orientée, fixée dans un hyperplan Π de $\mathbb{R}^n$, hérite des symétries de bord pourvu qu'elle soit plongée et qu'elle ne coupe pas l'extérieur de Σ^{n-1} dans l'hyperplan $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$. L'auteur obtient en conséquence que si Σ^{n-1} est une sphère de dimension $(n-1)$, alors M^n est symétrique par rapport à tout hyperplan passant par le centre de Σ^{n-1} et orthogonal à l'hyperplan Π, et par conséquent M^n est une calotte sphérique.

Rosenberg a étendu ce résultat au cas des hypersurfaces à courbure moyenne d'ordre supérieure constante H_r comme suit :

Théorème 0.4 *[41] Soient Σ^{n-1} une sous variété strictement convexe dans un hyperplan Π de $\mathbb{R}^{n+1}$, et M^n une hypersurface compacte plongée dans $\mathbb{R}^{n+1}$ à courbure moyenne d'ordre supérieure H_r constante non nulle et bordée par Σ^{n-1}. Si M^n est transverse à Π le long du bord Σ^{n-1}, alors M^n est inclue dans l'un des demi espaces de $\mathbb{R}^{n+1}$ déterminé par Π, et M^n hérite toutes les symétries de Σ^{n-1}. En particulier si Σ^{n-1} est une sphère, alors M^n est une calotte sphérique.*

Comme conséquence du théorème précédent, il a prouvé le résultat suivant:

Théorème 0.5 *Les seules hypersurfaces compactes, plongées dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$, à courbure moyenne d'ordre supérieur H_r $(2 \leq r \leq n)$ constante, et de bord sphérique sont les disques du plan (avec $H_r = 0$), et les calottes sphériques (avec $H_r \neq 0$).*

Dans un travail récent [5], les auteurs ont étudié la question précédente dans un contexte plus général. L'espace ambiant est une variété Rièmannienne $\overline{M}^{n+1}$ connexe et orientée de dimension $(n+1)$. P^n est une hypersurface connexe, orientée et totalement géodésique dans $\overline{M}^{n+1}$. $\Sigma^{n-1} \subset P^n$ est une sous-variété compacte, orientée de dimension $(n-1)$, plongée dans P^n. M^n est une hypersurface connexe et orientée de dimension n, à bord régulier ∂M^n. Pour cette configuration géométrique les auteurs ont étudié la question de symétrie qui s'annonce comme suit : *Comment est la géométrie de la variété M^n le long du bord ∂M^n relativement à l'inclusion $\Sigma^{n-1} \subset P^n$?*

Une réponse partielle a été fournie par l'expression suivante qui a lieu sur le bord ∂M^n : pour tout $1 \leq r \leq n-1$,

$$\langle T_r \nu, \nu \rangle = (-1)^r \, s_r \, \langle \xi, \nu \rangle^r \tag{1}$$

où T_r désigne la transformation de Newton classique associée à la seconde forme fondamentale de $M^n \subset \overline{M}^{n+1}$. ν est le champs unitaire de vecteurs conormal à ∂M^n orienté vers l'extérieur, ξ est le champs unitaire de vecteurs normal de $P^n \subset \overline{M}^{n+1}$ et $s_r = s_r(\tau_1, ..., \tau_{n-1})$ est la fonction symétrique élémentaire d'ordre r des courbures principales $\tau_1, ..., \tau_{n-1}$ de $\Sigma^{n-1} \subset P^n$ par rapport au champs de vecteurs normal sortant.

Comme conséquence directe de la formule (1), ils ont obtenu une relation forte entre la transversalité de M^n relativement à P^n le long du bord et l'ellipticité sur M^n de la transformation de Newton d'order r , T_r.

Ce fait et le Théorème (*0.4*) ont permis aux auteurs d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 0.6 *Soient Σ^{n-1}une sous-variété compacte strictement convexe de dimension $(n-1)$ de l'hyperplan $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$ et $\psi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ une hypersurface compacte et plongée de bord Σ^{n-1}. Supposons que pour tout $2 \leq r \leq n$, la courbure moyenne d'ordre r de M^n est constante non nulle. Alors M^n hérite toutes les symmétries de Σ^{n-1}. En particulier si le bord Σ^{n-1} est une sphère de dimension $(n-1)$, alors M^n est une calotte sphérique.*

Un résultat analogue a été prouvé par Alias et Malacarne au cas des hypersurfaces de type espace dans l'espace temps de Minkowski, en utilisant la même configuration géométrique. En particulier les auteurs ont obtenu les résultats suivants :

Théorème 0.7 *[7] Les seules hypersurfaces compactes de type espace dans l'espace temps de Minkowski à courbure extrinsèque H_r ($2 \leq r \leq n$ pair) constante, et de bord sphérique sont les boules de l'hyperplan (avec $H_r = 0$), et les calottes hyperboliques (avec $H_r > 0$).*

Théorème 0.8 *[7] Les seules hypersurfaces compactes de type espace dans l'espace temps de Minkowski à courbure instrinsèque H_r ($1 \leq r \leq n$ impair) constante, et de bord sphérique sont les boules de l'hyperplan (avec $H_r = 0$), et les calottes hyperboliques (avec $H_r \neq 0$).*

Dans ce travail, on tente d'étendre quelques résultats obtenus dans [5] au cas des hypersurfaces dans une variété pseudo-Riemanneinne, puis au cas des sous variétés d'une variété riemannienne de codimension arbitraire, en particulier la relation (1).

Cette thèse comprent trois chapitres répartis comme suit :

Dans le premier, on rappelle certains outils permettant une bonne compréhension des chapitres qui suivent. Outre les définitions, les notions classiques sur la géométrie riemannienne et pseudo-riemannienne et la théorie des immersions isométriques, on introduit la notion des tranfsormations de Newton ainsi que les transformations de Newton généralisées [11].

Dans le deuxiéme chapitre, on s'intéresse à la généralisation d'un résultat sur la transversalité de deux hypersurfaces d'une variété riemannienne obtenu par Alias, de Lira et Malacarne dans [5] au cas d'une variété pseudo-riemannienne. Pour cela on considère la configuration géométrique suivante :

Soient $\overline{M}^{n+1}$ une variété pseudo-riemannienne orientée de métrique $\langle , \rangle$, $P^n \subset \overline{M}^{n+1}$ une sous variété connexe, orientée et totalement ombilique dans $\overline{M}^{n+1}$, notons par $\Sigma^{n-1} \subset P^n$ une hypersurface de P^n, compacte de dimension $n-1$.

Soit $\Psi : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ une sous variété orientée, connexe et compacte de bord régulier Σ^{n-1}. Alors tout au long du bord ∂M^n, nous avons

$$\langle T_1\nu, \nu\rangle = \varepsilon_N \varepsilon_\nu s_1(\gamma) + (\varepsilon_N - 1)\langle A\nu, \nu\rangle .$$

Et pour tout $2 \leq r \leq n-1$

$$\begin{aligned}\langle T_r\nu, \nu\rangle &= \varepsilon_\nu \varepsilon_N^r \varepsilon_\eta^r s_r \langle \zeta, \nu\rangle^r + \varepsilon_\nu \langle A\nu, \nu\rangle \left\{\varepsilon_N^r \varepsilon_\nu \varepsilon_\eta^{r-1} s_{r-1} \langle \zeta, \nu\rangle^{r-1} - \langle T_{r-1}\nu, \nu\rangle\right\} \\ &\quad - \varepsilon_\nu \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \langle A\nu, e_i\rangle^2 \times \\ &\quad \left\{\varepsilon_N^r \varepsilon_i \varepsilon_\eta^{r-2} s_{r-2}(\widehat{\tau}_i) \langle \zeta, \nu\rangle^{r-2} + \sum_{j=2}^{r} (-1)^{j-1} (\varepsilon_i \varepsilon_\eta \tau_i)^{j-2} \langle \zeta, \nu\rangle^{j-2} \langle T_{r-j}\nu, \nu\rangle\right\}\end{aligned}$$

où T_r sont les transformations de Newton classiques, A la seconde forme fondamentale de l'inclusion $M^n \subset \overline{M}^{n+1}$ relativement au vecteur N normal à M^n, ν le champs de vecteurs global normal à Σ^{n-1} dans M^n, ζ le vecteur unitaire sortant normal à P^n , $\tau_1, ..., \tau_{n-1}$ sont les courbures principales de l'inclusion $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ et $s_r = s_r(\tau_1, ..., \tau_{n-1})$.

Comme conséquence immédiate de ce résultat, nous obtenons le théorème de la transversalité suivant :

Théorème 0.9 *Sous les hypothèses précédentes, si $P^n \subset \overline{M}^{n+1}$ est totalement géodésique* *dans $\overline{M}^{n+1}$, alors les hypersurfaces M^n et P^n sont transverses si l'un des opérateurs suivants est définie positif :*

$$T_1 + (1 - \varepsilon_N)\, A$$

ou

$$T_2 - \varepsilon_\nu (1 - \varepsilon_N) \langle A\nu, \nu\rangle T_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\varepsilon_\nu - \varepsilon_i) \langle A\nu, e_i\rangle^2 I$$

ou

$$T_r + \varepsilon_\nu \langle A\nu, \nu\rangle T_{r-1} - \varepsilon_\nu \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \langle A\nu, e_i\rangle^2 T_{r-2}$$

pour certain $r \geq 3$.

Dans le troisième chapitre, on étudit le problème précédent au cas d'une variété riemannienne de codimension arbitraire en faisant usage d'une nouvelle technique. Dans la première partie on applique notre méthode au cas des hypersurfaces (c'est à dire en codimension 1). En particulier nous retrouvons des résultats similaires à ceux obtenus par Alias, de Lira et Malacarne [5]. Dans la deuxième partie on étudie le problème précédent dans le cas de la codimension supérieure q, on utilise les transformations de Newton généralisées T_u ($u \in \mathbb{N}^q$) et les fonctions symmétriques généralisées σ_u introduites par Andrzejewski, Kozlowski et Niedzialomski [11].

On considère la configuration géométrique suivante :

Soient P^n et M^n de codimension q dans $\overline{M}^{n+q}$. Supposons que P^n est totalement ombilique dans $\overline{M}^{n+q}$. Comme précédement $\Sigma^{n-1} \subset P^n$ est le bord de M^n. Nous avons donc les opérateurs (deuxièmes formes fondamentales à

$$A_\Sigma,\ \ A_P^{\xi_1}, ..., A_P^{\xi_p},\ \ A^{N_1}, ..., A^{N_q}$$

qui correspondent aux inclusions $\Sigma^{n-1} \subset P^n$, $P^n \subset \overline{M}^{n+q}$, et $M^n \subset \overline{M}^{n+q}$; où $\xi_1, ..., \xi_q$ sont orthonormaux à P^n et $N_1, ..., N_q$ sont orthonormaux à M^n. Considérons les transformations généralisées de Newton (en abrégé GNT) suivantes

$$T_u = T_u\left(A^{N_1}, ..., A^{N_q}\right), \quad T_v = T_v\left(A_\Sigma,\ A^{\xi_1}|_\Sigma, ..., A^{\xi_q}|_\Sigma\right)$$

et

$$\widetilde{T_u} = \widetilde{T}_u\left(A^{N_1}|_\Sigma, ..., A^{N_q}|_\Sigma\right)$$

où $u \in \mathbb{N}^q$ et $v \in \mathbb{N}^{q+1}$.

Notre but est de montrer que

$$\langle T_u \nu; \nu\rangle = \widetilde{\sigma}_u$$

et

$$\widetilde{\sigma}_u = \sum_{|v|=|u|, vnotincreasing} c_v \sigma_v.$$

Où c_v est un coefficient indépendant de $\left(A^{N_1}|_\Sigma, ..., A^{N_q}|_\Sigma\right)$. Ces deux relations nous donnent

$$\langle T_u \nu; \nu\rangle = \sum_{|v|=|u|,\ v \text{ not increasing}} c_v \sigma_v.$$

La première égalité est la généralisation de la relation (4.8) dans [5] , tandis que la deuxième est la généralisation de la relation (6.4) dans [5]. De plus, la première est purement algébrique et la deuxième est obtenue en utilisant une correspondance entre $A_\Sigma,\ A^{\xi_1}|_\Sigma, ..., A^{\xi_q}|_\Sigma$ et $A^{N_1}|_\Sigma, ..., A^{N_q}|_\Sigma$ analogue à [5] dans le cas de la codimension une.

Les résultats obtenus dans ce chapitre s'énnoncent comme suit :

Proposition 0.1 *Soit* $\tilde{A} = (A_1|_\Sigma, ..., A_q|_\Sigma) = (\rho_1 A_\Sigma + \mu_1 I, \ldots, \rho_q A_\Sigma + \mu_q I)$. *Posons* $\tilde{\sigma}_u = \sigma_u(\tilde{A})$, *alors pour chaque multi-indice* $u \in \mathbb{N}^q$ *nous avons*

$$\tilde{\sigma}_u = \frac{1}{(n-1-|u|)!}\sum_{l \leq u} \begin{pmatrix} |l| \\ l \end{pmatrix} \rho^l \mu^{u-l} \begin{pmatrix} n-1-|l| \\ u-l \end{pmatrix} \sigma_{|l|}\left(A_\Sigma\right).$$

Où

$$\rho_\alpha = \langle \eta, N_\alpha \rangle, \quad \mu_\alpha = \langle V, N_\alpha \rangle$$

Proposition 0.2 *Soient* $\tilde{A} = (A_1|_\Sigma, ..., A_q|_\Sigma)$, *où* $A_\alpha|_\Sigma = (\rho_\alpha A_\Sigma + \mu_\alpha I)$, *et* $\overline{A} = (A_\Sigma, \mu_1 I, ..., \mu_q I)$. *Pour tout multi-indice* $u \in \mathbb{N}^q$, *posons* $\tilde{\sigma}_u = \sigma_u(\tilde{A})$ *et* $\overline{\sigma}_u = \sigma_u\left(\overline{A}\right)$. *Alors nous avons*

$$\tilde{\sigma}_u = \sum_{l \leq u} \begin{pmatrix} |l| \\ l \end{pmatrix} \rho^l \overline{\sigma}_{(|l|, u-l)}.$$

Proposition 0.3 *Soient* $A = (A_1, ..., A_q)$ *et* $\tilde{A} = (A_1|_\Sigma, ..., A_q|_\Sigma)$. *Posons* $\sigma_u = \sigma_u(A)$ *et* $\tilde{\sigma}_u = \sigma_u(\tilde{A})$. *alors*

$$\sigma_u = \tilde{\sigma}_u + \sum_\alpha C_\alpha \tilde{\sigma}_{\alpha_\flat(v)} + \sum_{\alpha^\sharp \beta^\sharp(0) \leq w \leq u} \sum_{\alpha, \beta} (-1)^{|w|-|v|+1} \binom{|u| - |w|}{u - w} B_\alpha^\top \tilde{A}^{u-w} B_\beta \tilde{\sigma}_{\alpha_\flat \beta_\flat(w)}$$

où $B_\alpha^\top = (\langle A_\alpha v, e_1 \rangle, ..., \langle A_\alpha v, e_{n-1} \rangle)$ *et* $C_\alpha = \langle A_\alpha v, v \rangle$.

Utilisant les résultats précédents, nous donnons une expression de GNT $T_u = T_u(\tilde{A})$, où $\tilde{A} = (A_1|\Sigma, \ldots, A_q|\Sigma)$, sur le bord Σ^{n-1} de M^n.

Proposition 0.4 *Soient* $\overline{M}^{n+q}$ *une variété riemannienne de dimension* $(n+q)$ *et* $P^n \subset \overline{M}^{n+q}$ *une sous variètè orientée et totalement ombilique dans* $\overline{M}^{n+q}$ *de dimension* n. *Notons par* $\Sigma^{n-1} \subset P^n$ *une hypersurface compacte de* P^n *de dimension* $(n-1)$. *Soit* $\Psi : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+q}$ *une sous variètè connexe, compacte et orientée de* $\overline{M}^{n+q}$ *de dimension* n *et de bord* $\Sigma^{n-1} = \Psi(\partial M)$. *Alors le long du bord* ∂M, *nous avons*

$$\langle T_u \nu, \nu \rangle = \tilde{\sigma}_u (A_1|_\Sigma, ..., A_q|_\Sigma).$$

Par la proposition *(0.4)* nous obtenons l'expression de $\langle T_u \nu, \nu \rangle$ en terme des fonctions symmétriques de A_Σ.

Corollaire 0.1 *Sous les conditions de la proposition (0.4), nous avons*

$$\langle T_u\nu,\nu\rangle = \frac{1}{n-1-|u|}\sum_{l\leq u}\binom{n-1-|l|}{|u|-l}\rho^l\mu^{u-l}\sigma_{|l|}(A_\Sigma).$$

Cette relation devient plus simple si on suppose que $P^n \subset \overline{M}^{n+q}$ est totalement géodésique.

Corollaire 0.2 *Sous les conditions de la proposition (0.4), si on suppose que $P^n \subset \overline{M}^{n+q}$ est totalement géodésique, alors pour chaque multi-indice u de longueur $|u| \leq n-1$, nous avons*

$$\langle T_u\nu,\nu\rangle = \rho^u\sigma_{|u|}(A_\Sigma)$$

Comme conséquence de ce résultat, nous obtenons le théorème de la transversalité suivant :

Théorème 0.10 *Sous les conditions du corollaire (0.2), les sous variètés M^n et P^n sont transverses le long du ∂M si pour certain multi-indice u de longueur $1 \leq |u| \leq n-1$, la transformation de Newton généralisée T_u est définie positive sur M^n .*

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre on introduit un certain nombre de notions dont on se sert tout au long des chapitres suivants. Outre les définitions et notions classiques sur la géométrie riemannienne et pseudo-riemannienne et la théorie des immersions isométriques, on introduit la notion des tranfsormations de Newton ainsi que les transformations de Newtons généralisées. Pour plus d'informations sur le sujet nous renvoyons le lecteur aux références ([5],[11],[18],[35]).

