Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen Algérie
جامعة أبي بكر بلقايد
تلمسان الجزائر

République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Abou Bakr Belkaid– Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de mathématiques

Mémoire de fin d'études

pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option: *probabilités et statistiques*

Thème

Convergence des séries de variables aléatoires sous-gaussiennes

Réalisé par :

- **Mlle BERNOU Ismahen**

Présenté devant le jury composé de MM.

- *Président :*	T. Mourid	*Professeur*	*Université de Tlemcen*
- *Examinateur :*	*A.* Allam	MC	*Université de Tlemcen*
- *Examinatrice :*	F. D. Malti	MAA	E. P. S. T. *Tlemcen*
- *Rapporteur :*	F. Boukhari	MC	*Université de Tlemcen*

Année universitaire : 2016-2017

Remerciements

J'exprime mes profonds remerciements, ma vive reconnaissance et ma sinsère gratitude à **Mr F. BOUKHARI**, maître de conférences à la faculté des sciences, Université Abou bekr Belkaid pour avoir accepté de m'encadrer et pour ses conseils et ses précieuses orientations qu'il n'a cessé de m'apporter tout au long de ce travail.

J'adresse mes sinsères remerciements à **Mr T. MOURID** professeur à la faculté des sciences, Université Abou Bekr Belkaid pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie également **Mr A. ALLAM**, maître de conférences à la faculté des sciences, Université Abou Bekr Belkaid de me faire l'honneur d'accepter d'examiner mon mémoire de Master.

Je voudrais remercier chaleureusement **Mme F. D. Malti**, maître assistante à l'école préparatoire en science et techniques d'avoir accepter d'examiner ce travail.

Plus que quiconque, il me faut remercier ma chère mère qui m'a apporté son appui durant toutes mes années d'étude, pour son sacrifice et son soutien qui m'a donné confiance, courage et sécurité.

Je remercie mon cher père qui m'a appris le sens de la persévérance tout au long de mes études, pour son sacrifice ses conseils et ses encouragements.

Ma reconnaissance et mes remerciements vont également à tous mes amis pour les bons moments qu'on a passé ensemble.

Enfin je remercie gracieusement toute personne qui a contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

L'étude de la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes est un problème classique en théorie de probabilités, il semble que Kolmogorov est l'un des premiers mathématiciens à avoir travaillé sur le sujet. L'hypothèse d'indépendance reste cependant difficilement vérifiable dans de nombreuses situations. En 1966 Lehmann a introduit la notion de dépendance négative qui s'avère plus réaliste dans de nombreuses applications, comme dans l'étude des algorithmes aléatoires par exemple, ce dernier concept est aussi commode lorsque les variables étudiées possèdent des moments exponentiels. L'étude des propriétés asymptotiques des séries de variables aléatoires s'avère aussi utile pour établir la loi forte des grands nombres, en faisant appel au lemme de Kronecker.

Les variables aléatoires sous-gaussiennes constituent l'une des principales familles de variables aléatoires jouissant d'une propriété d'intégrabilité forte, cette classe a aussi l'avantage de former un espace vectoriel ce qui n'est pas le cas des variables gaussiennes. Une autre qualité de ces variables aléatoires est qu'elles appartiennent à un espace d'Orlicz de type exponentiel, ce dernier point a pour conséquence que les variables sous-gaussienne vérifient des inégalités de grande déviation avec une décroissance exponentielle, ceci est particulièrement commode dans l'étude des lois fortes des grands nombres et les lois du logarithme itéré.

Ce mémoire est composé de trois chapitres, dans le premier on étudie la classe des variables sous-gaussiennes on y démontre en particulier plusieurs caratérisations de ces variables et on donne des estimations pour le standard de nombreuses variables sous-gaussiennes.

Dans le second chapitre on étudie la convergence des séries pondérées de variables aléatoires sous-gaussiennes négativement dépendantes, cette partie repose essentiellement sur les travaux d'Amini, Zarei et Bozorgnia (2007).

Le dernier chapitre est consacré aux lois du logarithme itéré, nous commençons par prouver un résultat de Moricz concernant des variables aléatoires dont la fonction génératrice à une croissance sous-exponentielle, nous appliquons ce résultat aux variables sous-gaussienne. Nous terminons ce chapitre par établir une loi du logarithme itéré pour des martingales ϕ-sous-gaussiennes due à Castellucci-Guiliano (2005).

Chapitre 1

Variables aléatoires sous-gaussiennes

Les variables aléatoires sous-gaussiennes ont été introduites par Kahane [11] pour l'étude de la convergence des séries de Fourier aléatoires. Dans ce chapitre nous présentons les principales propriétés de cette classe de variables aléatoires, nous donnons de nombreux exemples et nous discutons la structure de l'espace des variables aléatoires sous-gaussiennes. Les résultats énoncés dans ce chapitre sont bien connus, nos principales références sont les livres [4], [11].
Dans tout ce qui suit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité complet.

1.1 Définitions et exemples

Dans cette section, on rappelle quelques propriétés fondamentales des variables sous-gaussiennes.

Définitions 1.1.1.

1. On dira qu' une variable aléatoire X est sous-gaussienne s'il existe une constante $\alpha \geq 0$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) \tag{1.1}$$
2. On notera $\tau(X)$ le plus petit réel $\alpha \geq 0$ satisfaisant l'inégalité(1.1), et on l'appelle le standard ou l'écart de Gauss.
$$\tau(X) = \inf\left\{\alpha \geq 0 : \mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right), \forall t \in \mathbb{R}\right\} \tag{1.2}$$
On peut prendre par convention $\tau(X) = +\infty$ si l'ensemble des $\alpha \geq 0$ satisfaisant (1.1) est vide.

3. On notera aussi

$$Sub(\Omega) := \text{la classe des variables aléatoires sous-gaussiennes.}$$

Il est clair que $X \in Sub(\Omega) \Longleftrightarrow \tau(X) < +\infty$

Ainsi, pour que X soit sous-gaussienne il suffit que sa transformée de Laplace soit dominée par la transformée de Laplace d'une variable aléatoire gaussienne centrée. Une conséquence immédiate de cette définition est que toute variable sous-gaussienne est centrée, et sa variance est dominée par son écart de Gauss.

