الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid جامعة أبي بكر بلقايد

Tlemcen Algérie تلمسان الجزائر

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE MASTER
EN MATHÉMATIQUES

Option : Perturbations, Moyennisation et Applications aux Biomathématiques (PeMAB)

Sujet :

Analyse de la stabilité globale par la mesure de Lozinskii d'un modèle épidemiologique de type SEIRS

Candidate : **REZIOU Amel**

Date : .....03/...07../2017

Membres du Jury :

Président :	BOUGUIMA. S. M,	Professeur, Université de Tlemcen
Eximinateurs :	LAKRIB. M,	Professeur, Université de Sidi Bel Abbès
	TOUAOULA.M. T,	Professeur, Université de Tlemcen
Encadreur :	BENMERZOUK. D,	Professeur, Université de Tlemcen

Année Universitaire 2016/2017

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

A mes chers parents. Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous, pour tous les sacrifices que vous n'avez cessé de consentir durant toute ma vie ;

A mon chèr frère Mohammed ;

A ma chère soeur Ikram ;

A toute ma famille ;

A mes camarades.

Remerciements

On remercie **DIEU** Le tout puissant de nous avoir donné la santé, la patience et la volanté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Je retiens à remercier tout d'abord mon encadreur, madame Djamila.Hadj Sliman pour l'honneur qu'elle m'a fait en assurant la direction de ce mémoire. Je la remercie pour sa patience, sa disponibilité, ses remarques et ses conseils.

Je voudrais également remercier les membres du jury, M.S.M.BOUGUIMA, M.T.TOUOULA, et M.M.LAKRIB pour avoir accepte d'évaluer ce travail, et pour leur temps consacré à examiner ce mémoire .

J'adresse mes remerciements aux enseignants du département de mathématiques, qui m'ont accompagnés et aidés à améliorer mon cursus de formation.

Je remercie mes chèrs parents sans je n'arriverai pas là ou je suis actuellement, vous qui m'avez toujours guidés mes pas, c'est donc à vous que je dédie ce travail.

Tlemcen.

Résumé

Le but principale de ce mémoire est l'étude d'un modèle mathèmatique basé sur les équations différentielles ordinaires, pour décrire la dynamique d'un maladie infectieuse avec immunité temporaire de type SEIRS (sensibles, exposés, infectieux et récupérés).

Dans le premier chapitre, on rappelle les outils mathématiques nécéssaires à l'étude de ce modèle .

La deuxième chapitre consacré à l'analyse mathématique d'un modèle de propagation d'un maladie infectieuse(l'existence locale et globale et l'invariance positive des solutions), on calcul aussi les points d'équilibre (sans maladie et infecté) et ainsi le taux e reproduction.

Dans la troisième chapitre, on propose l'étude de stabilité globale du point endémique par la méthode géométrique (mesure de Lozinskii), on obtient des conditions suffisantes pour la stabilité globale, écritent en fonction des paramètres du système.

Abstract

The main purpose of this thesis is the study of a mathimatical model based on ordinary differential equations to describe the dynamics of an infectious disease with temporary immunity of type SEIRS (sensitive, exposed), infectious and recover.

In the first chapter, we recall the mathematical tools that were used in this model.

The second chapter deals with the mathematical analysis of a propagation model of an infectious disease (the local and global existence and the positive invariance of the solutions), the points of equilibrium (without disease and infected) are calculated and thus the reproduction rate.

In the third chapter, we propose the study of the global stability of the end point by the geometric method (Lozinskii measure), we obtain sufficient conditions for global stability, we write according to the parameters of the system.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

Les modèles mathématiques occupent de plus en plus une place fondamentale dans l'analyse de la propagation de certaines maladies infectieuses.
Dans ces modèles, la population d'individus est divisée en plusieurs compartiments différents. Chaque compartiment représente une étape spécifique de l'épidémie, comme les modèles SIS, ou S est un individu initialement sain, il peut devenir infecté I puis être guéri S ; si la guérison n'est pas possible, alors il s'agit d'un modèle SI. Par rapport aux caractéristiques de l'infection, il existe d'autres types de compartiments comme le compartiment des latents, i.e, les individus sont infectés par la maladie mais qui n'ont pas des symptômes visibles. La maladie prend un certain temps pour que l'infection se propage dans le corps. C'est le compartiment des exposés qui est noté E. Si L'individu infecté acquiére une immunité alors on a un compartiment des rétablis noté R.

A partir de 1927, Kermack et McKendrick [12] ont construit un modèle de compartiment simple, qui constitue le modèle fondamental pour l'élaboration de modèles épidémiques mathématiques.
Dans ce travail, nous nous interressons à l'étude d'un modèle épidémiologique de type $SEIRS$.

Dans le premier chapitre, nous rappelons les outils mathématiques nécéssaires à l'étude de ce modèle.

Dans le deuxième chapitre, on propose quelques résultats sur l'existence locale et globale et l'invariance positive des solutions de ce modèle. On calcule les points d'équilibre, le taux de reproduction et une analyse de la stabilité locale est effectuée pour le point d'équilibre sans maladie et le point d'équilibre endémique .

Le chapitre trois est consacré à l'étude de la stabilité globale du point endémique par la mesure de Lozinskii.
Eltermann, Lozinskii et Dahlquist semblent être les premiers à avoir utilisé la norme logarithmique.
En 1955, Eltermann a appliqué la formule de la norme logarithmique $\mu_\infty(A)$ pour une matrice réelle A qui admet les valeurs propres $\lambda(A)$ dans l'estimation $\lambda(A) \leq \max_i(a_{ii} + \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|)$.

En 1958, pour $A \in \mathbf{C^{n\times n}}$ et $||.||$ la norme matricielle avec $||I|| = 1$, Lozinskii montre que la limite : $\lim_{h\to 0} \frac{||I+hA||-1}{h}$ existe et l'appelle norme logarithmique. De plus, Lozinskii utilise cette norme dans l'estimation d'erreur de l'intégration numérique de l'équation différentielle ordinaire.
En 1959, Dahlaquist utilise la dérivée directionnelle de la norme vectorielle, pour $y, v \in \mathbf{C^n}$ et $h > 0$, il montre que $\lambda[y, v] := \lim_{h\to 0} \dfrac{||y + hv|| - ||y||}{h}$ existe.

Rappels

1

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions qui nous seront utiles pour la suite de notre travail, voir [3], [5], [9], [11] .

1.1 Existence et positivité de solution

1.1.1 Existence de solution

Théorème 1 *Soit $f(t,x)$ fonction continue par rapport t et localement Lipschitz par rapport à x. Alors il existe $\delta > 0$ tel que le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

admet une solution maximale unique définie sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \delta[$.

Dans tout ce qui suit, on prend $t_0 = 0$ et on suppose que $f \in \mathbf{C}([\mathbf{0}, \infty[\times \mathbf{D}, \mathbf{R^n})$, $\mathbf{D} \subset \mathbf{R^n}$ un ensemble ouvert et une solution $x : [t_0, t_0 + \delta[\to \mathbf{D}$.

1.1.2 Positivité de solution

Proposition 2 *Considérons un système d'équations différentielles (1) dans $\mathbf{R^n}$, telle que f est définie pour tout $t \geq t_0$, $x \in \mathbf{R^n}$.*
Si pour tout $j = 1, ..., n$ et $t \geq t_0$, on a :
$f_j(t, x_1, ..., x_j - 1, 0, x_j + 1, ..., x_n) \geq 0$ pour tout $x \in [0, \infty)^n$, alors $x(t) \in [0, +\infty)^n$ pour tout $t \geq t_0$.

1.1.3 Dissipativité

Le système (1.1) est dit dissipatif si $\exists\, \alpha > 0, \forall\, x_0$, $x(t; x_0)$ est définie pour tout $t \geq 0$ et $\limsup\limits_{t\to\infty} ||x(t; x_0)|| < \alpha$.

1.1.4 Persistance uniforme

Le système (1.1) est uniformèment persistant, s'il existe une constante $\epsilon > 0$ telle que toute solution $x(.)$ de (1.1) satisfait, $\liminf\limits_{t\to+\infty} ||x(t, x_0)|| > \epsilon$.

1.2 Rappels sur le taux de reproduction

On désigne par R_0 le taux de reproduction de base

1.2.1 Définition de $\mathbf{R}_0$

R_0 représente le nombre moyen de nouveaux cas d'infection, engendrés par un individu infecté (au cours de sa période d'infectiosité), dans une population entièrement constituée de susceptibles .

R_0 donne des informations sur l'évolution de l'épidémie (elle devient endémique ou va disparaitre avec le temps) .
Si $R_0 < 1$ alors la maladie va éventuellement disparaitre dans la population avec le temps
Si $R_0 > 1$ alors la maladie s'installe dans la population.

1.2.2 Méthodes de calcul de $\mathbf{R}_0$

Les méthodes les plus utilisées pour calculer le taux de reproduction sont :

Méthode de Anderson et May

R_0 est définie par : $R_0 = \beta CD$
où β : la probabilité de transmission de la maladie ;
C : le nombre de contacts entre un individu infecté et sain par unité de temps ;
D : le temps moyen de la période d'infectiosité.

Méthode de Bokh(1886)

Soit $F(a)$ la probabilité de survie d'un individu jusqu'à l'âge "a" et $\beta(a)$ le taux de naissance de la population alors $\int_0^\infty \beta(a)F(a)da$ est le nombre de naissance engendré par cet individu durant sa vie.
Cette définition, donnée par Bokh pour la démographie peut être adaptée en épidémiologie.
$F(a)$: la probabilité d'infection jusqu'à l'âge "a" (i.e l'age d'infectiosité) et $\beta(a)$ le taux de transmission alors R_0 donne les nouveaux infectés $R_0 = \int_0^\infty F(a)\beta(a)da$.

Méthode pratique (Next generation matrix)

On considère le système :

$$\dot{x} = f(x)$$

où $x = (x_1, ..., x_n)^T$ l'état du système.

La population est divisée en "n" compartiments et le nombre d'individus dans le compartiment "i" est donné par x_i.

On note les compartiments de telle façon que les " p " premiers soient constitués des individus " infectés "(les infectieux , latents, ...).
Le reste des compartiments sont constitués des "non infectés", non porteurs de germe (virus, parasite, ...). Dans ces compartiments on peut avoir les susceptibles , les vaccinés,...

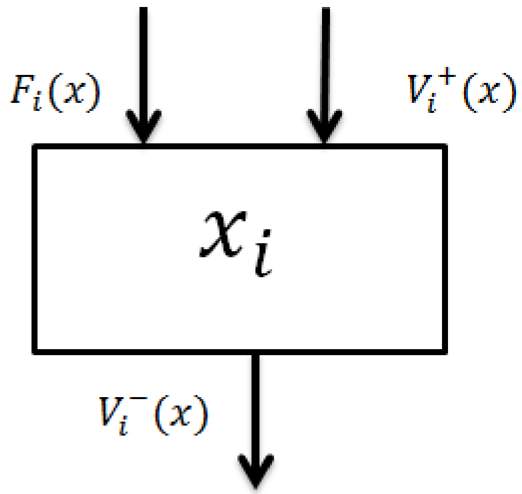


FIGURE 1.1 – *Le bilan d'entrée et sortie*

On fait le bilan de ce qui entre et de ce qui sort de chaque compartiment :

1. On note $\mathcal{F}_i(x)$ la vitesse d'apparition de nouveaux infectés.

2. On note $\mathcal{V}_i^+$ ceux qui proviennent des autres compartiments par toute autre cause (déplacement , guérison, etc ...).

3. On note $\mathcal{V}_i^-$ la vitesse de ceux qui quittent le compartiment i (par exemple, mortalité , mouvement , changement de statut épidémiologique, ...).