1.0.1 Généralités sur la géométrie pseudo-riemannienne

Définition 1.1 *Une structure pseudo-riemannienne dans une variété différentielle M (qu'on supposera toujours connexe) est une 2-forme bilinéaire symétrique, appelée métrique, non dégénérée dans le sens suivant: Etant donner un vecteur tangent X à M en un point p. Si $g(X,Y) = 0, \forall Y \in T_pM$, alors $X = 0$. Si de plus la métrique est définie positive dans le sens que $g(X,X) > 0$ pour tout vecteur non nul X, on dit que la métrique est positive, et on obtient une structure Rienammienne.*

Une variété pseudo-riemannienne est une variété différentielle muni d'une métrique pseudo-riemannienne.

La géométrie pseudo-riemannienne esr simplement une généralisation de la géométrie riemannienne. Plusieurs propriétés des métriques positives ne sont pas valides dans le cas général, comme l'inégalité de Cauchy-Schawrtz par exemple.

Remarque 1.1 *La condition de non dégénérécence implique la signification importante suivante:*

Etant donné un vecteur tangent X en T_pM. Si on connait la valeur de $g(X,Y)$, $\forall Y \in T_pM$, alors on peut déterminer d'une manière unique la valeur de X.

En pratique on a juste besoin de connaitre la valeur de $g(X, X_i)$, où $(X_1, ..., X_n)$ est une base de T_pM.

En effet, posons $g_{ij} = g(X_i, X_j)$, $1 \leq i, j \leq n$. Puisque g est non dégénérée, alors la matrice $(g_{ij})_{i,j}$ est inversible. Notons par g^{ij} les composants de sa matrice inverse. Posons $X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$

Donc $g(X, X_j) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i, X_j\right) = \lambda_i gij$.

Multipliant par g^{ij}, nous obtenons $\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} g^{ij} g(X, X_j)$. Et donc $X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$.

D'où

$$X = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} g(X, X_j) X_i \tag{1.1}$$

Définition 1.2 *Un vecteur non nul X est dit :*

1. *Positif (ou de type espace) si $g(X, X) > 0$.*

2. *Négatif (ou de type temps) si $g(X, X) < 0$.*

3. *Nul (ou de type lumière) si $g(X, X) = 0$.*

Par le théorème de Sylvester, en chaque point p de M, il existe une base orthonormale $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM, dans le sens que $g(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$ et $|g(e_i, e_i)| = 1$.

De plus le nombre m des vecteurs de la base qui sont négatifs ne dépend pas du choix de la base, ni du point p de M. Le nombre m s'appelle l'index de la variètè M, et le couple $(m, n-m)$ s'appelle la signature de M, on la note parfois par $\left(\underbrace{-,...,-}_{m\ fois}, \underbrace{+,...,+}_{n-m\ fois}\right)$.

Par exemple, si $m = 0$, la métrique est dite riemannienne, et si $m = 1$, alors on parle d'une variètè Lorentzienne. En particulier, si $n = 4$, et la signature de g est $(1, 3)$ alors l'espace pseudo-Euclidien noté $\mathbb{R}^3_1$ s'appelle l'espace de Minkowski, c'est l'exemple le plus simple de l'espace-temps relativiste. Si m et $n - m$ sont tous les deux non nuls, alors la métrique g est indéfinie.

Donc on parle d'une base orthonormale $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM si $g(e_i, e_i) = \varepsilon_i = \pm 1$, et la relation (1.1) devient

$$X = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(X, e_i) e_i$$

On note par $\mathbb{R}^n_q$ l'espace pseudo-Euclidien de dimension n, et d'index $q \geq 0$, dont le tenseur de métrique est donné par :

$$\langle .,. \rangle = -\sum_{i=1}^{q} dx_i \otimes dx_i + \sum_{i=q+1}^{n} dx_i \otimes dx_i$$

L'espace pseudo-Riemannien de De Sitter, d'index q est défini par :

$$S^n_q = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1}_q / \langle x, x \rangle = r^2 \right\}, \quad r > 0$$

Et l'espace pseudo-Riemannien anti-De Sitter, d'index q est défini par :

$$H^n_q = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1}_q / \langle x, x \rangle = -r^2 \right\}, \quad r > 0$$

Définition 1.3 *Soit M et $\overline{M}$ deux variétés pseudo-riemannienne de dimensions respc-tives m et n. Une application différentiable $\varphi : M \to \overline{M}$ est dite une immersion si l'application $d\varphi(p) : T_pM \to T_{\varphi(p)}\overline{M}$ est injective pour tout $p \in M$. Si de plus $\varphi : M \to$*

$\varphi(M) \subset \overline{M}$ est un homéomorphisme, où $\varphi(M)$ est munie de la topologie induite, φ est appelée un plongement. Si $M \subset \overline{M}$ et l'inclusion $i : M \subset \overline{M}$ est un plongement,on dit que M est une sous-variété de $\overline{M}$. Si φ est une immersion qui conserve la distance i.e.

$$\langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v)\rangle_{\varphi(p)} = \langle u, v\rangle_p \tag{1.2}$$

Alors, φ est dite une immersion isométrique.

Remarquons qu'une immersion induit sur M une structure pseudo-riemannienne à partir de celle de $\overline{M}$ donnée par la relation (1.2).

On peut voir que si $\varphi : M \to \overline{M}$ est une immersion, alors $m \leq n$. $(n - m)$ est appelée la codimension de l'immersion φ.

Définition 1.4 *Soit M une sous-variété d'une variété pseudo-riemannienne $\overline{M}$. L'espace normal de M est le sous espace vectoriel $(T_pM)^{\perp}$ de $T_p\overline{M}$ formé des vecteurs v qui sont normaux à T_pM. i.e.*

$$(T_pM)^{\perp} = \left\{v \in T_p\overline{M} \;/\; \langle v, w\rangle = 0, \forall w \in T_pM\right\}$$

Le fibré normal de M, noté $N(M)$ est la réunion d'espaces vectoriels définie par

$$N(M) = \cup_{p\in M}(T_pM)^{\perp} = \left\{(p, v) \;/\; p \in M, v \in (T_pM)^{\perp}\right\}$$

Soient M et $\overline{M}$ deux variétés pseudo-riemannienne connexes et orientables de dimensions n et $(n + m)$ respectivement et ∇, $\overline{\nabla}$ les connexion de Levi-Civita correspondantes.

Notons par $\varkappa(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs définis sur M.

Soit $\varphi : M \to \overline{M}$ une immersion isométrique. Alors pour tout point $p \in M$, il existe un voisinage U de p tel que $\varphi : U \to \overline{M}$ soit un plongement. Donc chaque vecteur $u \in T_pM$ donne naissance à un vecteur $d\varphi_p(u)$ de $T_{\varphi(p)}\overline{M}$. On peut donc identifier chaque vecteur $u \in T_pM$ avec $d\varphi_p(u) \in T_{\varphi(p)}\overline{M}$. De cette manière chaque espace tangent T_pM

est un sous espace vectoriel non dégénéré de $T_{\varphi(p)}\overline{M}$. Nous avons la décomposition en somme directe suivante :

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp}$$

où $(T_pM)^{\perp}$ est le complément orthogonal de T_pM dans $T_p\overline{M}$, qui est aussi un sous espace non dégénéré de $T_{\varphi(p)}\overline{M}$ appelé sous espace normal à M en p.

Donc chaque vecteur $u \in T_{\varphi(p)}\overline{M}$ se décompose d'une manière unique sous la forme

$$u = \tan u + nor\ u$$

Où $\tan u \in T_pM$ et $nor\ u \in (T_pM)^{\perp}$.

On considère le tenseur deux fois covariant et une fois contravariant suivant

$$\begin{array}{llll} B: & \varkappa(M) \times \varkappa(M) & \longrightarrow \varkappa(\overline{M}) \\ & (X, Y) & \longmapsto B(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \end{array}$$

L'application B est bilinéaire et symmétrique.

Pour tout $\eta \in (T_pM)^{\perp}$, nous avons la forme bilinéaire symmétrique suivante

$$\begin{array}{lll} H_\eta: & T_pM \times T_pM & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (u, v) & \longmapsto H_\eta(u, v) = \langle B(u, v), \eta \rangle \end{array}$$

Définition 1.5 *La seconde forme fondamentale (appelée parfois endomorphisme de Weingarten) est l'opérateur linéaire auto-adjoint A_η défini par*

$$\begin{array}{lll} A_\eta: & T_pM & \longrightarrow T_pM \\ & u & \longmapsto A_\eta u \end{array}$$

avec

$$\langle A_\eta u, v \rangle = H\eta(u, v) = \langle B(u, v), \eta \rangle$$

Et nous avons de plus :

$$A_\eta(u) = -(\overline{\nabla}_u \eta)^\top$$

Etant donnés $u \in T_pM$ et $\eta \in (T_pM)^\perp$, la composante tangentielle de $\overline{\nabla}_u \eta$ est :

$$(\overline{\nabla}_u \eta)^\top = -A_\eta(u)$$

La partie normale de $\overline{\nabla}_u \eta$ est donnée par l'équation de Wingarten :

$$(\overline{\nabla}_u \eta) = -A_\eta(u) + \overline{\nabla}_u^\perp \eta$$

Le champs de tenseurs de courbure associé à cette connexion est défini par :

$$R^\perp(u,v)\eta = \ \overline{\nabla}_v^\perp \overline{\nabla}_u^\perp \eta - \overline{\nabla}_u^\perp \overline{\nabla}_v^\perp \eta + \overline{\nabla}_{[u,v]}^\perp \eta$$

et est appelé le champs de tenseurs de courbure normale de la connexion.

Définition 1.6 *Soient M et N deux sous-variétés d'une variété pseudo-riemannienne $\overline{M}$. On dit que M et N sont transverses (et on note $M \pitchfork N$), si $M \cap N = \phi$, ou bien $\forall p \in M \cap N$, $T_pM + T_pN = T_p(\overline{M})$.*

Définition 1.7 *Soient M une sous-variété de $\overline{M}$ de dimension n orientable, de bord régulier ∂M et Σ une sous-variété orientable de $\overline{M}$ de dimension $(n-1)$. M est dite sous-variété de $\overline{M}$ de bord Σ, s'il existe une immersion isométrique $\varphi : M \to \overline{M}$ telle que la restriction de φ sur le bord ∂M soit un difféomorphisme sur Σ.*

Puisque A_η est un opérateur linéaire auto-adjoint, alors il existe une base de T_pM qui diagonalise A_η. Notons par $\{e_1, ..., e_n\}$ une telle base que l'on peut considérer comme base orthonormée.

On définit les n invariants algébriques :

$$S_r(x_1, ..., x_n) = \sigma_r(x_1, ..., x_n) \tag{1.3}$$

où $\sigma_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont les fonctions élémentaires symétriques données par :

$$\sigma_r(x_1, ..., x_n) = \sum_{i_1 \langle ... \langle i_r} x_{i_1} ... x_{i_r}.$$

Ces fonctions élémentaires ont des propriétés remarquables.

Lemme 1.1 *1. Pour $r \geq 1$:*

$$S_r(x_1, ..., x_n) = x_i S_{r-1}(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n) + S_r(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n) \tag{1.4}$$

2. pour tout $1 \leq r \leq n$:

$$S_r(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j}(x_1, ..., x_n) x_i^j. \tag{1.5}$$

Preuve 1.1 *1. Nous avons :*

$$\begin{aligned} S_r(x_1, ..., x_n) &= \sum_{i_1 \langle ... \langle i_r} x_{i_1} ... x_{i_r} \\ &= \sum_{\substack{i_1 \langle ... \langle i_r \\ i_j \neq i}} x_{i_1} ... x_{i_r} + \sum_{\substack{i_1 \langle ... \langle i_r \\ i_j \neq i}} x_{i_1} ... x_i ... x_{i_r} \\ &= \sum_{\substack{i_1 \langle ... \langle i_r \\ i_j \neq i}} x_{i_1} ... x_{i_r} + x_i \sum_{\substack{i_1 \langle ... \langle i_r \\ i_j \neq i}} x_{i_1} ... \widehat{x_i} ... x_{i_r} \\ &= S_r(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n) + x_i S_{r-1}(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. Faisons une démonstration par récurence sur r. Pour $r = 0$ nous avons par définition :

$$S_0(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n) = 1$$

Donc la propriété (1.5) est vraie pour $r = 0$. Supposons que l'égalité (1.5) soit vraie jusqu'a l'ordre $r - 1$. D'aprés la propriété (1.4) nous avons :

$$\begin{aligned} S_r(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n) &= S_r(x_1, ..., x_n) - x_i S_{r-1}(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n) \\ &= S_r(x_1, ..., x_n) + \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^{j+1} S_{r-1-j}(x_1, ..., x_n) x_i^{j+1} \end{aligned}$$

Posons $l = j + 1$, on trouve notre égalité.

Définition 1.8 *Soit $\varphi : M \to \overline{M}$ une hypersurface connexe et orientable dans une variété pseudo-riemannienne $\overline{M}$, et N le vecteur normal global à M dans $\overline{M}$. Notons par $\tau_1, ..., \tau_n$ les courbures principales de M. (c'est-à-dire les valeurs propres de l'opérateur de la seconde forme fondamentale $A = A_N$).*

La courbure moyenne d'ordre r $(r \geq 1)$ de M est définie par :

$$\binom{n}{r} H_r = \varepsilon^r S_r$$

où $\varepsilon = \langle N, N \rangle$, $S_r = S_r(\tau_1, ..., \tau_n)$ *et* $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

En particulier pour $r = 1$, nous avons :

$$H_1 = \frac{1}{n} \varepsilon S_1 = \frac{1}{n} \varepsilon tr A$$

C'est la définition classique de la courbure moyenne qui est l'une des courboures extrinsèques les plus importantes de l'hypersurface.

Pour $r = 2$, H_2 définit une quantité géométrique qui est en relation avec la courbure scalaire.

En général, lorsque r est impair, H_r est extrinsèque, et lorsque r est pair, H_r est instrinsèque.

Pour $r = n$ nous obtenons la courbure de Gauss de l'hypersurface :

$$H_n = \varepsilon^n S_n = \varepsilon^n \det(A)$$

Considérons maintenant B comme un champs de tenseurs symmétrique de type $(3,0)$:

$$\begin{aligned} B: \quad \varkappa(M) \times \varkappa(M) \times \varkappa(M)^{\perp} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y, \eta) &\longmapsto B(X, Y, \eta) = \langle B(X, Y), \eta \rangle \end{aligned}$$

La dérivée covariante de B est alors :

$$\overline{\nabla}_X B(X, Z, \eta) = X(B(Y, Z, \eta)) - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta) - B(Y, Z, \nabla^{\perp}_X \eta)$$

où,

$$\begin{aligned} \nabla^{\perp}_X \eta &= (\overline{\nabla}_X \eta)^N \\ &= \overline{\nabla}_X \eta - (\overline{\nabla}_X \eta)^{\top} \\ &= \overline{\nabla}_X \eta + A_\eta(X) \end{aligned}$$

Proposition 1.1 ***(équation de Codazzi)*** *Si M est une hypersurface de $\overline{M}$, alors pour tout $X, Y, Z \in \varkappa(M)$ et $\eta \in \varkappa(M)^{\perp}$ nous avons*

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = (\overline{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta)$$

Définition 1.9 *Soit M un sous variété riemannienne (resp pseudo-riemannienne) de dimension n, dans une variété riemannienne (resp pseudo-riemannienne) $\overline{M}$. Un point $p \in M$ est dit ombilique (resp géodésique) si l'opérateur de la senconde forme fondamentale est proportionnel à l'identité (resp identiquement nulle). M est dite totalement ombilique (resp géodésique) si tout point p de M est ombilique (resp géodésique). On peut* *aussi définir une sous variété totalement géodésique comme suit : M est dite totalement géodésique si et seulement si toutes les géodésiques de M sont des géodésiques de $\overline{M}$.*

1.0.2 Les transformations de Newton

Les transformations de Newton T_r sont définies par la relation récurente :

$$T_r : \varkappa(M) \longrightarrow \varkappa(M)$$

avec :

$$\begin{aligned} &T_0 = I \\ &T_r = S_r I - A T_{r-1} \end{aligned}$$

où I est l'identité dans $\varkappa(M)$. Ceci est équivalent à :

$$T_r = S_r I - S_{r-1} A + ... + (-1)^{r-1} S_1 A^{r-1} + (-1)^r A^r$$

Le polynôme caractéristique de l'opérateur A est défini par :

$$P_n(t) = \det(tI - A) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^r S_r t^{n-r}$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton, A est un zéro du polynôme caractéristique. i.e.

$$P_n(A) = 0$$

ce qui donne :

$$T_n = 0$$

On remarque que T_r commute avec A.

Proposition 1.2 *T_r est aussi un opérateur linéaire auto-adjoint.*

Preuve 1.2 *Faisons une démonstration par récurence sur r.*

Il est évident que :

$$T_0 = I$$

est un opérateur auto-adjoint.

Supposons que T_j soit un opérateur linéaire auto-adjoint pour $2 \leq j \leq r-1$.

Soient $u, v \in \varkappa(M)$.

$$\begin{aligned}
\langle T_r u, v\rangle &= \langle (S_r I - AT_{r-1})u, v\rangle \\
&= \langle (S_r I)u, v\rangle - \langle (AT_{r-1})u, v\rangle \\
&= \langle u, (S_r I)v\rangle - \langle (T_{r-1})u, Av\rangle \\
&= \langle u, (S_r I)v\rangle - \langle u, (T_{r-1})Av\rangle \\
&= \langle u, (S_r I - AT_{r-1})v\rangle \\
&= \langle u, T_r v\rangle
\end{aligned}$$

T_r est alors un opérateur auto-adjoint.

