Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen Algérie
جامعة أبي بكر بلقايد
تلمسان الجزائر

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Abou Bakr Belkaid– Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Thème

Théorème de Lax-Milgram dans les espaces de Banach et applications

Présenté par:

M. BOUHENNI Hocine

Soutenu le 06 juillet 2017 devant le jury composé de

-M. B. Messirdi	***Président***	***MCB***	***Université de Tlemcen***
-M. M. Dahmane	***Examinateur***	***MAA***	***Université de Tlemcen***
-M. M. Mamchaoui	***Examinateur***	***MCB***	***Université de Tlemcen***
-M. A. Bensedik	***Encadrant***	***MCB***	***Université de Tlemcen***

Année Universitaire 2016 - 2017

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu, tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé au niveau du département de mathématiques de la faculté des sciences de l'Université de Tlemcen, sous la direction de ***Monsieur Ahmed Bensedik****, ma plus grande gratitude va à mon encadreur, pour sa disponibilité et la confiance qu'il m'a accordée.*

J'ai profité pendant longtemps de son savoir et de son savoir-faire dont j'ai pu bénéficier au cours de nombreuses discussions.

J'aimerais aussi le remercier pour l'autonomie qu'il m'a accordée, et ses précieux conseils qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

J'exprime toute ma reconnaissance à ***Monsieur Bachir Messirdi*** *pour avoir bien voulu accepter de présider le jury de ce mémoire.*

Je remercie aussi, les professeurs ***MM. Mohammed Dahmane*** *et* ***Mohammed Mamchaoui*** *d'avoir accepté d'examiner ce travail.*

Mes remerciements s'adressent également à ***Monsieur Benmiloud Mebkhout****, chef de département de mathématiques,*

Afin de n'oublier personne, mes vifs remerciements s'adressent à tous ceux qui m'ont aidé à la réalisation de ce modeste mémoire.

Dédicaces

*Au nom du dieu le clément et le miséricordieux louange à **ALLAH** le tout puissant.*

Je dédie ce modeste travail en signe de respect, reconnaissance et de remerciement :

A mes chers parents Salah et Karima, qui m'ont aidé de près et de loin.

A mes chers frères Sid-ahmed, Nassima, Nawel et Imane.

A ma chère femme Djamila et mon fils Moetez.

A tous mes chers amis. A toute l'équipe, Ossama, Youcef, Ilias,...

A toute ma famille, qui porte le nom Bouhenni.

A tous ceux qui ont participé à l'élaboration de ce modeste travail et tous ceux qui me sont chers.

Mr HOCINE BOUHENNI

Table des matières

1 Préliminaires **4**
- 1.1 Bref aperçu sur les espaces de Hilbert . . . 4
- 1.2 Rappel sur les espaces de Banach . . . 9
- 1.3 Sur les espaces topologiques . . . 10
- 1.4 Rappel sur les applications linéaires . . . 10
- 1.5 Quelques outils dans les espaces de Lebesgue . . . 12
- 1.6 Quelques outils dans les espaces de Sobolev . . . 13

2 Théorème de Lax-Milgram dans les espaces de Hilbert **15**
- 2.1 Théorème des projections . . . 16
- 2.2 Théorème de représentation de Riesz . . . 20
- 2.3 Théorème de Lax-Milgram . . . 22
- 2.4 Applications . . . 27

3 Théorème de Lax-Milgram dans les espaces de Banach **32**
- 3.1 Introduction et hypothèses . . . 32
- 3.2 Symétrisation de formes linéaires et propriétés . . . 33
- 3.3 Sur la condition de la coercivité . . . 40
- 3.4 Applications . . . 59

Bibliographie **62**

Introduction

Le présent travail est consacré au théorème de Lax-Milgram dans les espaces de Banach. On rappelle que ce théorème est bien connu dans les espaces de Hilbert, vu son application simple grâce au produit scalaire. Il est utilisé pour assurer l'existence et l'unicité de la solution de certains problèmes. On cite dans ce contexte, les équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles linéaires dans les espaces de Hilbert où après formulation faible, dite aussi variationnelle, se présentent sous la forme

$$a(u, v) = L(v) \qquad (F)$$

où a est une forme bilinéaire et L est une forme linéaire et le problème revient à montrer l'existence et l'unicité de u solution de l'équation (F), qui doit être satisfaite pour tout élément v de l'espace de Hilbert en question.

Le but de ce mémoire, basé essentiellement sur la lecture des articles [7] et [8] de Ramaswamy, est de voir comment ce grand théorème peut-être généralisé aux espaces de Banach qui ne sont pas à priori des espaces de Hilbert. On verra aussi comment on peut appliquer le théorème de la représentation de Riesz dans ces espaces qui ne sont munis d'aucun produit scalaire.

Tout ceci va être découvert dans ce mémoire qui se présente comme suit :

Chapitre 1 :

Dédié à quelques outils indispensables pour les chapitres suivants.

Chapitre 2 :

Consacré au théorème de Lax-Milgram dans les espaces de Hilbert et à quelques applications.

Chapitre 3 :

Présente et formule le théorème de Lax-Milgram dans les espaces de Banach avec deux applications explicatives.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Bref aperçu sur les espaces de Hilbert

Définition 1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

On dit que E est muni d'un produit scalaire s'il existe une application

$$h : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(u, v) \longmapsto h(u, v) = \langle u, v\rangle,$$

vérifiant les propriétés suivantes.

Pour tous u, v et $w \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

i) $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$ *(Hermitienne).*

ii) $\langle \alpha u+\beta w, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle+\beta\langle w, v\rangle;\quad \langle u, \alpha v+\beta w\rangle = \overline{\alpha}\langle u, v\rangle+\overline{\beta}\langle u, w\rangle$ *(Sesquilinéaire).*

iii) $\langle u, u\rangle \geq 0$ *et* $\langle u, u\rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$ *(Définie positive).*

Un espace muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien.

Exemples.

1) Sur $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire euclidien usuel est

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i,$$

où $\quad u = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ et $v = (v_i)_{1\leq i\leq n}$.

2) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω.

$$C(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}; continue\},$$

$C(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Omega} f(u)\overline{g(u)}du,$$

est un espace préhilbertien.

Définition 2. *Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Une norme sur E, est une application, $\quad \|.\|_E : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ayant les trois propriétés suivantes :*

1) a) $\quad \|u\|_E \geq 0 \qquad \forall u \in E,\quad$ b) $\quad \|u\|_E = 0 \Longleftrightarrow u = 0 \quad$ (Définie positive).

2) $\|\lambda u\|_E = |\lambda|\, \|u\|_E \qquad \forall u \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad$ (Homogénéité).

3) $\|u + v\|_E \leq \|u\|_E + \|v\|_E \qquad \forall u, v \in E \quad$ (Inégalité triangulaire).

Exemples.

Sur $\mathbb{R}^n$ les normes suivantes sont les plus utilisées ;

1) $\|u\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|, \qquad u = (u_1, ..., u_n)$

2) $\|u\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} u_i^2)^{1/2}$

3) $\|u\|_\infty = \max_{i=1,2,...n} |u_i|$

Définition 3. *Le couple* $(X, \|.\|_X)$ *où* X *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *et* $\|.\|_X$ *une norme sur* X *est appelé un espace normé (réel si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, complexe si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*).*

Proposition 1. *(Inégalité Cauchy-Schwarz).*

Soit E *un espace préhilbertien sur* $\mathbb{K}$ *muni d'un produit scalaire* $\langle .,. \rangle$.

$$\forall u, v \in E; \quad |\langle u, v\rangle| \leq \langle u, u\rangle^{1/2} \langle v, v\rangle^{1/2} \tag{1.1}$$

Preuve :

Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = 1$.

D'après $iii)$ de la définition 1 on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle tu + \lambda v, tu + \lambda v\rangle &= \langle tu, tu\rangle + \langle tu, \lambda v\rangle + \langle \lambda v, tu\rangle + \langle \lambda v, \lambda v\rangle \\ &= t^2 \langle u, u\rangle + t\overline{\lambda}\langle u, v\rangle + t\lambda\langle v, u\rangle + |\lambda|^2 \langle v, v\rangle \\ &= t^2 \langle u, u\rangle + 2tRe\lambda\langle v, u\rangle + |\lambda|^2 \langle v, v\rangle \quad (\star) \end{aligned}$$

et puisque, $Re\lambda \langle v, u\rangle \leq |\lambda \langle v, u\rangle| = |\langle u, v\rangle|$, alors

$$t^2 \langle u, u\rangle + 2tRe\lambda |\langle v, u\rangle| + |\lambda|^2 \langle v, v\rangle \leq t^2 \langle u, u\rangle + 2t |\langle u, v\rangle| + |\lambda|^2 \langle v, v\rangle$$

$$\text{d'où, de} \quad (\star) \qquad 0 \leq t^2 \langle u, u\rangle + 2t |\langle u, v\rangle| + |\lambda|^2 \langle v, v\rangle ,$$

ainsi on a, $$P(t) := t^2 \langle u, u\rangle + 2t |\langle u, v\rangle| + |\lambda|^2 \langle v, v\rangle \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Le discriminant du trinôme $P(t)$ doit être négatif ou nul.

$$\Delta' = (|\langle u, v\rangle|)^2 - \langle u, u\rangle \langle v, v\rangle \leq 0 \Rightarrow \boxed{|\langle u, v\rangle| \leq \langle u, u\rangle^{1/2} \langle v, v\rangle^{1/2}} \quad \text{d'où} \quad (1.1).$$

Proposition 2. *(Norme induite par un produit scalaire).*

Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$ muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

L'application $\|.\|$ définie sur E par $\|.\| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$ est une norme sur E.

Preuve :

Pour tous $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a,

1) $\langle u, u \rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$, donc $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

2) $\langle \lambda u, \lambda u \rangle = \mid \lambda \mid^2 \langle u, u \rangle \Longrightarrow \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$.

3) Inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}
\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\
&= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\
&= \|u\|^2 + 2Re \langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\
&\leq \|u\|^2 + 2 |\langle u, v \rangle| + \|v\|^2 \\
&\leq \|u\|^2 + 2 \langle u, u \rangle^{1/2} \langle v, v \rangle^{1/2} + \|v\|^2 \qquad \text{d'après} \quad (1.1) \\
&= (\|u\| + \|v\|)^2
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Ainsi l'application $\|.\| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$ est une norme sur E .

Proposition 3. *(L'identité du parallélogramme).*

Soit E un espace préhilbertien réel sur $\mathbb{K}$ muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$. Alors

$$\forall u, v \in E, \quad 2(\| u \|^2 + \| v \|^2) = \| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 \qquad (1.2)$$

(i.e. dans un parallélogramme la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés).

Preuve :

On a

$$\begin{aligned}
\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle + \langle u - v, u - v \rangle \\
&= \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle \\
&= 2(\langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle) \\
&= 2(\| u \|^2 + \| v \|^2) \quad \text{d'où} \quad (1.2).
\end{aligned}$$

Remarque.

Si l'identité de parallélogramme n'est pas satisfaite par la norme induite alors l'espace en question n'est pas un espace de préhilbertien.

Définition 4. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associée.*

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), H est dit espace de Hilbert réel (resp. complexe).

Exemples.

Soient $u = (u_1, u_2..., u_n)$, $v = (v_1, v_2..., v_n) \in \mathbb{K}^n$.