On a finalement

$$\dot{x}_i = \mathcal{F}_i(x) + \mathcal{V}_i(x) \qquad avec\ \mathcal{V}_\rangle = \mathcal{V}_i^+ - \mathcal{V}_i^-$$

On note par X_s l'état sans maladie :
$X_s = \{x \in \mathbf{R^n} / x_i = 0 \quad i = 1, ..., p\}$
On fait les hypothèses suivantes :

1. $x \geq 0$,$\mathcal{F}_i(x) \geq 0$,$\mathcal{V}_i^+ \geq 0$, $\mathcal{V}_i^- \geq 0$

2. Si $x_i = 0$ alors $\mathcal{V}_i^- = 0$. S'il n' y a rien dans un compartiment, rien ne peut en sortir. C'est la propriété essentielle d'un modèle compartimental.

3. Pour $i > p$ alors $\mathcal{F}_i(x) = 0$. Les compartiments d'indice inférieur à p sont des "non infectés". Par définition, il ne peut apparaître, dans ces compartiments des "infectés".

4. Si $x \in X_s$ alors $\mathcal{F}_i(x) = 0$ et $\mathcal{V}_i^+ = 0$ pour $i = 1, ..., m$. Si il n' y pas de porteurs de germes dans la population, il ne peut apparaître de nouveaux "infectés".

La Jacobienne de f s'écrit autour du point d'équilibre ($f(t, \bar{x}) = 0$) sans maladie x^* :

$J(x^*) = D\mathcal{F}(x^*) + D\mathcal{V}(x^*)$

où

$$D\mathcal{F}(x^*) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$D\mathcal{V}(x^*) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

avec $F = \left[\dfrac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}\right]_{1 \le i,j \le p}$ et $V = \left[\dfrac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}\right]_{1 \le i,j \le p}$

où $F \geq 0$ est une matrice définie positive et v est une matrice de Metzler (i,e les termes hors diagonaux sont positifs)

On définit R_0 alors comme suit :

$R_0 = \rho(-F\,V^{-1})$, où ρ le rayon spectrale.

1.3 Notions de stabilité

Définition 1 *Un point d'équilibre $\bar{x}$ est dit*

1. *stable si, $\forall \epsilon > 0$, $\exists_, \delta > 0$ tel que :$||x(t_0) - \bar{x}|| < \delta \Rightarrow ||x(t) - \bar{x}|| < \epsilon, \;\; \forall t \geq t_0$.*

2. *instable s'il n'est pas stable .*

3. *asymptotiquement stable si*

   — *$\bar{x}$ est stable ,*

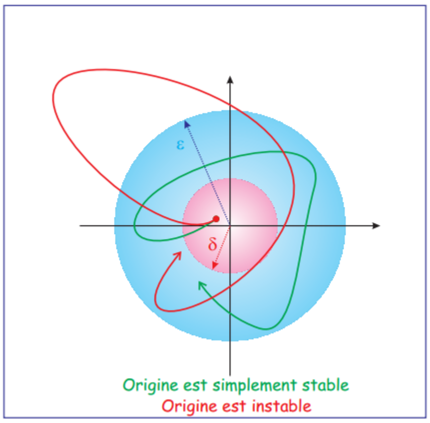
   — *et attractif i.e ; $\exists\, \delta > 0$, tel que $||x(t_0) - \bar{x}|| < \delta \Rightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \bar{x}$*

4. *globalement asymptotiquement stable si*

— *il est stable*

— *et il est globalement attractif i,e si, pour tout* $x(0) \in D$, $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \bar{x}$

Remarque :
On peut ramener l'équilibre $\bar{x}$ à l'origine en effectuant une translation, en posant $\widetilde{x} = x(t) - \bar{x}$



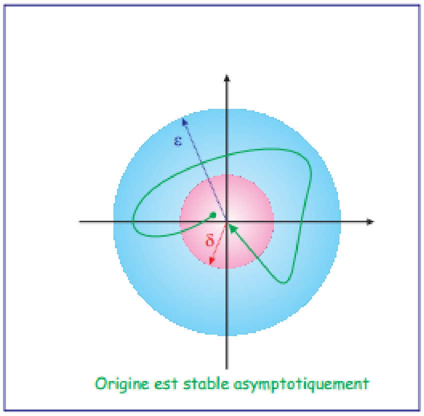


FIGURE 1.2 – *Sur les notions de stabilité*

Définition 2 *(K-ième composée additive de matrice) Soit* A *une matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$*(i.e matrice* $n \times n$ *à coefficientS réels). On appelle k-ième composée additive de* A *, la matrice* $A^{[k]}$ *de* $\mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ *ou* $N = \binom{k}{n}$ *définie par :* $A^{[k]} = D_+[(I + hA)^K]_{|h=0}$
où D_+ *est la dérivée à droite définie par :* $D_+||x(t)|| := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\| x(t+h) \| - \| x(t) \|}{h}$ *.*

La deuxième composée additive de A est donnée par :

Pour $k = 2$: $A^{[2]} = a_{11} + a_{22} = tr(A)$

Pour $k = 3$:

$$A^{[2]} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{23} & -a_{13} \\ a_{32} & a_{11} + a_{33} & a_{12} \\ -a_{31} & a_{21} & a_{22} + a_{33} \end{pmatrix}$$

1.4 Norme de Lozinskii

Rappelons tout d'abord quelque notions sur les normes de manière générale, [6]

1.4.1 Norme matricielle induite

La norme matricielle induite par une norme dans $\mathbf{R^n}$ pour une matrice A $(n \times n)$ où $A = (a_{ij})$
$i, j = 1, ..., n$ est définie par :

$$\| A \| = \sup\{\| Ax \| : \| x \| = 1\} = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}$$

Exemple : les normes induites par une norme dans $\mathbf{R^n}$ pour A :
L_1 : $max_j(\sum_{i=1}^{n} \mid a_{ij} \mid)$;
L_2 : $\sqrt{\rho(AA^t)}$ où ρ la plus grande des modules des valeurs propres de $A\,A^t$, A^t la matrice transposée de A ;
L_∞ : $max_i(\sum_{i}^{n} \mid a_{ij} \mid)$.

1.4.2 Mesure de Lozinskii (ou norme logarithmique)

On définit la mesure de Lozinskii (notée μ) pour une matrice carrée A par rapport à la norme $\| \cdot \|$ dans $\mathbf{R}^n$ comme suit :

$$\mu(A) := \lim_{h \to 0} \frac{\| I + hA \| - 1}{h}$$

où I désigne l'opérateur identité.

Dans [6], on montre que $\mu(A)$ est bien définie.

La mesure de Lozinskii associée aux normes L_1, L_2 et L_∞, telle que $A = (a_{ij}) \in A_{n \times n}$, et ρ et λ sont les plus grandes valeurs propres de A^tA et $\frac{1}{2}(A^t + A)$ respectivement est donnée par le tableau suivant :

norme	$\|\|x\|\|$	$\|\|A\|\|$	$\mu(A)$
L_1	$\sum_{j=1}^{n} \mid x_j \mid$	$\max_j(\sum_{i=1}^{n} \mid a_{ij} \mid)$	$\max_j(a_{jj} + \sum_{i \neq j} \mid a_{ij} \mid)$
L_2	$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$	$\sqrt{\rho(A\,A^t)}$	λ
L_∞	$\max_j \mid x_j \mid$	$\max_i(\sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid)$	$\max_i(a_{ii} + \sum_{i \neq j} \mid a_{ij} \mid)$

TABLE 1.1 – *La mesure de Lozinskii associée aux normes usuelles*

1.5 Propriétés de la mesure de Lozinskii

Proposition 3 *La mesure de Lozinskii a les propriétés suivantes :*
Soient A et B des matrices carrées $n \times n$, $S(A) = \max_i Re(\lambda_i)$ où λ_i sont des valeurs propres de A, et soit α un nombre réel positif et z un nombre complexe quelconques. Alors :

1. $\mu(\alpha A) = \alpha\mu(A), \forall \alpha \geq 0$;
2. $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$;
3. *Si $A(.)$ est continue sur $I \subset \mathbf{R}$ alors $\mu(A(.))$ est continue sur son domaine de définition ;*
4. $S(A) \leq \mu(A)$;
5. $-||A|| \leq \mu(A) \leq ||A||$;
6. $\mu(A + zI) = \mu(A) + Re(z) \quad \forall z \in \mathbf{Z}$;
7. $||\exp tA|| \leq \exp(t\mu(A))\ t \geq 0$;
8. $\mu(A) < 0 \Rightarrow ||A^{-1}|| \leq \dfrac{-1}{\mu(A)}$.

Exemple :

Soit

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}$ admet deux valeurs propres $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$
la mesure de Lozinskii pour A est :

$\mu_1(A) = 2$ par rapport à L_1 ;

$\mu_2(A) = \dfrac{3 + \sqrt{2}}{2}$ par rapport à L_2 ;

$\mu_\infty(A) = 3$ par rapport à L_∞.

1.6 Mesure de Lozinskii pour les systèmes linéaires [7]

Considérons le système linéaire

$$x' = A(t)x \tag{1.2}$$

où A(.) est une matrice $n \times n$ définie et continue sur $I \subset \mathbf{R}$. On a alors les résultats suivants :

Lemme 4 *Soit x(.) est une solution de (1.2), on a :*

$$D_+ \parallel x(t) \parallel \leq \mu(A(t)) \parallel x(t) \parallel$$

Démonstration. Considérons la solution $x(.)$ du système (1.2). Utilisons une norme définie sur $\mathbf{R^n}$ notée $\parallel . \parallel$, et D_+ la dérivée à droite de $x(.)$, on a :

$$D_+ \parallel x(t) \parallel = \lim_{h \to 0^+} \frac{\parallel x(t+h) \parallel - \parallel x(t) \parallel}{h}$$
$$D_+ \parallel x(t) \parallel = \lim_{h \to 0^+} \frac{\parallel x(t) + hA(t)x(t) \parallel - \parallel x(t) \parallel}{h}$$
$$D_+ \parallel x(t) \parallel \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{\parallel x(t) \parallel \parallel I + hA(t) \parallel - \parallel x(t) \parallel}{h}$$

Donc :

$$D_+ \parallel x(t) \parallel \leq \mu(A(t)) \parallel x(t) \parallel \tag{1.3}$$

□

Proposition 5 *Toute solution $x(.)$ de (1.2) satisfait*

$$\parallel x(t) \parallel \leq \parallel x(t_0) \parallel \exp(\textstyle\int_{t_0}^{t} \mu(A(s)))\, ds, \quad \forall t \geq t_0$$

Démonstration. D'après le lemme 4 , on a $\frac{1}{\|x(t)\|} D_+ \parallel x(t) \parallel \leq \mu(A(t))$
Intégrons les deux cotés entre t_0 et t , c'est-à-dire,

$$\int_{t_0}^{t} \frac{D_+ ||x(s)||}{||x(s)||}\, ds \leq \int_{t_0}^{t} \mu(A(s))\, ds$$

Alors

$$\frac{||x(t)||}{||x(t_0)||} \leq \exp(\int_{t_0}^{t} \mu(A(s)))\, ds$$

Par suite

$$\parallel x(t) \parallel \leq \parallel x(t_0) \parallel \exp(\int_{t_0}^{t} \mu(A(s)))\, ds$$

□

comme conséquence, on a :

Corllaire 6 *Si* $\int_0^{\infty} \mu(A(t))dt$ *converge, alors , pour toute solution x(.) de (1.2) ,* $\| x(t) \|$ *converge aussi (ie a une limite finie quand* $t \to +\infty$*.)*

Théorème 7 *[8] Si* $(-1)^n det(A(t)) > 0 \ \forall t > 0$*, alors,* $\forall t > 0$ *A est stable si est seulement si* $\mu(A^{[2](t)}) < 0, \forall t > 0$

Exemple

Soit

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & -t^2 & -1 \\ -t & -t-1 & t \\ t^2 & 1 & -t^2-1 \end{pmatrix} t > 0$$

$det[\mathcal{A}] = -2t^5 - 3t^3 - 2t^2 - t - 1 < 0$

et

$$\mathcal{A}^{[2]} = \begin{pmatrix} -2-t & t & 1 \\ 1 & -2-t^2 & -t^2 \\ -t^2 & t & -2-t-t^2 \end{pmatrix}$$

Soit μ est la mesure de Lozinskii associé à L_∞ avec $||x|| = \sup\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$ alors :

$$\mu_\infty(\mathcal{A}^{[2]}) = \sup_i (a_{ii} + \sum_{i \neq j} |a_{ij}|)$$
$$= \sup_i (-2 - t + 1 + t, -2 - t^2 + 1 + t^2, -2 - t - t^2 + t + t^2)$$
$$= \sup_i (-1, -1, -2)$$

et comme $(-1)^3 det[\mathcal{A}] > 0$ alors $\mu_\infty([(A)^2]) = -1 < 0$

Alors A est stable d'après le théorème précédent.