D'aprés le théorème de la diagonalisation simultanée, la base $\{e_1, ..., e_n\}$ diagonalisante A diagonalise aussi T_r, et on obtient :

Lemme 1.1 *1. Pour tout $i \in (1, ..., n)$, nous avons :*

$$T_r(e_i) = \mu_i e_i$$

où

$$\mu_i = \sum_{\substack{i_1 \langle ... \langle i_r \\ i_j \neq i}} x_{i_1} ... x_{ir} = S_r(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n).$$

2. Pour $0 \leq r \leq n$ *nous avons :*

$$tr(T_r) = (n-r)S_r$$

3. Pour $0 \leq r \leq n$ *nous avons :*

$$tr(AT_r) = (r+1)S_{r+1}$$

Preuve 1.3 *1. Faisons une démonstration par récurence sur* r*. Pour* $r = 1$ *nous avons :*

$$\begin{aligned} T_1(e_i) &= S_1 I(e_i) - A(e_i) \\ &= (x_1 + ... + x_n - x_i)e_i \\ &= S_1(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n)(e_i) \end{aligned}$$

Donc la relation est vraie pour $r = 1$.

Supposons que la relation soit vraie jusqu'a l'ordre $r-1$*. Nous avons :*

$$\begin{aligned} T_r(e_i) &= (S_r I - AT_{r-1})(e_i) \\ &= S_r(e_i) - AT_{r-1}(e_i) \\ &= S_r(e_i) - A(S_{r-1}(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n)(e_i)) \\ &= S_r(e_i) - S_{r-1}(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n)A(e_i) \\ &= (S_r(x_1, ..., x_n) - x_i S_{r-1}(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n))(e_i) \\ &= S_r(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n))(e_i) \end{aligned}$$

Donc :

$$\mu_{i,r} = \sum_{\substack{i_1 \langle ... \langle i_r \\ i_j \neq i}} x_{i_1} ... x_{ir} = S_r(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n).$$

2. Montrons que $tr(T_r) = (n-r)S_r$.

Nous avons :

$$(x+x_1)...(x+x_n) = \sum_{r=0}^{n} S_r(x_1,...,x_n)x^{n-r}$$

En dérivant les deux termes par rapport à x, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sum_{r=0}^{n} S_r(x_1,...,x_n)x^{n-r}) \quad = \sum_{r=0}^{n}(n-r)S_r(x_1,...,x_n)x^{n-r-1}$$

et :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(x+x_1)...(x+x_n) &= \sum_{i=1}^{n}(x+x_1)...(x+x_{i-1})(\widehat{x+x_i})(x+x_{i+1})...(x+x_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=0}^{n-1} S_r(x_1,...\widehat{x_i},...,x_n)x^{n-r-1}\\ &= \sum_{r=0}^{n-1}(\sum_{i=1}^{n} S_r(x_1,...\widehat{x_i},...,x_n))x^{n-r-1}\end{aligned}$$

Considérant le coefficient de x^{n-r-1} dans les deux dérivations, on trouve :

$$(n-r)S_r(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} S_r(x_1,...\widehat{x_i},...,x_n)$$

D'où le résultat.

3. Nous avons :

$$T_{r+1} = S_{r+1}I - AT_r$$

Donc :

$$AT_r = S_{r+1}I - T_{r+1}$$

ceci nous donne :

$$\begin{aligned} tr(AT_r) &= tr(S_{r+1}I - T_{r+1}) \\ &= S_{r+1}tr(I) - tr(T_{r+1}) \\ &= nS_{r+1} - (n-1-r)S_{r+1} \end{aligned}$$

et d'après l'égalité précédente, on trouve :

$$tr(AT_r) = (r+1)S_{r+1}.$$

Une question naturelle est: peut-on définir les transformations de Newton pour une famille d'endomorphismes?

Pour répondre à cette question, pour chaque multi-indice u, on introduit des fonctins élémentaires symmetriques généralisées σ_u, et des transformations dépendantes de cette famille d'endomorphismes.

Puisque ces transformations ont les mêmes propriétés que les transformations de Newton classiques, alors on appelle tranformations de Newton généralisées (GNT), et on les note par T_u.

1.0.3 Les transformations de Newton généralisées

Dans cette partie, nous allons définir les tranformations de Newton associées à une famille d'endomorphismes $A = (A_1, \ldots, A_q)$. On utilisera les définitions et notations, ainsi que des propriétés dont les preuves sont dans **([11])** et **([17]).**

Soient E un espace vectoriel de dimension n. Notons par $End(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E, et $End^q(E)$ l'espace vectoriel $\underbrace{End(E) \times \ldots \times End(E)}_{q\ fois}$.

Notons par $\mathbb{N}^q$ l'ensemble des $q-uplet$ $u = (u_1, \ldots, u_q)$, avec $u_j \in \mathbb{N}$.

On définit la longueur de u par :

$$|u| = u_1 + ... + u_q$$

et,

$$u! = u_1!...u_q!$$

Pour $A = (A_1, \ldots, A_q) \in End^q(E)$, $t = (t_1, ..., t_q) \in \mathbb{R}^q$ et $u \in \mathbb{N}^q$, on pose :

$$\begin{aligned} tA &= t_1 A_1 + \ldots + t_q A_q \\ t^u &= t_1^{u_1} \ldots t_q^{u_q}. \end{aligned}$$

Définition 1.10 *Le polynôme de Newton P_A est le polynôme défini par:*

$$\begin{aligned} P_A : \quad \mathbb{R}^q &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto P_A(t) = \det(I_E + tA) \end{aligned}$$

Et nous avons de plus :

$$P_A(t) = \sum_{|u| \leq n} \sigma_u t^u$$

Où $\sigma_u = \sigma_u(A)$ dépend seulement de A.

Observons que :

$$\sigma_{(0,...,0)} = 1$$

Il est convenable de poser :

$$\sigma_u = 0 \quad \forall \ |u| > n$$

Par exemple, si $A=(B,C)$, avec A et B deux matrices de carrées d'ordre 2, alors :

$$\begin{aligned}
&\sigma_{(0,0)}(A)=1\\
&\sigma_{(1,0)}(A)=\sigma_1(B)=tr(B)\\
&\sigma_{(0,1)}(A)=\sigma_1(C)=tr(C)\\
&\sigma_{(2,0)}(A)=\sigma_2(B)=\det B\\
&\sigma_{(0,2)}(A)=\sigma_2(A)=\det C\\
&\sigma_{(1,1)}(A)=tr(B)\,tr(C)-tr(BC)
\end{aligned}$$

Les quantités σ_u sont des invariants de conjugaison par les matrices de $GL(n)$ dans le sens que, pour toutes matrices C de $GL(n)$, nous avons :

$$\sigma_u(A_1,\ldots,A_q)=\sigma_u\left(CA_1C^{-1},\ldots,CA_qC^{-1}\right)$$

Elles vérifient aussi les propriètès suivantes :

Lemme 1.2 *Pour $u=(u_1,...,u_q)$, $a\in\mathbb{R}$ et A_i, A, B des matrices carrées d'ordre n, nous avons :*

1.
$$\sigma_u(0,A_2,\ldots,A_q)=\sigma_{0,\widetilde{u}}(A_2,\ldots,A_q)=\sigma_{\widetilde{u}}(A_2,\ldots,A_q)$$

   où $\widetilde{u}=(u_{2,}...,u_q)$.

2. *Pour $u=(u_1,...,u_q)$ de longueur inférieure ou égale à n nous avons :*
$$\sigma_u(I,A_2,\ldots,A_q)=\begin{pmatrix} n-|\widetilde{u}| \\ u_1\end{pmatrix}\sigma_{\widetilde{u}}(A_2,\ldots,A_q)$$

3.
$$\sigma_u(A,A,A_3,\ldots,A_q)=\begin{pmatrix} u_1+u_2 \\ u_1\end{pmatrix}\sigma_{(u_1+u_2,u_3,\ldots,u_q)}(A,A_3,\ldots,A_q)$$

4.

$$\sigma_{1,\widetilde{u}}\left(A+B,A_2,\ldots,A_q\right)=\sigma_{1,\widetilde{u}}\left(A,A_2,\ldots,A_q\right)+\sigma_{1,\widetilde{u}}\left(B,A_2,\ldots,A_q\right)$$

5.

$$\sigma_u\left(aA_1,A_2,\ldots,A_q\right)=a^{u_1}\sigma_u\left(A_1,A_2,\ldots,A_q\right)$$

Pour la démonstration se référer à ([17]).

Pour $q,s\geq 1$, notons par $\mathbb{N}(q,s)$ l'ensemble de toutes les matrices de type $q\times s$ à coefficients dans $\mathbb{N}$. Chaque matrice $i=(i_l^\alpha)$ de $\mathbb{N}(q,s)$ peut s'identifier au système ordonné $i=(i^1,...,i^q)$, de multi-indices $i^\alpha=(i_1^\alpha,...,i_s^\alpha)$.

Pour $i=(i^1,...,i^q)\in\mathbb{N}(q,s)$, le poids de i est le multi-indice de $\mathbb{N}(q)$ défini par :

$$|i|=\left(\left|i^1\right|,...,\left|i^q\right|\right)$$

La longueur $\|i\|$ de i est la longueur de $|i|$:

$$\|i\|=\sum_\alpha\left|i^\alpha\right|=\sum_{\alpha,k}i_k^\alpha$$

Notons par $\Pi(q,s)$ le sous ensemble de $\mathbb{N}(q,s)$ constitué des matrices i qui satisfont les conditions suivantes :

1. Chaque valeur de i est soit 0 soit 1.

2. La longueur de i est égal à s.

3. Dans chaque colonne de i, il y'a exactement une seule valeur égale à 1.

Nous identifions $\Pi(q,0)$ avec l'ensemble qui contient un seul élément qui est le vecteur nul.

Soient $A=(A_1,A_2,\ldots,A_q)$ une famille d'endomorphismes de E, et $i\in\mathbb{N}(q,s)$;

notons par A^i l'endomorphisme (composé des endomorphismes) de la fomre :

$$A^i = A_1^{i_1^1}.A_2^{i_1^2}...A_q^{i_1^q}.A_1^{i_2^1}...A_q^{i_2^q}...A_1^{i_s^1}...A_q^{i_s^q}$$

En particulier $A^0 = I_E$.

Théorème 1.1 *Pour une famille d'endomorphismes $A = (A_1, A_2, \dots, A_q)$, il existe une unique tranformation de Newton généralisée $T = (T_u,\ u \in \mathbb{N}(q))$ de A. De plus chaque T_u est donnée par :*

$$T_u = \sum_{s=0}^{|u|} \sum_{i \in \Pi(q,s)} (-1)^{\|i\|} \sigma_{u-|i|} A^i$$

Pour $\alpha \in \{1, ..., q\}$, on définit ([11]) les fonctions musicales $\alpha_\flat$ et $\alpha^\sharp$ par :

$$\begin{aligned} \alpha_\flat : \mathbb{N}^q &\longrightarrow \mathbb{N}^q \\ &\longmapsto \alpha_\flat (i_1, \dots, i_q) = \begin{cases} (i_1, \dots, i_{\alpha-1}, i_\alpha - 1, i_{\alpha+1}, \dots, i_q) & \text{si } i_\alpha \geq 1 \\ 0 \quad \text{si} \quad i_\alpha = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \alpha^\sharp : \mathbb{N}^q &\longrightarrow \mathbb{N}^q \\ &\longmapsto \alpha^\sharp (i_1, \dots, i_q) = (i_1, \dots, i_{\alpha-1}, i_\alpha + 1, i_{\alpha+1}, \dots, i_q) \end{aligned}$$

ie: $\alpha_\flat$ augumente la valeur de la $\alpha - ème$ élément par 1,et $\alpha^\sharp$ diminue la valeur de la $\alpha - ème$ élément par 1.

Il est clair que $\alpha_\flat$ est l'application inverse de $\alpha^\sharp$.

Par exemple si $u = (1, 3, 4, 2)$ et $\alpha = 2$, alors :

$$\alpha^\sharp(u) = (1, 3 + 1, 4, 2) = (1, 4, 4, 2)$$
$$\alpha_\flat(u) = (1, 3 - 1, 4, 2) = (1, 2, 4, 2)$$

Une forme explicite de T_u est assez compliquée, mais la relation récurente et les propriétés suivantes sont équivalentes à celles du cas des transformations de Newton pour un endomorphisme.

Théorème 1.2 *Les transformations de Newton généralisées* $T = (T_u, u \in \mathbb{N}(q))$ *de* A *satisfont les propriétés suivantes :*

1.
$$\begin{aligned} T_0 &= I_E & 0 = (0, ..., 0) \\ T_u &= \sigma_u I - \sum_\alpha A_\alpha T_{\alpha_\flat(u)} & \text{où } |u| \geq 1 \\ &= \sigma_u I - \sum_\alpha T_{\alpha_\flat(u)} A_\alpha \end{aligned}$$

2. *Les fonctions symmétriques* σ_u *sont données par la formule :*
$$|u|\,\sigma_u = \sum_\alpha tr\left(A_\alpha T_{\alpha_\flat(u)}\right)$$

3. *La trace de* T_u *est :*
$$trT_u = (n - |u|)\,\sigma_u$$

4. *Les fonctions symétriques* σ_u *satisfont la relation récurente suivante :*
$$\sum_\alpha tr\left(A_\alpha A_\beta T_{\beta_\flat \alpha_\flat(u)}\right) = -\,|u|\,\sigma_u + \sum_\alpha (trA_\alpha)\,\sigma_{\alpha_\flat(u)}$$

5. *Pour tout* $u \in \mathbb{N}(q)$ *de longueur supérieure ou égale à* n*, nous avons :*
$$T_u = 0$$

Remarquons que si pour tout $\alpha \in \{1, , , q\}$, A_α est auto-adjoint, alors les transformations de Newton généralisées T_u de $A = (A_1, ..., A_q)$ sont aussi auto-adjointes.

Lemme 1.3 *Soit* $A = (A_1, ..., A_q)$ *une famille d'endomrphismes de* E*, alors il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que pour tout* $t \in \mathbb{R}^q$*, avec* $|t| < \varepsilon$*,* $I_E + tA$ *soit un isomorphisme de* E *et son* *inverse est donnée par la formule*

$$(I_E + tA)^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \sum_{i \in \Pi(q,s)} t^{|i|} A^i$$

Chapitre 2

Transversalité par rapport à l'éllipticité dans les variétés pseudo-Riemaniennes

2.1 Introduction

Dans cete partie, nous établissons des conditions suffisantes pour la transversalité de deux hypersurfaces d'une variété pseudo-riemannienne. Ces conditions sont l'éllipticité de certains opérateurs obtenus par les transformations de Newton. Nous étudions aussi le cas des hypersurfaces des variétés Lorentziennes.

2.2 Une configuration géométrique

Soient $\overline{M}^{n+1}$ une variété pseudo-riemannienne orientable de metrique $\langle \ , \ \rangle$, $P^n \subset \overline{M}^{n+1}$ une sous variété connexe et orientable dans $\overline{M}^{n+1}$, notons par $\Sigma^{n-1} \subset P^n$ une hypersurface de P^n compacte de dimension $(n-1)$.

Soit $\Psi : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ une sous variété orientable, connexe et compacte de bord ∂M.

Alors M^n est dite une hypersurface de $\overline{M}^{n+1}$ de bord Σ^{n-1}, si la restriction de Ψ à ∂M est un difféomorphisme sur Σ^{n-1}.

dans ce qui suit nous allons étudier la géométrie de M^n le long du bord ∂M, relativement à la géométrie de l'inclusion $\Sigma^{n-1} \subset P^n$, et de l'inclusion $P^n \subset \overline{M}^{n+1}$.

Nous allons essayer d'aborder partiellement cette question. On suppose que M^n soit une hypersurface de bord Σ^{n-1}. Nous commencerons par choisir une orientation de cette configuration.

Soit $p \in \Sigma^{n-1}$ et $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ une base orthonormale de $T_p\Sigma^{n-1}$. On peut choisir un champs de vecteurs global unitaire η normal à Σ^{n-1} dans P^n tel que $(e_1, ..., e_{n-1}, \eta\,(p)\ )$ soit une base orthonormale de T_pP^n.

Donc $(e_1, ..., e_{n-1}, \eta(p), \zeta)$ est une base orthonormale de $T_p\overline{M}^{n+1}$, où ζ est le vecteur unitaire sortant normal à P^n.

De même, puisque Σ^{n-1} est le bord de M^n qui est supposée être orientée et par suite elle induit une orientation sur Σ^{n-1}, il existe un champs de vecteurs global ν, tel que $(e_1, ..., e_{n-1}, \nu(p))$ soit une base de T_pM^n.

Soit N le vecteur unitaire normal global sur M^n. Donc $(e_1, ..., e_{n-1}, \nu(p), N)$ est une base de $T_p\overline{M}^{n+1}$.

Soit A_Σ l'opérateur de la seconde forme fondamentale de l'inclusion $\Sigma^{n-1} \subset P^n$ associée au champs de vecteurs unité η, et A_P l'opérateur de la seconde forme fondamentale de l'inclusion $P^n \subset \overline{M}^{n+1}$ associée au champs de vecteurs unitaire ζ.