Lemme 1.1.1. *[4] Soit $X \in Sub(\Omega)$, alors*

$$\mathbb{E}(X) = 0 \quad et \quad \mathbb{E}(X^2) = var(X) \leq \alpha^2 \tag{1.3}$$

Preuve. *Puisque, on a pour tout $t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}\{\exp(tX)\} < +\infty$ alors $X \in L^2$*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\exp(tX)\} &= \sum_{n\geq 0} t^n \frac{\mathbb{E}(X^n)}{n!} \qquad (Fubini)\\ &\leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

Donc

$$1 + t\mathbb{E}(X) + t^2\frac{\mathbb{E}(X^2)}{2} \leq 1 + \frac{\alpha^2 t^2}{2} + o(t^2) \tag{1.4}$$

ainsi par la division des deux côtés par t positive et en prenant la limite quand t tend vers 0^+, on obtient

$$\lim_{t\to 0^+} \mathbb{E}(X) + t\frac{\mathbb{E}(X^2)}{2} \leq \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\alpha^2 t}{2} + \frac{o(t^2)}{t}\right) = 0$$

Donc : $\mathbb{E}(X) \leq 0$. de même par la division des deux côtés par t négative et en prenant la limite quand t tend vers 0^-, on a

$$\lim_{t\to 0^-} \mathbb{E}(X) + t\frac{\mathbb{E}(X^2)}{2} \geq \lim_{t\to 0^-}\left(\frac{\alpha^2 t}{2} + \frac{o(t^2)}{t}\right) = 0$$

Ainsi : $\mathbb{E}(X) = 0$. En remplaçant dans (1.4), on obtient

$$\frac{\mathbb{E}(X^2)}{2} \leq \frac{\alpha^2}{2} + \frac{o(t^2)}{t^2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{\alpha^2}{2}.$$

Cela donne : $\mathbb{E}(X^2) \leq \alpha^2$.

Lemme 1.1.2. *Soit $X \in Sub(\Omega)$, alors :*

$$\mathbb{E}\{\exp(t|X|)\} \leq 2\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) \tag{1.5}$$

Preuve. *On remarque que pour tout $t, x \in \mathbb{R}$*

$$e^{t|x|} \leq e^{-tx} + e^{tx}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\exp(t|X|)\} &\leq \mathbb{E}\{\exp(-tX)\} + \mathbb{E}\{\exp(tX)\}\\ &\leq 2\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)\end{aligned}$$

Exemples 1.1.1. *Comme exemples des v.a.r sous-gaussiennes, on peut citer les suivants :*

1. *Soient $\alpha > 0$, $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \alpha^2)$,alors :*

$$\mathbb{E}\{\exp(tX)\} = \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)$$

Ainsi : $X \in Sub(\Omega)$ et $\tau(X) = \alpha$.

2. *Soit X une variable de Rademacher i.e. $\mathbb{P}(X = +1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$ alors $X \in Sub(\Omega)$ et $\tau(X) = 1$, en effet :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\exp(tX)\} &= \mathbb{E}[\exp(tX)\mathbf{1}_{\{X=1\}}] + \mathbb{E}[\exp(tX\mathbf{1}_{\{X=-1\}})]\\ &= \frac{1}{2}(\exp(t) + \exp(-t))\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{(-t)^k}{k!} + \sum_{k\geq 0}\frac{(t)^k}{k!}\right)\\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{(t)^{2k}}{(2k)!}\\ &= 1 + \sum_{k\geq 1}\frac{(t)^{2k}}{(2k)!}\\ &\leq 1 + \sum_{k\geq 1}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k\frac{1}{k!}\\ &= \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\end{aligned}$$

où l' on a utilisé : $(2n)! = 2n(2n-1)...(n+1)n! \geq 2^n n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$
De plus, on a par l'inégalité (1.3)

$$1 = \mathbb{E}(X^2) \leq \tau^2(X) \leq 1$$

d'où $\tau(X) = 1$.

3. *[9] Si* X *une v.a.r centrée bornée* ($\exists M \geq 0$ *telle que :* $|X| \leq M$ *P.p.s.*) *alors* X *est sous-gaussienne (voir [9]), en effet, sopposons d'abord que* $M = 1$ *et soit* t *un réel quelconque.*
Pour $|x| \leq 1$, *on a*

$$\frac{1-x}{2} \in [0,1], \quad \frac{1+x}{2} \in [0,1], \quad et \quad \frac{1-x}{2} + \frac{1+x}{2} = 1$$

Puisque on a l'égalité

$$tx = \frac{1-x}{2}(-t) + \frac{1+x}{2}(t)$$

la fonction $x \mapsto \exp(x)$ *étant convexe, on a pour tout* $x \in [-1,1]$

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}$$

La v.a. X *étant bornée par* 1, *la v.a.* $exp(tX)$ *est bornée et admet donc une espérance. On a donc*

$$\exp(tX) \leq \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^{t}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \frac{e^{-t}+e^{t}}{2} = \cosh(t)$$

Or, on a

$$\cosh(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad et \quad \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

et comme $\forall n \in \mathbb{N}, n!2^n \leq (2n)!$, *on a* $\cosh(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$. *D'où*

$$\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Si $M \neq 1$ *alors on pose* $Y = \frac{X}{M}$ *et donc*

$$\mathbb{E}[\exp(tX)] = \mathbb{E}[\exp(tMY)] \leq \exp\left(\frac{M^2t^2}{2}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