Proposition 8 *[6] La mesure de Lozinskii peut être évaluée comme suit :*

$$\mu(A) = \inf\{C : D_+ \parallel x(t) \parallel \leq C \parallel x(t) \parallel \quad \textit{pour toute solution de } x' = A(t)x \ \} \quad (1.4)$$

Exemple

Soit

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

où a , d , c , d sont des constantes positives.

Si μ_p est la mesure de Lozinskii associée à la norme L_p , on a :

$\mu_1(A) = \max_j\{a_{jj} + \sum_{i\neq j} |a_{ij}|\} = \max\{a + c, d + b\}$
et
$\mu_\infty(A) = \max_i\{aii + \sum_{i\neq j} |a_{ij}|\} = \max\{a + b, d + c\}$

On utilise la définition (1.4), on calcule μ pour la norme suivante :

$$\| x \| = \begin{cases} | x_1 | + | x_2 | & \text{si signe } (x_1) = \text{signe } (x_2) \\ \max(| x_1 |, | x_2 |) & \text{si signe } (x_1) = \text{-signe } (x_2) \end{cases}$$

Cas1. $x_1, x_2 > 0$
Alors $||x|| = |x_1| + |x_2| = x_1 + x_2$. Ainsi ,

$$\begin{aligned} D_+||x|| &= x_1' + x_2' \\ &= (a - c)x_1 + (b + d)x_2 \\ &\leq \max\{a - c, b + d\}(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

Donc , $D_+||x|| \leq \max\{a - c, b + d\}||x||$ (1.5)

(1.5) aussi vérifiée pour $x_1, x_2 < 0$

Cas 2. $x_2 < 0 < x_1$. Alors $||x|| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.
Cas 2.A $|x_1| > |x_2|$
Dans ce cas $||x|| = |x_1| = x_1$ et :

$$\begin{aligned} D_+||x|| &= x_1' \\ &= ax_1 + bx_2 \\ &= a|x_1| - b|x_2| \\ &\leq a|x_1| \end{aligned}$$

Donc $D_+||x|| \leq a||x||$ (1.6)

(1.6) est vérifiée pour $x_1 < 0 < x_2$ et $|x_1| > |x_2|$

Cas 2.B $|x_1| < |x_2|$
Alors $||x|| = |x_2| = -x_2$ et :

$$\begin{aligned} D_+||x|| &= -x_2^{'} \\ &= cx_1 - dx_2 \\ &= c|x_1| + d|x_2| \\ &\leq (c+d)|x_2| \end{aligned}$$

Donc $D_+||x|| \leq (c+d)||x||$ (1.7)

(1.7) est vérifiée pour $x_1 < 0 < x_2$ et $|x_1| < |x_2|$
Les inégalités (1.5)-(1.7) impliquent $D_+||x|| \leq \max\{a, b+d, c+d\}||x||$.
Dans ce cas, $\mu(\mathcal{A}) = \max\{a, b+d, c+d\}$ est optimale par rapport à μ_1 et μ_∞.

1.7 Théorie de Li-Muldowney

Dans ce qui suit, nous rappelons l'approche géométrique de Li-Muldowney. Elle donne la stabilité globale d'un point d'équilibre par l'utilisation de la mesure de Lozinskii . Avant d'énnoncer ce théorème, nous avons besoin des définitions suivantes :

Considérons l'équation différentielle dans $\mathbf{R^n}$ définie par :

$$x^{'} = f(x) \tag{1.8}$$

où $f \in \mathbf{C^1}(D, \mathbf{R^n})$ avec D un ouvert de $\mathbf{R^n}$.
et $\bar{x}$ un point d'équilibre de (1.9) i.e $f(\bar{x}) = 0$

Rappelons que $\bar{x}$ est dit globalement stable s'il est stable dans$D$ et toutes les trajectoires dans D convergent vers $\bar{x}$.

On considère les hypothèses suivantes :

H1) D est simplement connexe(i.e. si toute courbe fermée dans D n'entoure que des points de D) ;

H2) Il existe un ensemble compact absorbant $K \subset D$ (une partie A d'un espace topologique E est dite absorbant si, pour chaque $x \in E$ et $\lambda \in K$ = (**R** où **C**) on a $x \in \lambda A$) ;

H3) $\bar{x}$ est l'unique équilibre de (1.8) à l'intérieur de D.

On définit une matrice B par :
$B := Q_f\, Q^{-1} + Q\dfrac{\partial f^{[2]}}{\partial x}\, Q^{-1}$
où : Q est une fonction matricielle de $\mathbf{C^1}$ sur son domaine de définition à déterminer.
Q_f donnée par :$(q_{ij})_f = (\dfrac{\partial q_{ij}(x)}{\partial x})^T f(x)$
et $\dfrac{\partial f}{\partial x}^{[2]}$ est la seconde matrice additive associée à la matrice Jacobienne $\dfrac{\partial f}{\partial x}$
Alors, on a :

Proposition 9 *Sous les hypothèses H_1) et H_2), si $\exists\, \delta > 0$ tel que*

$$\mu(B) \leq -\delta < 0$$

sur K, alors il n'existe pas un courbe fermé rectifiable simple dans D (i.e solution périodique, orbite homocline et cycle limite)

Théorème 10 *Supposons satisfaites les hypothèses $H1)H2)$ et $H3)$*
Alors $\bar{x}$ est globalement asymptotiquement stable si $\mu(B) < 0$.

Analyse d'un modèle épidémiologique de type SEIRS 2

Dans ce chapitre, on analyse un modèle épidémiologique de type $SEIRS$ représentant la propagation d'une maladie infectieuse, qui est décrit par :

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\lambda SI + \vartheta - \vartheta S + \delta R \\[2ex] \dfrac{dE}{dt} = \lambda IS - (\epsilon + \vartheta)E \\[2ex] \dfrac{dI}{dt} = \epsilon E - (\gamma + \vartheta)I \\[2ex] \dfrac{dR}{dt} = \gamma I - (\delta + \vartheta)R \end{cases} \tag{2.1}$$

La population totale est divisée en quatre compartiments :
S : la densité des individus susceptibles.
E : les exposés qui portent la maladie mais il n'en pas encore les signes.
I : la densité des individus infectés.
R : les réfractaires avec immunité temporaire et devient susceptible lorsque l'immunité est perdue.
δ : le taux de population réfractaire ayant perdue l'immunité.
ϵ : le taux de passage de compartiment E au compartiment I.
γ : le taux de population infecté devient réfractaire.
ϑ : le taux de mortalité naturelle et le taux de naissance qui sont supposés égaux.
Le terme de nouvelles infections est décrit par λIS.
Le schéma ci-dessus représente un modèle de type $SEIRS$.

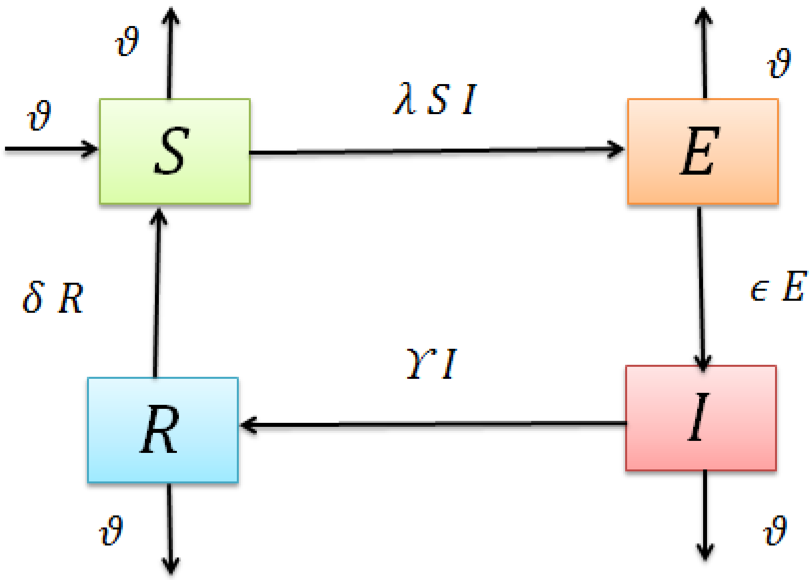


FIGURE 2.1 – *Diagramme de transfert pour le modèle SEIRS*

2.1 Existence locale de la solution

Étudions le modèle (2.1) dans la région :
Γ = { (S , E , I , R) $\in \mathbb{R}^4_+$, $S + E + I + R \leq 1\}$

Les fonctions du système sont des fonctions de $\mathbf{C}^\infty$, elles sont donc continues et localement lipschitziennes, alors d'après le théorème 1 (voir chapitre 1) il existe une solution maximale locale unique pour le système (2.1) dans Γ.

2.2 Existence globale de la solution

Proposition 11 *Pour toutes conditions initiales* $(S(0), E(0), I(0), R(0)) \in \Gamma$ *, le système (2.1) admet une solution unique globale définie dans* Γ*.*

Démonstration. La population totale donnée par :
$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$
Donc, $\dot{N}$ = $\dot{S}$ + $\dot{E}$+ $\dot{I}$+ $\dot{R}$
= $\vartheta - \vartheta N$
On normalise par ϑ, on a $\dot{N} = 1 - N$
En appliquant le facteur intégrant, on obtient :

$$e^t \dot{N} + Ne^t = e^t$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d}{dt}(Ne^t) = e^t$$

En intégrant entre 0 et t :

$$\int_0^t \frac{d}{dt} e^s N(s) ds = \int_0^t e^s ds$$

Ainsi,

$$e^t N(t) - N(0) = e^t - 1$$

par suite

$$N(t) = N(0)e^{-t} + 1 - e^{-t}$$

et donc :

$$N(t) = e^{-t}(N(0) - 1) + 1$$

Donc, le système (2.1) est dissipatif.
D'ou, l'existence globale de la solution du système (2.1) dans la région Γ.

□

2.3 Positivité de solution

Dans la dynamique des populations, on traite des fonctions qui représentent la densité des populations, les biomasses, qui n'ont de sens que si les trajectoires partent d'une condition initiale positive non nulle et restent positives.
Pour la positivité de la solution, utilisons la proposition 2 rappelée dans chapitre 1.
On a :
si $S = 0$, alors $\dot{S} = \vartheta + \delta R \geq 0$
si $E = 0$, $\dot{E} = \lambda IS \geq 0$
si $N = 0$, $\dot{N} = \epsilon E \geq 0$
si $R = 0$, $\dot{R} = I \geq 0$
On déduit que la région Γ est positivement invariante.