Nous avons donc :

$$\overline{\nabla}_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, e_k \rangle e_k + \varepsilon_\eta \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \eta \rangle \eta + \varepsilon_\zeta \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \zeta \rangle \zeta$$

Et aussi,

$$\overline{\nabla}_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, e_k \rangle e_k + \varepsilon_\nu \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \nu \rangle \nu + \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, N \rangle N$$

Par conséquent,

$$\varepsilon_\eta\langle\overline{\nabla}_{e_i}e_j,\eta\rangle\eta+\varepsilon_\zeta\langle\overline{\nabla}_{e_i}e_j,\zeta\rangle\zeta= \ \varepsilon_\nu\langle\overline{\nabla}_{e_i}e_j,\nu\rangle\nu+\varepsilon_N\langle\overline{\nabla}_{e_i}e_j,N\rangle N.$$

Or,

$$\langle\overline{\nabla}_{e_i}e_j,N\rangle=-\langle e_j,\overline{\nabla}_{e_i}N\rangle+e_i(\langle e_j,N\rangle)$$

et puisque,

$$\langle e_j,N\rangle=0$$

alors,

$$\begin{aligned}\langle\overline{\nabla}_{e_i}e_j,N\rangle &= -\langle e_j,\overline{\nabla}_{e_i}N\rangle\\ &= \ \langle e_j,(-\overline{\nabla}_{e_i}N)\rangle\\ &= \langle e_j,(-\overline{\nabla}_{e_i}N)^{\top}\rangle+\langle e_j,(-\overline{\nabla}_{e_i}N)^{\perp}\rangle\\ &= \langle e_j,(-\overline{\nabla}_{e_i}N)^{\top}\rangle\\ &= \langle A(e_i),e_j\rangle\end{aligned}$$

A étant l'opérateur de la seconde forme fondamentale de l'immersion associée au vecteur N,

De même nous avons :

$$\langle\overline{\nabla}_{e_i}e_j,\eta\rangle=\langle A_\Sigma(e_i),e_j\rangle$$

et :

$$\langle\overline{\nabla}_{e_i}e_j,\zeta\rangle=\langle A_P(e_i),e_j\rangle$$

par conséquent :

$$\varepsilon_N\langle A(e_i),e_j\rangle N+\varepsilon_\nu\langle\overline{\nabla}_{e_i}e_j,\nu\rangle\nu=\varepsilon_\zeta\langle A_P(e_i),e_j\rangle\zeta+\varepsilon_\eta\langle A_\Sigma(e_i),e_j\rangle\eta$$

ce qui donne :

$$\varepsilon_N\langle A(e_i),e_j\rangle N=\varepsilon_\zeta\langle A_P(e_i),e_j\rangle\zeta+\varepsilon_\eta\langle A_\Sigma(e_i),e_j\rangle\eta-\varepsilon_\nu\langle\overline{\nabla}_{e_i}e_j,\nu\rangle\nu$$

D'où

$$\langle A(e_i),e_j\rangle=\varepsilon_\zeta\langle A_P(e_i),e_j\rangle\,\langle\zeta,N\rangle+\varepsilon_\eta\langle A_\Sigma(e_i),e_j\rangle\,\langle\eta,N\rangle \tag{2.1}$$

Supposons maintenant que P^n soit totalement ombilique, alors il existe une fonction $\lambda\in C^\infty(P^n)$ telle que $A_P=\lambda I$; où I est l'identité de l'espace de champs de vecteurs $\varkappa(P)$.

Choisissons la base $(e_1,...,e_{n-1})$ de $T_p\Sigma^{n-1}$ formée par les vecteurs propres de A_Σ; on obtient alors, pour tout $i\in(1,...n-1)$

$$A_\Sigma(e_i)=\tau_ie_i$$

La relation (2.1) entraine :

$$\begin{aligned}\langle A(e_i),e_j\rangle&=\left(\varepsilon_\zeta\lambda\langle\zeta,N\rangle+\varepsilon_\eta\tau_i\langle\eta,N\rangle\right)\langle e_i,e_j\rangle\\&=\left(\varepsilon_\zeta\lambda\langle\zeta,N\rangle+\varepsilon_\eta\tau_i\langle\eta,N\rangle\right)\varepsilon_i\delta_i^j\end{aligned}$$

Posons pour simplifier :

$$\gamma_i=\left(\varepsilon_\zeta\lambda\langle\zeta,N\rangle+\varepsilon_\eta\tau_i\langle\eta,N\rangle\right)\varepsilon_i$$

nous obtenons alors :

$$\langle A(e_i),e_j\rangle=\begin{cases}0 & \text{si } i\neq j\\ \gamma_i & \text{pour } i=j\end{cases}$$

La matrice A s'écrit donc dans la base $(e_1,...,e_{n-1},\nu)$ sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & ... & ... & \varepsilon_1\langle Av, e_1\rangle \\ 0 & \gamma_2 & 0 & ... & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & ... & \gamma_{n-1} & \varepsilon_{n-1}\langle Av, e_{n-1}\rangle \\ \varepsilon_1\langle Av, e_1\rangle & ... & ... & \varepsilon_{n-1}\langle Av, e_{n-1}\rangle & \varepsilon_\nu\langle Av, v\rangle \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant le polynôme caractéristique de A.

Lemme 2.1 *Le polynôme caractéristique de A est donné par :*

$$\det(tI_n - A) = (t - \varepsilon_\nu\langle Av, v\rangle)\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i s_i(\gamma)t^{n-1-i} - \sum_{i=1}^{n-1}\langle Av, e_i\rangle^2 \sum_{j=0}^{n-2}(-1)^j s_j(\widehat{\gamma_i})t^{n-2-j}$$

où $s_i(\gamma)$ (resp $s_i(\widehat{\gamma_j})$) sont les fonctions élémentaires symmétriques de $\gamma_1...\gamma_{n-1}$ (resp $\gamma_1...\widehat{\gamma_j}...\gamma_{n-1}$). $s_0(\gamma) = s_0(\widehat{\gamma_j}) = 1$ et $\gamma = (\gamma_1...\gamma_{n-1})$.

Or nous avons :

$$\det(tI - A) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r S_r t^{n-r}$$

En comparant les termes du polynôme caractéristique, on trouvre que les fonctions élémmentaires symétriques S_r sont données en un point du bord $p \in \partial M^n$, par

$$S_1 = s_1(\gamma) + \varepsilon_\nu\langle A\nu, \nu\rangle \tag{2.2}$$

$$S_r = s_r(\gamma) + \varepsilon_\nu s_{r-1}(\gamma)\langle A\nu, \nu\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} s_{r-2}(\widehat{\gamma_i})\langle A\nu, e_i\rangle^2 \tag{2.3}$$

pour $2 \leq r \leq n$.

2.3 Les transformations de Newton sur le bord

Observons que les expressions (2.2) et (2.3) donnent une réponse partielle à notre question car elles relient la géométrie de M^n le long du son bord ∂M^n, (donnée par S_r), et la géométrie des inclusions $\Sigma^{n-1} \subset P^n$ et $P^n \subset \overline{M}^{n+1}$, (donnée par s_r). De plus nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.1 *Soient $\overline{M}^{n+1}$ une variété pseudo-riemannienne, P^n une sous variété de $\overline{M}^{n+1}$ orientée et totalement géodésique de dimension n, et Σ^{n-1} une hypersurface de P^n orientée de dimension $(n-1)$. Soient $\Psi : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ une hypersurface de $\overline{M}^{n+1}$ connexe et orientée du bord $\Sigma^{n-1} = \Psi(\partial M^n)$ et ν le vecteur unitaire normal à ∂M^n dans M^n. Alors le long du bord ∂M^n nous avons :*

$$\langle T_1\nu, \nu\rangle = \varepsilon_N\varepsilon_\nu s_1(\gamma) + (\varepsilon_N - 1)\langle A\nu, \nu\rangle$$

$$\langle T_2\nu, \nu\rangle = \varepsilon_\nu s_2(\gamma) + (1-\varepsilon_N)s_1(\gamma)\langle A\nu, \nu\rangle + \sum_{i=1}^{n-1}(\varepsilon_i - \varepsilon_\nu)\langle A\nu, e_i\rangle^2 + \varepsilon_\nu(1-\varepsilon_N)\langle A\nu, \nu\rangle^2$$

Et pour tout $3 \leq r \leq n-1$:

$$\begin{aligned}\langle T_r\nu, \nu\rangle &= \varepsilon_\nu\varepsilon_N^r\varepsilon_\eta^r s_r\langle\zeta, \nu\rangle^r + \varepsilon_\nu\langle A\nu, \nu\rangle\left\{\varepsilon_N^r\varepsilon_\nu\varepsilon_\eta^{r-1}s_{r-1}\langle\zeta, \nu\rangle^{r-1} - \langle T_{r-1}\nu, \nu\rangle\right\} \\ &\quad - \varepsilon_\nu\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i\langle A\nu, e_i\rangle^2\times \\ &\quad \left\{\varepsilon_N^r\varepsilon_i\varepsilon_\eta^{r-2}s_{r-2}(\widehat{\tau}_i)\langle\zeta, \nu\rangle^{r-2} + \sum_{j=2}^{r}(-1)^{j-1}(\varepsilon_i\varepsilon_\eta\tau_i)^{j-2}\langle\zeta, \nu\rangle^{j-2}\langle T_{r-j}\nu, \nu\rangle\right\}\end{aligned} \tag{2.4}$$

Avec $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_{n-1})$, $\gamma_i = -\tau_i\langle\eta, \nu\rangle + \lambda\langle\zeta, N\rangle$, τ_i sont les courbures principales de l'inclusion $\Sigma^{n-1} \subset P^n$, N le vecteur normal à M, et λ le facteur d'embilicité de l'inclusion $P \subset \overline{M}$.

Preuve: Pour $r = 1$, nous avons

$$\begin{aligned}
\langle T_1\nu, \nu\rangle &= \langle(\varepsilon_N S_1 I - A)\nu, \nu\rangle \\
&= \varepsilon_N \varepsilon_\nu S_1 - \langle A\nu, \nu\rangle \\
&= \varepsilon_N \varepsilon_\nu (s_1(\gamma) + \varepsilon_\nu \langle A\nu, \nu\rangle) - \langle A\nu, \nu\rangle \\
&= \varepsilon_N \varepsilon_\nu s_1(\gamma) + (\varepsilon_N - 1)\langle A\nu, \nu\rangle
\end{aligned}$$

Pour $r = 2$, nous avons

$$\begin{aligned}
\langle T_2\nu, \nu\rangle &= \left\langle((\varepsilon_N)^2 S_1 I - AT_1)\nu, \nu\right\rangle \\
&= (\varepsilon_N)^2 \varepsilon_\nu S_1 - \langle AT_1\nu, \nu\rangle \\
&= (\varepsilon_N)^2 \varepsilon_\nu S_1 - \langle T_1\nu, A\nu\rangle \\
&= (\varepsilon_N)^2 \varepsilon_\nu \left(s_2(\gamma) + \varepsilon_\nu s_1(\gamma)\langle A\nu, \nu\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle A\nu, e_i\rangle^2\right) - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \langle A\nu, e_i\rangle \langle T_1\nu, e_i\rangle \\
&- \varepsilon_\nu \langle A\nu, \nu\rangle \langle T_1\nu, \nu\rangle \\
&= (\varepsilon_N)^2 \varepsilon_\nu \left(s_2(\gamma) + \varepsilon_\nu s_1(\gamma)\langle A\nu, \nu\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle A\nu, e_i\rangle^2\right) - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \langle A\nu, e_i\rangle \langle T_1\nu, e_i\rangle \\
&- \varepsilon_\nu \langle A\nu, \nu\rangle [\varepsilon_N \varepsilon_\nu s_1(\gamma) + (\varepsilon_N - 1)\langle A\nu, \nu\rangle] \\
&= \varepsilon_\nu s_2(\gamma) + (1 - \varepsilon_N) s_1(\gamma)\langle A\nu, \nu\rangle + \sum_{i=1}^{n-1} (\varepsilon_i - \varepsilon_\nu)\langle A\nu, e_i\rangle^2 + \varepsilon_\nu (1 - \varepsilon_N)\langle A\nu, \nu\rangle^2
\end{aligned}$$

Pour $r \geq 3$, nous avons

$$\begin{aligned}
\langle T_r\nu, \nu\rangle &= \langle(\varepsilon_N^r S_r I - AT_{r-1})\nu, \nu\rangle \qquad (2.5) \\
&= \varepsilon_N^r \varepsilon_\nu S_r - \langle T_{r-1}\nu, A\nu\rangle
\end{aligned}$$

Et

$$\langle T_{r-1}\nu, A\nu\rangle = \left\langle T_{r-1}\nu, \sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i \langle A\nu, e_i\rangle e_i + \varepsilon_\nu \langle A\nu, \nu\rangle \nu \right\rangle \tag{2.6}$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i \langle A\nu, e_i\rangle \langle T_{r-1}\nu, e_i\rangle + \varepsilon_\nu \langle A\nu, \nu\rangle \langle T_{r-1}\nu, \nu\rangle$$

Or

$$\langle T_{r-1}\nu, e_i\rangle = \langle (\varepsilon_N^r S_{r-1} I - AT_{r-2})\nu, e_i\rangle = -\langle T_{r-2}\nu, Ae_i\rangle$$

Prenons $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ la base formée par les vecteurs propres de A_Σ. Donc

$$Ae_i = \gamma_i e_i + \varepsilon_\nu \langle Ae_i, \nu\rangle \nu$$
$$= \gamma_i e_i + \varepsilon_\nu \langle A\nu, e_i\rangle \nu$$

D'où:

$$\langle T_{r-1}\nu, e_i\rangle = -\langle T_{r-2}\nu, \gamma_i e_i + \varepsilon_\nu \langle A\nu, e_i\rangle \nu\rangle$$
$$-\varepsilon_\nu \langle A\nu, e_i\rangle \langle T_{r-2}\nu, \nu\rangle - \gamma_i \langle T_{r-2}\nu, e_i\rangle$$

Ceci nous donne par un argument réccurssive:

$$\langle T_{r-1}\nu, e_i\rangle = \varepsilon_\nu \langle A\nu, e_i\rangle \sum_{j=2}^{r}(-1)^{j-1}\gamma_i^{j-2} \langle T_{r-j}\nu, \nu\rangle \tag{2.7}$$

En effet pour $r = 3$, nous avons

$$\langle T_2\nu, e_i\rangle = \left\langle (\varepsilon_N^2 S_2 I - AT_1)\nu, e_i\right\rangle$$
$$= -\langle AT_1\nu, e_i\rangle$$
$$= -\langle T_1\nu, Ae_i\rangle$$

Et puisque

$$Ae_i = \gamma_i e_i + \varepsilon_\nu \langle A\nu, e_i \rangle \nu$$

Alors

$$\begin{aligned}
\langle T_2\nu, e_i \rangle &= -\langle T_1\nu, \gamma_i e_i + \varepsilon_\nu \langle A\nu, e_i \rangle \nu \rangle \\
&= -\langle T_1\nu, \gamma_i e_i \rangle - \varepsilon_\nu \langle A\nu, e_i \rangle \langle T_1\nu, \nu \rangle \\
&= -\langle (\varepsilon_N S_1 I - AT_0)\nu, \gamma_i e_i \rangle - \varepsilon_\nu \langle A\nu, e_i \rangle \langle T_1\nu, \nu \rangle \\
&= \gamma_i \langle A\nu, e_i \rangle - \varepsilon_\nu \langle A\nu, e_i \rangle \langle T_1\nu, \nu \rangle
\end{aligned}$$

Donc la relation (2.7) est bien vérifie pour $r = 3$. Supposons que

$$\langle T_{r-2}\nu, e_i \rangle = \varepsilon_\nu \langle A\nu, e_i \rangle \sum_{j=2}^{r-1} (-1)^{j-1} \gamma_i^{j-2} \langle T_{r-1-j}\nu, \nu \rangle$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\langle T_{r-1}\nu, e_i \rangle &= \left\langle (\varepsilon_N^{r-1} S_{r-1} I - AT_{r-2})\nu, e_i \right\rangle \\
&= -\langle T_{r-2}\nu, Ae_i \rangle \\
&= -\langle T_{r-2}\nu, \gamma_i e_i + \varepsilon_\nu \langle Ae_i, \nu \rangle \nu \rangle \\
&= -\langle T_{r-2}\nu, \gamma_i e_i + \varepsilon_\nu \langle A\nu, e_i \rangle \nu \rangle \\
&= -\varepsilon_\nu \langle A\nu, e_i \rangle \langle T_{r-2}\nu, \nu \rangle - \gamma_i \langle T_{r-2}\nu, e_i \rangle \\
&= -\gamma_i \varepsilon_\nu \langle A\nu, e_i \rangle \sum_{j=2}^{r-1} (-1)^{j-1} \gamma_i^{j-2} \langle T_{r-1-j}\nu, \nu \rangle - \varepsilon_\nu \langle A\nu, e_i \rangle \langle T_{r-2}\nu, \nu \rangle \\
&= \varepsilon_\nu \langle A\nu, e_i \rangle \sum_{j=2}^{r-1} (-1)^{j} \gamma_i^{j-1} \langle T_{r-1-j}\nu, \nu \rangle - \varepsilon_\nu \langle A\nu, e_i \rangle \langle T_{r-2}\nu, \nu \rangle
\end{aligned}$$

Posons: $l = j + 1$. Donc

$$\begin{aligned}
\langle T_{r-1}\nu, e_i\rangle &= \varepsilon_\nu \langle A\nu, e_i\rangle \sum_{l=3}^{r}(-1)^{l-1}\gamma_i^{l-2}\langle T_{r-l}\nu,\nu\rangle - \varepsilon_\nu \langle A\nu, e_i\rangle \langle T_{r-2}\nu,\nu\rangle \\
&= \varepsilon_\nu \langle A\nu, e_i\rangle \sum_{l=2}^{r}(-1)^{l-1}\gamma_i^{l-2}\langle T_{r-l}\nu,\nu\rangle
\end{aligned}$$