1) $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n$ est un espace de Hilbert réel.

2) $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire $\langle u, v\rangle = u_1\overline{v}_1 + u_2\overline{v}_2 + ... + u_n\overline{v}_n$ est un espace de Hilbert complexe.

3) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $L^2(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions à carré intégrable sur Ω.

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}; \int_\Omega |f(x)|^2 dx < \infty\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

1.2 Rappel sur les espaces de Banach

Définition 5. *Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace normé. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E est dite une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N = N(\varepsilon)$ tel que pour tous $m, n > N$, on ait $\|u_n - u_m\|_E < \varepsilon$ (i.e $\lim_{n,m\longrightarrow+\infty} \|u_n - u_m\|_E = 0$).*

Définition 6. *Un espace normé $(E, \|.\|_E)$ où toute suite de Cauchy est convergente est appelé un espace de Banach.*

Exemple.

Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ munis de leurs normes usuelles sont des espaces de Banach.

Définition 7. *Soit E un e.v.n. On dit que E est séparable s'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1} \subset E$ qui est dense dans E.*

1.3 Sur les espaces topologiques

Parmi les espaces topologiques particulièrement importants, signalons les espaces métriques, les espaces normés, les espaces de Banach et les espaces de Hilbert.

Définition 8. *Soient $(X, \tau), (Y, \tau')$ deux espaces topologiques,*

1. *Une application $f : X \longrightarrow Y$ est dite un homéomorphisme de (X, τ) sur (Y, τ') si f est une bijection, et si f et f^{-1} sont continues.*
2. *(X, τ) et (Y, τ') sont dits homéomorphes s'il existe un homéomorphisme de l'un sur l'autre.*

Exemples

i) Les sous-espaces $[a, b]$ et $[0, 1]$ de la droite réelle $\mathbb{R}$ sont homéomorphes. En effet l'application $u \longmapsto (b - a)u + a$ de $[0, 1] \longrightarrow [a, b]$ est un homéomorphisme.

ii) La droite réelle $\mathbb{R}$ et l'intervalle $] - 1, 1[$ sont homéomorphes. En effet, $u \longmapsto \tan(\frac{\pi u}{2})$ de $] - 1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ est un homéomorphisme.

1.4 Rappel sur les applications linéaires

Soient E et F deux espaces normés sur le même corps $\mathbb{K}$. Pour qu'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ soit continue il suffit qu'elle soit continue en un point, elle est alors uniformément continue.

Les applications linéaires continues possèdent des propriétés particulières remarquables.

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, une application linéaire $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est appelée une forme linéaire, l'espace vectoriel des formes linéaires sur E est le dual algébrique de E (noté $E^\star$) ; si E est normé, l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E est le dual topologique de E noté $E' \subset E^\star$. E' est un sous-espace vectoriel de $E^\star$.

Définition 9. *Soit $f : X \longrightarrow Y$. On dira que f est une application ouverte si l'image par f de tout ouvert de X est un ouvert de Y.*

Théorème 1. *[1] (Théorème de l'application ouverte).*

Soient E et F deux espaces de Banach. Une application linéaire continue surjective $f : E \longrightarrow F$ est une application ouverte.

Définition 10. *Soit $(E, \| \,.\, \|_E)$ un espace de Banach, on note par E' son dual topologique, $E' = \{f : E \longrightarrow \mathbb{K}$; linéaire et continue$\}$. E' est normé par :*

$$\| f \|_{E'} = \sup_{u \neq 0} \frac{| f(u) |}{\| u \|_E}$$

Le dual de E' est appelé bidual de E et est noté E'',

$$E'' = \{h : E' \longrightarrow \mathbb{K}; \quad \text{linéaire et continue}\}.$$

Théorème 2. *[1]*

Si F est un espace de Banach, l'espace normé $\mathcal{L}(E, F)$ l'est aussi.

En particulier le dual topologique E' de E est un espace de Banach.

Théorème 3. *[1](corollaire du théorème de Hahn-Banach).*

Soient E un espace normé, H un sous-espace vectoriel fermé de E et $u_0 \in E \backslash H$.

Il existe une forme linéaire continue μ sur E telle que,

$$\mu(u_0) = 1, \quad \mu(H) = 0, \quad \|\mu\| = \frac{1}{\rho}$$

où ρ (strictement positif) est la distance de u_0 à H.

Définition 11. *Soit E un espace de Banach et soit $J : E \longrightarrow E''$ l'injection canonique de E dans E''.*

L'espace E est dit réflexif si J est surjective, c'est-à-dire $J(E) = E''$.

Quand E est réflexif, E'' est habituellement identifié avec E.

1.5 Quelques outils dans les espaces de Lebesgue

Définition 12. *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$; on pose*

$L^p(\Omega) = \left\{ \; f \; : \; \Omega \; \rightarrow \mathbb{R}; \; \; f \text{ mesurable et } ||f||_{L^p} < \infty \; \right\}.$

$$\text{où} \qquad ||f||_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Définition 13. *On pose*

$L^\infty(\Omega) = \left\{ \; f \; : \; \Omega \; \rightarrow \mathbb{R}; \; \; f \text{ mesurable}, \quad \exists C > 0; \quad |f(x)| \leq C \; \text{ p.p. } x \in \Omega \; \right\}.$

On note $\qquad ||f||_{L^\infty} = \inf\{C \; ; \; |f(x)| \leq C \; \text{ p.p.} x \in \; \Omega\}.$

Remarque.

Soit $1 \leq p \leq +\infty$; on désigne par q l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 4. *(Inégalité de Hölder).*

Soient $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^q(\Omega)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$. *Alors*

$$fg \in L^1(\Omega) \quad et \quad \int_\Omega |fg| \leq ||f||_{L^p}||g||_{L^q}.$$

1.6 Quelques outils dans les espaces de Sobolev

Soit $I =]a, b[$ un intervalle dans $\mathbb{R}$, et soit $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 14. *L'espace de Sobolev* $W^{1,p}(I)$ *est défini par*

$$W^{1,p}(I) \equiv \left\{ u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \text{ tel que } \int_I u\varphi = -\int_I g\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

où $C_c^1(I)$ *est l'espace des fonction de classe* $C^1(I)$ *à support compact.*

L'espace $W^{1,p}(I)$ *est muni de la norme suivante ;*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)},$$

ou bien de la norme équivalente,

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \left(\|u\|_{L^p(I)}^p + \|u'\|_{L^p(I)}^p\right)^{1/p} \quad (si \;\; 1 < p < +\infty).$$

En particulier pour $p = 2$, on note $W^{1,p}(I)$ par $H^1(I)$.

$H^1(I)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire,

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u', v' \rangle_{L^2} = \int_a^b (uv + u'v'), \quad \forall u, v \in H^1 \tag{1.3}$$

et la norme associée,

$$||u||_{H^1} = \left(||u||_{L^2}^2 + ||u'||_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.4}$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}(I)$.

Définition 15. *Soit* $1 \leq p < \infty$, *l'espace* $W_0^{1,p}(I)$ *désigne la fermeture de* $C_0^1(I)$ *dans* $W^{1,p}(I)$.

L'espace $W_0^{1,p}(I)$ *muni de la norme induite par* $W^{1,p}(I)$ *est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif si* $1 < p < \infty$.

où $C_0^1(I)$ *est l'espace des fonction de classe* $C^1(I)$ *et qui s'annulent aux bornes.*

Chapitre 2

Théorème de Lax-Milgram dans les espaces de Hilbert

Parmi les espaces de **Banach** de dimension infinie qui possèdent la plus grande analogie avec les espaces euclidiens sont les espaces de **Hilbert**, la commodité des calculs dans ces espaces, leur intérêt en physique mathématique, leurs propriétés remarquables font de ces espaces un chapitre important de la mathématique.
Avant d'énoncer le théorème de Lax-Milgram, nous avons besoin de rappeler le théorème des projections, qui généralise au cadre hilbertien la notion bien connue de projection en dimension finie. Nous l'énonçons dans le cas général pour une projection sur un convexe fermé non vide.
Et par la suite on rappelle aussi le théorème de la représentation de Riesz qui est un cas particulier du théorème de Lax-Milgram.
Dans tout ce paragraphe, H désigne un espace de Hilbert réel.
On note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire sur cet espace et $\|.\|$ la norme associée.

2.1 Théorème des projections

Théorème 5. *[4]*

Soient H un espace de Hilbert réel et $A \subset H$ un convexe fermé non vide, alors pour tout $f \in H$ il existe un unique $u \in A$ tel que,

$$\| f - u \| = \min_{v \in A} \| f - v \| \tag{2.1}$$

De plus u est caractérisé par la propriété,

$$\langle f - u, v - u \rangle \leq 0 \qquad \forall v \in A \tag{2.2}$$

Si A est un sous-espace vectoriel de H, alors,

$$\langle f - u, v \rangle = 0, \qquad \forall v \in A \tag{2.3}$$

et f est l'unique élément de A vérifiant cette égalité, en d'autres termes, on a, $f - u \in A^{\perp}$.

On a la décomposition suivante de H en somme directe orthogonale,

$$H = A \oplus A^{\perp}$$

où $A^{\perp} = \{u \in H; \quad \langle u, v \rangle = 0, \quad \forall v \in A\}$.

Preuve :

Avant de montrer l'existence et l'unicité de u, on commence par montrer l'équivalence entre (2.1) et (2.2) (i.e la caractérisation de u).

Soit $u \in A$ vérifiant (2.1) et soit $w \in A$ on a,

$v = [(1 - \alpha)u + \alpha w] \in A$, pour $\alpha \in]0, 1]$, car A est un convexe et donc ,

$$\|f-u\| \leq \|f-[(1-\alpha)u+\alpha w]\|$$

$$= \|(f-u)-\alpha(w-u)\|$$

$$\Longrightarrow \|f-u\|^2 \leq \|f-u\|^2 - 2\alpha\langle f-u, w-u\rangle + \alpha^2 \|w-u\|^2$$

$$\Rightarrow 2\langle f-u, w-u\rangle \leq \alpha \|w-u\|^2 .$$

Quand $\alpha \longrightarrow 0^+$;

$$\langle f-u, w-u\rangle \leq 0 \quad \text{et c'est} \quad (2.2).$$

<u>Inversement</u>

Soit u vérifiant (2.2) alors on a,

$$\|f-u\|^2 - \|f-v\|^2 = \langle f-u, f-u\rangle - \langle f-v, f-v\rangle$$

$$= \langle f-u, f-v+v-u\rangle - \langle f-u+u-v, f-v\rangle$$

$$= \langle f-u, v-u\rangle + \langle f-u, f-v\rangle - \langle f-u, f-v\rangle + \langle v-u, f-v\rangle$$

$$= \langle f-u, v-u\rangle + \langle v-u, f-u+u-v\rangle$$

$$= \langle f-u, v-u\rangle + \langle v-u, f-u\rangle + \langle v-u, u-v\rangle$$

$$= 2\,\langle f-u, v-u\rangle - \langle u-v, u-v\rangle$$

$$= 2\langle f-u, v-u\rangle - \|u-v\|^2 \leq 0 \qquad \forall v \in A$$

$$\Longrightarrow \|f-u\|^2 - \|f-v\|^2 \leq 0 \qquad \forall v \in A$$

$$\Longrightarrow \|f-u\| \leq \|f-v\| \quad \forall v \in A$$

$$\Longrightarrow \|f-u\| = \min_{v\in A} \|f-v\| \quad \text{d'où} \quad (2.1).$$

On note $\qquad d(f,A) = \| f-u \| = \min_{v\in A} \| f-v \|$.

i)Unicité.