2.4 Calcul des points d'équilibre

Pour déterminer les points d'équilibre du système (2.1), on résoud le système suivant :

$$\begin{cases} -\lambda SI + \vartheta - \vartheta S + \delta R & = & 0 & (1) \\ \lambda IS - (\epsilon + \vartheta)E & = & 0 & (2) \\ \epsilon E - (\gamma + \vartheta)I & = & 0 & (3) \\ \gamma I - (\delta + \vartheta)R & = & 0 & (4) \end{cases}$$

La résolution de ce système donne :

a) Un équilibre sans maladie $P_0 = (1, 0, 0, 0)$
l'équilibre sans maladie est une solution constante du système , dans laquelle il n'y a pas de maladie.

b) Un équilibre endémique, en effet :

D'après (2) , on a : $S = \dfrac{(\epsilon + \vartheta)\, E}{\lambda\, I}$ (5)

Depuis (3) , on a : $E = \dfrac{(\gamma + \vartheta)\, I}{\epsilon}$ (6)

Depuis (4) , on a : $R = \dfrac{\gamma\, I}{\delta + \vartheta}$ (7)

En remplaçant (6) dans (5) , on a :

$$S = \frac{(\epsilon + \vartheta)(\gamma + \vartheta)}{\lambda\epsilon} \qquad (8)$$

et on remplaçant (7) et (8) dans (1), on a :

$$I \left[\frac{\delta\gamma}{\delta + \vartheta} - \frac{(\epsilon + \vartheta)(\gamma + \vartheta)}{\epsilon} \right] = \vartheta - \frac{\vartheta(\epsilon + \vartheta)(\gamma + \vartheta)}{\lambda\epsilon}$$

c'est-à-dire :

$$I = \frac{\vartheta \left(\dfrac{(\epsilon + \vartheta)(\gamma + \vartheta)}{\lambda\epsilon} - 1 \right)}{\dfrac{\delta\gamma}{\delta + \vartheta} - \dfrac{(\epsilon + \vartheta)(\gamma + \vartheta)}{\epsilon}}$$

$$I = \frac{\vartheta \left(1 - \dfrac{(\epsilon + \vartheta)(\gamma + \vartheta)}{\lambda\epsilon} \right)}{(\gamma + \vartheta)(\epsilon + \vartheta + \delta)) + \epsilon\delta}$$

On conclut que l'équilibre endémique du modèle (2.1) est l'équilibre P^* avec les composantes :

$$\mathrm{S}^* = \frac{(\epsilon + \vartheta)(\gamma + \vartheta)}{\lambda\epsilon}$$

$$\mathrm{E}^* = \frac{(\gamma + \vartheta)\, I^*}{\epsilon}$$

$$\mathrm{I}^* = \frac{\vartheta \left(1 - \dfrac{(\epsilon + \vartheta)(\gamma + \vartheta)}{\lambda\epsilon} \right)}{(\gamma + \vartheta)(\epsilon + \vartheta + \delta) + \epsilon\delta}$$

$$\mathrm{R}^* = \frac{\gamma\, I^*}{\delta + \vartheta}$$

2.4.1 Calcul de R_0 pour le système (2.1)

En se basant sur le rappel proposé en chapitre 1 et en appliquant la méthode de "next generation", on a :
dans notre cas, les matrices F et V sont définies comme suit, respectivement :

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \lambda SI \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{V}^{+} = \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon E \\ \delta R + \vartheta \\ \gamma I \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V}^{-} = \begin{pmatrix} (\epsilon + \vartheta)E \\ (\gamma + \vartheta)I \\ \lambda SI + \vartheta S \\ (\delta + \vartheta)R \end{pmatrix}$$

Par suite

$$D\mathcal{F}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$D\mathcal{V}(x_0) = \begin{pmatrix} -(\epsilon + \vartheta) & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & -(\gamma + \vartheta) & 0 & 0 \\ 0 & & -\lambda & \delta - \vartheta \\ 0 & \gamma & -(\delta + \vartheta) & \end{pmatrix}$$

Donc

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$V = \begin{pmatrix} -(\epsilon + \vartheta) & 0 \\ \epsilon & -(\gamma + \vartheta) \end{pmatrix}$$

Calculons $F\,V^{-1}$

$det(V) = (\epsilon + \vartheta)(\gamma + \vartheta)$

$$Com(V) = \begin{pmatrix} -(\gamma+\vartheta) & -\epsilon \\ 0 & -(\epsilon+\vartheta) \end{pmatrix}$$

Puis ,

$${}^{t}Com(V) = \begin{pmatrix} -(\gamma+\vartheta) & 0 \\ -\epsilon & -(\epsilon+\vartheta) \end{pmatrix}$$

Donc,

$$V^{-1} = \frac{1}{det(V)}\,{}^{t}Com(V)$$

$$= \frac{-1}{(\epsilon+\vartheta)(\gamma+\vartheta)} \begin{pmatrix} \gamma+\vartheta & 0 \\ \epsilon & \epsilon+\vartheta \end{pmatrix}$$

D'ou :

$$FV^{-1} = \frac{-1}{(\epsilon+\vartheta)(\gamma+\vartheta)} \begin{pmatrix} \lambda\epsilon & \lambda(\epsilon+\vartheta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a : $R_0 = \rho(-F\,V^{-1})$

Alors $R_0 = \dfrac{\lambda\epsilon}{(\epsilon+\vartheta)(\gamma+\vartheta)}$

Réécrivons les composantes du point d'équilibre endémique en fonction de R_0 devient :

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{(\epsilon+\vartheta)\,(\gamma+\vartheta)}{\lambda\epsilon} \\ E^* &= \frac{(\gamma+\vartheta)\,I^*}{\epsilon} \\ I^* &= \frac{\epsilon(\delta+\vartheta)}{(\gamma+\vartheta)(\epsilon+\vartheta+\delta))+\epsilon\delta}\,\frac{R_0-1}{R_0} \\ R^* &= \frac{\gamma I^*}{\gamma+\vartheta} \end{aligned}$$

L'équilibre endémique $P^* = (S^*, E*, I*, R*)$ existe si $R_0 > 1$.

2.5 La stabilité locale

2.5.1 Stabilité locale du point d'équilibre sans maladie (DFE)

Proposition 12 *le point d'équilibre sans maladie* $P_0 = (1,0,0,0)$ *est localement asymptotiquement stable si* $R_0 < 1$ *et instable si* $R_0 > 1$

Démonstration. la matrice Jacobienne du système (2.1) est :

$$\mathcal{J}(S,E,I,R) = \begin{pmatrix} -\lambda I - \vartheta & 0 & -\lambda S & \delta \\ \lambda I & -(\epsilon+\vartheta) & \lambda S & 0 \\ 0 & \epsilon & -(\gamma+\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\delta+\vartheta) \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobienne au point P_0 est :

$$\mathcal{J}(P_0) = \begin{pmatrix} -\vartheta & 0 & -\lambda & \delta \\ 0 & -(\epsilon+\vartheta) & \lambda & 0 \\ 0 & \epsilon & -(\gamma+\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\delta+\vartheta) \end{pmatrix}$$

Cherchons les valeurs propres de $\mathcal{J}(P_0)$, le déterminant suivant doit être nul :

$$\begin{vmatrix} -\vartheta-\mu & 0 & -\lambda & \delta \\ 0 & -(\epsilon+\vartheta+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & \epsilon & -(\gamma+\vartheta+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\delta+\vartheta+\mu) \end{vmatrix} = 0$$

Par suite :

$$-(\vartheta+\mu)\begin{vmatrix} -(\epsilon+\vartheta+\mu) & \lambda & 0 \\ \epsilon & -(\gamma+\vartheta+\mu) & 0 \\ 0 & \gamma & -(\delta+\vartheta+\mu) \end{vmatrix} = 0$$

Puis :

$$(\vartheta+\mu)(\delta+\vartheta+\mu)\begin{vmatrix} -(\epsilon+\vartheta+\mu) & \lambda \\ \epsilon & -(\gamma+\vartheta+\mu) \end{vmatrix}=0$$

On trouve :
$(\vartheta+\mu)(\delta+\vartheta+\mu)[(\epsilon+\vartheta+\mu)(\gamma+\vartheta+\mu)-\lambda\epsilon]=0$

Donc : $\mu_1=-\vartheta$, $\mu_2=-(\delta+\vartheta)$
et μ_3, μ_4 sont données par :

$$\mu^2+\mu(\epsilon+\gamma+2\vartheta)+(\epsilon+\vartheta)(\gamma+\vartheta)-\lambda\epsilon=0 \tag{2.-3}$$

Posons :

$$\begin{aligned} q_1 &= \epsilon+\gamma+2\vartheta \\ q_2 &= (\epsilon+\vartheta)(\gamma+\vartheta)-\lambda\epsilon \end{aligned}$$

Donc (2.3) devient

$$\mu^2+q_1\mu+q_2=0$$

Le discriminant :

$$\Delta = q_1^2-4q_2$$

a) Si $\Delta \leq 0$ alors on a deux valeurs propres à partie réel négative, donc on a la stabilité locale de l'équilibre sans maladie P_0.

b) Si $\Delta > 0$ on a :

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \frac{-q_1}{2}-\frac{\sqrt{q_1^2-4q_2}}{2} \\ \mu_4 &= \frac{-q_1}{2}+\frac{\sqrt{q_1^2-4q_2}}{2} \end{aligned}$$

On remarque que le signe de $\mu_{3,4}$ dépend du signe de q_2

1er cas Si $q_2 > 0$ i,e $(\epsilon + \vartheta)(\gamma + \vartheta) - \lambda\epsilon > 0$ (ceci équivalent à $R_0 < 1$)
Alors

$$\begin{aligned} \mu_3 &< \frac{-q_1}{2} - \frac{\sqrt{q_1^2}}{2} = -q_1 < 0 \\ \mu_4 &< \frac{-q_1}{2} + \frac{\sqrt{q_1^2}}{2} = 0 \end{aligned}$$

Donc, toutes les valeurs propres sont à partie réelles négatives.

2ème cas Si $q_2 < 0$ c-à-d $(\epsilon + \vartheta)(\gamma + \vartheta) - \lambda\epsilon < 0$ ($R_0 > 1$) alors

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \frac{-q_1}{2} - \frac{\sqrt{q_1^2 - 4q_2}}{2} < 0 \\ et \qquad \mu_4 &= \frac{-q_1}{2} + \frac{\sqrt{q_1^2 - 4q_2}}{2} > 0 \end{aligned}$$

Il existe une valeur propre qui admet une partie réelle positive.

Conclusion L'équilibre sans maladie P_0 est localement asymptotiquement stable si $R_0 < 1$ et est instable si $R_0 > 1$. □

2.5.2 Stabilité locale de l'équilibre endémique P^*

Proposition 13 *Le point d'équilibre endémique P^* localement asymptotiquement stable si $R_0 > 1$.*

Démonstration. Pour étudier la stabilité du point endémique , on réduit la dimension du système, puisque $R = 1 - S - E - I$, le système (2.1) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\lambda SI + \vartheta - \vartheta S + \delta(1 - S - E - I) \\ \\ \dfrac{dE}{dt} = \lambda IS - (\epsilon + \vartheta)E \\ \\ \dfrac{dI}{dt} = \epsilon E - (\gamma + \vartheta)I \end{cases} \tag{2.-2}$$

La matrice Jacobienne associée est :

$$\mathcal{J}(S, E, I) = \begin{pmatrix} -\lambda I - \vartheta - \delta & -\delta & -(\lambda S + \delta) \\ \\ \lambda I & -(\epsilon + \vartheta) & \lambda S \\ \\ 0 & \epsilon & -(\gamma + \vartheta) \end{pmatrix}$$

Pour réécrire $\mathcal{J}$ sous une forme triangulaire, utilisons la méthode de Gauss, Rappelons que si $l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, l_3^{(1)}$ désignent les lignes de la matrice $\mathcal{J}$, et $l_2^{(2)}, l_3^{(2)}$ les nouvelles lignes, alors

$$l_2^{(2)} = l_2^{(1)} + \frac{\lambda I}{\lambda I + \vartheta + \delta} l_1^{(1)}$$
$$l_3^{(2)} = l_3^{(1)}$$

Donc $\mathcal{J}$ se réécrit

$$\mathcal{J}(S,E,I) = \begin{pmatrix} -(\lambda I + \vartheta + \delta) & -\delta & -(\lambda S + \delta) \\ 0 & -(\epsilon + \vartheta) - \dfrac{\lambda I \delta}{\lambda I + \vartheta + \delta} & \lambda S - \dfrac{\lambda I(\lambda S + \delta)}{\lambda I + \vartheta + \delta} \\ 0 & \epsilon & -(\gamma + \vartheta) \end{pmatrix}$$