Remplaçons maintenant l'équation (2.7) dans (2.6), puis remplacons (2.6) dans (2.5), on trouve

$$\begin{aligned}
\langle T_r\nu,\nu\rangle &= \varepsilon_\nu \left[\varepsilon_N^r S_r - \langle A\nu,\nu\rangle \langle T_{r-1}\nu,\nu\rangle - \sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i \langle A\nu, e_i\rangle^2 \sum_{j=2}^{r}(-1)^{j-1}\gamma_i^{j-2}\langle T_{r-j}\nu,\nu\rangle\right] \\
&= \varepsilon_\nu\varepsilon_N^r \left(s_r(\gamma) + \varepsilon_\nu s_{r-1}(\gamma)\langle A\nu,\nu\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} s_{r-2}(\widehat{\gamma}_i)\langle A\nu, e_i\rangle^2\right) \\
&- \varepsilon_\nu \langle A\nu,\nu\rangle \langle T_{r-1}\nu,\nu\rangle - \varepsilon_\nu \sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i \langle A\nu, e_i\rangle^2 \sum_{j=2}^{r}(-1)^{j-1}\gamma_i^{j-2}\langle T_{r-j}\nu,\nu\rangle \\
&= \varepsilon_\nu\varepsilon_N^r s_r(\gamma) + \varepsilon_\nu \langle A\nu,\nu\rangle \left(\varepsilon_N^r\varepsilon_\nu s_{r-1}(\gamma) - \langle T_{r-1}\nu,\nu\rangle\right) \\
&- \varepsilon_\nu \sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i \langle A\nu, e_i\rangle^2 \left(\varepsilon_N^r\varepsilon_i s_{r-2}(\widehat{\gamma}_i) + \sum_{j=2}^{r}(-1)^{j-1}\gamma_i^{j-2}\langle T_{r-j}\nu,\nu\rangle\right)
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
s_{r-2}(\widehat{\gamma}_i) &= \sum_{j=0}^{r-2}(-1)^j s_{r-2-j}(\gamma)\gamma_i^j \\
&= \sum_{j=2}^{r}(-1)^{j-2} s_{r-j}(\gamma)\gamma_i^{j-2}
\end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\langle T_r\nu,\nu\rangle &= \varepsilon_\nu\varepsilon_N^r s_r(\gamma) + \varepsilon_\nu \langle A\nu,\nu\rangle \left(\varepsilon_N^r\varepsilon_\nu s_{r-1}(\gamma) - \langle T_{r-1}\nu,\nu\rangle\right) \\
&- \varepsilon_\nu\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i \langle A\nu, e_i\rangle^2 \left(\varepsilon_N^r\varepsilon_i\sum_{j=2}^{r}(-1)^{j-2}s_{r-j}(\gamma)\gamma_i^{j-2} + \sum_{j=2}^{r}(-1)^{j-1}\gamma_i^{j-2}\langle T_{r-j}\nu,\nu\rangle\right) \\
&= \varepsilon_\nu\varepsilon_N^r s_r(\gamma) + \varepsilon_\nu \langle A\nu,\nu\rangle \left(\varepsilon_N^r\varepsilon_\nu s_{r-1}(\gamma) - \langle T_{r-1}\nu,\nu\rangle\right) \\
&- \varepsilon_\nu\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i \langle A\nu, e_i\rangle^2 \sum_{j=2}^{r}(-1)^{j-2}\gamma_i^{j-2}\left(\varepsilon_N^r\varepsilon_i s_{r-j}(\gamma) - \langle T_{r-j}\nu,\nu\rangle\right)
\end{aligned}
$$

Si on suppose que l'inclusion $P \subset \overline{M}$ est totalement géodésique, alor $\lambda = 0$, et nous obtenons dans ce cas

$$\gamma_i = \varepsilon_i\varepsilon_\eta\tau_i \langle \eta, N\rangle$$

D'où

$$s_r(\gamma) = \varepsilon_\eta^r \langle \eta, N\rangle^r s_r$$

Avec: $s_r = s_r(\varepsilon_1\tau_1, ..., \varepsilon_{n-1}\tau_{n-1})$. Remplacons dans (2.4), on trouve

$$
\begin{aligned}
\langle T_r\nu,\nu\rangle &= \varepsilon_\nu\varepsilon_N^r\varepsilon_\eta^r \langle \eta, N\rangle^r s_r + \varepsilon_\nu \langle A\nu,\nu\rangle \left(\varepsilon_N^r\varepsilon_\nu\varepsilon_\eta^{r-1}\langle \eta, N\rangle^{r-1} s_{r-1} - \langle T_{r-1}\nu,\nu\rangle\right) \\
&- \varepsilon_\nu\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i \langle A\nu, e_i\rangle^2 \sum_{j=2}^{r}(-1)^{j-2}\varepsilon_i^{j-2}\varepsilon_\eta^{j-2}\tau_i^{j-2}\langle \eta, N\rangle^{j-2} \\
&\times \left(\varepsilon_N^r\varepsilon_i\varepsilon_\eta^{r-j}\langle \eta, N\rangle^{r-j} s_{r-j} - \langle T_{r-j}\nu,\nu\rangle\right)
\end{aligned}
$$

Il est facile de voir que

$$\langle \eta, N\rangle = \langle \zeta, \nu\rangle$$

donc

$$\langle T_1\nu,\nu\rangle = \varepsilon_N\varepsilon_\nu\varepsilon_\eta \langle \zeta, \nu\rangle s_1 + (\varepsilon_N - 1)\langle A\nu,\nu\rangle$$

$$\langle T_2\nu,\nu\rangle = \langle \zeta, \nu\rangle^2 s_2 + (1-\varepsilon_N)\langle \zeta, \nu\rangle s_1 \langle A\nu,\nu\rangle + \sum_{i=1}^{n-1}(\varepsilon_i - \varepsilon_\nu)\langle A\nu, e_i\rangle^2 + \varepsilon_\nu(1-\varepsilon_N)\langle A\nu,\nu\rangle^2$$

Et pour $r \geq 3$

$$\begin{aligned}
\langle T_r\nu,\nu\rangle &= \varepsilon_\nu\varepsilon_N^r\varepsilon_\eta^r s_r\left\langle\zeta,\nu\right\rangle^r+\varepsilon_\nu\left\langle A\nu,\nu\right\rangle\left(\varepsilon_N^r\varepsilon_\nu\varepsilon_\eta^{r-1}s_{r-1}\left\langle\zeta,\nu\right\rangle^{r-1}-\left\langle T_{r-1}\nu,\nu\right\rangle\right)\\
&\quad-\varepsilon_\nu\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i\left\langle A\nu,e_i\right\rangle^2\times\\
&\quad\sum_{j=2}^{r}(-1)^{j-2}\varepsilon_i^{j-2}\varepsilon_\eta^{j-2}\tau_i^{j-2}\left\langle\zeta,\nu\right\rangle^{j-2}\times\left(\varepsilon_N^r\varepsilon_i\varepsilon_\eta^{r-j}\left\langle\zeta,\nu\right\rangle^{r-j}s_{r-j}-\left\langle T_{r-j}\nu,\nu\right\rangle\right)
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du théorème.

Corollaire 2.1 *Si $\overline{M}^{n+1}$ est riemannienne, alors sous les conditions du théorème (2.1) , nous avons :*

$$\langle T_r\nu,\nu\rangle = s_r\left\langle\zeta,\nu\right\rangle^r$$

pour tout $1 \leq r \leq n-1$.

2.4 Transversalité

Théorème 2.2 *Sous les conditions du théorème (2.1), les hypersurfaces M^n et P^n de la variètè pseudo-riemannienne $\overline{M}^{n+1}$ sont transverses si l'un des opérateurs suivants est défini positif :*

$$T_1+\left(1-\varepsilon_N\right)A$$

ou

$$T_2-\varepsilon_\nu\left(1-\varepsilon_N\right)\langle A\nu,\nu\rangle T_1+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\varepsilon_\nu-\varepsilon_i\right)\left\langle A\nu,e_i\right\rangle^2 I$$

ou

$$T_r+\varepsilon_\nu\langle A\nu,\nu\rangle T_{r-1}-\varepsilon_\nu\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i\left\langle A\nu,e_i\right\rangle^2 T_{r-2}$$

pour certain $r \geq 3$.

Preuve: Dire que M^n et P^n dans $\overline{M}^{n+1}$ ne sont pas transverses signifie qu'il existe un point p de $T_p\Sigma$, tel que $\langle \zeta, \nu \rangle_p = 0$, et les relations (2.4) deviennent

$$\langle T_1\nu, \nu\rangle_p = (\varepsilon_N - 1)\langle A\nu, \nu\rangle_p$$

$$\langle T_2\nu, \nu\rangle = \varepsilon_\nu(1-\varepsilon_N)\langle A\nu, \nu\rangle_p^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(\varepsilon_i - \varepsilon_\nu)\langle A\nu, e_i\rangle_p^2$$

Et pour $r \geq 3$, nous obtenons

$$\langle T_r\nu, \nu\rangle = -\varepsilon_\nu\langle A\nu, \nu\rangle_p \langle T_{r-1}\nu, \nu\rangle_p + \varepsilon_\nu\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i\langle A\nu, e_i\rangle_p^2\langle T_{r-2}\nu, \nu\rangle_p$$

Ou equivalent à

$$\langle [T_1 + (1-\varepsilon_N)A]\,\nu, \nu\rangle_p = 0$$

$$\left\langle \left[T_2 - \varepsilon_\nu(1-\varepsilon_N)\langle A\nu, \nu\rangle T_1 + \sum_{i=1}^{n-1}(\varepsilon_\nu - \varepsilon_i)\langle A\nu, e_i\rangle^2 I\right]\nu, \nu\right\rangle = 0$$

$$\left\langle \left[T_r + \varepsilon_\nu\langle A\nu, \nu\rangle T_{r-1} - \varepsilon_\nu\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i\langle A\nu, e_i\rangle^2 T_{r-2}\right]\nu, \nu\right\rangle = 0$$

Donc si on suppose que pour tout point p de $T_p\Sigma$, l'une des opérateurs

$$T_1 + (1-\varepsilon_N) \tag{2.8}$$

ou

$$T_2 - \varepsilon_\nu(1-\varepsilon_N)\langle A\nu, \nu\rangle T_1 + \sum_{i=1}^{n-1}(\varepsilon_\nu - \varepsilon_i)\langle A\nu, e_i\rangle^2 I$$

ou

$$T_r + \varepsilon_\nu\langle A\nu, \nu\rangle T_{r-1} - \varepsilon_\nu\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i\langle A\nu, e_i\rangle^2 T_{r-2}$$

est définie positive, alors les hypersurfaces M^n et P^n sont transverses.

2.4.1 Cas de variétés Lorentziennes

Supposons maintenant que $\overline{M}^{n+1}$ soit une variété Lorentzienne. Donc : $\varepsilon_\nu = \varepsilon_\eta = \varepsilon_i = 1$ et $\varepsilon_N = -1$, et nous avons dans ce cas le résultat suivant:

Corollaire 2.2 *Supposons que $\overline{M}^{n+1}$ soit une variété Lorentzienne, et M^n et P^n deux hypersurfaces de type lumière de $\overline{M}^{n+1}$. Alors sous les hypothèses du théorème (2.1), M^n et P^n sont transverses si les opérateurs :*

$$T_1 + 2A$$

ou

$$T_2 + 2\langle A\nu, \nu\rangle^2 T_1$$

ou

$$T_r + \langle A\nu, \nu\rangle T_{r-1} - \sum_{i=1}^{n-1} \langle A\nu, e_i\rangle^2 T_{r-2}$$

sont définis positifs pour certains $3 \leq r \leq n-1$.

Preuve: Dire que M^n et P^n sont transverses signifie qu'il existe un point p de $T_p\Sigma$, tel que $\langle \zeta, \nu\rangle_p = 0$, et nous avons

$$\langle T_r\nu, \nu\rangle_p = -\langle A\nu, \nu\rangle_p \langle T_{r-1}\nu, \nu\rangle_p + \sum_{i=1}^{n-1} \langle A\nu, e_i\rangle^2{}_P \langle T_{r-2}\nu, \nu\rangle_p$$

Ou bien

$$\left\langle \left(T_r + \langle A\nu, \nu\rangle T_{r-1} - \sum_{i=1}^{n-1} \langle A\nu, e_i\rangle^2 T_{r-2} \right) \nu, \nu \right\rangle_P = 0$$

De même pour $r = 1$ et $r = 2$.

Chapitre 3

Une configuration géométrique des sous variétés Riemaniennes de codimension arbitraire

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions une configuration géométrique de sous variétés de codimension arbitraire dans un espace Riemannien. Nous obtenons une relation entre la géométrie d'une sous variété M^n de codimension q le long de son bord et la géométrie du bord Σ^{n-1} de la variété M^n ; celle-ci étant considérée comme une hypersurface d'une sous variété P^n de codimension q dans un espace Riemannien M^{n+q}.

3.2 La méthode utilisée

Dans la partie qui suit, nous illustrons le fonctionnement de la méthode sur différentes situations.

3.2.1 Cas des hypersurfaces

Nous utilisons les notations et les résultats qui existent dans ([5]).

Soit M^n une hypersurface de $\overline{M}^{n+1}$ de dimension n et de bord ∂M. Supposons que le bord $\Sigma^{n-1} = \partial M$ soit une sous variété de $P^n \subset \overline{M}^{n+1}$ de codimension 1. Alors les inclusions suivantes sont vérifiées :

$$(\partial M)^{n-1} \subset M^n \subset \overline{M}^{n+1} \text{ et } \Sigma^{n-1} \subset P^n \subset \overline{M}^{n+1}$$

Notons par N le champs de vecteurs unité normal à l'inclusion $M^n \subset \overline{M}^{n+1}$, par ν le champs de vecteurs unité sortant conormal à l'inclusion $(\partial M)^{n-1} \subset M^n$, par ζ le champs de vecteurs unité normal à l'inclusion $P^n \subset \overline{M}^{n+1}$ et par η le champs de vecteurs unité normal à l'inclusion $\Sigma^{n-1} \subset P^n$.

Soit A (respectivement A_Σ et A_P) l'opérateur de la seconde forme fondamentale de l'inclusion $M \subset \overline{M}$ (respectivement $\Sigma \subset P$ et $P \subset M$) relativement au champs de vecteurs normal unité N (respectivement, η et ζ).

Soit $(e_1, ..., e_{n-1})$ une base orthonormale de $T\Sigma^{n-1}$.

Les seules considérations géométriques impliquées sont celles qui conduisent aux formules suivantes et ont été établies par Alías, de Lira et Malacarne ([5]).

$$\langle N, \nu \rangle = \langle \xi, N \rangle, \ \langle \eta, N \rangle = - \langle \xi, \nu \rangle$$

et

$$\langle A|_\Sigma e_i, e_j \rangle = - \langle A_\Sigma e_i, e_j \rangle \langle \xi, \nu \rangle + \langle A_P e_i, e_j \rangle \langle \xi, N \rangle .$$

Où $A|_\Sigma$ est la restriction de A à Σ^{n-1}. Supposons que P^n soit totalement ombilique dans $\overline{M}^{n+1}$, nous avons $A_P|_\Sigma = \lambda I_{T\Sigma^{n-1}}$ pour une fonction régulière $\lambda \in C^\infty(P)$.

Nous obtenons donc :

$$A|_\Sigma = - \langle \xi, \nu \rangle A_\Sigma + \lambda \langle \xi, N \rangle I_{n-1}. \tag{3.1}$$

Par souci de simplification, posons $\rho = -\langle \xi, \nu \rangle$ et $\mu = \langle \xi, N \rangle$; il s'en suit que :

$$A|_{\Sigma} = \rho A_{\Sigma} + \lambda \mu I_{n-1}.$$

Cette formule montre que A_{Σ} et I_{n-1} sont représentées par des matrices carrées de dimension $(n-1)$, et A par une matrice carrée de dimension n. La géométrie de Σ^{n-1} dans P^n est codée par le couple $(A_{\Sigma}, \lambda I_{n-1})$, et la géométrie de $M^n \subset \overline{M}^{n+1}$est donnée par A. Nous allons donc faire usage des transformations de Newton ainsi que des transformations de Newton généralisées suivantes :

$$T_r = T_r\left(A|_{\Sigma}\right) \text{ et } T_{(k,l)} = T_{(k,l)}\left(A_{\Sigma}, \lambda I_{n-1}\right) \ .$$

Les fonctions élémentaires correspondantes sont :

$$\sigma_r = \sigma_r\left(A|_{\Sigma}\right) \text{ et } \sigma_{(k,l)} = \sigma_{(k,l)}\left(A_{\Sigma}, \lambda I_{n-1}\right).$$

Le but est de montrer que :

$$\sigma_r\left(A|_{\Sigma}\right) = \sum_{k+l=r} \rho^k \mu^l \sigma_{(k,l)}. \tag{3.2}$$

Ce qui en d'autres termes, revient à démontrer que :

$$\langle T_r \nu, \nu \rangle = \sum_{k+l=r} \rho^k \mu^l \sigma_{(k,l)}, \tag{3.3}$$

où P^n est totalement ombilique dans $\overline{M}^{n+1}$.

Par les formules (3.1) et (3.2), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\sigma_r\left(A|_\Sigma\right) &= \sigma_r\left(\rho A_\Sigma + \mu\lambda I_{n-1}\right)\\ &= \sum_{k+l=r}\sigma_{(k,l)}\left(\rho A_\Sigma, \lambda\mu I_{n-1}\right)\\ &= \sum_{k+l=r}\rho^k\mu^l\sigma_{(k,l)}\left(A_\Sigma, \lambda I_{n-1}\right)\\ &= \sum_{k+l=r}\rho^k\mu^l\sigma_{(k,l)}.\end{aligned}$$

Maintenant, on va montrer un résultat similaire à celui qui est dans ([5]), c'est-à-dire:

$$\langle T_r\nu, \nu\rangle = \sigma_r\left(A|_\Sigma\right). \tag{3.4}$$

Soient $\widetilde{A}$ la matrice de A dans la base $(e_1, ..., e_{n-1}, \nu)$ et $A|_\Sigma$ la matrice de la restriction de A à Σ^{n-1} . Alors :

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A|_\Sigma & B \\ B^\intercal & c \end{pmatrix}, \text{ où } B = \begin{pmatrix} \langle A\nu, e_1\rangle \\ \vdots \\ \langle A\nu, e_{n-1}\rangle \end{pmatrix} \text{ et } c = \langle A\nu, \nu\rangle$$

Par la formule de récurence de T_r, nous avons :

$$\langle T_r\nu, \nu\rangle = \sigma_r\left(\widetilde{A}\right) - \left\langle T_{r-1}\nu, \widetilde{A}\nu\right\rangle = \sigma_r\left(\widetilde{A}\right) - c\left\langle T_{r-1}\nu, \nu\right\rangle - \sum_{i=1}^{n-1}\langle T_{r-1}\nu, e_i\rangle\left\langle \widetilde{A}\nu, e_i\right\rangle \tag{3.5}$$

Supposons que $(e_i)_{i=1,...,n-1}$ soit une base formée par les vecteurs propres de A_Σ correspondant aux valeurs propres $(\tau_i)_{i=1,...,n-1}$, c'est-à-dire $A_\Sigma e_i = \tau_i e_i$, nous obtenons par la formule (3.1):

$$A|_\Sigma e_i = \gamma_i e_i \qquad i = 1, ..., n-1$$

où $\gamma_i = \rho\tau_i + \mu\lambda$.