Soient u_1, u_2 vérifiant (2.2) alors on a,

$$\begin{cases} \langle f-u_1, v-u_1\rangle \leq 0; \qquad \forall v \in A \qquad (i) \\ \\ \langle f-u_2, v-u_2\rangle \leq 0; \qquad \forall v \in A \qquad (ii) \end{cases}$$

On pose $v = u_2$ dans (i) et $v = u_1$ dans (ii) on obtient,

$$\begin{cases} \langle f-u_1, u_2-u_1\rangle \leq 0 \qquad (\star) \\ \\ \langle f-u_2, u_1-u_2\rangle \leq 0 \qquad (\star\star) \end{cases}$$

De $(\star)$ on obtient,

$$\begin{aligned} \langle f-u_2+u_2-u_1, u_2-u_1\rangle \leq 0 &\Longrightarrow \langle f-u_2, u_2-u_1\rangle + \langle u_2-u_1, u_2-u_1\rangle \leq 0 \\ &\Longrightarrow \langle f-u_2, u_2-u_1\rangle + \|u_2-u_1\|^2 \leq 0 \\ &\Longrightarrow \|u_2-u_1\|^2 \leq \langle f-u_2, u_1-u_2\rangle \leq 0 \quad \text{d'aprés} \quad (\star\star) \\ &\Longrightarrow \|u_2-u_1\|^2 = 0 \\ &\Longrightarrow u_2 = u_1. \end{aligned}$$

ii)Existence.

Soit $(v_n)_n \subset A$ une suite minimisante.

Par définition on a ; $\quad d(f,A) \leq \| f-v_n \|_H \leq d(f,A) + \dfrac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Montrons que $(v_n)_n$ est de Cauchy, ainsi H étant hilbertien donc un espace complet et on pourra conclure la convergence de $(v_n)_n$.

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et posons $d = d(f, A)$ et $d_k = d(f, v_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

H étant un espace de Hilbert donc la règle du Parallélogramme (1.2) est vérifiée ;

On remplace dans l'équation (1.2) $u = f - v_m$ et $v = f - v_n$, on obtient,

$$2(\| f - v_m \|^2 + \| f - v_n \|^2) = \| (f - v_m) - (f - v_n) \|^2 + \| (f - v_m) + (f - v_n) \|^2$$

$$= \| v_n - v_m \|^2 + 4 \| f - \frac{v_n + v_m}{2} \|^2$$

$$\Rightarrow \| \frac{v_n - v_m}{2} \|^2 = \frac{d_m^2 + d_n^2}{2} - \| f - \frac{v_n + v_m}{2} \|^2 .$$

Or, $\frac{v_n + v_m}{2} \in A$ car A est convexe, donc

$$\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \| \geq d(f, A)$$

par conséquent de (2.1) on a ,

$$\| \frac{v_n - v_m}{2} \|^2 = \frac{d_m^2 + d_n^2}{2} - \| f - \frac{v_n + v_m}{2} \|^2$$

$$\leq \frac{d_m^2 + d_n^2}{2} - d^2 \longrightarrow 0, \qquad n, m \longrightarrow +\infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{n,m \longrightarrow \infty} \| v_n - v_m \| = 0.$$

Alors $(v_n)_n$ est une suite de Cauchy dans A qui est complet (car A fermé dans un complet). Et, $(v_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u \in A$ et l'on a $d = \|f - u\|$.

2.2 Théorème de représentation de Riesz

Théorème 6. *[4]*

Soit L une forme linéaire continue sur H alors, il existe un unique élément u de H tel que,

$$\forall v \in H, \qquad L(v) = \langle u, v \rangle. \tag{2.4}$$

De plus

$$\| u \|_H = \| L \|_{H'} . \tag{2.5}$$

Preuve :

a) Existence.

On distingue deux cas ;

<u>1^{er} **cas :**</u> $L \equiv 0$

Il suffit de prendre $u = 0_H$.

<u>$2^{ème}$ **cas :**</u> $L \not\equiv 0$

Introduisons le noyau $A = KerL$. Alors A est un sous espace vectoriel fermé et propre de A (car L est continue, or l'image réciproque d'un fermé est un fermé , et comme $\{0\}_H$ est un fermé alors $KerL = L^{-1}(\{0\})$ est un fermé,

$$\text{et} \quad H \neq A, \quad \text{car} \quad L \not\equiv 0).$$

D'après le théorème des projections 5, on a la décomposition $H = A \oplus A^{\perp}$.

Et l'espace $A^{\perp}$ n'est pas réduit à $\{0\}_H$, il contient donc un élément v_0 unitaire (de norme 1).

Soit v quelconque dans H , on peut le décomposer de la manière suivante,

$$v = \frac{L(v)}{L(v_0)} v_0 + w \quad \textit{où} \quad w = v - \frac{L(v)}{L(v_0)} v_0, \qquad w \in A.$$

Par construction on a $\langle v_0, w \rangle = 0$ car $v_0 \in A^\perp$ et $w \in A$, ainsi

$$\langle v_0, v \rangle = \frac{L(v)}{L(v_0)} \parallel v_0 \parallel^2 = \frac{L(v)}{L(v_0)} \qquad car \quad \parallel v_0 \parallel = 1.$$

$\Longrightarrow L(v) = L(v_0) \langle v_0, v \rangle = \langle L(v_0) v_0, v \rangle$.

On a ainsi construit un élément $u = v_0 L(v_0)$ de H tel que,

$$\forall v \in H \quad L(v) = \langle u, v \rangle.$$

b) Unicité.

Elle est immédiate, car, si u_1, u_2 sont deux solutions, alors d'après (2.4) on a

$$L(v) = \langle v, u_1 \rangle = \langle v, u_2 \rangle \Rightarrow \langle v, u_1 - u_2 \rangle = 0 \qquad \forall v \in H$$

$$\Rightarrow u_1 - u_2 \in H^\perp$$

$$\Rightarrow u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2.$$

Reste à montrer (2.5).

On a, $\quad \forall v \neq 0, \dfrac{\mid L(v) \mid}{\parallel v \parallel_H} \leq \parallel u \parallel_H \Rightarrow \|L\| = \sup_{v \in H} \dfrac{\mid L(v) \mid}{\parallel v \parallel_H} \leq \parallel u \parallel_H$

$$\Rightarrow \parallel L \parallel_{H'} \leq \parallel u \parallel_H .$$

$$\text{Pour} \quad u = v \quad \text{on a,} \qquad \|L\|_{H'} = \frac{\mid L(u) \mid}{\parallel u \parallel_H} = \frac{\|u\|^2}{\parallel u \parallel} = \|u\|_H ,$$

$$\text{d'où} \quad \|L\|_{H'} = \|u\|_H .$$

Ceci termine la démonstration.

2.3 Théorème de Lax-Milgram

Avant d'énoncer le théorème on fait les hypothèses suivantes,

1) L est une forme linéaire définie sur H de plus, L est continue,

i.e. il existe une constante $C > 0$ telle que,

$$\forall v \in H, | L(v) | \leq C \parallel v \parallel_H \tag{2.6}$$

2) a est une forme bilinéaire définie sur $H \times H$ vérifiant de plus,

i) a est continue sur $H \times H$. i. e. il existe une constante $M > 0$ telle que ;

$$\forall (u, v) \in H \times H, \quad | a(u, v) | \leq M \parallel u \parallel_H \parallel v \parallel_H \tag{2.7}$$

ii) a est coercive i. e. il existe une constante $\alpha > 0$ telle que,

$$\forall u \in H, \quad a(u, u) \geq \alpha \parallel u \parallel_H^2 \tag{2.8}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant, dû à Peter Lax (né le 1^{er} mai 1926 à Budapest, mathématicien Hongrois de nationalité Américaine) et Arthur Norton Milgram (3 Juin 1912, Philadelphie, 30 Janvier 1961 mathématicien Américain), qui est une généralisation du théorème de la représentation de Riesz, au cas d'une forme a qui n'est pas nécessairement un produit scalaire.

Théorème 7. *[4]*

Soient H un espace de Hilbert réel, a une forme bilinéaire, continue et coercive sur H et L une forme linéaire continue sur H.

Alors, il existe un unique élément u de H solution du problème

$$L(v) = a(u, v) \quad \forall v \in H. \tag{2.9}$$

De plus si a est symétrique, u est l'unique solution du problème de minimisation suivant,

$$J(u) \leq J(v) \qquad \forall v \in H \tag{2.10}$$

où J est définie sur H par ;

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \qquad \forall v \in H. \tag{2.11}$$

Preuve :

Nous remarquons d'abord qu'en raison de la coercivité de a, si une telle solution existe, elle est unique.

Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (2.9) , alors par soustraction on a,

$$\forall v \in H, \quad a(u_1 - u_2, v) = 0$$

en particulier pour $v = u_1 - u_2$ on a,

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

Maintenant, comme $\alpha > 0$, on déduit de la minoration 2.8 que $u_1 = u_2$.

Montrons maintenant l'existence d'une telle solution. Pour tout $u \in H$, la forme linéaire $a(u, .)$ étant continue sur H, il existe, d'après le théorème de la représentation de Riesz 6 un unique élément $Au \in H$ tel que,

$$\forall v \in H; \quad a(u, v) = \langle Au, v \rangle_H \tag{2.12}$$

De la même façon, il existe un unique $f \in H$ tel que,

$$\forall v \in H, \quad L(v) = \langle f, v \rangle_H .$$

Le problème (2.9) est alors équivalent à trouver $u \in H$ tel que $Au = f$.

Il suffit pour cela de montrer que l'opérateur A est linéaire et surjectif.

Soient $u_1, u_2 \in H$, et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle A(u_1 + \lambda u_2), v \rangle &= a(u_1 + \lambda u_2, v) \\ &= a(u_1, v) + a(\lambda u_2, v) \\ &= a(u_1, v) + \lambda a(u_2, v) \\ &= \langle Au_1, v \rangle + \lambda \langle Au_2, v \rangle . \end{aligned}$$

Nous remarquons aussi que A est continu, car nous avons, d'après (2.7).

$$\text{pour} \quad v = Au \quad \text{dans (2.12)} \quad \text{on a,} \parallel Au \parallel_H^2 = a(u, Au)$$
$$\leq M \parallel u \parallel_H \parallel Au \parallel_H .$$

Ce qui donne,

$$\parallel Au \parallel_H \leq M \parallel u \parallel_H .$$

Montrons que A est surjectif. Montrons d'abord que l'image de A, notée $Im(A)$, est fermée.

Soit $v \in Im(A)$; par définition, il existe une suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ éléments de H telle que, $v = \lim\limits_{p \to +\infty} Au_p$. La suite $(Au_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est en particulier une suite de Cauchy, il en est également de même pour la suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$, en raison de (2.8) qui donne,

$$\alpha \parallel u_p - u_q \parallel_H^2 \leq \parallel a(u_p - u_q, u_p - u_q) \parallel = \|\langle A(u_p - u_q), u_p - u_q\rangle\|$$

$$\leq \parallel Au_p - Au_q \parallel_H \parallel u_p - u_q \parallel_H .$$

On en déduit trivialement l'estimation suivante,

$$\parallel u_p - u_q \parallel_H \leq \frac{1}{\alpha} \parallel Au_p - Au_q \parallel_H .$$

L'espace H étant complet, la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $u \in H$,

et l'opérateur A étant continu, nous avons, $Au_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} Au$, si bien que : $v = Au$.