Après, on considère : $l_3^{(3)} = l_3^{(2)} + \dfrac{\epsilon(\lambda I + \vartheta + \delta)}{(\epsilon + \vartheta)(\lambda I + \vartheta + \delta) + \lambda I \delta} l_2^{(2)}$
On obtient à la fin :

$$\mathcal{J}(S^*,E^*,I^*) = \begin{pmatrix} -(\lambda I^* + \vartheta + \delta) & -\delta & -(\lambda S^* + \delta) \\ 0 & -(\epsilon + \vartheta) - \dfrac{\lambda I^* \delta}{\lambda I^* + \vartheta + \delta} & \lambda S^* - \dfrac{\lambda I^*(\lambda S + \delta)}{\lambda I^* + \vartheta + \delta} \\ 0 & 0 & -\dfrac{\lambda I^* \delta(\gamma + \vartheta + \lambda S)}{(\epsilon + \vartheta)(\lambda I^* + \delta + \vartheta) + \lambda I^* \delta} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\mathcal{J}(S^*,E^*,I^*)$ sont :

$$\mu_1 = -(\lambda\, I^* + \vartheta + \delta)$$

$$\mu_2 = -(\epsilon + \vartheta) - \frac{\lambda\, I^* \delta}{\lambda\, I^* + \vartheta + \delta}$$

$$\mu_3 = -\frac{\lambda I^*\, \delta\, (\gamma + \vartheta + \lambda S^*)}{(\epsilon + \vartheta)\, (\lambda\, I^* + \delta + \vartheta) + \lambda I^*\, \delta}$$

avec :$I^* = \dfrac{\epsilon(\delta + \vartheta)}{(\gamma + \vartheta)(\epsilon + \vartheta + \delta)) + \epsilon\delta} \dfrac{(R_0 - 1)}{R_0}$

donc on conclut que μ_1, μ_2 et μ_3 sont négatives.

□

2.6 Persistence du modèle (2.2)

D'après les résultats obtenus précédent, on a que pour $R_0 > 1$, le système (2.2) admet un seul point d'équilibre endémique localement asymptotiquement stable et un point d'équilibre sans maladie P_0 instable. L'instabilité de ce point P_0 avec $p_0 \in \partial D$ implique alors la persistence uniforme de (2.3) d'après [2] et donc $\exists\ \epsilon > 0$, $\liminf_{t\to+\infty} S(t) > \epsilon$, $\liminf_{t\to+\infty} E(t) > \epsilon$, $\liminf_{t\to+\infty} I(t) > \epsilon$, $\liminf_{t\to+\infty}(1 - S(t) - E(t) - I(t)) > \epsilon$.

Analyse de la stabilité globale du point endémique 3

Dans plusieurs modèles épidémiologiques, on a utilisé la mesure de Lozinskii pour prouver la stabilité globale du point endémique. Pour cela, on a besoin de trouver une norme appropriée, qui permet d'appliquer les résultats du théorme rappelé dans le chapitre 1.

3.1 Stratégie pour construire une norme

Dans cette approche, on construit en premier lieu une norme orthant par orthant et ensuite dans chaque orthant, on cherche une semi-norme qui satisfait :

$$D_{+}||x(t)|| \leq \tau(t)||x(t)|| \tag{3.1}$$

U désigne une semi-norme et V est une norme.

Etape1 Considérons toutes les normes de la forme :

$$||x||_i = |x_{i1}| + ... + |x_{ik}| \tag{3.2}$$

avec : $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$
Dans chaque orthant θ, on détermine si l'une de ces semi-normes satisfont (3.1) sur θ où sur un cône $\tilde{C} = \{x \in \theta : |c_i| + ... + |x_{ir}| \geq |x_{j1}| + ... + |x_{jn}|\}$ qui est contenue dans θ.

Etape2 Soit $U(x) = \max_{j=1,...,m}\{||x||_{ij}\}$ ou $||.||_{ij}$ est de la forme (3.2) telle que chacun des $x_1, ..., x_n$ doit apparaitre dans la définition de U. On place toutes les $U(x)$ dans un ensemble noté par S_θ, en particulier $S_{\theta+++}$ désigne S_θ correspondant à toutes les composantes positives. $S_{\theta+-+}$ désigne S_θ correspondant à la première composante et la troisième sont positives et la deuxième est négative, et ainsi de suite.

Etape3 On détermine si on peut choisir pour chaque orthant θ, une semi-norme U_θ dans S_θ telle que la fonction définie par $V|_\theta = U_\theta$ est continue, il suffit de montrer que si x sur le bord de deux où plus des orthants, alors la définition de V sur chaque ces orthants donne la même valeur.

3.2 Étude de stabilité globale de l'équilibre endémique du système (2.1) par l'approche géométrique

Rappelons que $R = 1 - S - E - I$, et donc le système (2.1) se réduit à un système du dimension 3 donné par :

$$(2.2)\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\lambda SI + \vartheta - \vartheta S + \delta(1 - S - E - I) \\[2ex] \dfrac{dE}{dt} = \lambda IS - (\epsilon + \vartheta)E \\[2ex] \dfrac{dI}{dt} = \epsilon E - (\gamma + \vartheta)I \end{cases}$$

Remarque :
$\Gamma = \{(S, E, I) \in \mathbf{R}^3_+ : 0 \leq S + E + I \leq 1\}$ est compacte, simplement connexe.

Pour l'étude de la stabilité globale de l'équilibre endémique, il suffit de trouver une norme $||.||$ dans $\mathbf{R}^3$ et une matrice fonctionnelle $Q(.)3 \times 3$ tel que $\exists\, \delta > 0$, tel que $\mu(\mathcal{B}) \leq -\delta < 0$ avec $\mathcal{B} := Q_f\, Q^{-1} + Q\dfrac{\partial f^{[2]}}{\partial x}\, Q^{-1}$

Dans notre cas, $\dfrac{\partial f^{[2]}}{\partial x} = \mathcal{J}^{[2]}$
Soit $Q(S, E, I) = diag(1, \dfrac{E}{I}, \dfrac{E}{I})$
Sa matrice inverse est définie comme suit :
$Q^{-1} = diag(1, \dfrac{I}{E}, \dfrac{I}{E})$
$Q_f\, Q^{-1}$, avec $Q_f = diag(0, (\dfrac{E}{I})_f, (\dfrac{E}{I})_f)$, on obtient :
$Q_f\, Q^{-1} = diag(0, \dfrac{I}{E}(\dfrac{E}{I})_f, \dfrac{I}{E}(\dfrac{E}{I})_f)$

La seconde matrice additive de $\mathcal{J}^{[2]}$ associée à (2.2) est donnée par :

$$\mathcal{J}^{[2]} = \begin{pmatrix} -(\lambda I + 2\vartheta + \delta + \epsilon) & \lambda S & \lambda S + \delta \\ \epsilon & -(\lambda I + \delta + 2\vartheta + \gamma) & -\delta \\ 0 & \lambda I & -(\epsilon + \gamma + 2\vartheta) \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$Q\mathcal{J}^{[2]}Q^{-1} = \begin{pmatrix} -(\lambda I + 2\vartheta + \delta + \epsilon) & \dfrac{\lambda IS}{E} & \dfrac{(\lambda S + \delta)I}{E} \\ \dfrac{\epsilon E}{I} & -(\lambda I + 2\vartheta + \delta + \gamma) & -\delta \\ 0 & \lambda I & -(\epsilon + \gamma + 2\vartheta) \end{pmatrix}$$

On a $\mathcal{B} := Q_f\, Q^{-1} + Q\mathcal{J}^{[2]}\, Q^{-1}$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -(\lambda I + 2\vartheta + \delta + \epsilon) & \dfrac{\lambda IS}{E} & \dfrac{(\lambda S + \delta)I}{E} \\ \dfrac{\epsilon E}{I} & -(\lambda I + 2\vartheta + \delta + \gamma) + \dfrac{I}{E}\,(\dfrac{E}{I})_f & -\delta \\ 0 & \lambda I & -(\epsilon + \gamma + 2\vartheta) + \dfrac{I}{E}\,(\dfrac{E}{I})_f \end{pmatrix}$$

Le problème se ramène à trouver une norme de Lozinskii pour le système : $\dot{Z} = \mathcal{B}\ Z \ \ , Z_j \quad j = 1, 2, 3$

On va construire une norme tel que $D_+||Z||_i \leq 0$ pour $i = 1, ..., 7$ sur chaque orthant.

Cas1 Soit θ_{+++} i.e correspondant à Z_1, Z_2, Z_3 , alors on a 7 possibilités

— $||Z||_1 = |Z_1| = Z_1$

$$\begin{aligned} D_+||Z||_1 &= Z_1' \\ D_+||Z||_1 &= -(\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta)|Z_1| + \frac{\lambda IS}{E}|Z_2| + \frac{(\lambda S + \delta)I}{E}|Z_3| \\ &= -(\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta)|Z_1| + \frac{\lambda IS}{E}(|Z_2| + |Z_3|) + \frac{\delta I}{E}|Z_3| \end{aligned}$$

Si $|Z_2| + |Z_3| \leq |Z_1|$

Alors,

$$D_+||Z||_1 \leq \left\{ \frac{(\lambda S + \delta)I}{E} - (\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta) \right\} ||Z||_1 \qquad (3.3)$$

— $||Z||_2 = |Z_2|$

$$\begin{aligned}
D_+||Z||_2 &= Z_2^{'} \\
D_+||Z||_2 &= \frac{\epsilon E}{I}|Z_1| + (\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\lambda I + \gamma + \delta + 2\vartheta))|Z_2| - \delta|Z_3| \\
&\leq \frac{\epsilon E}{I}|Z_1| + \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\lambda I + \gamma + \delta + 2\vartheta)\right]|Z_2|
\end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f &= \frac{E^{'}}{E} - \frac{I^{'}}{I} \\
&= \frac{\lambda IS}{E} - \frac{\epsilon E}{I} - \epsilon + \gamma
\end{aligned}$$

donc

$$D_+||Z||_2 \leq \frac{\epsilon E}{I}|Z_1| + \left[\frac{\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \delta + 2\vartheta + \epsilon + \delta)\right]|Z_2|$$

Et si, $|Z_1| \leq |Z_2|$, alors

$$\mathrm{D}_+||Z||_2 \leq \left\{\frac{\lambda IS}{E} - (\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta)\right\}||Z||_2$$

— $||Z||_3 = |Z_3|$

$$\begin{aligned}
D_+||Z||_3 &= Z_3^{'} \\
D_+||Z||_3 &= \lambda I|Z_2| + \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\epsilon + \gamma + 2\vartheta)\right]|Z_3| \\
&= \lambda I|Z_2| + \left[\frac{\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta)\right]|Z_3|
\end{aligned}$$

si $|Z_2| \leq |Z_3|$ alors

$$\mathrm{D}_+||Z||_3 \leq \left\{\frac{\lambda IS}{E} + \lambda I - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta)\right\}||Z||_3$$

— $||Z||_4 = |Z_1| + |Z_2|$

$$D_+||Z||_4 = Z_1^{'} + Z_2^{'}$$
$$D_+||Z||_4 = \left[\frac{\epsilon E}{I} - (\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta)\right]|Z_1| + [\frac{\lambda IS}{E} + \frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta)]|Z_2|$$
$$+ [\frac{(\lambda S + \delta)I}{E} - \delta]|Z_3|$$
$$= \left[\frac{\epsilon E}{I} - (\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta)\right]|Z_1| + \left[2\frac{\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \delta + \epsilon + 2\vartheta)\right]|Z_2|$$
$$+ \left[\frac{(\lambda S + \delta)I}{E} - \delta\right]|Z_3|$$