Fixons maintenant i, avec $i = 1, ..., n-1$. Nous affirmons que :

$$\langle T_k \nu, e_i \rangle \left\langle \widetilde{A}\nu, e_i \right\rangle = \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^{j-1} \, b_i \gamma_i^{j-2} b_i \, \langle T_{k+1-j} \nu, \nu \rangle \, .$$

pour tout $k \geq 1$, où $b_i = \langle A\nu, e_i \rangle = \left\langle \widetilde{A}\nu, e_i \right\rangle$. Nous prouvons cette proposition par récurence sur k.

En effet, pour $k = 1$ nous avons :

$$\begin{aligned} \langle T_1 \nu, e_i \rangle \left\langle \widetilde{A}\nu, e_i \right\rangle &= -\left\langle \widetilde{A}\nu, e_i \right\rangle \left\langle \widetilde{A}\nu, e_i \right\rangle \\ &= -{b_i}^2 \\ &= -b_i \gamma_i^0 b_i \, \langle T_0 \nu, \nu \rangle \end{aligned}$$

ainsi la proposition est vraie pour $k = 1$.

Supposons que la proposition reste vraie pour k, nous obtenons :

$$\langle T_{k+1} \nu, e_i \rangle \left\langle \widetilde{A}\nu, e_i \right\rangle = -\left\langle T_k \nu, \widetilde{A} e_i \right\rangle \left\langle \widetilde{A}\nu, e_i \right\rangle$$

Observons que :

$$\begin{aligned} \widetilde{A} e_i &= \sum_{l=1}^{n-1} \left\langle \widetilde{A} e_i, e_l \right\rangle e_l + \left\langle \widetilde{A} e_i, \nu \right\rangle \nu \\ &= \gamma_i e_i + \left\langle \widetilde{A}\nu, e_i \right\rangle \nu \end{aligned}$$

Par notre hypothèse de récurence nous avons :

$$\begin{aligned}
\langle T_{k+1}\nu, e_i\rangle \left\langle \widetilde{A}\nu, e_i\right\rangle &= \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^j \, b_i\gamma_i^{j-1} b_i \langle T_{k+1-j}\nu, \nu\rangle - \langle T_k\nu, \nu\rangle \, {b_i}^2 \\
&= \sum_{j=3}^{k+2} (-1)^{j-1} \, b_i\gamma_i^{j-2} b_i \langle T_{k+2-j}\nu, \nu\rangle - \langle T_k\nu, \nu\rangle \, {b_i}^2 \\
&= \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^{j-1} \, b_i\gamma_i^{j-2} b_i \langle T_{k+2-j}\nu, \nu\rangle \, .
\end{aligned}$$

La preuve est achevée. Par conséquent, nous avons montré que :

$$\begin{aligned}
\langle T_r\nu, \nu\rangle &= \sigma_r \left(\widetilde{A}\right) - c \langle T_{r-1}\nu, \nu\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle T_{r-1}\nu, e_i\rangle \left\langle \widetilde{A}\nu, e_i\right\rangle \\
&= .\sigma_r \left(\widetilde{A}\right) - c \langle T_{r-1}\nu, \nu\rangle + \sum_{j=2}^{r} (-1)^j \left(B^\top A|_\Sigma^{j-2} B\right) \langle T_{r-j}\nu, \nu\rangle
\end{aligned}$$

Maintenant, nous affirmons que $T_r = \sigma_r (A|_\Sigma)$. Cette proposition se démontre encore par récurence sur r.

En effet, pour $r = 1$ nous avons d'aprés (3.5)

$$T_1 = \sigma_1 \left(\widetilde{A}\right) - c = \sigma_1 (A|_\Sigma) - c + c = \sigma_1 (A|_\Sigma)$$

Supposons que la proposition soit vraie pour k avec $1 \leq k \leq r - 1$. Nous avons d'aprés la première proposition et (3.5) :

$$\begin{aligned}\langle T_r\nu,\nu\rangle &= \sigma_r\left(\widetilde{A}\right) - c\,\langle T_{r-1}\nu,\nu\rangle + \sum_{j=2}^{r}(-1)^j\left(B^\top A|_\Sigma^{j-2}B\right)\langle T_{r-j}\nu,\nu\rangle \\ &= \sigma_r\left(\widetilde{A}\right) - c\sigma_{r-1}\left(A|_\Sigma\right) + \sum_{j=2}^{r}(-1)^j\left(B^\top A|_\Sigma^{j-2}B\right)\sigma_{r-j}\left(A|_\Sigma\right) \\ &= \sigma_r\left(A|_\Sigma\right)\end{aligned}$$

3.2.2 Cas général

Dans cette partie, nous allons étendre le résultat précédent au cas de codimension supérieure q. Nous généralisons les résultats de (3.2) et (3.3).

Soient P^n et M^n deux sous variétés de $\overline{M}^{n+q}$ de codimension q. Supposons que P^n soit totalement ombilique dans $\overline{M}^{n+q}$. Comme précédement $\Sigma^{n-1} \subset P^n$ est le bord de M^n. Alors nous avons les opérateurs de la seconde forme fondamentale, suivants :

$$A_\Sigma,\;\; A^{\xi_1},...,A^{\xi_p},\;\; A^{N_1},...,A^{N_q},$$

qui correspondent aux inclusions $\Sigma^{n-1} \subset P^n$, $P^n \subset \overline{M}^{n+q}$ et $M^n \subset \overline{M}^{n+q}$, où $(\xi_1,...,\xi_q)$ est une base orthonormale orthogonale à P^n et $(N_1,...,N_q)$ est une base orthonormale orthgonale à M^n.

Soient :

$$T_u = T_u\left(A^{N_1},...,A^{N_q}\right),\quad T_v = T_v\left(A_\Sigma,\; A^{\xi_1}|_\Sigma,...,A^{\xi_q}|_\Sigma\right)$$

et :

$$\widetilde{T_u} = \widetilde{T}_u\left(A^{N_1}|_\Sigma,...,A^{N_q}|_\Sigma\right)$$

où u est de longueur q et v est de longueur $q+1$. Le but est de vérifier les formules qui suivent:

$$\langle T_u\nu,\nu\rangle = \widetilde{\sigma}_u \tag{3.6}$$

et :

$$\widetilde{\sigma}_u = \sum_{|v|=|u|,\ v \text{ not increasing}} c_v \sigma_v \tag{3.7}$$

où c_v est un coeifficient indépendant de $\left(A^{N_1}|_\Sigma, ..., A^{N_q}|_\Sigma\right)$. Ces deux relations nous donnent :

$$\langle T_u \nu, \nu \rangle = \sum_{|v|=|u|,\ v \text{ not increasing}} c_v \sigma_v. \tag{3.8}$$

La première égalité est une généralisation de (3.2), tandis que la deuxième est une généralisation de (3.3). De plus, la première est purement algébrique, et la deuxième utilise une correspondance entre A_Σ, $A^{\xi_1}|_\Sigma, ..., A^{\xi_q}|_\Sigma$ et $A^{N_1}|_\Sigma, ..., A^{N_q}|_\Sigma$ analogue à la relation développée dans ([5]) dans le cas de codimension une.

Soyons plus précis, à cet effet adoptons la méthode utilisée dans ([5]). Pour cela, considérons une base orthonormale locale $(e_1, ..., e_{n-1})$ dans Σ^{n-1}, ν est le champs de vecteurs sortant unité conormal de l'inclusion $\partial M^n \subset M^n$ et η le champs de vecteurs normal unité de l'inclusion $\Sigma^{n-1} \subset P^n$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_i} e_j &= \sum_{k=1}^{n-1} \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, e_k \rangle e_k + \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \nu \rangle \nu + \sum_{\alpha=1}^{q} \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, N_\alpha \rangle N_\alpha \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, e_k \rangle e_k + \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \nu \rangle \nu + \sum_{\alpha=1}^{q} \langle A^{N_\alpha} e_i, e_j \rangle N_\alpha
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_i} e_j &= \sum_{k=1}^{n-1} \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, e_k \rangle e_k + \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \eta \rangle \eta + \sum_{\alpha=1}^{q} \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \xi_\alpha \rangle \xi_\alpha \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, e_k \rangle e_k + \langle A_\Sigma e_i, e_j \rangle \eta + \sum_{\alpha=1}^{q} \langle A^{\xi_\alpha} e_i, e_j \rangle \xi_\alpha
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\langle\overline{\nabla}_{e_i}e_j,\nu\rangle\nu+\sum_{\alpha=1}^{q}\langle A^{N_\alpha}e_i,e_j\rangle N_\alpha=\ \langle A_\Sigma e_i,e_j\rangle\eta+\sum_{\alpha=1}^{q}\langle A^{\xi_\alpha}e_i,e_j\rangle\xi_\alpha$$

Par conséquent :

$$\left\langle A^{N_\alpha}e_i,e_j\right\rangle=\langle\eta,N_\alpha\rangle\left\langle A_\Sigma e_i,e_j\right\rangle+\sum_{\beta=1}^{q}\left\langle\xi_\beta,N_\alpha\right\rangle\left\langle A^{\xi_\beta}e_i,e_j\right\rangle$$

Supposons que P^n soit totalement ombilique, i.e. $A^{\xi_\alpha}=\lambda_\alpha I_n$ pour tout $\alpha=1,...,q$, où I_n est l'application identité de TP^n.

Nous obtenons :

$$A^{N_\alpha}|_\Sigma=\langle\eta,N_\alpha\rangle A_\Sigma+\sum_{\beta=1}^{q}\left\langle\xi_\beta,N_\alpha\right\rangle\lambda_\beta I_{n-1}$$

Où I_{n-1} est l'application identité de Σ^{n-1}.

Notons que cette dernière relation peut s'écrire sous la forme :

$$A^{N_\alpha}|_\Sigma=\langle\eta,N_\alpha\rangle A_\Sigma+\langle V,N_\alpha\rangle I_{n-1}\tag{3.9}$$

Où $V=\sum_{\beta=1}^{q}\lambda_\beta\xi_\beta$.

On peut voir que :

$$\langle\eta,V\rangle=\det\left(\langle\xi_\alpha,N_\beta\rangle\right)_{\alpha,\beta}\quad\text{et}\ \ \langle\eta,N_\alpha\rangle=-\det C_\alpha$$

où C_α est une matrice obtenue de $C=\left(\langle\xi_\alpha,N_\beta\rangle\right)_{\alpha,\beta}$ en remplaçant la α-eme colonne par $\langle\xi_\alpha,\nu\rangle$.

Par conséquent nous avons :

$$\widetilde{T}_u=\widetilde{T}_u\left(\rho_1A_\Sigma+\mu_1I_{n-1},...,\rho_qA_\Sigma+\mu_qI_{n-1}\right),\ \text{où}\quad\rho_\alpha=\langle\eta,N_\alpha\rangle\,,\ \mu_\alpha=\langle V,N_\alpha\rangle$$

Si $\{e_1,\ldots,e_{n-1}\}$ est une base formée par les vecteurs propres de l'opérateur A_Σ alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, nous avons :

$$A_\Sigma(e_i) = \tau_i e_i$$

où τ_i sont les valeurs propres correspondantes. Pour abréger, posons $A_\alpha = A^{N_\alpha}$.

Par la relation (3.9) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle A_\alpha(e_i), e_j \rangle &= \left(\langle \eta, N_\alpha \rangle \tau_i + \langle V, N_\alpha \rangle \right) \delta_i^j \\ &= \gamma_{i,\alpha} \delta_i^j \end{aligned}$$

où

$$\gamma_{i,\alpha} = \langle \eta, N_\alpha \rangle \tau_i + \langle V, N_\alpha \rangle$$

Ainsi la matrice associée à l'opérateurr A_α relativement à la base $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, \nu\}$ est donnée par :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \gamma_{1,\alpha} & 0 & \ldots & 0 & \langle A_\alpha \nu, e_1 \rangle \\ 0 & \gamma_{2,\alpha} & \ldots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \gamma_{n-1,\alpha} & \langle A_\alpha \nu, e_{n-1} \rangle \\ \langle A_\alpha \nu, e_1 \rangle & \ldots & \ldots & \langle A_\alpha \nu, e_{n-1} \rangle & \langle A_\alpha \nu, \nu \rangle \end{pmatrix}.$$

.

3.3 Formules algébriques

Commençons par prouver la relation algébrique (3.7). Pour ce faire, posons :

$$\rho_\alpha = \langle \eta, N_\alpha \rangle, \quad \mu_\alpha = \langle V, N_\alpha \rangle.$$

Par ailleurs, nous allons écrire $v \leq u$ pour les multi-indices $v, u \in \mathbb{N}^q$, si la différence $u - v \in \mathbb{N}^q$.

Pour tout multi-indice $u = (u_1, ..., u_q) \in \mathbb{N}^q$ de longueur $|u| = n$, on pose :

$$\binom{n}{u} = \frac{n!}{u!} = \frac{n!}{u_1! \dots u_q!}.$$

Proposition 3.1 *Soient $\tilde{A} = (A_1|_\Sigma, ..., A_q|_\Sigma)$, avec $A_\alpha|_\Sigma = \rho_\alpha A_\Sigma + \mu_\alpha I$ et I l'application identité de Σ^{n-1}. Posons $\tilde{\sigma}_u = \sigma_u(\tilde{A})$. Alors pour tout multi-indice $u \in \mathbb{N}^q$, nous avons :*

$$\tilde{\sigma}_u = \frac{1}{(n-1-|u|)!} \sum_{l \leq u} \left(\begin{array}{c} |l| \\ l \end{array} \right) \rho^l \mu^{u-l} \left(\begin{array}{c} n-1-|l| \\ u-l \end{array} \right) \sigma_{|l|}\left(A_\Sigma\right). \tag{3.10}$$

Preuve: En appliquant la relation suivante voir [8]

$$\sigma_u(aA_1, \dots, A_q) = a^{u_1} \sigma_u(A_1, \dots, A_q)$$

nous obtenons

$$\tilde{\sigma}_u(\rho_1 A_\Sigma + \mu_1 I, \dots, \rho_q A_\Sigma + \mu_q I) = \rho^u \tilde{\sigma}_u(A_\Sigma + \theta_1 I, \dots, A_\Sigma + \theta_q I) \tag{3.11}$$

où

$$\theta_\alpha = \frac{\mu_\alpha}{\rho_\alpha} \text{ et } \rho^u = \rho_1^{u_1} ... \rho_q^{u_q}.$$

Consédérons le GNT $T_u = T_u(\hat{A})$, avec

$$\hat{A} = (A_\Sigma + \theta_1 I, \dots, A_\Sigma + \theta_q I).$$

Le polynome caractéristique de $\hat{A}$ est

$$P_{\hat{A}}(t) = \sum_{|u| \leq n-1} \hat{\sigma}_u t^u$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}P_{\hat{A}}(t) &= \det\left(I+\sum_{\alpha=1}^{q} t_\alpha\left(A_\Sigma+\theta_\alpha I\right)\right)\\ &= \prod_{j=1}^{n-1}\left(1+\tau_j\left(t_1+...+t_q\right)+t_1\theta_1+\ldots+t_q\theta_q\right).\end{aligned}$$

En appliquant la factorisation linéaire d'un monique polynomial, nous obtenons

$$P_{\hat{A}}(t)=\sum_{j=0}^{n-1}\left(1+t_1\theta_1+...+t_q\theta_q\right)^{n-1-j}\left(t_1+...+t_q\right)^j\sigma_j\left(A_\Sigma\right)$$

et du Théorème de multinomiaux, il s'en suit que:

$$P_{\hat{A}}(t)=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1-j}\sum_{|v|=k}\sum_{|l|=j}\frac{1}{(n-1-j-k)!}\begin{pmatrix} j\\ l\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-1-j\\ v\end{pmatrix}\sigma_j\left(A_\Sigma\right)\theta^v t^{v+l}.$$

avec $l=(l_1,...,l_q)$, $v=(v_1,...,v_q)$, $\theta=(\theta_1,...,\theta_q)$ et $t=(t_1,...,t_q)$. Posons $u=v+l$,donc $j=|u|-|v|$ et

$$P_{\hat{A}}(t)=\sum_{|u|\leq n-1}\sum_{l\leq u}\frac{1}{(n-1-|u|)!}\begin{pmatrix} |l|\\ l\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-1-|l|\\ u-l\end{pmatrix}\theta^{u-l}\sigma_{|l|}\left(A_\Sigma\right)t^u.$$

Ainsi le coefficient de t^u est donné par

$$\hat{\sigma}_u(A_\Sigma+\theta_1 I,\ldots,A_\Sigma+\theta_q I)=\frac{1}{(n-1-|u|)!}\sum_{l\leq u}\begin{pmatrix} |l|\\ l\end{pmatrix}\theta^{u-l}\begin{pmatrix} n-1-|l|\\ u-l\end{pmatrix}\sigma_{|l|}\left(A_\Sigma\right).$$

Par conséquent

$$\tilde{\sigma}_u(\rho_1 A_\Sigma+\mu_1 I,\ldots,\rho_q A_\Sigma+\mu_q I)=\frac{1}{(n-1-|u|)!}\sum_{l\leq u}\begin{pmatrix} |l|\\ l\end{pmatrix}\rho^l\mu^{u-l}\begin{pmatrix} n-1-|l|\\ u-l\end{pmatrix}\sigma_{|l|}\left(A_\Sigma\right).$$

Notons, que dans la démonstration précédente, nous avons supposé que $\rho_\alpha \neq 0$ pour tout α, ceci nous a permis de définir les constantes θ_α. La supposition que $\rho_\alpha \neq 0$ n'est pas nécéssaire. En effet, s'il existe $i \in \{1,..,q\}$ tel que $\rho_i = 0$, alors ([17]):

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_u &= \tilde{\sigma}_u(\rho_1 A_\Sigma + \mu_1 I, \dots, \rho_q A_\Sigma + \mu_q I) \\
&= \tilde{\sigma}_u(\rho_1 A_\Sigma + \mu_1 I, \dots, \rho_{i-1} A_\Sigma + \mu_{i-i} I, \mu_i I, \rho_{i+1} A_\Sigma + \mu_{i+1} I, \dots, \rho_q A_\Sigma + \mu_q I) \\
&= \mu_i^{u_i} \tilde{\sigma}_{\tilde{u}}(\rho_1 A_\Sigma + \mu_1 I, \dots, \rho_{i-1} A_\Sigma + \mu_{i-i} I, \rho_{i+1} A_\Sigma + \mu_{i+1} I, \dots, \rho_q A_\Sigma + \mu_q I),
\end{aligned}$$

où :

$$\tilde{u} = (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_q)$$

et nous pouvons appliquer la proposition précédente à $\tilde{\sigma}_{\tilde{u}}$.