4. *Soit X une v.a.r centrée, et supposons que $a \leq X \leq b$ presque sûrement alors $X \in Sub(\Omega)$*
et $\tau(X) \leq (b-a)/2 \leq \max(|a|, |b|)$, en effet :
Si $x \in [a;b]$ alors la convexité de la fonction $x \mapsto e^x$ implique que pour tout $t > 0$
$$e^{tx} \leq \frac{x-a}{b-a}e^{tb} + \frac{b-x}{b-a}e^{ta}$$
en utilisant le fait que $\mathbb{E}(X) = 0$, on obtient
$$\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \frac{b}{b-a}e^{ta} - \frac{a}{b-a}e^{tb}$$
si on pose : $p = b/(b-a)$ et $u = (b-a)t$, et on considère la fonction :
$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \log\left(pe^{ta} + (1-p)e^{tb}\right)\\ &= ta + \log\left(p + (1-p)e^{t(b-a)}\right)\\ &= (p-1)u + \log\left(p + (1-p)e^{u}\right)\end{aligned}$$
Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ et par conséquent le developpement de Taylor donne, pour tout $u \in \mathbb{R}$, il existe un réel $\xi \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\varphi(u) = \varphi(0) + u\varphi'(u) + \frac{u^2}{2}\varphi''(\xi).$$
$\varphi(0) = 0$ et
$$\varphi'(u) = (p-1) + \frac{(1-p)e^u}{p + (1-p)e^u} = (p-1) + 1 - \frac{p}{p + (1-p)e^u}$$
alors $\varphi'(0) = 0$ et
$$\varphi''(u) = \frac{p(1-p)e^u}{\left(p + (1-p)e^u\right)^2}$$
et comme $\varphi''(\xi) \leq 1/4$ alors
$$\varphi(u) \leq u^2/8 = t^2(b-a)^2/8.$$
ainsi, on conclus que
$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2(b-a)^2/8}$$
et $\tau(X) \leq (b-a)/2 \leq \max(|a|, |b|)$.

1.2 L'espace des variables sous-gaussiennes

Dans ce paragraphe, on étudie la structure de $Sub(\Omega)$ l'ensemble des v.a.r sous-gaussiennes.

Théorème 1.2.1. *[4, page 5] $Sub(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme $\tau(\cdot)$.*

La preuve repose sur la proposition suivante.

Proposition 1.2.1. *[1, page 244] Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r qui converge en probabilité vers X, et f une fonction continue, alors $(f(X_n))_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers $f(X)$.*

Preuve. *comme f est une fonction continue, alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \textit{tel que} \quad |X_n - X| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(X_n) - f(X)| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon, |X_n - X| \geq \delta_\varepsilon) + \\
&\quad \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon, |X_n - X| < \delta_\varepsilon) \\
&\leq \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \delta_\varepsilon) + \\
&\quad \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon, |f(X_n) - f(X)| < \varepsilon) \\
&= \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \delta_\varepsilon) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Preuve. *(du théorème 1.2.1) Soit $X \in Sub(\Omega)$,*

1. Montrons d'abord que $\tau(\cdot)$ est une norme ;
   (i) $\tau(X) = 0 \Longleftrightarrow X = 0$,
   en effet :

$$\begin{aligned}
X = 0 &\Longrightarrow \mathbb{E}\{\exp(tX)\} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow \tau(X) \leq 0 \\
&\Longrightarrow \tau(X) = 0
\end{aligned}$$

   Réciprequement :

$$\tau(X) = 0 \Longrightarrow \mathbb{E}(X^2) = 0 \Longrightarrow X = 0$$

   (ii) Soient $X \in Sub(\Omega)$, $a \in \mathbb{R}$, donc $\exists \alpha \geq 0$ tel que

$$M_X(t) = \mathbb{E}\{\exp(tX)\} \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}\{\exp(atX)\} = M_X(at) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 a^2 t^2}{2}\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

alors $\exists \beta = |a|\alpha \geq 0$ tel que :

$$\mathbb{E}\{\exp(atX)\} \leq \exp\left(\frac{\beta^2 t^2}{2}\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

et

$$\begin{aligned}
\tau(aX) &= \inf\{\beta \geq 0 : \mathbb{E}[\exp(atX)] \leq \exp\left(\frac{\beta^2 t^2}{2}\right), \forall t \in \mathbb{R}\} \\
&= \inf\{|a|\alpha \geq 0 : \mathbb{E}[\exp(atX)] \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 a^2 t^2}{2}\right), \forall t \in \mathbb{R}\} \\
&\overset{u=at}{=} |a| \inf\{\alpha \geq 0 : \mathbb{E}[\exp(uX)] \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 u^2}{2}\right), \forall u \in \mathbb{R}\} \\
&= |a|\tau(X)
\end{aligned}$$

d'où

$$\tau(aX) = |a|\tau(X) \qquad \forall a \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

(iii) Soient $X, Y \in Sub(\Omega)$, $t \in \mathbb{R}$, $p, q > 1$ tels que :$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors par l'inégalité de Cauchy-schwarz

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(t(X+Y))] &= \mathbb{E}[\exp(tX)\exp(tY)] \\
&\leq \mathbb{E}^{1/p}\left[\exp(ptX)\right]\mathbb{E}^{1/q}\left[\exp(qtX)\right] \\
&\leq \exp\left(\tau^2(X)p\frac{t^2}{2}\right)\exp\left(\tau^2(Y)q\frac{t^2}{2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{t^2}{2}\left(p\tau^2(X) + q\tau^2(Y)\right)\right)
\end{aligned}$$

puis en spécialisant pour :

$$p' = 1 + \frac{\tau(Y)}{\tau(X)} \quad et \quad q' = 1 + \frac{\tau(X)}{\tau(Y)}$$

alors

$$p'\tau^2(X) + q'\tau^2(Y) = (\tau(X) + \tau(Y))^2$$

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[\exp(t(X+Y))] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\left(\tau(X) + \tau(Y)\right)^2\right)$$

Ainsi :
$$\tau(X+Y) \leq \tau(X) + \tau(Y) \tag{1.7}$$
Conclusion : $\tau(\cdot)$ est une norme.

2. Montrons que $Sub(\Omega)$ est un espace vectoriel.
   (i) La variable aléatoire p.s. nulle est dans $Sub(\Omega)$.
   (ii) l'equation (1.6) et l'inégalité (1.7) indiquent que $Sub(\Omega)$ est stable par $+$ et par $\times$ par un scalaire.