Si $|Z_3| \leq |Z_1| + |Z_2|$ alors

$$\mathrm{D}_+||Z||_4 \leq \max\{\frac{(\lambda S + \delta)I}{E} + \frac{\epsilon E}{I} - (\lambda I + \epsilon + 2\vartheta), \frac{2\lambda IS}{E} + \frac{(\lambda S + \delta)I}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \epsilon + 2\vartheta)\}||Z||_4$$

— $||Z||_5 = |Z_1| + |Z_3|$

$$D_+||Z||_5 = Z_1^{'} + Z_3^{'}$$
$$D_+||Z||_5 = [-\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta]|Z_1| + \left[\frac{\lambda IS}{E} + \lambda I\right]|Z_2|$$
$$+ \left[\frac{(\lambda S + \delta)I}{E} + \frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\epsilon + \gamma + 2\vartheta)\right]|Z_3|$$
$$= -[\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta]|Z_1| + \left[\frac{\lambda IS}{E} + \lambda I\right]|Z_2|$$
$$+ \left[\frac{(\lambda S + \delta)I}{E} + \frac{\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta)\right]|Z_3|$$

si $|Z_2| \leq |Z_1| + |Z_3|$, alors

$$\mathrm{D}_+||Z||_5 \leq \max\{\frac{\lambda IS}{E} - (\epsilon + \delta + 2\vartheta), \frac{2\lambda IS}{E} + \frac{(\lambda S + \delta)I}{E} + \lambda I - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta)\}||Z||_5$$

— $||Z||_6 = |Z_2| + |Z_3|$

$$D_+||Z||_6 = Z_2' + Z_3'$$

$$\begin{aligned} D_+||Z||_6 &= \frac{\epsilon E}{I}|Z_1| + \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\delta+\gamma+2\vartheta)\right]|Z_2| \\ &+ \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\delta+\epsilon+\gamma+2\vartheta)\right]|Z_3| \\ &= \frac{\epsilon E}{I}|Z_1| + \left[\frac{\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I}+\epsilon+\delta+2\vartheta)\right]|Z_2| \\ &+ \left[\frac{\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I}+2\epsilon+2\vartheta+\delta)\right]|Z_3| \end{aligned}$$

si $|Z_1| \leq |Z_2| + |Z_3|$, alors

$$D_+||Z||_6 \leq \left\{\frac{\lambda IS}{E} - (\epsilon+\delta+2\vartheta)\right\}||Z||_6 \tag{3.4}$$

— $||Z||_7 = |Z_1| + |Z_2| + |Z_3|$

$$D_+||Z||_7 = Z_1' + Z_2' + Z_3'$$

$$\begin{aligned} D_+||Z||_7 &= \left[\frac{\epsilon E}{I} - (\lambda I+\epsilon+\delta+2\vartheta)\right]|Z_1| + \left[\frac{\lambda IS}{E} + \frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\delta+\gamma+2\vartheta)\right]|Z_2| + \\ &\left[\frac{(\lambda S+\delta)I}{E} + \frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\epsilon+\delta+\gamma+2\vartheta)\right]|Z_3| \\ &= \left[\frac{\epsilon E}{I} - (\lambda I+\epsilon+\delta+2\vartheta)\right]|Z_1| + \left[\frac{2\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I}+2\vartheta+\epsilon+\delta)\right]|Z_2| \\ &+ \left[\frac{2\lambda IS}{E} + \frac{\delta I}{E} - (\frac{\epsilon E}{I}+2\vartheta+2\varepsilon+\delta)\right]|Z_3| \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_+||Z||_7 \leq \max\{&\frac{\epsilon E}{I} - (\lambda I+\epsilon+\delta+2\vartheta), \frac{2\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I}+2\vartheta+\epsilon+\delta), \\ &\frac{2\lambda IS}{E} + \frac{\delta I}{E} - (\frac{\epsilon E}{I}+2\vartheta+2\varepsilon+\delta)\}||Z||_7 \end{aligned} \tag{3.5}$$

D'après les équations (3.3), (3.4) et (3.5)
supposons que les conditions suivantes sont vérifiés :

C1. $\lambda \sup_{t\geq 0}||\frac{SI}{E}|| + \delta \sup_{t\geq 0}||\frac{I}{E}|| - (\lambda I+\epsilon+\delta+2\vartheta) < 0$

C2. $\lambda \sup_{t\geq 0}||\frac{IS}{E}|| - (\epsilon+\delta+2\vartheta) < 0$

C3. $\epsilon \sup_{t\geq 0}||\frac{E}{I}|| - (\lambda \sup_{t\geq 0}||I|| + \epsilon+\delta+2\vartheta) < 0$

avec ces conditions, les normes $||Z||_1 = |Z_1| et ||Z_6|| = |Z_2| + |Z_3|$ satisfont $D_+||Z||_i \leq 0$. Alors le choix pour U tel que $U(x) \neq 0$ (comme cite dans la stratégie) sont : $U(x) = \max\{||Z||_1, ||Z_6||\}$, on met tous dans ensemble noté $S_{\theta+++}$
Donc :

$$S_{\theta+++} = \{\max(||Z||_1, ||Z||_6)\}$$

Cas2 Passons à θ_{+-+}

— $||Z||_1 = |Z_1|$

$$D_+||Z||_1 = Z_1^{'}$$

$$\begin{aligned} D_+||Z||_1 &= -(\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta)|Z_1| - \frac{\lambda IS}{E}|Z_2| + \frac{(\lambda S + \delta)I}{E}|Z_3| \\ &\leq -(\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta)|Z_1| + \frac{(\lambda S + \delta)I}{E}|Z_3| \end{aligned}$$

Si $|Z_3| \leq |Z_1|$,alors,

$$D_+||Z||_1 \leq \left\{ \frac{(\lambda S + \delta)I}{E} - (\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta) \right\} ||Z||_1 \tag{3.6}$$

— $||Z||_2 = |Z_2|$

$$\begin{aligned} D_+||Z||_2 &= -Z_2^{'} \\ D_+||Z||_2 &= -\frac{\epsilon E}{I}|Z_1| + \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta) \right] |Z_2| + \delta|Z_3| \\ &= -\frac{\epsilon E}{I}|Z_1| + \left[\frac{\lambda SI}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \delta + \epsilon + 2\vartheta) \right] |Z_2| + \delta|Z_3| \end{aligned}$$

si $|Z_3| \leq |Z_2|$, alors

$$D_+||Z||_2 \leq \left\{ \frac{\lambda SI}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + 2\vartheta + \epsilon) \right\} ||Z||_2 \tag{3.7}$$

— $||Z||_3 = |Z_3|$

$$\begin{aligned} D_+||Z||_3 &= Z_3^{'} \\ D_+||Z||_3 &= -\lambda I|Z_2| + (\frac{I}{E}(\frac{E}{I}_f) - (\epsilon + \gamma + 2\vartheta))|Z_3| \\ &= -\lambda I|Z_2| + \left[\frac{\lambda SI}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta) \right] |Z_3| \\ &\leq \left[\frac{\lambda SI}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta) \right] |Z_3| \end{aligned}$$

alors

$$D_+||Z||_3 \leq \left\{ \frac{\lambda SI}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta) \right\} ||Z||_3 \tag{3.8}$$

— $||Z||_4 = |Z_1| + |Z_2|$

$$D_+||Z||_4 = Z_1^{'} - Z_2^{'}$$

$$\begin{aligned} D_+||Z||_4 = &-\left[\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \delta + \epsilon + 2\vartheta\right]|Z_1| + \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\frac{\lambda IS}{E} + \lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta)\right]|Z_2| \\ &+ \left[\frac{(\lambda S + \delta)I}{E} + \delta\right]|Z_3| \\ = &-(\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \delta + \epsilon + 2\vartheta)|Z_1| - \left[\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta\right]|Z_2| \\ &+ \left[\frac{(\lambda S + \delta)I}{E} + \delta\right]|Z_3| \end{aligned}$$

Si, $|Z_3| \leq |Z_1| + |Z_2|$, alors

$$D_+||Z||_4 \leq \left\{\frac{(\lambda S + \delta)I}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \epsilon + 2\vartheta)\right\}||Z||_4 \tag{3.9}$$

— $||Z||_5 = |Z_1| + |Z_3|$

$$D_+||Z||_5 = Z_1 + Z_3$$

$$\begin{aligned} D_+||Z||_5 = &-[\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta]|Z_1| - \left[\frac{\lambda IS}{E} + \lambda I\right]|Z_2| \\ &+ \left[\frac{(\lambda S + \delta)I}{E} + \frac{I}{E}(\frac{E}{I}_f)) - (\epsilon + \gamma + 2\vartheta)\right]|Z_3| \\ \leq &-[\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta]|Z_1| + \left[\frac{(\lambda S + \delta)I}{E} + \frac{\lambda SI}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta)\right]|Z_3| \end{aligned}$$

Donc , $D_+||Z||_5 \leq \max\left\{-(\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta), \frac{(\lambda S + \delta)I}{E} + \frac{\lambda SI}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta)\right\}||Z||_5$

— $||Z||_6 = |Z_2| + |Z_3|$

$$D_+||Z||_6 = -Z_2^{'} + Z_3^{'}$$

$$\begin{aligned} D_+||Z||_6 = &-\frac{\epsilon E}{I}|Z_1| + \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (2\lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta)\right]|Z_2| \\ &+ \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f + \delta - (\epsilon + \gamma + 2\vartheta)\right]|Z_3| \\ \leq &\left[\frac{\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \epsilon + \delta + 2\vartheta + 2\lambda I)\right]|Z_2| \\ &+ \left[\frac{\lambda IS}{E} + \delta - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta)\right]|Z_3| \end{aligned}$$

Alors,

$$D_+||Z||_6 \leq \max\{\frac{\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \epsilon + \delta + 2\vartheta + 2\lambda I) \\ , \frac{\lambda IS}{E} + \delta - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta)\}||Z||_6 \quad (3.10)$$

— $||Z||_7 = |Z_1| + |Z_2| + |Z_3|$

$$\begin{aligned} D_+||Z||_7 &= Z_1^{'} - Z_2^{'} + Z_3^{'} \\ D_+||Z||_7 &= -\left[\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta\right]|Z_1| + \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\frac{\lambda SI}{E} + \delta + \gamma + 2\vartheta + 2\lambda I)\right]|Z_2| \\ &+ \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f + \frac{(\lambda S + \delta)I}{E} + \delta - (\epsilon + \gamma + 2\vartheta)\right]|Z_3| \\ &= -\left[\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta\right]|Z_1| - \left[\frac{\epsilon E}{I} + 2\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta\right]|Z_2| \\ &+ \left[\frac{(\lambda S + \delta)I}{E} + \frac{\lambda IS}{E} + \delta - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta)\right]|Z_3| \end{aligned}$$

Ainsi ,

$$D_+||Z||_7 \leq \max\{-(\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta), \frac{(\lambda S + \delta)I}{E} + \frac{\lambda IS}{E} + \delta - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta)\}||Z||_7$$

D'après les équations (3.6)-(3.10), les normes $||Z||_1, ||Z||_2, ||Z||_3, ||Z||_4, ||Z||_6$ satisfont $D_+||Z||_i \leq 0$, alors :

$$S_{\theta+-+} = \{\max(||Z||_1, ||Z||_2, ||Z||_3), \max(||Z||_3, ||Z||_4), \\ \max(||Z||_1, ||Z||_6), \max(||Z||_4, ||Z||_6)\}$$

Cas3 Soit θ_{++-}

— $||Z||_1 = |Z_1|$

$$\begin{aligned} D_+||Z||_1 &= Z_1^{'} \\ D_+||Z||_1 &= -[\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta]|Z_1| + \frac{\lambda IS}{E}|Z_2| - \frac{(\lambda S + \delta)I}{E}|Z_3| \\ &\leq -[\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta]|Z_1| + \frac{\lambda IS}{E}|Z_2| \end{aligned}$$

si $|Z_2| \leq |Z_1|$, alors

$$D_+||Z||_1 \leq \{\frac{\lambda IS}{E} - (\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta)\}||Z||_1$$