Proposition 3.2 *Soit* $\tilde{A} = (A_1|_\Sigma, ..., A_q|_\Sigma)$, *où* $A_\alpha|_\Sigma = \rho_\alpha A_\Sigma + \mu_\alpha I$ *et* $\overline{A} = (A_\Sigma, \mu_1 I, ..., \mu_q I)$. *Pour un multi indice* $u \in \mathbb{N}^q$, *posons* $\tilde{\sigma}_u = \sigma_u(\tilde{A})$ *et* $\overline{\sigma}_u = \sigma_u\left(\overline{A}\right)$. *Alors*

$$\tilde{\sigma}_u = \sum_{l \leq u} \begin{pmatrix} |l| \\ l \end{pmatrix} \rho^l \overline{\sigma}_{(|l|, u-l)}. \tag{3.12}$$

Preuve: Remarquons que

$$\overline{\sigma}_{(j,v)} = \sigma_{(j,v)}(\bar{A}) = \mu^v \sigma_{(j,v)}(A_\Sigma, I, \dots, I).$$

On utilise la formule (voir [21])

$$\sigma_{(v,j)}(B_1, \dots, B_q, I) = \binom{n-1-|v|}{j} \sigma_v(B_1, \dots, B_q)$$

q -fois consécutives, nous obtenons

$$\begin{aligned}\sigma_{(j,v)}(A_\Sigma, I, \ldots, I) &= \binom{n-1-|v|+v_1}{v_1} \cdots \binom{n-1-|v|+|v|}{v_q} \sigma_j(A_\Sigma) \\ &= \frac{1}{(n-1-|v|-j)!} \binom{n-1-j}{v} \sigma_j(A_\Sigma)\end{aligned}$$

posons $l = u - v$, alors

$$\sigma_{(|l|,u-l)} = \frac{1}{(n-1-|u|)!} \begin{pmatrix} n-1-|l| \\ u-l \end{pmatrix} \sigma_{|l|}(A_\Sigma)$$

d'où

$$\overline{\sigma}_{(|l|,u-l)} = \frac{\mu^{u-l}}{(n-1-|u|)!} \begin{pmatrix} n-1-|l| \\ u-l \end{pmatrix} \sigma_{|l|}(A_\Sigma).$$

Ainsi, par (3.10) nous obtenons (3.12).

Maintenant, établissons la relation entre les fonctions symmétriques généralisées correspondant aux familles (A_α) et $(A_\alpha|\Sigma)$.

Proposition 3.3 *Soient* $A = (A_1, ..., A_q)$ *et* $\tilde{A} = (A_1|_\Sigma, ..., A_q|_\Sigma)$. *Posons* $\sigma_u = \sigma_u(A)$ *et* $\tilde{\sigma}_u = \sigma_u(\tilde{A})$. *Alors*

$$\sigma_u = \tilde{\sigma}_u + \sum_\alpha C_\alpha \tilde{\sigma}_{\alpha_\flat(u)} + \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\alpha^\sharp \beta^\sharp (0) \leq w \leq u} (-1)^{|w|-|v|+1} \binom{|u|-|w|}{u-w} B_\alpha^\top \tilde{A}^{u-w} B_\beta \tilde{\sigma}_{\alpha_\flat \beta_\flat (w)}$$

où $B_\alpha^\top = (\langle A_\alpha \nu, e_1 \rangle, ..., \langle A_\alpha \nu, e_{n-1} \rangle)$ *et* $C_\alpha = \langle A_\alpha \nu, \nu \rangle$.

Preuve: Calculons le polynôme caractéristique $P_A(t)$ de $A = (A_1, ..., A_q)$. Par définition, nous avons

$$\begin{aligned} P_A(t) &= \det(I + \sum_\alpha t_\alpha A_\alpha) \\ &= \left(C - B^\top \left(I_{n-1} + \sum_\alpha t_\alpha A_\alpha|_\Sigma\right)^{-1} B\right) \det\left(I_{n-1} + \sum_\alpha t_\alpha A_\alpha|_\Sigma\right) \end{aligned}$$

où $B^\top$ et C sont respectivement donnés par

$$B^\top = \left(\sum_\alpha t_\alpha \langle A_\alpha \nu, e_1\rangle, ..., \sum_\alpha t_\alpha \langle A_\alpha \nu, e_{n-1}\rangle\right) = \sum_\alpha t_\alpha B_\alpha^\top$$

et

$$C = 1 + \sum_\alpha t_\alpha \langle A_\alpha \nu, \nu\rangle.$$

Posons pour simplifier

$$M = I_{n-1} + \sum_\alpha t_\alpha A_\alpha|_\Sigma$$

et

$$f(t) = C - B^\top M^{-1} B.$$

Il est facile de voir que

$$B^\top M^{-1} B = \sum_{\alpha,\beta} t_\alpha t_\beta B_\alpha^\top M^{-1} B_\beta \ ,$$

Nous obtenons donc

$$f(t) = 1 + \sum_\alpha t_\alpha C_\alpha - \sum_{\alpha,\beta} t_\alpha t_\beta B_\alpha^\top M^{-1} B_\beta$$

Ceci nous permet de conclure que

$$P_A(t) = f(t) P_{\tilde{A}}(t)$$

où $P_A(t)$ et $P_{\tilde{A}}(t)$ sont définies par

$$P_A(t) = \sum_{|u|\leq n} \sigma_u t^u$$

et

$$P_{\tilde{A}}(t) = \sum_{|u|\leq n-1} \tilde{\sigma}_u t^u$$

par conséquent

$$\frac{\partial^u}{\partial t^u} P_A(t) \mid_{t=0} = u!\sigma_u, \quad \frac{\partial^u}{\partial t^u} P_{\tilde{A}}(t) \mid_{t=0} = u!\tilde{\sigma}_u$$

De même, nous avons

$$\frac{\partial^u}{\partial t^u} \left(P_{\tilde{A}}(t) f(t)\right) \mid_{t=0} = \sum_{v\leq u} \binom{u}{v} \left(\frac{\partial^v}{\partial t^v} P_{\tilde{A}}(t). \frac{\partial^{u-v}}{\partial t^{u-v}} f(t) \right) \mid_{t=0}$$

où

$$\binom{u}{v} = \frac{u!}{(u-v)!v!}$$

Maintenant nous allons calculer $\frac{\partial^{u-v}}{\partial t^{u-v}} f(t) \mid_{t=0}$. Pour $v = u$, il est vérifié que

$$\frac{\partial^{u-v}}{\partial t^{u-v}} f(t) \mid_{t=0} = f(0, ..., 0) = 1.$$

Si $v = \alpha_\flat(u)$, Nous avons

$$\frac{\partial^{u-v}}{\partial t^{u-v}} f(t) \mid_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t_\alpha} f(t) \mid_{t=0} = C_\alpha$$

Et pour chaque $v \leq \alpha_\flat \beta_\flat(u)$, nous obtenons

$$\frac{\partial^{u-v}}{\partial t^{u-v}} f(t) \mid_{t=0} = \frac{\partial^{u-v}}{\partial t^{u-v}} \left(1 + \sum_{\theta,\phi} t_\theta C_\theta - \sum_{\theta,\phi} t_\theta t_\phi B_\theta^\top \left(I_{n-1} + \sum_\theta t_\theta A_\theta|_\Sigma \right)^{-1} B_\phi \right) \mid_{t=0}$$

Prenons $|t| < \varepsilon$ pou un $\varepsilon > 0$ assez petit, alors

$$\left\| \sum_{\theta} t_\theta A_\theta|_\Sigma \right\| < 1.$$

Ainsi

$$\left(I_{n-1} + \sum_{\theta} t_\theta A_\theta|_\Sigma \right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\sum_{\theta} t_\theta A_\theta|_\Sigma \right)^k$$

Puisques les matrices $A_\theta|_\Sigma$ sont diagonales, alors elles commutent. Par conséquent, Nous pouvons écrire

$$\left(\sum_{\theta} t_\theta A_\theta|_\Sigma \right)^k = \sum_{w_1+\ldots+w_q=k} \binom{k}{w} t^w \tilde{A}^w$$

d'où

$$\left(I_{n-1} + \sum_{\theta} t_\theta A_\theta|_\Sigma \right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\sum_{w_1+\ldots+w_q=k} \binom{k}{w} t^w \tilde{A}^w \right)$$

Ceci nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{u-v}}{\partial t^{u-v}} f(t) \mid_{t=0} &= \frac{\partial^{u-v}}{\partial t^{u-v}} \left(-\sum_{\theta,\phi} t_\theta t_\phi B_\theta^\top \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\sum_{w_1+\ldots+w_q=|w|=k} \binom{|w|}{w} t^w \tilde{A}^w \right) B_\phi \right) \mid_{t=0} \\
&= \frac{\partial^{u-v}}{\partial t^{u-v}} \left(-\sum_{\theta,\phi} B_\theta^\top \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\sum_{w_1+\ldots+w_q=|w|=k} \binom{|w|}{w} t^{w+\theta^\sharp\phi^\sharp(0)} \tilde{A}^w \right) B_\phi \right) \mid_{t=0} \\
&= -\sum_{\theta,\beta} B_\theta^\top (-1)^{|u|-|v|-2} (u-v)! \binom{|u|-|v|-2}{u-\theta^\sharp\phi^\sharp(v)} \tilde{A}^{u-\theta^\sharp\phi^\sharp(v)} B_\phi \\
&= \sum_{\theta,\phi} (-1)^{|u|-|v|-1} (u-v)! \binom{|u|-|v|-2}{u-\theta^\sharp\phi^\sharp(v)} B_\theta^\top \tilde{A}^{u-\theta^\sharp\phi^\sharp(v)} B_\phi
\end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned}
u!\sigma_u = u!\tilde{\sigma}_u &+ \sum_{\theta} (\theta_\flat(u))! \binom{u}{\theta_\flat(u)} C_\theta \tilde{\sigma}_{\theta_\flat(u)} \\
&+ \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\theta,\phi} \sum_{0 \le v \le \alpha_\flat\beta_\flat(u)} \binom{u}{v} (-1)^{|u|-|v|-1} (u-v)! v! \binom{|u|-|v|-2}{u-\theta^\sharp\phi^\sharp(v)} B_\theta^\top \tilde{A}^{u-\theta_\flat\phi_\flat(v)} B_\phi \tilde{\sigma}_v
\end{aligned}$$

ou bien

$$\sigma_u = \tilde{\sigma}_u + \sum_{\alpha} C_\alpha \tilde{\sigma}_{\alpha_\flat(u)} + \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\theta,\phi} \sum_{0\leq v\leq \alpha_\flat\beta_\flat(u)} (-1)^{|u|-|v|-1} \binom{|u|-|v|-2}{u-\theta^\sharp\phi^\sharp(v)} B_\theta^\top \tilde{A}^{u-\theta^\sharp\phi^\sharp(v)} B_\phi \tilde{\sigma}_v.$$

Nous constatons que $\theta = \alpha$ et $\phi = \beta$, autrement, si par exemple $\alpha \neq \theta$, sachant que $u \geq \theta^\sharp\phi^\sharp(v)$ et en prenant $v = \alpha_\flat\beta_\flat(u)$, nous obtenons $u_\theta \geq u_\theta + 1$. Par conséquent

$$\sigma_u = \tilde{\sigma}_u + \sum_{\alpha} C_\alpha \tilde{\sigma}_{\alpha_\flat(u)} + \sum_{\alpha,\beta} \sum_{0\leq v\leq \alpha_\flat\beta_\flat(u)} (-1)^{|u|-|v|-1} \binom{|u|-|v|-2}{u-\alpha^\sharp\beta^\sharp(v)} B_\alpha^\top \tilde{A}^{u-\alpha^\sharp\beta^\sharp(v)} B_\beta \tilde{\sigma}_v.$$

Ou en d'autres termes

$$\sigma_u = \tilde{\sigma}_u + \sum_{\alpha} C_\alpha \tilde{\sigma}_{\alpha_\flat(u)} + \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\alpha^\sharp\beta^\sharp(0)\leq w\leq u} (-1)^{|w|-|v|+1} \binom{|u|-|w|}{u-w} B_\alpha^\top \tilde{A}^{u-w} B_\beta \tilde{\sigma}_{\alpha_\flat\beta_\flat(w)}.$$

3.4 Les transformations de Newton généralisées sur le bord

Nous utilisons les mêmes notations que celles de la partie précédente. Dans celle-ci, nous donnons l'expression de GNT $T_u = T_u(\tilde{A})$ sur le bord Σ^{n-1} de M^n, où $\tilde{A} = (A_1|\Sigma, \ldots, A_q|\Sigma)$. Rappelons que

$$A_\alpha|_\Sigma = \rho_\alpha A_\Sigma + \mu_\alpha I,$$

avec :

$$\rho_\alpha = \langle \eta, N_\alpha \rangle, \quad \mu_\alpha = \langle V, N_\alpha \rangle, \quad V = \sum_{\alpha=1}^{q} \lambda_\alpha \xi_\alpha.$$

Proposition 3.4 *Soient $\overline{M}^{n+q}$ une variété Riemanienne de dimension $(n+q)$, et $P^n \subset \overline{M}^{n+q}$ une sous variété totalement ombilique de $\overline{M}^{n+q}$ de dimension n. Notons par $\Sigma^{n-1} \subset$*

P^n une hypersurface compacte de P^n de dimension $(n-1)$. Soit $\Psi : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+q}$ une sous variété connexe, compacte et orientée de $\overline{M}^{n+q}$ de bord $\Sigma^{n-1} = \Psi(\partial M)$. Alors le long du bord ∂M, nous avons :

$$\langle T_u \nu, \nu \rangle = \tilde{\sigma}_u (A_1|_\Sigma, ..., A_q|_\Sigma). \tag{3.13}$$

Preuve: Faisons une démonstration par récurence. Supposons que (3.13) soit vraie pour chaque multi indice $v < u$. Nous avons par la formule de récurence de T_u :

$$\begin{aligned}
\langle T_u \nu, \nu \rangle &= \sigma_u \langle \nu, \nu \rangle - \sum_\alpha \left\langle A_\alpha T_{\alpha_\flat(u)} \nu, \nu \right\rangle \\
&= \sigma_u - \sum_\alpha \left\langle T_{\alpha_\flat(u)} \nu, A_\alpha \nu \right\rangle \\
&= \sigma_u - \sum_\alpha \left\langle T_{\alpha_\flat(u)} \nu, \nu \right\rangle \langle A_\alpha \nu, \nu \rangle - \sum_{\alpha,i} \left\langle T_{\alpha_\flat(u)} \nu, e_i \right\rangle \langle A_\alpha e_i, \nu \rangle .
\end{aligned}$$

Posons

$$C_\alpha = \langle A_\alpha \nu, \nu \rangle \ \ , b_{i,\alpha} = \langle A_\alpha e_i, \nu \rangle$$

alors

$$\langle T_u \nu, \nu \rangle = \sigma_u - \sum_\alpha C_\alpha \tilde{\sigma}_{\alpha_\flat(u)} - \sum_{\alpha,i} b_{i,\alpha} \left\langle T_{\alpha_\flat(u)} \nu, e_i \right\rangle .$$

Calculons $\langle T_u \nu, e_i \rangle$ pour chaque multi indice $u \in \mathbb{N}^q$. Notons que

$$A_\alpha e_i = \rho_\alpha A_\Sigma e_i + \mu_\alpha e_i + b_{i,\alpha} \nu$$

supposons que $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ est une base othonormée de $T_p \Sigma^{n-1}$ formée par les vecteurs propres de A_Σ. Donc

$$A_\alpha e_i = \gamma_{i,\alpha} e_i + b_{i,\alpha} \nu$$

avec

$$\gamma_{i,\alpha} = \rho_\alpha \tau_i + \mu_\alpha .$$

Nous montrerons inductivement que

$$\langle T_u\nu, e_i\rangle = \sum_{\alpha} \sum_{\alpha^\sharp(0)\le w\le u} (-1)^{|u|-|w|+1} \binom{|u|-|w|}{u-w} b_{i,\alpha}\gamma_i^{u-w}\tilde{\sigma}_{\alpha_\flat(w)} \tag{3.14}$$

où

$$\gamma_i = (\gamma_{i,1}, ..., \gamma_{i,q})$$

En effet, pour $u = \beta^\sharp(0)$ nous avons,

$$\langle T_u\nu, e_i\rangle = \sigma_{\beta^\sharp(0)}\langle \nu, e_i\rangle - \sum_{\alpha} \left\langle A_\alpha T_{\alpha_\flat(\beta^\sharp(0))}\nu, e_i\right\rangle$$