Nous avons ainsi montré que l'image de A est fermée. Ce résultat étant établi,

en conséquence, nous avons

$$H = Im(A) \oplus [Im(A)]^{\perp}.$$

Supposons que $Im(A) \neq H$; alors $[Im(A)]^{\perp} \neq \{0\}_H$ et il existe un élément non

nul $u \in H$ tel que,

$$\forall v \in H, (Av, u)_H = 0.$$

Cette relation étant en particulier vraie pour $v = u$, nous obtenons,

$$0 = a(u, u) \geq \alpha \parallel u \parallel_H^2 .$$

Ce qui entraine $u = 0$, nous aboutissons ainsi à une contradiction, ce qui

signifie que $Im(A) = H$, et ceci termine la démonstration.

Pour conclure la preuve du théorème, il reste à montrer que si a est symétrique,

le problème de minimisation (2.10) est équivalent au problème (2.9).

Soit $u \in H$ solution unique de (2.9) , montrons que u est solution de (2.10) .

Soit $w \in H$, on va montrer que $J(u+w) \geq J(u)$.

$$
\begin{aligned}
J(u+w) &= \frac{1}{2}a(u+w,u+w) - L(u+w) \\
&= \frac{1}{2}a(u,u) + \frac{1}{2}[a(u,w)+a(w,u)] + \frac{1}{2}a(w,w) - L(u) - L(w) \\
&= \frac{1}{2}a(u,u) - L(u) + [a(u,w) - L(w)] + \frac{1}{2}a(w,w) \\
&= J(u) + \frac{1}{2}a(w,w) \geq J(u) + \frac{\alpha}{2} \parallel w \parallel_H^2 .
\end{aligned}
$$

Donc $J(u+w) > J(u)$, sauf si $w = 0$.

Réciproquement, supposons maintenant que u est solution du problème de minimisation (2.10) et montrons que u est solution de (2.9) .

Soit $w \in H$ et $t > 0$, on a

$$J(u+tw) - J(u) \geq 0 \quad \text{et} \quad J(u-tw) - J(u) \geq 0.$$

Car u minimise J. On en déduit que,

$$t[a(u,w)-L(w)]+\frac{1}{2}t^2a(w,w) \geq 0 \quad \text{et} \quad -t[a(u,w)-L(w)]+\frac{1}{2}t^2a(w,w) \geq 0 \quad \forall w \in H.$$

Comme t est strictement positif, on peut diviser ces deux inégalités par t.

$$a(u,w) - L(w) + \frac{1}{2}ta(w,w) \geq 0 \quad \text{et} \quad -a(u,w) + L(w) + \frac{1}{2}ta(w,w) \geq 0 \quad \forall w \in H.$$

On fait alors tendre t vers 0, nous obtenons,

$$a(u,w) - L(w) \geq 0, \qquad \text{et} \quad a(u,w) - L(w) \leq 0, \quad \forall w \in V,$$

ce qui donne en définitive l'égalité $\quad a(u,w) = L(w) \qquad \forall w \in V.$

Ce qui montre que u est bien solution du problème (2.9).

2.4 Applications

1. L'étude du problème de Dirichlet pour l'équation de Sturm-Liouville.

   Soit le problème aux limites suivant,

$$\begin{cases} (-p(u)y'(u))' + q(u)y(u) = f(u), \quad u \in]0,1[\qquad (E.D) \\ y(0) = 0 \quad ; y(1) = 0 \qquad (C.L) \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\begin{cases} q \in C([0,1]); \quad q \geq 0 \quad sur \quad [0,1] \\ p \in C^1([0,1]); \quad \exists \alpha > 0 \quad tel \quad que; \quad p \geq \alpha \quad sur \quad [0,1] \end{cases}$$

$$H_0^1(]0,1[) = \{z \in H^1(]0,1[); z(0) = z(1) = 0\}.$$

   Soit y la solution du problème (2.13) et soit x un élément quelconque de $H_0^1(]0,1[)$.

   Multiplions l'équation $(E.D)$ par $x(u)$ et intégrons sur $]0,1[$, par une intégration par parties on obtient

$$\int_0^1 [py'(u)x'(u) + qy(u)x(u)]du = \int_0^1 f(u)x(u)du$$

   car $x(0) = x(1) = 0$.

   On considère alors la forme bilinéaire,

$$B(y,x) = \int_0^1 [py'(v)x'(v) + qy(v)x(v)]dv.$$

   B est évidemment bilinéaire et symétrique. Elle est définie et positive à cause des conditions imposées à p et q.

B est ainsi un produit scalaire et $H_0^1(]0,1[)$ muni de B est un espace de Hilbert. Le théorème de Riesz, appliqué à cet espace, justifie l'existence et l'unicité de $y \in H_0^1(]0,1[)$, solution du problème,

$$\forall x \in H_0^1(]0,1[); B(y,x) = L(x),$$

$$\text{avec} \qquad L(x) = \int_0^1 f(u)x(u)du.$$

Revenons à l'application du théorème de Lax-Milgram, Montrons que B est continue et coercive.

$$| B(y,x) | \leq P \parallel y' \parallel_{L^2} \parallel x' \parallel_{L^2} + Q \parallel y \parallel_{L^2} \parallel x \parallel_{L^2} .$$

En notant par P (resp. Q) la borne supérieure de $p(u)$(resp. $q(u)$) sur $]0,1[$.

Donc

$$| B(y,x) | \leq (P+Q) \parallel y \parallel_{H^1} \parallel x \parallel_{H^1} .$$

D'autre part B est coercive.

En effet, d'après les conditions sur p(resp.q), on a

$$\begin{cases} B(x,x) = \int_0^1 (px'^2 + qx^2) \geq 0 \\ B(x,x) \geq \alpha \parallel x' \parallel_{L^2}^2 \qquad p \geq \alpha \end{cases}$$

Or,

$$\begin{aligned} x \in H_0^1(]0,1[); | x(u) | &= | \int_0^1 x'(v)dv | \\ &\leq \int_0^1 | 1 \times x'(v) | dv \leq \|x'\|_{L^2} (\int_0^1 dv)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \parallel x' \parallel_{L^2} . \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 \mid x(u) \mid^2 du \leq \int_0^1 \parallel x' \parallel_{L^2}^2 du$$

$$\Rightarrow \parallel x \parallel_{L^2}^2 \leq \parallel x' \parallel_{L^2}^2 .$$

Et donc

$$B(x,x) \geq \frac{\alpha}{2}(\parallel x \parallel_{L^2}^2 + \parallel x' \parallel_{L^2}^2) = \frac{\alpha}{2} \parallel x \parallel_{H^1}^2, \quad \text{d'aprés} \quad (1.4)$$

On a ainsi établi que,

$$\frac{\alpha}{2} \parallel x \parallel_{H^1}^2 \leq \mid B(x,x) \mid \leq (P+Q) \parallel x \parallel_{H^1}^2,$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \parallel x \parallel_{H^1} \leq \sqrt{B(x,x)} \leq \sqrt{(P+Q)} \parallel x \parallel_{H^1},$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \parallel x \parallel_{H^1} \leq \|x\|_{H_0^1} \leq \sqrt{(P+Q)} \parallel x \parallel_{H^1},$$

Ce qui prouve que la norme définie par B est équivalente sur $H_0^1(]0,1[)$ à la norme $H^1(]0,1[)$.

2. Soient $H = \mathbb{R}^n$, et $A \in S^{++}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ avec,

$\star$) $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

$\star\star$) $S^{++}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n symétriques définies positives, où $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel

$$\langle u, v\rangle = u^\top v = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k, \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Alors A définit une forme $a(.,.)$ bilinéaire continue, symétrique et coercive sur $\mathbb{R}^n$ donnée par,

$$a(u, v) = u^\top A v = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} u_i v_j.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} a(v, u) &= v^\top A u = \langle v, Au\rangle \\ &= \langle Au, v\rangle = (Au)^\top v \\ &= u^\top A^\top v = u^\top A v \quad (A^\top = A) \\ &= \langle u, Av\rangle = a(u, v) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow a(v, u) = a(u, v)$ d'où la symétrie de $a(.,.)$.

Par l' inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$|a(u, v)| = \left|v^\top A u\right| = |\langle v, Au\rangle| \leq \|v\| \, \|Au\| \leq \|A\| \, \|u\| \, \|v\| \,.$$

Alors $a(.,.)$ est continue.

En outre si A est une matrice symétrique définie positive, alors nous savons que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} u_i u_j \geq c \left\| u \right\|^2,$$

où, $c = \min_{i=1,\ldots n} \lambda_i$ avec $\lambda_i \quad (i = 1, \ldots n)$ sont les valeurs propres de A.

Cela signifie que $a(.,.)$ est coercive.

Alors d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique élément u de $\mathbb{R}^n$ solution de problème,

$$u^\top A v = b^\top v.$$

Avec $b \in \mathbb{R}^n$ (fixé) et $\qquad T_b(v) = b^\top v = \langle b, v \rangle$.

$T_b(v)$ une forme linéaire en v continue car

$$|T_b(u)| \leq \|b\| \, \|v\|.$$

De plus A doit être inversible et toutes les valeurs propres de A sont non nulles, et comme $a(.,.)$ est symétrique, u est l'unique solution du problème de minimisation $J(u) \leq J(v)$,

$$J(u) = \frac{1}{2} u^\top A v - b^\top v, \qquad \forall v \in \mathbb{R}^N.$$

Chapitre 3

Théorème de Lax-Milgram dans les espaces de Banach

3.1 Introduction et hypothèses

Soient $(V, \| \,.\, \|_V)$ un espace de Banach, et a est une forme bilinéaire symétrique, coercive et continue sur $V \times V$ et L une forme linéaire continue sur V.

On s'intéresse à l'existence et l'unicité de $u \in V$ tel que,

$$L(v) = a(u, v) \quad \forall v \in V \tag{3.1}$$

Dans une première partie de ce chapitre nous faisons une analyse du problème (3.1) dans le cas où a n'est pas symétrique et nous présenterons une méthode qui traite le cas non symétrique.

Dans une seconde partie nous démontrons le théorème de Lax- Milgram pour une forme bilinéaire continue et coercive sur un espace de Banach sur $\mathbb{R}$. Nous abordons la question de savoir dans quelle mesure la coercivité est nécessaire dans le théorème de Lax-Milgram.

Nous construisons un contre-exemple pour montrer que la coercivité n'est pas nécessaire dans le théorème de Lax-Milgram même dans les espaces de Hilbert.

Par contre, nous prouvons qu'elle est nécessaire dans le cas où la forme bilinéaire a est symétrique et définie positive dans le sens où

$$a(u,u) > 0 \qquad \forall u \neq 0.$$

3.2 Symétrisation de formes linéaires et propriétés

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit a une forme bilinéaire sur V telle que $a(u,u) > 0 \qquad \forall u \neq 0$.(i. e a est définie positive).