— $||Z||_2 = |Z_2|$

$$\begin{aligned}
D_+||Z||_2 &= Z_2^{'} \\
D_+||Z||_2 &= \frac{\epsilon E}{I}|Z_1| + \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta)\right]|Z_2| + \delta|Z_3| \\
&= \frac{\epsilon E}{I}|Z_1| + (\frac{\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \delta + \epsilon + 2\vartheta))|Z_2| + \delta|Z_3|
\end{aligned}$$

si $|Z_1| + |Z_3| \leq |Z_2|$ donc,

$$D_+||Z||_2 \leq \left\{\frac{\lambda IS}{E} - (\lambda I + 2\vartheta + \epsilon)\right\}||Z||_2$$

— $||Z||_3 = |Z_3|$

$$\begin{aligned}
D_+||Z||_3 &= -Z_3^{'} \\
D_+||Z||_3 &= -\lambda I|Z_2| + \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\epsilon + \gamma + 2\vartheta)\right]|Z_3| \\
&= -\lambda I|Z_2| + \left[\frac{\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta)\right]|Z_3|
\end{aligned}$$

ainsi,

$$\mathrm{D}_+||Z||_3 \leq \left\{\frac{\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta)\right\}||Z||_3$$

— $||Z||_4 = |Z_1| + |Z_2|$

$$\begin{aligned}
D_+||Z||_4 &= Z_1^{'} + Z_2^{'} \\
D_+||Z||_4 &= \left[\frac{\epsilon E}{I} - (\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta)\right]|Z_1| + \left[\frac{\lambda IS}{E} + \frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta)\right]|Z_2| \\
&\quad + \left[\delta - \frac{(\lambda S + \delta)I}{E}\right]|Z_3| \\
&\leq \left[\frac{\epsilon E}{I} - (\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta)\right]|Z_1| + \left[\frac{2\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \delta + \epsilon + 2\vartheta)\right]|Z_2| + \delta|Z_3|
\end{aligned}$$

si $|Z_3| \leq |Z_1| + |Z_2|$, alors

$$\mathrm{D}_+||Z||_4 \leq \max\left\{\frac{\epsilon E}{I} - (\lambda I + \epsilon + 2\vartheta), \frac{2\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \epsilon + 2\vartheta)\right\}||Z||_4$$

— $||Z||_5 = |Z_1| + |Z_3|$

$$D_+||Z||_5 = Z_1' - Z_3'$$

$$\begin{aligned} D_+||Z||_5 &= -(\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta)|Z_1| + (\frac{\lambda IS}{E} - \lambda I)|Z_2| \\ &+ (\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\frac{(\lambda S + \delta)I}{E} + \epsilon + \gamma + 2\vartheta))|Z_3| \\ &\leq -(\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta)|Z_1| + \frac{\lambda IS}{E}|Z_2| - \left[\frac{\epsilon E}{I} + \frac{\delta I}{E} + 2\epsilon + 2\vartheta\right]|Z_3| \end{aligned}$$

Si $|Z_2| \leq |Z_1| + |Z_3|$, alors

$$\mathrm{D}_+||Z||_5 \leq \max\left\{\frac{\lambda SI}{E} - (\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta), \frac{\lambda SI}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \frac{\delta I}{E} + 2\epsilon + 2\vartheta)\right\}||Z||_5$$

— $||Z||_6 = |Z_2| + |Z_3|$

$$D_+||Z||_6 = Z_2' - Z_3'$$

$$\begin{aligned} D_+||Z||_6 &= \frac{\epsilon E}{I}|Z_1| + \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (2\lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta)\right]|Z_2| \\ &+ \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f + \delta - (\epsilon + \gamma + 2\vartheta)\right]|Z_3| \\ &= \frac{\epsilon E}{I}|Z_1| + \left[\frac{\lambda SI}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} - 2\lambda I + \delta + \epsilon)\right]|Z_2| \\ &+ \left[\frac{\lambda SI}{E} + \delta - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta)\right]|Z_3| \end{aligned}$$

si $|Z_1| \leq |Z_2| + |Z_3|$, alors

$$\mathrm{D}_+||Z||_6 \leq \max\left\{\frac{\lambda IS}{E} - (2\lambda I + 2\vartheta + \epsilon + \delta), \frac{\lambda IS}{E} + \delta - 2\epsilon - 2\vartheta\right\}||Z||_6 \quad (3.11)$$

— $||Z||_7 = |Z_1| + Z_2| + |Z_3|$

$$D_+||Z||_7 = Z_1' + Z_2' - Z_3'$$

$$\begin{aligned} D_+||Z||_7 &= \left[\frac{\epsilon E}{I} - (\lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta)\right]|Z_1| + \left[\frac{\lambda IS}{E} + \frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (2\lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta)\right]|Z_2| \\ &+ \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f + \delta - (\frac{(\lambda S + \delta)I}{E} + \epsilon + \gamma + 2\vartheta)\right]|Z_3| \\ &= \left[\frac{\epsilon E}{I} - (\lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta)\right]|Z_1| + \left[\frac{2\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\lambda I + \delta + 2\vartheta + \epsilon)\right]|Z_2| \\ &+ \left[\delta - (\frac{\delta I}{E} + \frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta)\right]|Z_3| \end{aligned}$$

Donc,

$$D_+||Z||_7 \leq \max\{\frac{\epsilon E}{I} - (\lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta), \frac{2\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\lambda I + \delta + \vartheta + \epsilon)),$$
$$\delta - (\frac{\delta I}{E} + \frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta)\}||Z||_7$$

alors, d'après (3.11) $\frac{\lambda IS}{E} + \delta - 2(\epsilon + \vartheta) < 0$, et avec les conditions précédente, on a :

$S_{\theta++-} = \{\max(||Z||_1, ||Z||_6), ||Z||_7\}$.

Cas4 Maintenant, travaillons sur l'orthant θ_{-++}

— $||Z||_1 = |Z_1|$

$$\begin{aligned} D_+||Z||_1 &= -Z_1^{'} \\ D_+||Z||_1 &= -(\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta)|Z_1| - \frac{\lambda IS}{E}|Z_2| - \frac{(\lambda S + \delta)I}{E}|Z_3| \end{aligned}$$

ainsi,

$$D_+||Z||_1 \leq -\{\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta\}\, ||Z||_1$$

— $||Z||_2 = |Z_2|$

$$\begin{aligned} D_+||Z||_2 &= Z_2^{'} \\ D_+||Z||_2 &= \frac{-\epsilon E}{I}|Z_1| + \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta)\right]|Z_2| - \delta|Z_3| \\ &\leq \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta)\right]|Z_2| \\ &\leq \left[\frac{\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \delta + \epsilon + 2\vartheta)\right]|Z_2| \end{aligned}$$

Donc :

$$D_+||Z||_2 \leq \left\{\frac{\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \delta + \epsilon + 2\vartheta)\right\}||Z||_2$$

— $||Z||_3 = |Z_3|$

$$\begin{aligned}
D_+||Z||_3 &= Z_3^{'} \\
D_+||Z||_3 &= \lambda I|Z_2| + (\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\epsilon + \gamma + 2\vartheta))|Z_3| \\
&= \lambda I|Z_2| + (\frac{\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta))|Z_3|
\end{aligned}$$

Si $|Z_2| \leq |Z_3|$, alors

$$D_+||Z||_3 \leq \left\{ \frac{\lambda IS}{E} + \lambda I - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta) \right\} ||Z||_3$$

— $||Z||_4 = |Z_1| + |Z_2|$

$$D_+||Z||_4 = -Z_1^{'} + Z_2^{'}$$

$$\begin{aligned}
D_+||Z||_4 = &- \left[\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta \right] |Z_1| + \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\frac{\lambda IS}{E} + \lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta) \right] |Z_2| \\
&- \left[\frac{(\lambda S + \delta)I}{E} + \delta \right] |Z_3| \\
\leq &- \left[\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta \right] |Z_1| - \left[\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \delta + \epsilon + 2\vartheta \right] |Z_2|
\end{aligned}$$

donc,

$\mathrm{D}_+||Z||_4 \leq -\left\{ \frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta \right\} ||Z||_4$

— $||Z||_5 = |Z_1| + |Z_3|$

$$D_+||Z||_5 = -Z_1^{'} + Z_2^{'}$$

$$\begin{aligned}
D_+||Z||_5 = &-[\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta]|Z_1| + \left[\lambda I - \frac{\lambda IS}{E} \right] |Z_2| \\
&+ \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\frac{(\lambda S + \delta)I}{E} + \epsilon + \gamma + 2\vartheta) \right] |Z_3| \\
\leq &-[\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta]|Z_1| + \lambda I|Z_2| - \left[\frac{\delta I}{E} + \frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta \right] |Z_3|
\end{aligned}$$

si $|Z_2| \leq |Z_1| + |Z_3$, alors :

$$D_+||Z||_5 \leq \max\left\{-(\epsilon+\delta+2\vartheta), \lambda I - (\frac{\delta I}{E} + \frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + \vartheta)\right\} ||Z||_5$$

— $||Z||_6 = |Z_2| + |Z_3|$

$$D_+||Z||_6 = Z_2' + Z_3'$$

$$\begin{aligned} D_+||Z||_6 = &-\frac{\epsilon E}{I}|Z_1| + \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f + \lambda I - (\lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta)\right] |Z_2| \\ &+ \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\epsilon + \delta + \gamma + 2\vartheta)\right] |Z_3| \\ &\leq (\frac{\lambda S I}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \epsilon + \delta + 2\vartheta))|Z_2| \\ &+ \frac{\lambda S I}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + \delta + 2\vartheta))|Z_3| \end{aligned}$$

ainsi,

$$D_+||Z||_6 \leq \left\{\frac{\lambda S I}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \epsilon + \delta + 2\vartheta)\right\} ||Z||_6$$

— $||Z||_7 = |Z_1| + |Z_2| + |Z_3|$

$$D_+||Z||_7 = -Z_1' + Z_2' + Z_3'$$

$$\begin{aligned} D_+||Z||_7 = &-\left[\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta\right] |Z_1| + \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\frac{\lambda I S}{E} + \delta + \gamma + 2\vartheta)\right] |Z_2| \\ &+ \left[\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\frac{(\lambda S + \delta) I}{E} + \delta + \gamma + \epsilon + 2\vartheta)\right] |Z_3| \\ = &-\left[\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta\right] |Z_1| - \left[\frac{\epsilon E}{I} + \delta + \epsilon + 2\vartheta\right] |Z_2| - \left[\frac{\epsilon E}{I} + \frac{\delta I}{E} + \delta + 2\epsilon + 2\vartheta\right] |Z_3| \end{aligned}$$

alors,

$$D_+||Z||_7 \leq -\left\{\frac{\epsilon E}{I} + \epsilon + \delta + 2\vartheta\right\} ||Z||_7$$

$D_+||Z||_i$ est vérifie par toutes les normes :

$S_{\theta-++} = \{\max(||Z||_1, ||Z||_2, ||Z||_3), \max(||Z||_1, ||Z||_6), \max(||Z||_2, ||Z||_5),$
$\max(||Z||_4, ||Z||_5), \max(||Z||_4, ||Z||_6), \max(||Z||_5, ||Z||_6), ||Z||_7\}$

Finalement, en regroupant tous les résultats précédents, on va considérer la norme vectorielle suivante :

$$V(x) = \begin{cases} \max\{|Z_1|, |Z_2| + |Z_3|\} & \text{signe}(Z_1) = \text{signe}(Z_2) = \text{signe}(Z_3) \\ \max\{|Z_1| + |Z_2|, |Z_2| + |Z_3|\} & \text{signe}(Z_1) = -\text{signe}(Z_2) = \text{signe}(Z_3) \\ |Z_1| + |Z_2| + |Z_3| & \text{signe}(Z_1) = sisigne(Z_2) = -\text{signe}(Z_3) \\ \max\{|Z_1|, |Z_2| + |Z_3|\} & -\text{signe}(Z_1) = \text{signe}(Z_2) = \text{signe}(Z_3) \end{cases}$$