   Ainsi, $Sub(\Omega)$ est un espace vectoriel.
3. Nous allons à présent établir que $Sub(\Omega)$ est complet pour la norme $\tau(\cdot)$; Soit $(X_n)_{n\geq 1} \subset Sub(\Omega)$ une suite de Cauchy, alors
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall p, q > N \quad \tau(X_p - X_q) < \varepsilon$$
   Maintenant, on sait que toute suite de Cauchy est bornée, ce qui implique que
$$\sup_{n\geq 1} \tau(X_n) < +\infty.$$
   Et par (1.3), on en déduit
$$\mathbb{E}(X_p - X_q)^2 \leq \tau^2(X_p - X_q) < \varepsilon^2$$
   et ceci entraine que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne quadratique, et par conséquent $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers X_∞, et par la proposition (1.2.1), on conclut que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(\exp(tX_n))_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers $\exp(tX_\infty)$.
   D'autre part, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, et pour tout $\varepsilon > 0$
$$\begin{aligned}\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[(\exp(tX_n))^{1+\varepsilon}] &= \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[\exp((1+\varepsilon)tX_n)] \\ &\leq \sup_{n\geq 1} \exp\left(\frac{t^2(1+\varepsilon)^2\tau^2(X_n)}{2}\right) < +\infty\end{aligned}$$
   Ceci montre que pout tout $t \in \mathbb{R}$, la famille $\{e^{tX_n}, n \geq 1\}$ est bornée dans $L^{1+\varepsilon}$, donc elle est uniformément intégrable, puisque elle converge en probabilité, elle converge dand L^1, par suite
$$\mathbb{E}[\exp(tX_\infty)] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\exp(tX_n)] \leq \exp\left(\frac{t^2\tau_\infty^2}{2}\right) < +\infty$$
   avec
$$\tau_\infty = \lim_{n\to+\infty} \sup \tau(X_n)$$

alors
$$X_\infty \in Sub(\Omega)$$
et par suite
$$X_\infty - X_n \in Sub(\Omega) \qquad n \geq 1,$$
finalement on obtient
$$\lim_{n\to+\infty} \tau(X_\infty - X_n) \leq \limsup_{p\geq q} \tau(X_p - X_q) < \varepsilon \quad \forall\varepsilon > 0$$
D'où
$$\lim_{n\to+\infty} \tau(X_\infty - X_n) = 0$$
On déduit immédiatement de ce théorème le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.1. *[4, page 6] Si $(X_n)_{n\geq1} \subset Sub(\Omega)$; si $\sup_{n\geq1} \tau(X_n) < +\infty$; et si $X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X$ en probabilité alors $X \in Sub(\Omega)$ et $\tau(X) \leq \limsup_{n\to+\infty} \tau(X)$.*

1.3 Propriétés des écarts de Gauss et des lois sous-gaussiennes

Selon la définition, une variable aléatoire à valeurs réelles est sous-gaussienne quand sa transformée de Laplace est dominée par la transformée de Laplace d'une gaussien centrée. Les théorème suivants présentent des conditions équivalentes pour qu' une variable aléatoire soit sous-gaussienne.

Théorème 1.3.1. *[11] Soit X une v.a.r centrée, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\exists\alpha > 0, \forall t \geq 0 : \quad \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) \leq e^{\frac{\alpha^2 t^2}{2}}$;
2. $\exists c > 0, \forall t \geq 0 : \quad \mathbb{P}(|X| \geq t) \leq 2e^{-ct^2}$;
3. $\exists a > 0 : \quad \mathbb{E}\left(e^{aX^2}\right) \leq 2$.

Preuve. 1) $\Longrightarrow$ 2)
supposons qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :
$$\mathbb{E}\left(e^{tX}\right) \leq e^{\frac{\alpha^2 t^2}{2}}$$

Soient $\lambda \geq 0$, $t \geq 0$, alors par l'inégalité de Markov, on obtient
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq t) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda t}\right) &\leq e^{-\lambda t}\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{\alpha^2\lambda^2}{2} - \lambda t\right)\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \min_{\{\lambda \geq 0\}} \exp\left(\frac{\alpha^2\lambda^2}{2} - \lambda t\right) = e^{\min_{\{\lambda\geq 0\}}\left\{\frac{\alpha^2\lambda^2}{2} - \lambda t\right\}}$$

Le terme de droite est optimisé pour $\left(\lambda \to \lambda^* = \frac{t}{\alpha^2}\right)$

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2\alpha^2}\right).$$

De même :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq -t) = \mathbb{P}\left(e^{-\lambda X} \geq e^{\lambda t}\right) &\leq e^{-\lambda t}\mathbb{E}\left(e^{-\lambda X}\right)\\ &\leq \exp\left(\frac{\alpha^2\lambda^2}{2} - \lambda t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) = \mathbb{P}(X \geq t) + \mathbb{P}(X \leq -t) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\alpha^2}\right).$$

En prenant $c = 1/2\alpha^2$*.*

2) $\Longrightarrow$ 3) *Supposons qu'il existe un réel* $c > 0$ *tel que* $\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq 2e^{-ct^2}$*, alors par la formule d'intégration par partie, on obtient*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{aX^2}\right) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(e^{aX^2} \geq x\right) dx\\ &= \int_0^1 \mathbb{P}\left(e^{aX^2} \geq x\right) dx + \int_1^{+\infty} \mathbb{P}\left(e^{aX^2} \geq x\right) dx\\ &= 1 + \int_1^{+\infty} \mathbb{P}\left(e^{aX^2} \geq x\right) dx\end{aligned}$$

posons $x = e^{at^2}$*, alors*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{aX^2}\right) &= 1 + \int_0^{+\infty} 2ate^{at^2}\mathbb{P}\left(e^{aX^2} \geq e^{at^2}\right) dt\\ &= 1 + \int_0^{+\infty} 2ate^{at^2}\mathbb{P}\left(|X| \geq t\right) dt\\ &\leq 1 + \int_0^{+\infty} 2at.2e^{-(c-a)t^2} dt = 1 + \frac{2a}{c-a}.\end{aligned}$$