Soit b une forme bilinéaire définie par

$$b(u,v) = \frac{a(u,v) + a(v,u)}{2} \qquad \forall u, v \in V \tag{3.2}$$

Alors, b est symétrique et $b(u,u) = a(u,u) \qquad \forall u \in V$.

Donc avec b on arrive à définir un produit scalaire sur V, V devient un espace préhilbertien que nous désignons par V_b. On notera par $\|u\|_{V_b}$ la norme d'un élément $u \in V_b$,

$$\|u\|_{V_b} = \sqrt{a(u,u)}.$$

Soit V_b' le dual de V_b i.e. $V_b' = \{f : V_b \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \textit{linéaire et continue}\}$.

Supposons que a soit continue sur $V_b \times V_b$ i.e $\exists M > 0$ tel que

$$|a(u,v)| \leq M\sqrt{a(u,u)}\sqrt{a(v,v)} \qquad \forall u, v \in V. \tag{3.3}$$

Alors, sous cette hypothèse, il existe des applications linéaires A et B de V_b dans V_b' définies par

$$A : \quad V_b \longrightarrow V_b'$$

$$u \longmapsto Au$$

avec

$$Au : \quad V_b \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longmapsto Au(v) = a(v,u), \quad (\text{resp.} \quad Bu(v) = a(u,v)).$$

Et on a

$$\|Au\|_{V_b'} = \sup_{v\neq 0} \frac{|Au(v)|}{\|v\|_{V_b}} = \sup_{v\neq 0} \frac{|a(v,u)|}{\|v\|_{V_b}} \leq M\|u\|_{V_b}. \tag{3.4}$$

De plus, si $u \neq 0$

$$\|Au\|_{V_b'} \geq \frac{a(u,u)}{\|u\|_{V_b}} = \frac{\|u\|_{V_b}^2}{\|u\|_{V_b}} = \|u\|_{V_b}. \tag{3.5}$$

D'après (3.4) et (3.5), et si $u \neq 0$,

$$\|u\|_{V_b} \leq \|Au\|_{V_b'} \leq M\|u\|_{V_b}.$$

Mais ces inégalités sont trivialement vérifiées pour $u = 0$. Donc, nous avons

$$\|u\|_{V_b} \leq \|Au\|_{V_b'} \leq M\|u\|_{V_b} \qquad \forall u \in V. \tag{3.6}$$

De même pour B,

$$\|u\|_{V_b} \leq \|Bu\|_{V_b'} \leq M\|u\|_{V_b} \qquad \forall u \in V. \tag{3.7}$$

De ce qui précède, on a la définition suivante.

Définition 16. *Soit a continue sur $V_b \times V_b$. V_b est dit avoir la propriété de représentation à droite (resp. à gauche) de Riesz par rapport a si,*
$\forall f \in V_b', \quad \exists u \in V_b \quad ; \quad f(v) = a(v,u) \quad (resp. f(v) = a(u,v)) \qquad \forall v \in V_b.$

Proposition 4. *En termes des applications A et B, V_b a la propriété de représentation à droite (resp. à gauche) de Riesz si et seulement si A (resp. B) est surjective.*

Preuve :

Démontrons la proposition pour A, la preuve pour B est similaire.

En effet, A est surjective signifie que :

$$\forall f \in V_b', \quad \exists u \in V_b; \quad Au(v) = f(v) \qquad \forall v \in V_b$$

i.e

$$\forall f \in V_b', \quad \exists u \in V_b; \quad a(v,u) = f(v) \qquad \forall v \in V_b.$$

Et à partir de l'inégalité (3.6) A est injective.

$$\text{En effet,} \quad Au = Au' \Longrightarrow Au - Au' = 0$$

Comme A est linéaire on a, $A(u-u') = 0 \Longrightarrow \|A(u-u')\| = 0$

$$\begin{aligned}(3.6) &\Longrightarrow \|u-u'\| \leq \|A(u-u')\| = 0\\ &\Longrightarrow \|u-u'\| = 0 \Longrightarrow u = u'.\end{aligned}$$

Donc A est injective.

Donc on a toujours unicité de l'élément u, qui correspond à $f \in V_b'$ dans la définition 16 avec $f = Au$ (resp. $f = Bu$).

Théorème 8. *[7] (Théorème de représentation de Riesz).*

Soit a continue sur $V_b \times V_b$. Alors V_b a la propriété de représentation à droite (resp. à gauche) de Riesz par rapport à a si et seulement si V_b est complet i.e si et seulement si V_b est un espace de Hilbert.

Preuve :

Nous allons prouver le théorème de la propriété de représentation à droite de Riesz. La preuve pour la propriété de représentation à gauche de Riesz est similaire.

1)Condition nécessaire. Supposons que V_b a la propriété de représentation

à droite de Riesz par rapport à a. Cela signifie que A est un

isomorphisme de V_b dans V_b'(car A est linéaire et bijective).

V_b' étant le dual de V_b, il est donc complet (voir le théorème 2).

Et en raison des inégalités (3.6) A est un isomorphisme topologique

aussi. Par conséquent, V_b est également complet.

2)Condition suffisante. Supposons que V_b soit complet. Nous devons

prouver que $A(V_b) = V_b'$ (i.e A est surjective).

i)$\underline{A(V_b) \subset V_b'}$ évidente.

ii)$\underline{V_b' \subset A(V_b)}$

Supposons par l'absurde qu'il existe $f \in V_b'$ tel que $f \notin A(V_b)$.

Montrons que $A(V_b)$ est complet. Et si $A(V_b)$ est complet alors il est

fermé car il est inclus dans un espace complet V_b'.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A(V_b)$ une suite de Cauchy i.e.

$$\|f_n - f_m\| \longrightarrow_{n,m\longrightarrow\infty} 0.$$

Par définition

$$\exists (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V_b; \quad f_n = A(g_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'après l'inégalité (3.6) on a

$$\|f_n - f_m\|_{V_b'} = \|A(g_n) - A(g_m)\|_{V_b'} = \|A(g_n - g_m)\|_{V_b'} \geq \|g_n - g_m\|_{V_b}.$$

Quand $n, m \longrightarrow \infty$ on a

$$0 \geq \lim_{n,m\longrightarrow+\infty} \|g_n - g_m\|_{V_b} \geq 0 \Longrightarrow \|g_n - g_m\|_{V_b} \longrightarrow 0.$$

i.e. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans V_b et V_b étant complet, donc,

$(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g \in V_b$ et on a $A(g_n) \longrightarrow A(g)$

car A est continue, donc $f_n \longrightarrow f = A(g) \in A(V_b)$.

Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f \in A(V_b)$.

Donc $A(V_b)$ est complet donc il est fermé. Par le théorème 3 (corollaire

du théorème Hahn-Banach), $\exists \beta \in V_b''$, bidual de V_b tel que

$$\begin{cases} \beta \equiv 0 & \text{sur} \quad A(V_b) \subset V_b' \\ \beta(f) \neq 0, & f \in V_b' \backslash A(V_b) \end{cases}$$

Comme V_b est complet et donc un espace de Hilbert, il est réflexif

(car tout espace de Hilbert est réflexif i.e $V \simeq V''$).

Par conséquent, β est représenté par un élément u de V_b i.e.

$$\exists u \in V_b; \quad \beta(h) = h(u) \quad \forall h \in V_b'.$$

Donc, $\exists u \in V_b$ tel que $f(u) \neq 0$, or $Au \in A(V_b)$ et

$$Au \in A(V_b) \Longrightarrow \beta(Au) = 0 \Longrightarrow Au(u) = 0$$

d'où $a(u, u) = 0$, ce qui implique à son tour que $u = 0$.

Mais cela contredit le fait $f(u) \neq 0$.

Par conséquent, $A(V_b) = V_b'$, prouvant que V_b a la propriété de représentation à droite de Riesz par rapport à a.

Le théorème de Lax-Milgram se déduit du théorème précédent.

Corollaire 1. *[7] (Théorème de Lax-Milgram).*

Soit $(V, \|.\|_V)$ *un espace de Banach sur* $\mathbb{R}$. *Soit* a *une forme bilinéaire continue sur* $V \times V$ *qui est coercive i.e.*

$$\exists \delta > 0 \quad \textit{tel que} \quad a(u, u) \geq \delta \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V,$$

alors

$$\forall f \in V', \exists! u \in V (\textit{resp.} \quad w \in V); \quad f(v) = a(v, u) \quad (\textit{resp.} \quad f(v) = a(w, v)) \quad \forall v \in V.$$

Preuve :

Puisque a est coercive, $a(u,u) > 0 \qquad \forall u \neq 0$. La continuité et la coercivité de a impliquent que $(V, \|.\|_V)$ et $(V_b, \|.\|_{V_b})$ sont isomorphes. Car le fait que a est coercive nous donne,

$$\forall u \in V \quad a(u,u) \geq \delta \|u\|_V^2 . \qquad (1)$$

D'autre part a est continue implique que,

$$\forall u \in V \quad a(u,u) \leq M \|u\|_V^2 \qquad (2).$$

De (1) et (2) on obtient,

$$\delta \|u\|_V^2 \leq a(u,u) \leq M \|u\|_V^2 \qquad \forall u \in V$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\delta}\, \|u\|_V \leq \sqrt{a(u,u)} \leq \sqrt{M}\, \|u\|_V \quad \forall u \in V$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\delta}\, \|u\|_V \leq \|u\|_{V_b} \leq \sqrt{M}\, \|u\|_V \quad \forall u \in V \qquad (3.8)$$

Ainsi on a une équivalence entre les deux normes ($\|.\|_V$ et $\|.\|_{V_b}$) c'est à dire que V et V_b sont isomorphes (avec V un espace de Banach et V_b un espace de Hilbert). Par conséquent, a est continue sur $V_b \times V_b$ et V_b est complet. D'où, selon le théorème 8 , V_b a les propriétés de représentation à droite et à gauche de Riesz par rapport à a.

Finalement, le corollaire s'en suit immédiatement en observant que,

$$f \in V' \Longleftrightarrow f \in V_b'.$$

C'est à dire que V et V_b ont le même dual.

L'idée derrière la démonstration du théorème de Lax-Milgram est, que nous l'avons prouvé d'abord pour l'espace V_b sur lequel a est trivialement coercive, en supposant que V_b est complet et a continue sur $V_b \times V_b$.
C'est le théorème 8 .
Ensuite nous l'avons démontré pour l'espace de Banach $(V, \|.\|)$ sur lequel a est continue et coercive, puisque $(V, \|.\|)$ est isomorphe à $(V_b, \|.\|_{V_b})$.
En conclusion, nous avons démontré le théorème de Lax-Milgram dans un espace de Banach pour une forme bilinéaire continue et coercive sans être forcément symétrique.

3.3 Sur la condition de la coercivité

Soient V un espace normé sur $\mathbb{R}$, et $\|u\|_V$ la norme de l'élément $u \in V$.
On note par V' le dual de V. Soit a une forme bilinéaire continue sur $V \times V$, ne vérifiant pas forcément la condition $a(u,u) > 0 \qquad \forall u \neq 0$.
On définit les applications A et B de V dans V' par

$$Au(v) = a(v,u) \quad et \quad Bu(v) = a(u,v).$$

A et B sont toutes les deux continues de V dans V'.
Car $\qquad \exists M_1, M_2 > 0$ tels que,

$$|Au(v)| < M_1 \|u\|_V \|v\|_V \quad ; \qquad |Bu(v)| < M_2 \|v\|_V \|u\|_V \quad \forall u, v \in V.$$

Soit $A^\star$ (resp. $B^\star$) l'adjoint de A (resp. B).