Avec

$$T_{\alpha_\flat(\beta^\sharp(0))} = \begin{cases} I \text{ if } \alpha = \beta \\ 0 \text{ if } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}\langle T_u\nu, e_i\rangle &= -\langle A_\beta\nu, e_i\rangle \\ &= -b_{i,\beta} \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{\alpha^\sharp(0)\le w\le \beta^\sharp(0)} (-1)^{\left|\beta^\sharp(0)\right|-|w|+1} \binom{\left|\beta^\sharp(0)\right|-|w|}{\beta^\sharp(0)-w} b_{i,\alpha}\gamma_i^{\beta^\sharp(0)-w}\tilde{\sigma}_{\alpha_\flat(w)},\end{aligned}$$

puisque la somme est reduite à un seul élément pour $\alpha = \beta$. Supposons que (3.14) est vraie pour chaque multi indice $v < u$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle T_u \nu, e_i \rangle &= \sigma_u \langle \nu, e_i \rangle - \sum_{\alpha} \left\langle A_\alpha T_{\alpha_\flat(u)} \nu, e_i \right\rangle \\
&= -\sum_{\alpha} \left\langle T_{\alpha_\flat(u)} \nu, A_\alpha e_i \right\rangle \\
&= -\sum_{\alpha} \left\langle T_{\alpha_\flat(u)} \nu, \nu \right\rangle \langle A_\alpha e_i, \nu \rangle - \sum_{\alpha, j} \left\langle T_{\alpha_\flat(u)} \nu, e_i \right\rangle \langle A_\alpha e_i, e_j \rangle \\
&= -\sum_{\alpha} \left\langle T_{\alpha_\flat(u)} \nu, e_i \right\rangle \gamma_{i,\alpha} - \sum_{\alpha} b_{i,\alpha} \tilde{\sigma}_{\alpha_\flat(u)} \\
&= -\sum_{\alpha} \gamma_{i,\alpha} \left(\sum_{\beta} \sum_{\beta^\sharp(0) \leq w \leq \alpha_\flat(u)} (-1)^{|u|-|w|} \binom{|u| - |w| - 1}{\alpha_\flat(u) - w} b_{i,\beta} \gamma_i^{\alpha_\flat(u)-w} \tilde{\sigma}_{\beta_\flat(w)} \right) \\
&\quad - \sum_{\alpha} b_{i,\alpha} \tilde{\sigma}_{\alpha_\flat(u)}.
\end{aligned}$$

Il est clair que

$$\gamma_{i,\alpha} . \gamma_i^{\alpha_\flat(u)-w} = \gamma_i^{u-w}$$

Notons que si on pose $w = u$ nous obtenons la dérnière somme. Ainsi nous avons

$$\langle T_u \nu, e_i \rangle = \sum_{\alpha,\beta} \left(\sum_{\beta^\sharp(0) \leq w \leq u} (-1)^{|u|-|w|+1} \binom{|u| - |w| - 1}{\alpha_\flat(u) - w} b_{i,\beta} \gamma_i^{u-w} \tilde{\sigma}_{\beta_\flat(w)} \right).$$

Puisque

$$\sum_{\alpha} \binom{|u| - |w| - 1}{\alpha_\flat(u) - w} = \binom{|u| - |w|}{u - w}$$

Nous en déduisons que

$$\langle T_u \nu, e_i \rangle = \sum_{\beta} \left(\sum_{\beta^\sharp(0) \leq w \leq u} (-1)^{|u|-|w|+1} \binom{|u| - |w|}{u - w} b_{i,\beta} \gamma_i^{u-w} \tilde{\sigma}_{\beta_\flat(w)} \right)$$

ce qui termine la preuve de (3.14). Nous pouvons maintenant prouver (3.13). Nous avons

$$\sum_{\alpha,i}\left\langle T_{\alpha_\flat(u)}\nu, e_i\right\rangle b_{i,\alpha} = \sum_{\alpha,\beta,i}\left(\sum_{\beta^\sharp(0)\leq w\leq \alpha_\flat(u)}(-1)^{|u|-|w|}\binom{|u|-|w|-1}{\alpha_\flat(u)-w}b_{i,\beta}\gamma_i^{\alpha_\flat(u)-w}\tilde{\sigma}_{\beta_\flat(w)}\right)$$

Remplaçons w par $\alpha_\flat(w)$, nous obtenons

$$\sum_{\alpha,i}\left\langle T_{\alpha_\flat(u)}\nu, e_i\right\rangle b_{i,\alpha} = \sum_{\alpha,\beta,i}\left(\sum_{\alpha^\sharp\beta^\sharp(0)\leq w\leq u}(-1)^{|u|-|w|+1}\binom{|u|-|w|}{u-w}b_{i,\alpha}\gamma_i^{u-w}b_{i,\beta}\tilde{\sigma}_{\alpha_\flat\beta_\flat(w)}\right)$$

Notons que

$$\sum_i b_{i,\alpha}\gamma_i^{u-w}b_{i,\beta} = B_\alpha^\top\tilde{A}^{u-w}B_\beta$$

Nous inférons

$$\sum_{\alpha,i}\left\langle T_{\alpha_\flat(v)}\nu, e_i\right\rangle b_{i,\alpha} = \sum_{\alpha,\beta}\sum_{\alpha^\sharp\beta^\sharp(0)\leq w\leq u}(-1)^{|u|-|w|+1}\binom{|u|-|w|}{u-w}B_\alpha^\top\tilde{A}^{u-w}B_\beta.\tilde{\sigma}_{\alpha_\flat\beta_\flat(w)}$$

Résumant toutes les considérations ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle T_u\nu,\nu\rangle &= \sigma_u - \sum_\alpha\left\langle T_{\alpha_\flat(u)}\nu,\nu\right\rangle\langle A_\alpha\nu,\nu\rangle - \sum_{\alpha,i}\left\langle T_{\alpha_\flat(u)}\nu, e_i\right\rangle\langle A_\alpha e_i,\nu\rangle\\ &= \sigma_u - \sum C_\alpha\tilde{\sigma}_{\alpha_\flat(u)} - \sum_{\alpha,\beta}\sum_{\alpha^\sharp\beta^\sharp(0)\leq w\leq u}(-1)^{|u|-|w|+1}\binom{|u|-|w|}{u-w}B_\alpha^\top\tilde{A}^{u-w}B_\beta.\tilde{\sigma}_{\alpha_\flat\beta_\flat(w)}\end{aligned}$$

Appliquons la proposition (3.3), nous obtenons notre résultat.

Par la proposition (3.1) nous obtenons l'expression de $\langle T_u\nu,\nu\rangle$ en terme de fonctions symétriques de l'opérateur A_Σ.

Corollaire 3.1 *Sous les mêmes conditions de la Proposition (3.4), nous avons*

$$\langle T_u\nu,\nu\rangle = \frac{1}{n-1-|u|}\sum_{l\leq u}\binom{n-1-|l|}{|u|-l}\rho^l\mu^{u-l}\sigma_{|l|}(A_\Sigma). \tag{3.15}$$

La relation (3.15) devient plus simple si on suppose que l'inclusion $P^n \subset \overline{M}^{n+q}$ soit totalement géodésique.

Corollaire 3.2 *Sous les mêmes conditions de la Proposition 3.4 et en supposant que $P^n \subset \overline{M}^{n+q}$ soit totalement géodésique, alors pour chaque multi-indice u de longueur $|u| \leq n-1$, nous avons :*

$$\langle T_u \nu, \nu \rangle = \rho^u \sigma_{|u|} (A_\Sigma)$$

Pour établir la preuve, il suffit d'utiliser (3.15) avec $\mu_\alpha = 0$.

3.5 Transversalité des sous variétés

La formule précédente de GNT implique une relation entre la transversalité de M^n , P^n et l'éllipticité de T_u à condition que P^n soit totalement géodésique dans $\overline{M}^{n+q}$. Ce résultat généralise la proposition (6.2) dans [5] pour une codimension arbitraire.

Théorème 3.1 *Sous les hypothèse du corollaire (3.2), les sous variétés M^n et P^n sont transverses le long de ∂M à condition que pour certain multi-indice u de longueur $1 \leq |u| \leq n-1$, la tranformation de Newton généralisée T_u soit définie positive sur M^n .*

Preuve: Dire que M^n et P^n sont non transverses signifie qu'il existe $p \in \partial M$ tel que pour tout $\alpha \in \{1, ..., q\}$ nous avons

$$\rho_\alpha = \langle \eta, N_\alpha \rangle = 0 \quad \text{en } p.$$

Donc, si on suppose que pour tout $p \in \overline{M}^{n+q}$, T_u est définie positive, alors par le corollaire (3.2), $\rho_\alpha(p) \neq 0$. Ainsi

$$\langle \eta, N_\alpha \rangle \neq 0,$$

par conséquent M^n et P^n sont transverses.

Bibliographie

[1] M. Abdelmalek, M. Benalili, Transversality versus ellipticity on pseudo-Riemannian manifolds, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, Vol 12, Issue 7. (2015), 12 pp .

[2] M. Abdelmalek, M. Benalili, K. Niedziałomski, Geometric Configuration of Riemannian Submanifolds of arbitrary Codimension, J. Geom. (2017), doi:10.1007/s00022-017-0374-2.

[3] A.D. Alexandrov, Uniqueness theorems for surfaces in the large 11. Vestnik Leningrad Univ, 2. (1956), 5–17.

[4] A.D. Alexandrov, A characteristic property of spheres. Ann. Mat. Pura Appl. 58. (1962), 303–315.

[5] L.J. Alias, J. H. S. de Lira, J. M. Malacarne, Constant higher-order mean curvature hypersurfaces in Riemannian spaces, J. Inst. Math. Jussieu 5(4). (2006), 527–562.

[6] L.J. Alias, J. M. Malacarne, Constant scalar curvature hypersurfaces with spherical boundary in Euclidean space, Rev. Mat. Iberoamericana, 18(2). (2002), 431–442.

[7] L.J. Alías, J. M. Malacarne, Spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in Minkowski space–time, J. Geom. Phys. 41 (2002), 359–375.

[8] L.J. Alías, J. Meléndez, Hypersurfaces with constant higher order mean curvature in Euclidean space, Geom. Dedic. 182 (2016), 117–131.

[9] L.J. Alías, J.A. Pastor, Constant mean curvature spacelike hypersurfaces with spherical boundary in the Lorentz–Minkowski space, J. Geom. Phys. 28 (1998), 85–93.

[10] L.J. Alías, J.A. Pastor, Spacelike hypersurfaces with constant scalar curvature in the Lorentz–Minkowski space, Ann. Global Anal. Geom. 18 (2000), 75–83.

[11] K. Andrzejewski, W. Kozlowski, K. Niedzialomski, Generalized Newton transformation and its applications to extrinsic geometry, arXiv:1211.4754.

[12] K. Andrzejewski, P. Walczak, The Newton transformations and new integral formulae for foliated manifolds, Ann. Glob. Anal.Geom. 37 (2010), μ 103–111.

[13] J.L. Barbosa, Hypersurfaces of constant mean curvature in $\mathbb{R}^{n+1}$ bounded by an Euclidean sphere. Geometry and topology of submanifolds, II, 1-9. World Sci. Publishing, 1990.

[14] J.L. Barbosa, Constant mean curvature surfaces bounded by a planar curve. Mat. Contemp. 1 (1991), 3-15.

[15] J.L. Barbosa, A.G, Colares, Stability of hypersurfaces with constant r -mean curvature. Ann. Global Anal. Geom. 15 (1997), 277-297.

[16] F.Brito, R.Langevin, H. Rosenberg : Intégrales de courbure sur des variétés feuilletées. J. Di . Geom. 16 (1981), 19-50.

[17] L. Cao, H. Li, r-minimal submanifolds in space forms, Ann Glob Anal Geom. 32 (2007), 311 341.

[18] B. Y. Chen, Geometry of submanifolds and its applications, Sci. Univ. Tokyo, Tokyo. (1981).

[19] T.E. Cecil, P.J. Ryan, Geometry of hypersurfaces, Springer (2015).

[20] M.P. do Carmo, Riemannian geometry, Birkhäuser, second edition. (1992).

[21] M. Hirsch, immerions of manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959), 242-276.

[22] M. Hirsch, Differential Topology, GTM 33, Springer. (1976).

[23] H. Hopf. Differential geometry in the large, volume 1000 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1983. Notes taken by Peter Lax and John Gray, With a preface by S. S. Chern.

[24] W. Hsiang, Z. Teng, W. Yu, New examples of constant mean curvature immersions of $(2k-1)$-spheres into Euclidean $2k$-space, Ann. Math., 117(3). (1983), 609–625 .

[25] D. Impera, On the Geometry of Newton operators (Doctorat thesis), Universita degli Studi di Milano, Dipartimento di Matematica F. Enriques. (2011).

[26] A. Kosinski, Differential manifolds, Academic press. (1993).

[27] M. Koiso, Symmetry of hypersurfaces of constant mean curvature with symmetric boundary, Math. Z. 191 (1986), 567–574.

[28] N.J. Korevaar, Sphere theorems via Alexandrov for constant Weingarten curvature hypersurfaces : Appendix to a note of A. Ros, J. Differential Geom. 27 (1988), 221–223.

[29] F. Laudenbach, Transversalité de Thom et h-principe de Gromov, Cours à l'Université de Ouargla (Algérie), décembre (2013).

[30] R., López, S, Montiel, Constant mean curvature discs with bounded area. Proc. Am. Math. Soc. 123 (1995), 1555–1558.

[31] V. Magnani, J. T. Tyson, D. Vittone, On traversal manifolds and their measure, arXiv: 1211.6607v1.

[32] S. Montiel, A. Ros. Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures. In Differential geometry, volume 52 of Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math,279–296. Longman Sci. Tech., Harlow, (1991).

[33] R., López, S, Montiel, Constant mean curvature discs with bounded area. Proc. Am. Math. Soc. 123 (1995), 1555–1558.

[34] K. Niedzialomski, Frame bundle approach to generalized minimal submanifolds, arXiv:1601.02248.

[35] B. O'Neill, Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Academic Press, New York. (1983).

[36] K. B. Petersen, M. S. Pedersen, The Matrix Cookbook, publish, Technical University of Denmark. (2012).

[37] R.C. Reilly, Variational properties of functions of the mean curvature for hypersurfaces in space forms, J. Differential Geom. 8 (1973), 465–477.

[38] R.C. Reilly, Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold. Indiana Univ. Math. J, 26(3). (1977), 459–472.

[39] A. Ros, Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures, Rev. Mat. Iberoamericana 3 (1987), 447 453.

[40] A. Ros. Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem. J. Differential Geom, 27(2). (1988), 215–223. With an appendix by Nicholas J. Korevaar.

[41] H. Rosenberg, Hypersurfaces of constant curvature in space forms, Bull. Sc. Math. 117 (1993), 211–239.

[42] V. Rovenski, P. G. Walczak, Integral formulae on foliated symmetric spaces, Math. Ann. 352 (2012), 223–237.

[43] R. Thom, Quelques propriétés globales des variétés differentiables. Comment. Math. Helv. 28 (1954), 17-86.

[44] G. H. Yang, S. X. Feng, G. J. Ni, Y. S. Duan, Relations of two transversal submanifolds and global manifold, Int. J. Mod. Phys. A 16 (2). (2001), 3535–3551.

[45] P. Walczak, V. Rovenski, Topics in Extrinsic Geometry of Codimension-One Foliations, Springer Briefs in Math, Springer (2011).

[46] H. Wente, Counterexample to a conjecture of H. Hopf, Pac. J. Math, 121(1). (1986), 193–243.

Résumé

Ce travail consiste à l'étude de la géométrie d'une sous variété le long de son bord, en particulier on établit une relation entre la transversalité de deux sous variétés et l'ellipticité de la r^{ieme} transformations de Newton en un point du bord.

Mots-clés

Seconde forme fondamentales- transformations de Newton- transformation de Newton généralisée- fonctions élémentaires symétriques-équation de Gauss-équation de Codazzi-sous variété totalement embilique-sous variété totalement géodésiques-transversalité.

ملخص

الغرض من هذا البحث هو دراسة هندسة عديدات الطيات الجزئية المحدودة, على حدها. بالخصوص سنعطي العلاقة بين استعراضية اثنان من الطيات الجزئية واهليليجية تحويلات نيوتن في نقطة معينة من الحد. هده العلاقة تعتبر احدى المفاتيح الاساسية المستعملة في معرفة طبيعة طية جزئية مغمورة في طية اخرى.

كلمات مفتاحية

الشكل الاساسي الثاني-تحويلات نيوتن -تحويلات نبوتن المعممة- الدوال الاساسية المتناظرة- معادلة غوس-معادلة كودازي- الطيات الجزئية جيوديسية تماما- الطيات الجزئية سرية تماما- الاستعراضية.

Abstract

The subject of this thesis is the study of the geometry of a submanifold along its boundary. In particular we establish a relationship between the transversality of two given submanifolds, and the ellipticity of the r^{th} Newton transformations in a point of the boundary.

Keywords

Second fundamental form- Newton transformations-generalized Newton transformations- elementary symmetric functions-Gauss equation-Codazzi equation- totally umbilic submanifold - totally geodesic submanifold - transversality.