en prenant $a = c/3$*, on obtient* $\mathbb{E}\left(e^{aX^2}\right) \leq 2$*.*

3) $\Longrightarrow$ 1) *Supposons que* $\mathbb{E}\left(e^{aX^2}\right) \leq 2$ *pour certains* $c > 0$*, et comme* X *est centrée*

alors, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{tX}\right) &= 1 + \int_0^1 (1-y)\mathbb{E}\left[(tX)^2 e^{ytX}\right] dy \\
&\leq 1 + \left(\int_0^1 (1-y)dy\right)\mathbb{E}\left[(tX)^2 e^{t|X|}\right] \\
&= 1 + \frac{t^2}{2}\mathbb{E}\left[X^2 e^{t|X|}\right] \\
{\color{red}(*)}\quad &\leq 1 + \frac{t^2}{2}\mathbb{E}\left[X^2 \exp\left(\frac{t^2}{2c} + c\frac{X^2}{2}\right)\right] \\
&= 1 + \frac{t^2}{2}e^{t^2/2c}\mathbb{E}\left[X^2 e^{cX^2/2}\right] \\
&= 1 + \frac{t^2}{c}e^{t^2/2c}\mathbb{E}\left[\left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}}|X|\right)^2 e^{cX^2/2}\right] \\
{\color{red}(**)}\quad &\leq 1 + \frac{t^2}{c}e^{t^2/2c}\mathbb{E}\left[\exp\left(c\frac{X^2}{2} + c\frac{X^2}{2}\right)\right] \\
&= 1 + \frac{t^2}{c}e^{t^2/2c}\mathbb{E}\left[\exp(cX^2)\right] \\
&\leq 1 + 2\frac{t^2}{c}e^{t^2/2c} \quad (\textit{car} \quad \mathbb{E}\left[\exp(cX^2)\right] \leq 2)
\end{aligned}$$

Pour $(*)$ *on utilise que pour* $a, b \geq 0$ *alors,* $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ *et donc :* $t|X| \leq \frac{t^2}{2c} + c\frac{X^2}{2}$
et pour $(**)$ *on utilise :* $x \leq \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(tX)] &\leq 1 + \frac{2t^2}{c}\exp\left(\frac{t^2}{2c}\right) \\
&\leq (1 + \frac{2t^2}{c})\exp\left(\frac{t^2}{2c}\right) \\
&\leq \exp\left(\frac{2t^2}{c}\right)\exp\left(\frac{t^2}{2c}\right) \\
&= \exp\left(\frac{5t^2}{2c}\right)
\end{aligned}$$

prenant $\alpha^2 = \frac{5}{c}$, *ainsi*

$$\mathbb{E}\left(e^{tX}\right) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

On déduit immédiatement de la preuve de ce théorème le corollaire suivant.

Corollaire 1.3.1. *Si $X \in Sub(\Omega)$, alors pour tout $t \geq 0$, on a*

$$\mathbb{P}\left(|X| \geq t\right) \leq 2e^{-t^2/2\alpha^2};$$

et

$$\mathbb{E}\left(e^{X^2/6\alpha^2}\right) \leq 2.$$

Le lemme suivant joue un rôle trés important dans la preuve du théorème (1.5.2).

Lemme 1.3.1. *[4] Si $X \in Sub(\Omega)$, alors on a :*

$$\mathbb{E}(|X|^p) \leq 2\,(p/e)^{p/2}\,\tau^p(X). \tag{1.8}$$

pour tout $p > 0$.
Inversement, si X est centrée et $\left(\mathbb{E}|X|^p\right)^{1/p} \leq C\alpha\sqrt{p}$ pour $p \geq 1$, alors $X \in Sub(\Omega)$.

Preuve. *Il est facile de voir que pour tout $p > 0$*

$$\max_{x\geq 0} x^p e^{-x} = (p/e)^p,$$

donc pour tout $x > 0$, $x^p \leq (p/e)^p e^x$. Posons maintenant $x = \lambda|X|, \lambda > 0$, et en prennant l'espérance, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X|^p) &\leq \left(\frac{p}{\lambda e}\right)^p \mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right)\\ &\leq 2\left(\frac{p}{\lambda e}\right)^p e^{\frac{\lambda^2\tau^2}{2}}\end{aligned}$$

Le terme de droite est optimal pour $\lambda = \frac{\sqrt{p}}{t}$, on obtient alors

$$\mathbb{E}(|X|^p) \leq 2\,(p/e)^{p/2}\,\tau^p(X).$$

Inverssement, supposons que X satisfait $\left(\mathbb{E}|X|^p\right)^{1/p} \leq C\alpha\sqrt{p}$ pour tout $p \geq 1$, alors, pour tout $a > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{aX^2}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n\mathbb{E}|X|^{2n}}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n\mathbb{E}|X|^{2n}}{n!}\\ &\leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n(C\alpha\sqrt{2n})^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n(C\alpha\sqrt{2n})^{2n}}{n!}\end{aligned}$$

Maintenant, il suffit de prendre a assez petit pour que $\mathbb{E}\left(e^{aX^2}\right) \leq 2$ et par le théorème (1.3.1) la variable $X \in Sub(\Omega)$.

Corollaire 1.3.2. *Soit $p > 0$ posons :*

$$L_0^p = \{X \in L^p \quad \textit{tel que} \quad \mathbb{E}(X) = 0\}.$$

et

$$L_0^\infty = \{X \in L^\infty \quad \textit{tel que} \quad \mathbb{E}(X) = 0\}.$$

alors :