$A^\star$ et $B^\star$ sont des applications de V'' (le bidual de V) dans V'.

$$\text{i.e.} \qquad A^\star ; B^\star : V'' \longrightarrow V'.$$

On remarque que B (resp. A) est la restriction de $A^\star$ (resp. $B^\star$) à $V \subset V''$.

$$\begin{aligned} \text{Car on a,} \quad \forall u, v \in V, \quad \langle B^\star u, v\rangle &= \langle u, Bv\rangle \\ &= Bv(u) = a(v,u) \\ &= \langle Au, v\rangle \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow B^\star u = Au, \quad \forall u \in V$$

$$\Longrightarrow A = B^\star|_V \quad (resp. B = A^\star|_V).$$

Motivé par le corollaire de Lax-Milgram, nous faisons la définition suivante.

Définition 17. *On dit que V a la propriété à droite (resp. à gauche) de Lax-Milgram par rapport à a si*

$$\forall f \in V', \exists! u \in V; f(v) = a(v,u) \quad (resp. f(v) = a(u,v)) \qquad \forall v \in V.$$

Lorsque a est symétrique, alors dire que V a la propriété à droite de Lax-Milgram est équivalent à dire que V a la propriété à gauche de Lax-Milgram. Dans ce cas, nous parlons simplement de la propriété de Lax-Milgram.

La définition signifie que V a la propriété à droite (resp. à gauche) de Lax-Milgram par rapport à a si et seulement si $A(resp. \quad B)$ est bijective i.e si et seulement si $A(resp. \quad B)$ est un isomorphisme de V dans V' au sens algébrique.

Définition 18. *La forme bilinéaire a sur V est dite non-dégénérée si,*

$$\forall v \neq 0, \exists u, w \in V; a(u,v) \neq 0 \quad et \quad a(v,w) \neq 0.$$

Si a est définie positive i.e. $a(u,u) > 0 \quad \forall u \neq 0$, alors elle est clairement non dégénérée.

Théorème 9. *[8]*

Soit V un espace de Banach. Alors, pour que V ait la propriété à droite (resp. à gauche) de Lax-Milgram par rapport à a, il est nécessaire que

$$\exists c > 0, \forall u \in V; \quad \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|a(v,u)|}{\|v\|_V} \geq c \|u\|_V \qquad (\star)$$

$$(resp. \qquad \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|a(u,v)|}{\|v\|_V} \geq c \|u\|_V \qquad (\star)').$$

De plus, si V est réflexif et a est non-dégénérée, alors $(\star)$, $((\star)')$ est également suffisante pour que V possède la propriété à droite (resp. à gauche) de Lax-Milgram par rapport à a.

Preuve :

Nous allons prouver le théorème pour le cas de la propriété à droite de Lax-Milgram, la preuve pour l'autre cas est analogue. Supposons que V ait la propriété à droite de Lax-Milgram par rapport à a.

Alors, l'application A de V dans V' est un isomorphisme algébrique.

Et comme A est continue, par le théorème de l'application ouverte 1 ,

nous pouvons dire que A est aussi un isomorphisme topologique.

Autrement dit, l'inverse

$$\begin{aligned} A^{-1} :& V' \longrightarrow V \\ & h \longmapsto A^{-1}h = u \end{aligned}$$

est continu. i.e.

$$\begin{aligned} \exists M > 0, \qquad \left\|A^{-1}Au\right\|_V = \left\|A^{-1}h\right\|_V &\leq M \left\|h\right\|_{V'} \\ &\leq M \left\|Au\right\|_{V'} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left\|A^{-1}Au\right\|_V = \left\|u\right\|_V \leq M \left\|Au\right\|_{V'}$$

$$\Longrightarrow \left\|Au\right\|_{V'} \geq \frac{1}{M} \left\|u\right\|_V .$$

Or, on a par définition, $\left\|Au\right\|_{V'} = \sup_{v\in V\backslash\{0\}} \dfrac{|a(v,u)|}{\left\|v\right\|_V}$

$$\Longrightarrow \left\|Au\right\|_{V'} = \sup_{v\in V\backslash\{0\}} \frac{|a(v,u)|}{\left\|v\right\|_V} \geq c\left\|u\right\|_V , \qquad avec \quad c = M^{-1}.$$

Ce qui implique $(\star)$.

Supposons maintenant que V est réflexif et que $(\star)$ est satisfaite alors,

$$c\left\|u\right\|_V \leq \left\|Au\right\|_{V'} \leq \left\|A\right\| \left\|u\right\|_V \qquad \forall u \in V \tag{3.9}$$

Cette double inégalité (3.9), est analogue à (3.6) .

il s'en suit que A est injective, car ;

$$Au = Au' \Longrightarrow Au - Au' = 0.$$

Comme A est linéaire on a $A(u-u') = 0 \Longrightarrow \|A(u-u')\| = 0$

$$(3.9) \Longrightarrow c\,\|u-u'\| \leq \|A(u-u')\| = 0$$

$\Longrightarrow \|u-u'\| = 0, (\text{ car } c > 0) \Longrightarrow u = u'.$

Et que $A(v)$ est un sous-espace fermé de V'.

En utilisant la même démarche que celle dans la preuve du théorème 8, on peut prouver, en se basent sur la réflexivité de V et la non-dégénérescence de a, que A est surjective.

Proposition 5. *[8]*

Soit V un espace de Banach réflexif, si V a la propriété à droite (resp. à gauche)de Lax-Milgram par rapport à a. Alors, V a aussi la propriété à gauche (resp. à droite) de Lax-Milgram par rapport à a.

Preuve :

Nous allons prouver le théorème pour la propriété à droite de Lax-Milgram. La preuve pour l'autre cas est analogue.

Puisque V et V' sont des espaces de Banach et puisque V a la propriété droite de Lax-Milgram, il résulte du théorème 1 (de l'application ouverte de Banach) que A est un isomorphisme topologique.

Donc, $A^{\star} : V'' \longrightarrow V'$ est aussi un isomorphisme.

Mais, puisque V est réflexif ($V'' = V$) et puisque B est la restriction de $A^\star$ à V, il s'en suit que B de V dans V' est également un isomorphisme, ce qui implique que V a la propriété à gauche de Lax-Milgram.

Proposition 6. *[8]*

Soit V un espace de Banach. Supposons que V possède les propriétés à droite et à gauche de Lax-Milgram par rapport à a, alors V est réflexif.

Preuve :

Puisque V a la propriété de lax-Milgram à droite (resp. à gauche) alors l'application A (resp. B) est un isomorphisme topologique de V dans V', il en résulte que $A^\star : V'' \longrightarrow V'$, est également un isomorphisme.

Or $A^\star$ est la restriction de B à V, et comme,

$$B : V \longrightarrow V',$$

est un isomorphisme, alors $A^\star$ est un isomorphisme de V dans V' et aussi de V'' dans V', il en résulte que $V'' = V$ et V est réflexif.

Corollaire 2. *[8]*

Si a est symétrique et V a la propriété de Lax-Milgram par rapport à a, alors V est réflexif.

Rappelons que b est la forme bilinéaire symétrique définie comme,

$$b(u,v) = \frac{a(u,v) + a(v,u)}{2}.$$

Si $a(u,u) > 0, \quad \forall u \neq 0$, alors V_b est un espace préhilbertien, $V_b = (V, \langle , \rangle)$ où $\langle u, v \rangle = b(u,v)$

Théorème 10. *[8]*

Soit V un espace de Banach. Soit a une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ telle que $a(u,u) > 0 \qquad \forall u \neq 0$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes

i) a est coercive.

ii) a est continue sur $V_b \times V_b$ et V a la propriété à droite de Lax-Milgram par rapport à a.

iii) a est continue sur $V_b \times V_b$ et V a la propriété à gauche de Lax-Milgram par rapport à a.

Preuve :

Il est facile de voir que la coercivité et la continuité de a sur $V \times V$ impliquent que a est continue sur $V_b \times V_b$. On a déjà montré dans le corollaire 1 (théorème de Lax-Milgram) que si a est continue et coercive, alors V a les propriétés à droite et à gauche de Lax-Milgram par rapport à a.

Donc, $\quad i) \Longrightarrow ii)$ et $i) \Longrightarrow iii)$.

Nous allons prouver que $ii) \Longrightarrow i)$.

Puisque a est continue sur $V \times V$, $\exists M_1 > 0$ telle que

$$|a(u,v)| \leq M_1 \|u\|_V \|v\|_V \qquad \forall u, v \in V. \tag{3.10}$$

Puisque a est continue sur $V_b \times V_b$, $\qquad \exists M_2 > 0$ telle que

$$|a(u,v)| \leq M_2 \sqrt{a(u,u)} \sqrt{a(v,v)} \qquad \forall u, v \in V_b. \tag{3.11}$$

Puisque V a la propriété droite de Lax-Milgram par rapport à a,

par le Théorème 9 , $\exists c > 0$ tel que,

$$\forall u \in V, \qquad \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|a(v,u)|}{\|v\|_V} \geq c \|u\|_V .$$

Par conséquent, d'après (3.11)

$$|a(v,u)| \leq M_2 \sqrt{a(u,u)} \sqrt{a(v,v)} \qquad \forall u, v \in V$$

$$\leq M_2 \sqrt{a(u,u)} \sqrt{M_1} \|v\|_V \qquad \forall u, v \in V$$

$$\Longrightarrow \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|a(v,u)|}{\|v\|_V} \leq M_2 \sqrt{M_1} \sqrt{a(u,u)}, .$$

Par conséquent, $c \|u\|_V \leq M_2 \sqrt{M_1} \sqrt{a(u,u)} \qquad \forall u \in V.$

$$\Longrightarrow a(u,u) \geq \delta \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V \qquad (\delta = \frac{c^2}{M_1 M_2^2}).$$

Ce qui signifie que a est coercive.

Donc $ii) \Longrightarrow i)$. De même $iii) \Longrightarrow i)$.

Par conséquent, $(i) \Longleftrightarrow (ii) \Longleftrightarrow (iii)$.

Corollaire 3. *[8]*

Soit a une forme bilinéaire symétrique sur l'espace de Banach V telle que $a(u,u) > 0 \qquad \forall u \neq 0$. Alors, V a la propriété de Lax-Milgram par rapport à a si et seulement si a est coercive.

Preuve :

D'après le théorème précédent il suffit de montrer que a est continue sur $V \times V$. Comme a est symétrique et $a(u,u) > 0 \quad \forall u \neq 0$, il s'en suit que, $\quad \forall u, v \in V, \quad |a(u,v)| \leq \sqrt{a(u,u)}\sqrt{a(v,v)} \quad$ (Cauchy-Schwarz).

Par conséquent, a est continue sur $V_b \times V_b$.

La conclusion s'en suit immédiatement du théorème ci-dessus.

Proposition 7. *[8]*

Soit V un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ et soit a une forme bilinéaire continue sur V telle que $a(u,u) > 0 \quad \forall u \neq 0$. Alors, a est coercive si est seulement si V a la propriété de Lax-Milgram par rapport à b.