3.2.1 Analyse de stabilité globale du point endémique P^*

Passons maintenant a prouver la stabilité globale du point endémique P^*. On sait quand $R_0 > 1$, il existe un unique équilibre endémique et équilibre sans maladie est instable
Pour cela, en utilisant le théorème(12) cité dans chapitre1. En tenant compte du fait que le syst (3.3) est uniformèment persistant sur le domaine Γ, il reste à faire l'estimation de la dérivée à droite $D_+||Z||$ de la norme définie précédement, considérons tous les cas possibles :

Cas1 : Si $Z_1, Z_2, Z_3 > 0$ et $|Z_1| \geq |Z_2| + |Z_3|$, donc $||Z|| = |Z_1|$

$$\begin{aligned} D_+||Z|| &= Z_1^{'} \\ D_+||Z|| &= -(\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta)|Z_1| + \frac{\lambda IS}{E}|Z_2| + \frac{(\lambda S + \delta)I}{E}|Z_3| \\ &= -(\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta)|Z_1| + \frac{\lambda IS}{E}(|z_2| + |Z_3|) + \frac{\delta I}{E}|Z_3| \end{aligned}$$

On a,

$$D_+||Z|| \leq \left\{ \frac{(\lambda S + \delta)I}{E} - (\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta) \right\} ||Z|| \tag{3.12}$$

Cas2 : $Z_1, Z_2, Z_3 > 0$ et $|Z_1| \leq |Z_2| + |Z_3|$ Donc : $||Z|| = Z_2 + Z_3$

$$D_+||Z|| = Z_2^{'} + Z_3^{'}$$

$$\begin{aligned} D_+||Z|| = &\frac{\epsilon E}{I}|Z|_1 + ((\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f) - (\delta + \gamma + 2\vartheta))|Z|_2 \\ &+ (\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\delta + \epsilon + \gamma + 2\vartheta))|Z|_3 \\ = &\frac{\epsilon E}{I}|Z|_1 + (\frac{\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \epsilon + \delta + 2\vartheta)^\circ|Z_2| \\ &+ (\frac{\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta + \delta))|Z_3| \end{aligned}$$

Alors,

$$D_{+}||Z|| \leq \max\left\{\frac{\lambda IS}{E} - (\epsilon + \delta + 2\vartheta)\right\}||Z|| \tag{3.13}$$

Cas3 : $Z_1, Z_3 > 0$, $Z_2 < 0$ et $|Z_1| + |Z_2| \geq |Z_3| + |Z_2|$
On a : $||Z|| = |Z_1| + |Z_2|$ Alors

$$\begin{aligned}
D_{+}||Z|| &= Z_1' + Z_2' \\
D_{+}||Z|| &= -(\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \delta + \epsilon + 2\vartheta)|Z_1| + (\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\frac{\lambda IS}{E} + \lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta))|Z_2| \\
&\quad + (\frac{(\lambda S + \delta)I}{E} + \delta)|Z_3| \\
&= -(\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \delta + \epsilon + 2\vartheta)|Z_1| + (\frac{\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \delta + \epsilon + 2\vartheta))|Z_2| \\
&\quad + (\frac{(\lambda S + \delta)I}{E} + \delta)|Z_3|
\end{aligned}$$

or, $|Z_3| \leq |Z_1| - |Z_2|$ Alors

$$\mathrm{D}_{+}||Z|| \leq \left\{\frac{(\lambda S + \delta)I}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \lambda I + \epsilon + 2\vartheta)\right\}||Z|| \tag{3.14}$$

Cas4 : $Z_1, Z_3 > 0$, $Z_2 < 0$ et $|Z_1| \leq |Z_3|$
On a : $||Z|| = |Z_2| + |Z_3|$

$$\begin{aligned}
D_{+}||Z|| &= -Z_2 + Z_3 D_{+}||Z|| = -(\frac{\epsilon E}{I} + (\delta + \gamma + 2\vartheta))|Z_1| + (\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (2\lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta)) \\
&\quad + \frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f + \delta - (\epsilon + \gamma + 2\vartheta))|Z_3| \\
&= -(\frac{\epsilon E}{I} + (\delta + \gamma + 2\vartheta))|Z_1| + \frac{\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \epsilon + \delta + 2\vartheta + 2\lambda I)|Z_2| \\
&\quad + \frac{\lambda IS}{E} + \delta - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta)|Z_3|
\end{aligned}$$

Alors,

$$D_{+}||Z|| \leq \max\left\{\frac{\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \epsilon + \delta + 2\vartheta + 2\lambda I), \frac{\lambda IS}{E} + \delta - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta)\right\}||Z|| \tag{3.15}$$

Cas5 : $Z_1, Z_2 > 0$, $Z_3 < 0$
Alors $||Z|| = |Z_1| + |Z_2| + |Z_3|$

$$\begin{aligned}
D_+||Z|| &= Z_1' + Z_2' - Z_3' \\
D_+||Z|| &= (\frac{\epsilon E}{I} - (\lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta)|Z_1| + (\frac{\lambda IS}{E} + \frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (2\lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta)|Z_2| \\
&\quad + (\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f + \delta - (\frac{(\lambda S + \delta)I}{E} + \epsilon + \gamma + 2\vartheta)|Z_3| \\
&= (\frac{\epsilon E}{I} - (\lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta)|Z_1| + (\frac{2\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\lambda I + \delta + 2\vartheta + \epsilon))|Z_2| \\
&\quad + (\delta - (\frac{\delta I}{E} + \frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta))|Z_3|
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_+||Z|| \leq \max\{&\frac{\epsilon E}{I} - (\lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta), \frac{2\lambda IS}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\lambda I + \delta + \vartheta + \epsilon)), \\
&\delta - (\frac{\delta I}{E} + \frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta)\}||Z||
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Cas6 : $Z_2, Z_3 > 0$, $Z_1 < 0$ et $|Z_1| \geq |Z_2| + |Z_3|$
On a : $||Z|| = |Z_1|$

$$\begin{aligned}
D_+||Z|| &= -Z_1' \\
D_+||Z|| &= -(\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta)|Z_1| - \frac{\lambda IS}{E}|Z_2| - \frac{(\lambda S + \delta)I}{E}|Z_3|
\end{aligned}$$

donc,

$$D_+||Z|| \leq -\{\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta\}\,||Z|| \tag{3.17}$$

Cas7 : $Z_2, Z_3 > 0$, $Z_1 < 0$ et $|Z_1| \leq |Z_2| + |Z_3|$
On a : $||Z|| = |Z_2| + |Z_3|$

$$\begin{aligned}
D_+||Z|| &= Z_2' + Z_3' \\
D_+||Z|| &= -\frac{\epsilon E}{I}|Z_1| + (\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f + \lambda I - (\lambda I + \delta + \gamma + 2\vartheta))|Z_2| \\
&\quad + (\frac{I}{E}(\frac{E}{I})_f - (\epsilon + \delta + \gamma + 2\vartheta))|Z_3| \\
&= -\frac{\epsilon E}{I}|Z_1| + (\frac{\lambda SI}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \epsilon + \delta + 2\vartheta))|Z_2| \\
&\quad + \frac{\lambda SI}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + \delta + 2\vartheta))|Z_3|
\end{aligned}$$

$$D_+||Z|| \leq \left\{\frac{\lambda SI}{E} - (\frac{\epsilon E}{I} + \epsilon + \delta + 2\vartheta)\right\}||Z|| \tag{3.18}$$

Dans les sept estimations de $D_+||Z||$ ci-dissous, les inégalités (3.12) -(3.18) sont regroupent, est donné le résultat suivante :

$$D_+||Z|| \leq \left\{ \frac{(\lambda S+\delta)I}{E} - (\lambda I + \epsilon + \delta + 2\vartheta), \frac{\lambda IS}{E} + \delta - (\frac{\epsilon E}{I} + 2\epsilon + 2\vartheta) \right\} ||Z||$$

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 14 *Si $R_0 > 1$ et l'hypothèse suivante est vérifiée*

$$\begin{aligned} &\max\{\lambda \sup_{t\geq 0} ||\frac{IS}{E}|| + \delta \sup_{t\geq 0} ||\frac{I}{E}|| - (\lambda \sup_{t\geq 0} ||I|| + \epsilon + \delta + 2\vartheta), \\ &\qquad \lambda \sup_{t\geq 0} ||\frac{IS}{E}|| + \delta - \epsilon \sup_{t\geq 0} ||\frac{E}{I}|| - 2\epsilon - 2\vartheta\} \leq -\delta < 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

avec δ constante positive . Alors l'unique équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable.

Discussion : si il existe une région dans laquelle l'hypothèse (3.19) est vérifiée alors le point endémique est globalement asymptotiquement stable.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié un modèle épidémiologique d'une maladie infectieuse avec immunité temporelle de type $SEIRS$: l'existence , unicité, positivité de la solution du modèle, persistence, calcul du taux de reproduction R_0, calcul des points d'équilibre (point sans maladie et point endémique), analyse de stabilité locale du point sans maladie et analyse de stabilité globale du point endémique). En particulier, des conditions suffisantes de stabilité globale du point endémique ont été proposées et ceci par l'approche géométrique de Li-Muldowney. Cette approche est basée sur deux choix importants celui de la matrice Q et celui de la norme vectorielle V. Comme pour le choix des fonctions de Lyapunov, il n'existe pas de méthode spécifique pour détermine Q et V. L'idée principale est que les conditions obtenues soient cohérents avec les dynamiques du système étudié. +

Bibliographie

[1] Cheng, Y., Yang, X. *(2012). On the global stability of SEIRS models in epidemiology.*

[2] Freedman, H. I., Ruan, S., Tang, M. *(1994). Uniform persistence and flows near a closed positively invariant set. Journal of Dynamics and Differential Equations, 6(4), 583-600.*

[3] Hassan, K. *(1996). Nonlinear systems.*

[4] Kohaupt, L.Kohaupt, L. *(2005). Illustration of the logarithmic derivatives by examples suitable for classroom teaching. JOURNAL OF MATHEMATICS, 35(5).*

[5] Li, M. Y., Muldowney, J. S. *(1996). A geometric approach to global-stability problems. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 27(4), 1070-1083.*

[6] McCluskey, C. C. *(2005). A strategy for constructing Lyapunov functions for non-autonomous linear differential equations. Linear algebra and its applications, 409, 100-110.*

[7] Michael Y.Li., *(2005) Lecture notes for math 524.*

[8] Li, M. Y., Wang, L. *(1998). A criterion for stability of matrices. Journal of mathematical analysis and applications, 225(1), 249-264.*

[9] Sallet, G. *(2010). Inria ird epicasa09 . Rapport technique.*

[10] Smith, H. L., Wang, L., Li, M. Y. *(2001). Global dynamics of an SEIR epidemic model with vertical transmission. SIAM Journal on Applied Mathematics, 62(1), 58-69.*

[11] Söderlind, G., Mattheij, R. M. *(1985). Stability and asymptotic estimates in nonautonomous linear differential systems. SIAM journal on mathematical analysis, 16(1), 69-92.*

[12] Söderlind, G. *The logarithmic norm. History and modern theory. BIT Numerical Mathematics, 46(3), 631-652.*

[13] Van den Driessche, P., Li, M., Muldowney, J. *(1999). Global stability of SEIRS models in epidemiology. Canadian Applied Mathematics Quarterly, 7, 409-425.*

[14] Van den Driessche, P., Watmough, J. *(2002). Reproduction numbers and subthreshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. Mathematical biosciences, 180(1), 29-48. ISO 690 .*