$$L_0^\infty \subsetneq Sub(\Omega) \subsetneq L_0^p$$

Preuve. *Les variables centrées bornées forment une classe importante de variables aléatoires sous-gaussiennes (voir la partie exemples) d'où $L_0^\infty \subset Sub(\Omega)$. D'autre part, le lemme (1.3.1), montre que si X est sous-gaussienne, alors $\mathbb{E}|X|^p < +\infty$ pour tout $p > 0$, donc $Sub(\Omega) \subset L_0^p$.*
Montrons à présent que ces inclusions sont strictes. Pour la première inclusion, on a déjà vu que toute variable gaussienne centrée est une sous-gaussienne, mais, puisque $\forall M > 0$, $\mathbb{P}(|X| > M) \neq 0$, alors $X \notin L_0^\infty$. Maintenant, pour montrer que la deuxième inclusion est aussi stricte, on considère l'exemple suivant :
Soit X une v.a.r qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$. posons : $Y = X - \frac{1}{\lambda}$ donc $\mathbb{E}(Y) = 0$, et $\mathbb{E}(|Z|^p) \leq \frac{1}{\lambda^{p+1}} + \frac{\Gamma(p+1)}{\lambda^{p+1}e} < +\infty$ mais pour tout $a > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{aY^2}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{a(X-\frac{1}{\lambda})^2}\right) \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} e^{a(x-\frac{1}{\lambda})^2-\lambda x} dx \\
&= \lambda e^{-\frac{1}{a}\left(\frac{a}{\lambda}+\frac{\lambda}{2}\right)^2} \int_0^{+\infty} e^{a\left[x-\frac{1}{a}\left(\frac{a}{\lambda}+\frac{\lambda}{2}\right)\right]^2} dx = +\infty.
\end{aligned}$$

donc, il n'existe pas $a > 0$ pour que $\mathbb{E}\left(e^{aY^2}\right) \leq 2$. Ainsi, d'aprés le théorème (1.3.1), $Y \notin Sub(\Omega)$.

A présent on donne une deuxième caractérisation des variables sous-gaussiennes :

Théorème 1.3.2. *[4, pages 4 et 8] Soit X une v.a.r centrée, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$X \in Sub(\Omega)$;*
2. *$\exists \tau > 0$, $\exists Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \tau^2)$: $\exists c \geq 1$: $P(|X| \geq x) \leq cP(|Z| \geq x) \quad \forall x \geq 0$;*
3. *$\exists b \geq 0$: $\mathbb{E}(X^{2k}) \leq (2k)!b^{2k}/2^k k!$.*

Preuve. 1) $\Longrightarrow$ 2) *posons :*

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

alors :

$$\Phi'(z) = -z\Phi(z)$$

Soient $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1),\ z \geq 0$

$$\mathbb{P}(Z \geq z) = \int_z^{+\infty} \Phi(x)dx = \frac{1}{z}\Phi(z) - \frac{1}{z^3}\Phi(z) + \int_z^{+\infty} \frac{3}{x^4}\Phi(x)dx$$

Donc

$$\mathbb{P}(Z \geq z) \geq \Phi(z)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3}\right)$$

Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 2\alpha^2)$

$$\mathbb{P}(Z \geq t) = \mathbb{P}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}\alpha} \geq \frac{t}{\sqrt{2}\alpha}\right) \geq \left(\frac{\sqrt{2}\alpha}{t} - \frac{(\sqrt{2}\alpha)^3}{t^3}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{4\alpha^2}\right) \quad \forall t > 0$$

Si $t \in [0, 2\alpha]$*, alors*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z \geq t) \geq \mathbb{P}(Z \geq 2\alpha) &= \mathbb{P}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}\alpha} \geq \sqrt{2}\right) \\
&\geq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}^3}\right)\frac{e^{-1}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi}e}
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{P}(|Z| \geq t) = 2\mathbb{P}(Z \geq t) \geq 2\frac{\mathbb{P}(|X| \geq t)}{4\sqrt{\pi}e} = \frac{\mathbb{P}(|X| \geq t)}{2\sqrt{\pi}e} \quad \forall t \in [0, 2\alpha]$$

et on a

$$\frac{\mathbb{P}(|X| \geq t)}{\mathbb{P}(|Z| \geq t)} \leq 2\sqrt{\pi}e \quad \forall t \in [0, 2\alpha]$$

Si $t > 2\alpha$ *alors :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|Z| \geq t) = 2\mathbb{P}(Z \geq t) &= 2\mathbb{P}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}\alpha} \geq \frac{t}{\sqrt{2}\alpha}\right) \\
&\geq 2\left(\frac{\sqrt{2}\alpha}{t} - \frac{(\sqrt{2}\alpha)^3}{t^3}\right)\frac{\exp\left(-\frac{t^2}{4\alpha^2}\right)}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{P}(|X|\geq t)}{\mathbb{P}(|Z|\geq t)} &\leq \frac{\sqrt{2\pi}\exp\left(\frac{t^2}{4\alpha^2}\right)\mathbb{P}(|X|\geq t)}{2\left(\frac{\sqrt{2}\alpha}{t}-\frac{(\sqrt{2}\alpha)^3}{t^3}\right)}\\
&\leq \frac{\sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{t^2}{4\alpha^2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{t}-\frac{2\alpha^3}{t^3}\right)}\\
&\overset{t=\alpha s}{=} \frac{\sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{s^2}{4}\right)}{2\left(\frac{1}{s}-\frac{2}{s^3}\right)}\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{s^2-2}s^3\exp\left(-\frac{s^2}{4}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sup_{t>2\alpha}\frac{\mathbb{P}(|X|\geq t)}{\mathbb{P}(|Z|\geq t)\geq} &\leq \sup_{s>2}\frac{\sqrt{\pi}}{s^2-2}s^3\exp\left(-\frac{s^2}{4}\right)\\
&\overset{s^3\leq 4s\exp\left(\frac{s^2}{4}\right)}{\leq} \sup_{s>2}\frac{4s\sqrt{\pi}}{s^2-2}\\
&= 4\sqrt{\pi}\leq 2\sqrt{\pi}e
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\mathbb{P}(|X|\geq t)}{\mathbb{P}(|Z|\geq t)\geq} \leq 2\sqrt{\pi}e \qquad \forall t>2\alpha$$

2) $\Longrightarrow$ 3)
hypothèse : $\mathbb{E}(X)=0$ *et* $\exists Z\hookrightarrow\mathcal{N}(0,\tau^2),\exists c\geq 1$ *tels que pour tout* $x\geq 0$ *:*

$$\mathbb{P}(|X|\geq x)\leq c\mathbb{P}(|Z|\geq x)$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^{2k}) &= \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(X^{2k}>t)dt\\
&= \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(|X|>t^{\frac{1}{2k}})dt\\
&\leq \int_0^{+\infty}c\mathbb{P}(|Z|>t^{\frac{1}{2k}})dt\\
&= c\mathbb{E}(Z^{2k}) = \frac{c(2k)!\tau^2}{2^k k!}\\
&\overset{c\geq 1}{\leq} \frac{(2k)!(c\tau)^2}{2^k k!} \qquad \forall k=1,2,3...
\end{aligned}$$