Preuve :

Supposons que V ait la propriété de Lax-Milgram par rapport à b. Puisque b est symétrique et $b(u,u) = a(u,u) > 0 \quad \forall u \neq 0$, il s'en suit du corollaire 3 du Théorème 10 que b est coercive, et donc a est coercive. Inversement, supposons que a soit coercive. Alors, V et V_b sont isomorphes. Puisque V est un espace de Banach, il s'en suit que V_b est complet i.e. V_b est un espace de Hilbert. Par conséquent, le théorème de représentation de Riesz 8 implique que V_b a la propriété de Lax-Milgram par rapport à b. Puisque V et V_b ont le même dual, il s'en suit que V a aussi la propriété de Lax-Milgram par rapport à b.

Avant de passer aux applications. On se pose la question suivante.

Question : Soit a un forme bilinéaire continue sur un espace de Banach V telle que

$$a(u, u) > 0 \quad \forall u \neq 0.$$

Supposons que V a les propriétés à droite et à gauche de Lax-Milgram par rapport à a, alors a est-elle coercive ?

Nous répondons négativement à cette question même dans le cas des espaces de Hilbert, au moyen d'un exemple.

Nous allons construire un isomorphisme S de H dans H où H est l'espace de Hilbert $l^2 \times l^2$ tel que $\langle Su, u\rangle > 0 \qquad \forall u \neq 0,$ et tel que $S + S^\star$ ne soit pas un isomorphisme (ici, $\langle , \rangle$ est le produit scalaire de H). Puis, la forme bilinéaire a donnée par $a(u, v) = \langle Su, v\rangle$ fournit le contre-exemple à la question ci-dessus.

Car, par la Proposition 7, a coercive implique que H a la propriété de Lax-Milgram par rapport à b.

Construction du contre-exemple.

Soit $H = l^2 \times l^2$ avec l^2 défini par

$$l^2 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 < +\infty\}.$$

Le produit scalaire $\langle u, v\rangle_H$ avec $u = (u^1, u^2)$ et $v = (v^1, v^2)$ est donné par

$$\langle u, v\rangle_H = \left\langle u^1, v^1\right\rangle_{l^2} + \left\langle u^2, v^2\right\rangle_{l^2},$$

où $\langle , \rangle_{l^2}$ est le produit scalaire de l^2 défini comme suit :

$$\text{si} \qquad u^i = (u_n^i)_{n\in\mathbb{N}} \;\; et \;\; v^i = (v_n^i)_{n\in\mathbb{N}} \quad i = 1, 2.$$

$$\left\langle u^i, v^i\right\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^i u_n^i.$$

Soit A l'application définie par

$$A : H \longrightarrow H$$

$$(u, v) \longmapsto A(u, v) = (-v, u)$$

On voit facilement que A est linéaire et est un isomorphisme isométrique de H car en effet, si $(u, v); (u', v') \in H, \lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} A((u, v) + \lambda(u', v')) &= A(u + \lambda u', v + \lambda v') \\ &= (-v - \lambda v', u + \lambda u') \\ &= (-v, u) + \lambda(-v', u') = A(u, v) + \lambda A(u', v') \end{aligned}$$

$\Longrightarrow A$ est linéaire.

En outre A est bijective car,

A est injective :

Soit $(u, v) \in Ker(A)$,

$$A(u, v) = (0, 0) \Longleftrightarrow (-v, u) = (0, 0)$$

$$\Longleftrightarrow u = v = 0$$

$\Longrightarrow A$ est injective.

A est surjective :

$$\forall v \in H, \quad \exists u \in H \ \ tel \, que \quad A(u) = v?$$

Soit $v = (v^1, v^2)$, $u = (u^1, u^2)$ on a,

$$A(u^1, u^2) = (v^1, v^2) \Longleftrightarrow (-u^2, u^1) = (v^1, v^2)$$

$$\Longleftrightarrow u^2 = -v^1; u^1 = v^2.$$

Donc $\exists u = (v^2, -v^1)$ tel que $A(u) = v$.

Ainsi A est surjective.

$\Longrightarrow A$ est un isomorphisme.

D'autre part A est isométrique c'est à dire que $\|Au\|_H = \|u\|_H \,, \forall u \in H$.

En effet,

$$\|Au\|_H^2 = |\langle Au, Au\rangle|_H = \langle Au, Au\rangle_H$$

$$= \left\langle A(u^1, u^2), A(u^1, u^2)\right\rangle_H$$

$$= \left\langle (-u^2, u^1), (-u^2, u^1)\right\rangle_H$$

$$= \left\langle -u^2, -u^2\right\rangle_{l^2} + \left\langle u^1, u^1\right\rangle_{l^2}$$

$$= \left\langle u^1, u^1\right\rangle_{l^2} + \left\langle u^2, u^2\right\rangle_{l^2}$$

$$= \left\|u^1\right\|_{l^2}^2 + \left\|u^2\right\|_{l^2}^2 = \|u\|_H^2$$

$$\Longrightarrow \|Au\|_H^2 = \|u\|_H^2 \Longrightarrow \|Au\|_H = \|u\|_H \,.$$

Donc A est un isomorphisme isométrique.

Et on a aussi, $\quad \langle Au, u\rangle = 0 \qquad \forall u \in H$.

En effet

$$\langle Au, u\rangle_H = \left\langle A(u^1, u^2), (u^1, u^2)\right\rangle_H$$

$$= \left\langle (-u^2, u^1), (u^1, u^2)\right\rangle_H$$

$$= \left\langle -u^1, u^2\right\rangle_{l^2} + \left\langle u^1, u^2\right\rangle_{l^2}$$

$$= -\left\langle u^1, u^2\right\rangle_{l^2} + \left\langle u^1, u^2\right\rangle_{l^2} = 0.$$

Puisque A est un isomorphisme isométrique il s'en suit que

$\|A\|_H = 1 = \|A^{-1}\|_H$ car par définition on a,

$$\|A\|_H = \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\|A(u)\|}{\|u\|_H} = \frac{\|u\|_H}{\|u\|_H} = 1$$

De même pour $\|A^{-1}\|_H$.

De plus on a, $A^\star = -A$, car par définition on a $\langle Au, v \rangle = \langle u, A^\star v \rangle$.

En effet

$$\begin{aligned}
\langle Au, v \rangle_H &= \left\langle A(u^1, u^2), (v^1, v^2) \right\rangle_H \\
&= \left\langle (-u^2, u^1), (v^1, v^2) \right\rangle_H \\
&= \left\langle -u^2, v^1 \right\rangle_{l^2} + \left\langle u^1, v^2 \right\rangle_{l^2} \\
&= \left\langle u^2, -v^1 \right\rangle_{l^2} + \left\langle u^1, v^2 \right\rangle_{l^2} \\
&= \left\langle u^1, v^2 \right\rangle_{l^2} + \left\langle u^2, -v^1 \right\rangle_{l^2} \\
&= \left\langle (u^1, u^2), (v^2, -v^1) \right\rangle_H \\
&= \langle u, -Av \rangle_H
\end{aligned}$$

donc $\langle Au, v \rangle_H = \langle u, -Av \rangle_H$, d'autre part $\quad \langle Au, v \rangle = \langle u, A^\star v \rangle$,

d'où $\quad A^\star = -A$.

Soit maintenant $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs tendant vers zéro et tels que, $\quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n < 1$.

Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de H, et T l'opérateur suivant,

$$T : H \longrightarrow H$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle e_n \longmapsto T(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, e_n \rangle e_n$$

On voit que $\|T\|_H < 1$. En effet

$$\|Tu\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle Tu, e_n \rangle|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, e_k \rangle e_k, e_n \right\rangle \right|^2$$

$$= \sum_{n,k=1}^{\infty} |\langle \lambda_k \langle u, e_k \rangle e_k, e_n \rangle|^2$$

$$= \sum_{n,k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\langle u, e_k \rangle|^2 |\langle e_k, e_n \rangle|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle u, e_n \rangle|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 |\langle u, e_n \rangle|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle u, e_n \rangle|^2$$

ainsi

$$\|Tu\|_H^2 < \sum_{n=1}^{N} |\langle u, e_n \rangle|^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle u, e_n \rangle|^2 < \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n \rangle|^2 = \|u\|_H^2$$

On a par définition,

$$\|T\| = \sup_{u\neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|_H} < \frac{\|u\|_H}{\|u\|_H} \Longrightarrow \|T\|_H < 1.$$

On a aussi $T = T^\star$ et $\langle Tu, u\rangle > 0 \qquad \forall u \neq 0.$

En effet,

$$\langle Tu, v\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, e_n\rangle\, e_n, \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k\rangle\, e_k \right\rangle$$

$$= \sum_{n,k=1}^{+\infty} \lambda_n \langle u, e_n\rangle \langle v, e_k\rangle \langle e_n, e_k\rangle$$

$$= \sum_{k,n=1}^{+\infty} \langle u, e_k\rangle\, \lambda_n \langle v, e_n\rangle \langle e_k, e_n\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, e_k\rangle\, e_k, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle v, e_n\rangle\, e_n \right\rangle$$

$$= \langle u, Tv\rangle \quad \Longrightarrow T = T^\star$$

$$\langle Tu, u\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, e_n\rangle e_n, \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, e_k\rangle e_k \right\rangle$$

$$= \sum_{n,k=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, e_n\rangle \langle u, e_k\rangle \langle e_n, e_k\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, e_n\rangle^2 = \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \langle u, e_n\rangle^2 + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \lambda_n \langle u, e_n\rangle^2$$

$$\geq \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \langle u, e_n\rangle^2 > 0,$$

par le choix de p, qui est le premier entier tel que $\lambda_p > 0$,

donc $\langle Tu, u\rangle > 0 \qquad \forall u \neq 0$.

On voit aussi que λ_n est une valeur propre pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_n \longrightarrow 0$,

donc T n'est pas inversible.

Montrons le par l'absurde.

Supposons que T soit inversible alors, on a

$$Te_n = \lambda_n e_n \Longrightarrow T^{-1}(Te_n) = T^{-1}(\lambda_n e_n)$$

$$\Longrightarrow e_n = \lambda_n T^{-1} e_n.$$

Comme on a, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \lambda_n = 0$ on obtient $\lim_{n\longrightarrow+\infty} e_n = 0$

or, $\|e_n\| = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$, ce qui est absurde.

Ainsi T n'est pas inversible.

Soit $S = A + T$, alors S est un isomorphisme (i. e. linéaire et bijectif).

$$\begin{aligned}
\text{On a,} \qquad \langle Su, u\rangle &= \langle (A+T)u, u\rangle \\
&= \langle Au + Tu, u\rangle \\
&= \langle Au, u\rangle + \langle Tu, u\rangle \\
&= \langle Tu, u\rangle > 0, \qquad (\text{car} \quad \langle Au, u\rangle = 0)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \langle Su, u\rangle > 0 \qquad \forall u \neq 0.$$

Posons $a(u, v) = \langle Su, v\rangle$.

Maintenant puisque $a(u, v) = \langle Su, v\rangle > 0$ et H a les propriétés à droite et à gauche de Lax-Milgram par rapport à a, peut-on dire que a est coercive ? la réponse est non.