3) $\Longrightarrow$ 1)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{tX}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{t^kX^k}{k!}\right)\\
&= 1+\sum_{k\geq 2}\frac{t^kE(X^k)}{k!}\\
&\leq 1+\sum_{k\geq 2}\frac{|t|^k\mathbb{E}(|X|^k)}{k!}
\end{aligned}
$$

Si X est symétrique alors $\mathbb{E}(X^{2k+1})=0$.
Par conséquent

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp(tX)) &= 1+\sum_{k\geq 1}\frac{t^{2k}\mathbb{E}(X^{2k})}{(2k)!}\\
&\leq 1+\sum_{k\geq 1}\frac{t^{2k}}{(2k)!}\frac{(2k)!b^{2k}}{2^kk!}\\
&= 1+\sum_{k\geq 1}\left(\frac{(bt)^2}{2}\right)^k\frac{1}{k!}\\
&= \exp\left(\frac{(bt)^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Si X est n'est pas symétrique alors, par l'inégalité de Cauchy-schwarz et l'inegalité de Young, on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}|tX|^{2k+1} &= \mathbb{E}|tX|^k|tX|^{k+1}\\
&\leq \left(\mathbb{E}|tX|^{2k}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}|tX|^{2k+2}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}|tX|^{2k}+\mathbb{E}|tX|^{2k+2}\right)
\end{aligned}
$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp(tX)) &\leq 1+\sum_{k\geq 1}\frac{t^{2k}\mathbb{E}(X^{2k})}{(2k)!}+\sum_{k\geq 1}\frac{t^{2k+1}\mathbb{E}(X^{2k+1})}{(2k+1)!} \quad (\mathbb{E}(X)=0)\\
&\leq 1+\sum_{k\geq 1}\frac{t^{2k}\mathbb{E}(X^{2k})}{(2k)!}+\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\frac{t^{2k}\mathbb{E}(X^{2k})}{(2k+1)!}+\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\frac{t^{2k+2}E(X^{2k+2})}{(2k+1)!}\\
&= 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3!}\right)t^2\mathbb{E}(X^2)+\sum_{k\geq 2}\frac{t^{2k}\mathbb{E}(X^{2k})}{(2k)!}+\frac{1}{2}\sum_{k\geq 2}\frac{t^{2k}\mathbb{E}(X^{2k})}{(2k+1)!}\\
&+\sum_{k\geq 2}\frac{t^{2k}\mathbb{E}(X^{2k})}{(2k-1)!}\\
&\leq 1+t^2\mathbb{E}(X^2)+\\
&\sum_{k\geq 2}\left[\frac{1}{(2k)!}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2k-1)!}+\frac{1}{(2k+1)!}\right)\right]t^{2k}\mathbb{E}(X^{2k})\\
&\leq 1+t^2\mathbb{E}(X^2)+\sum_{k\geq 2}\frac{2^k}{(2k)!}t^{2k}\mathbb{E}(X^{2k})\\
&\leq \sum_{k\geq 0}\frac{2^k}{(2k)!}t^{2k}\frac{(2k)!b^{2k}}{2^k k!}\\
&= \sum_{k\geq 0}\left(\frac{(\sqrt{2}tb)^2}{2}\right)\frac{1}{k!}\\
&= \exp\left(\frac{(\sqrt{2}tb)^2}{2}\right) \quad cqfd
\end{aligned}$$

On a le théorème suivant :

Théorème 1.3.3. *[4, page 10] Supposons que $X_1, X_2, ..., X_n \in Sub(\Omega)$, alors on a*

$$\tau(\sum_{k=1}^{n} X_k) \leq \sum_{k=1}^{n}\tau(X_k) \tag{1.9}$$

Si on suppose de plus que les v.a $X_1, X_2, ..., X_n$ sont indépendantes, alors

$$\tau^2(\sum_{k=1}^{n} X_k) \leq \sum_{k=1}^{n}\tau^2(X_k) \tag{1.10}$$

et

$$\tau(\sum_{k=m_1}^{m_2} X_k) \leq \tau(\sum_{k=1}^{n} X_k) \qquad \forall 1\leq m_1 < m_2 \leq n. \tag{1.11}$$

Preuve. *L' inégalité* (1.9) *est une conséquence immédiate du fait que* $Sub(\Omega)$ *est un espace de Banach.*
Supposons maintenant que $X_1, X_2, ..., X_n$ *sont indépendants, on aura donc pour tout* $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\left(\exp(t\sum_{k=1}^{n} X_k)\right) \leq \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\exp(tX_k)] \leq \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{t^2\tau^2(X_k)}{2}\right)$$

D'autre part, l'inégalité de Jensen nous donne

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \geq e^{t\mathbb{E}(X)} = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp(t\sum_{k=m_1}^{m_2} X_k)\right) &= \prod_{k=m_1}^{m_2} \mathbb{E}\left(\exp(tX_k)\right) \leq \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\exp(tX_k)\right) = \mathbb{E}\exp\left(t\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\\ &\leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\tau^2(X_k)\right)\end{aligned}$$

1.4 Quelques inégalités de concentration

On dit qu'une variable est concentrée lorsqu'elle reste proche d'une quantité déterministe (sa moyenne ou sa médiane par exemple) avec une grande probabilité. L'inégalité de concentration de Hoeffding fait partie de ces beaux outils mathématiques à la fois simples et utiles. Elle mérite d'être connue par tous ceux qui s'intéressent aux probabilités.
Les résultats suivants peuvent être trouvés dans [4, page 11].