Par l'absurde supposons que a soit coercive c'est à dire

$$\exists \delta > 0; \quad a(u, u) \geq \delta \left\|u\right\|_H^2 \qquad \forall u \in H.$$

Or,

$$a(u, u) = \langle Su, u\rangle = \langle Tu, u\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \left\langle u, e_n\right\rangle^2.$$

Pour $u = e_n$ on a,

$$a(e_n, e_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \left\langle e_n, e_k\right\rangle^2 = \lambda_n.$$

Quand $n \longrightarrow +\infty; \lambda_n \longrightarrow 0$, et $a(e_n, e_n) \longrightarrow 0$.

$$\text{Mais} \qquad a(e_n, e_n) \geq \delta \left\|e_n\right\|_H^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

on passe à la limite, on obtient $0 \geq \delta$ ce qui est faux donc a n'est pas coercive.

Remarques

(a) Puisque A est inversible, $\|A^{-1}\|_H = 1$ et comme $\|T\|_H < 1$, alors S est inversible.

on a, $\quad S^\star = A^\star + T^\star = A^\star + T. \qquad S + S^\star = A + A^\star + 2T = 2T,$

comme $A + A^\star = 0$ (car $A^\star = -A$), alors $S + S^\star$ n'est pas inversible car T n'est pas inversible.

(b) L'espace H possède la propriété de Lax-Milgram par rapport à b où

$$b(u,v) = \frac{\langle Su, v\rangle + \langle Sv, u\rangle}{2} = \frac{\langle Su, v\rangle + \langle S^* u, v\rangle}{2}$$

si et seulement si $S + S^*$ est un isomorphisme.

(c) En général, un espace de Banach possède la propriété de Lax-Milgram par rapport à b si et seulement si $A + B$ est un isomorphisme de V dans $V'(A, B$ définies par $Au(v) = a(v,u)$ et $Bu(v) = a(u,v))$.

3.4 Applications

Application 1

Soit le problème

$$\forall F \in W_0^{1,q}(\Omega)' \quad , \quad \exists! u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{tel que,}$$

$$\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + \langle cu, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in W_0^{1,q}(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$a(u, \varphi) = \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + \langle cu, \varphi \rangle , \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \varphi \in W_0^{1,q}(\Omega)$$

i) Continuité : $\exists M > 0,$ tel que,

$$|a(u, \varphi)| \leq M \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \|\varphi\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall \varphi \in W_0^{1,q}(\Omega)$$

ii) Inégalité variationnelle :

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C \sup_{\varphi \in W_0^{1,q}(\Omega)} \frac{|a(u, \varphi)|}{\|\varphi\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$\Longrightarrow \forall F \in W_0^{1,q}(\Omega) \equiv W_0^{-1,p}(\Omega)', \quad \exists! u \in W_0^{1,p}(\Omega); \quad a(u, \varphi) = \langle F, \varphi \rangle , \quad \forall \varphi \in W_0^{1,q}(\Omega)$$

Application 2

Avant d'énoncer le problème, rappelons une autre version du :

Théorème de Lax-Milgram [3]

Soient X un espace de Banach réflexif, Y un espace de Banach,

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de sous espaces fermés de X, et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une

famille de sous espaces fermés de Y, et soit $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$.

Supposons que l'application,

$$A : X \times V \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3.12}$$

est telle que,

1) *$A_n = A|_{X_n \times Y_n}$ est une forme bilinéaire bornée, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

2) *$A(.,v)$ est une fonctionnelle linéaire bornée sur X, pour tout $v \in V$,*

3) *A_n est non-dégénérée par rapport à la seconde variable, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

4) *il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{y \in Y_n, \|y\|=1} |A_n(x,y)| \geqslant c \|x\|, \qquad \forall x \in X_n.$$

Alors, pour chaque fonctionnelle linéaire bornée $v^\star$ sur V, il existe $x \in X$ tel que

$$A(x,v) = \langle v^\star, v \rangle, \qquad \forall v \in V.$$

Problème.

Soit $a \in C^1(]0,1[)$ une fonction décroissante avec $\lim_{t \longrightarrow 0} a(t) = \infty$ et $a(t) \geq 0, \quad \forall t \in]0,1[$.

Nous établirons l'existence d'une solution pour le problème Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + a(t)u(t) = f(t) \qquad p.p. \quad t \in]0,1[\\ \\ \qquad u(0) = 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

où $f \in L^2(]0,1[)$.

Soit $X = \{u \in H^1(]0,1[)/ \quad u(0) = 0\}$ doté de la norme $\|u\|_X = (\int_0^1 |u'(t)|^2 \, dt)^{\frac{1}{2}}$, qui est équivalente à la norme de Sobolev, et $Y = L^2(]0,1[)$.

Etant un sous espace fermé de $H^1(]0,1[)$, X est un espace de Banach réflexif.

Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante dans $]0,1[$ avec $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \alpha_n = 0$.

Définissons,

$$X_n = \{u \in H^1(]\alpha_n,1[)/ \quad u(\alpha_n) = 0\}, \qquad Y_n = L^2(]\alpha_n,1[) \tag{3.14}$$

On peut considérer X_n et Y_n comme des sous-espaces fermés de X et Y, respectivement, en prolongeant leurs éléments par zéro à l'extérieur $]\alpha_n, 1[$.

Posons $V = \bigcup_{n=1}^{+\infty} Y_n$.

Soit $A : X \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ une application bilinéaire définie par

$$A(u,v) = \int_0^1 u'(t)v(t)dt + \int_0^1 a(t)u(t)v(t)dt \tag{3.15}$$

A est bien définie et $A(.,v)$ est une forme linéaire bornée sur X pour tout $v \in V$.

Soit $A_n = A|_{X_n \times Y_n}$. A_n est une forme bilinéaire bornée puisque

$$|A_n(u,v)| \leq (1 + M_n) \|u\|_{X_n} \|v\|_{Y_n} \tag{3.16}$$

où M_n est la borne supérieure de a sur $[\alpha_n, 1]$.

En effet,

$$\begin{aligned} |A_n(u,v)| &= \left| \int_{\alpha_n}^1 u'(t)v(t)dt + \int_{\alpha_n}^1 a(t)u(t)v(t)dt \right| \\ &\leq \left| \int_{\alpha_n}^1 u'(t)v(t)dt \right| + \left| \int_{\alpha_n}^1 a(t)u(t)v(t)dt \right| \\ &\leq \int_{\alpha_n}^1 |u'(t)v(t)|\, dt + \int_{\alpha_n}^1 |a(t)u(t)v(t)|\, dt \end{aligned}$$

$$\leq \|u'\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + M_n \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \qquad \text{(Inégalité de Hölder)}$$

$$\leq \|u\|_{X_n} \|v\|_{Y_n} + M_n \|u\|_{X_n} \|v\|_{Y_n}$$

$$\leq (1 + M_n) \|u\|_{X_n} \|v\|_{Y_n} \qquad \text{d'ou (3.16)}$$

Pour montrer que A_n est non-dégénérée, soit $v \in Y_n$ et supposons que

$A_n(u,v) = 0, \quad \forall u \in X_n$, c'est-à-dire,

$$\int_{\alpha_n}^{1} (u'(t) + a(t)u(t))v(t)dt = 0, \qquad \forall u \in X_n. \tag{3.17}$$

Il est facile de voir que ce qui précède implique que,

$$\int_{\alpha_n}^{1} w(t)v(t)dt = 0 \tag{3.18}$$

pour toute fonction continue w, et donc $v = 0$. Nous montrons que,

$$\sup_{\|v\|=1, v\in Y_n} |A_n(u,v)| \geq \|u\|_{X_n} \tag{3.19}$$

On définit $T_n : X_n \longrightarrow Y_n'$ par $\langle T_n u, v\rangle = A_n(u,v)$. $\quad T_n$ est un opérateur

linéaire continu bien défini et $T_n u = u' + a(t)u$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\|T_n u\|^2 &= \int_{\alpha_n}^{1} |u'(t) + a(t)u(t)|^2 \, dt \\
&= \int_{\alpha_n}^{1} |u'(t)|^2 \, dt + \int_{\alpha_n}^{1} a^2(t) \, |u(t)|^2 \, dt + \int_{\alpha_n}^{1} a(t)(u(t)^2)' dt \\
&= \int_{\alpha_n}^{1} |u'(t)|^2 \, dt + \int_{\alpha_n}^{1} (a^2(t) - a'(t)) \, |u(t)|^2 \, dt + a(1)u^2(1) \geq \|u\|_{X_n}^2
\end{aligned}$$

puisque $u(\alpha_n) = 0, a$ est décroissante et $a(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0,1[$.

Toutes les hypothèses du théorème ci-dessus sont donc satisfaites et donc

si $F \in V'$ est défini par $F(v) = \int_0^1 f(t)v(t)dt$, alors il existe $u \in X$

tel que

$$A(u,v) = F(v), \qquad \forall v \in V. \tag{3.20}$$

C.à.d que le problème (3.13) admet une solution $u \in X$.

Bibliographie

[1] V. Avanissian, Initiation à l'analyse fonctionnelle, Presses universitaires de France,(1996).

[2] H. Brézis, Analyse fonctionnelle. Théorie et application,Dunod, (2005).

[3] D. Driliaris, N. Yannakakis, *Generalizations of Lax-Milgram theorem,* BVP, ED87104, Doc10.1155/2007/87104.

[4] B. Lucquin, équations aux dérivées partielles et leurs approximations, Ellipses,(2004).

[5] J. L. Lions, G. Stampacchia,*Variational inequalities,* Comm. Pure Appl. Math, (1967) 91-140.

[6] J. Marc Gilsinger, M. Jaï, éléments d'analyse fonctionnelle, Fondements et applications aux sciences de l'ingénieur, Presses polytechniques et universitaires Romandes, (2010).

[7] S. Ramaswamy, *The Lax-Milgram theorem for Banach spaces. I.*

Proc. Japan Acad, 56A, 462-464, (1980).

[8] S. Ramaswamy, *The Lax-Milgram theorem for Banach spaces. II.*

Proc. Japan Acad, 57A, 29-33, (1981).

Résumé

Dans ce mémoire de fin d'études nous avons analysé le théorème de Lax-Milgram, connu souvent dans les espaces Hilbert, cette fois-ci dans un cadre plus général, à savoir dans les espaces de Banach où nous avons traité la question de savoir dans quelle mesure les propriétés de symétrie et coercivité d'une certaine forme bilinéaire a est nécessaire pour la validité du théorème de Lax-Milgram dans les espaces de Banach qui ne sont munis d'aucun produit scalaire.

Mots clés : Espaces de Banach, espaces de Hilbert, théorème de Lax-Milgram, théorème de représentation de Riesz, théorème des projections, théorème de Hahn-Banach, théorème d'application ouverte, isomorphisme, dual et bidual, produit scalaire, forme linéaire, forme bilinéaire symétrique coercive et continue.

Abstract

In this dissertation of end of studies we have analyzed the Lax-Milgram theorem, often known in the Hilbert spaces, this time in a more general framework, namely in Banach spaces where we have treated the question of how far the properties of symmetry and coercivity of a certain bilinear form a are necessary for the validity of the Lax-Milgram theorem in Banach spaces which are not provided with any scalar product.

Keywords :
Banach spaces, Hilbert spaces, Lax-Milgram theorem, Riesz representation theorem, Hahn-Banach's theorem, open application theorem, dual and bidual, isomorphism, inner product, continuous linear form, symmetric coercive and continuous bilinear form.