Théorème 1.4.1. *Supposons que* $X_1, X_2, ..., X_n \in Sub(\Omega)$*, indépendantes. Posons* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ *alors, pour tout* $t \geq 0$

$$\mathbb{P}(S_n \geq t) \leq G_n(t), \quad \mathbb{P}(S_n \leq -t) \leq G_n(t) \tag{1.12}$$

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq t) \leq 2G_n(t) \tag{1.13}$$

avec

$$G_n(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sum_{k=1}^{n}\tau^2(X_k)}\right)$$

De plus si : $\tau(X_k) \leq b \quad k = 1, 2, ..., n$ *alors*

$$G_n(t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2b^2n}\right)$$

Preuve. *D'aprés le théorème (1.2.1),* $S_n \in Sub(\Omega)$ *et par* (1.10) $\tau^2(S_n) \leq \sum_{k=1}^n \tau^2(X_k)$, *ainsi le théorème (1.3.1) nous donne la conclusion .*

Corollaire 1.4.1. *Supposons que* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a indépendantes SG et* $(c_n)_{n\geq 1}$ *une suite de réels positives, alors* $t \geq 0, \forall n \geq 1$

$$\mathbb{P}(S_n \geq c_n t) \leq \widetilde{G}_n(t), \quad \mathbb{P}(S_n \leq -c_n t) \leq \widetilde{G}_n(t)$$

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq c_n t) \leq 2\widetilde{G}_n(t)$$

avec

$$\widetilde{G}_n(t) = \exp\left(\frac{-c_n^2 t^2}{2\sum_{k=1}^n \tau^2(X_k)}\right)$$

Si de plus $\sqrt{2\sum_{k=1}^n \tau^2(X_k)} \leq c_n$ *alors*

$$\widetilde{G}_n(t) \leq \exp(-t^2)$$

L'inégalité de Hoeffding va permettre de contrôler des déviations de variables bornées sans aucunes hypothèses sur la loi.

Corollaire 1.4.2 (Inégalité de Hoeffding)**.** *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a.r indépendantes centrées (non nécessairement de même loi). On suppose que pour tout indice* $k \geq 1$, $\mathbb{P}(a_k \leq X_k \leq b_k) = 1$ *avec* $a_k \leq b_k$. *Soit* $n \geq 1$, *posons*

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Alors pour tout $t \geq 0$

$$\mathbb{P}(S_n \geq t) \leq \overline{G}_n(t), \quad \mathbb{P}(S_n \leq -t) \leq \overline{G}_n(t)$$

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq t) \leq 2\overline{G}_n(t)$$

avec

$$\overline{G}_n(t) = \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2}\right).$$

Preuve. *Puisque* $(X_n)_{n\geq 1}$ *et* $(S_n)_{n\geq 1}$ *sont centrées et bornées, elles sont dans* $Sub(\Omega)$, *de plus*

$$\tau^2(X_k) \leq \frac{(b_k - a_k)^2}{4}$$

et comme $(X_n)_{n\geq 1}$ *sont indépendantes, alors par l'inégalité* (1.10), *on obtient*

$$\tau^2(S_n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{(b_k - a_k)^2}{4}.$$

maintenant, en appliquant le théorème (1.3.1), on obtient les résultats cherchées.

1.5 Les espaces d'Orlicz

Les espaces $(L^p(\Omega), ||\cdot||_p)$ sont des espaces de Banach. Dans leur définition même, il apparaît la fonction homogène $M(u) = |u|^p$. Les espaces d'Orlicz constituent une classe d'espaces plus large que les espaces $L^p(\Omega)$. Leur construction est basée sur la généralisation de cette fonction M.
A présent, on rappelle la notion de convexité qui sera trés utile par la suite.

Définition 1.5.1. *Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$, on a*

$$f(\alpha t + (1-\alpha)s) \leq \alpha f(t) + (1-\alpha)f(s) \quad \forall s, t \in I.$$

Lorsque l'inégalité est stricte (avec t différent de s et α dans $]0,1[$), on parle de fonction strictement convexe.

Définition 1.5.2. *Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction (non nécessairement convexe), sa fonction conjuguée est la fonction $f^* : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie en $t \in E$ par :*

$$f^*(t) = \sup_{s>0} \left(ts - f(s)\right).$$

La fonction f^* conjugée de f est une fonction convexe, même si f ne l'est pas.

La fonction f^* joue un rôle important dans la définition de l'espace dual de l'espace d'Orlicz.

Remarques 1.5.1. *L'application $f \longmapsto f^*$ est appelée transformation de Legendre-Fenchel de f.*

Une généralisation de la fonction définie par $M(u) = |u|^p$, est donnée par les classes de fonctions suivante :

Définition 1.5.3. *([17])Soit $\Phi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ une fonction croissante, convexe qui vérifie les conditions suivantes :*

$$\Phi(0) = \lim_{t\to 0^+} \Phi(t) = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{t\to+\infty} \Phi(t) = +\infty.$$

alors Φ est dite fonction de Young.

Exemples 1.5.1. *Les fonctions suivantes sont des fonctions de Young :*

1. $\Phi(t) = \frac{t^p}{p}$, $1 < p < +\infty$;
2. $\Phi(t) = e^{t^\beta} - 1$, $t \geq 0$, $\beta > 0$;
3. $\Phi(t) = \cosh t - 1, t \geq 0$.

4. *Soit* Φ *la fonction définie pour tout* $a > 0$, *par*

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0, & si \quad 0 \leq t < a \\ t - a, & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

alors, Φ *est une fonction de Young.*

5. *Soit* Φ *la fonction définie par*

$$\Phi(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 \leq t < 1, \\ +\infty & si \quad t \geq 1. \end{cases}$$

alors, Φ *est une fonction de Young.*

Maintenant, on peut introduire la notion d'espace d'Orlicz.

Définition 1.5.4. *[18] Soit* $\Phi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ *une fonction de Young, on définit l'espace d'Orlicz* $L^{\Phi}(\Omega)$ *associée à cette fonction par*

$$L^{\Phi}(\Omega) = \{X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, v.a.r \text{ et } \exists \alpha > 0, \mathbb{E}\Phi(\alpha|X|) < +\infty\}.$$

Définition 1.5.5. *(La norme de Luxemburg [18, page 68]) Soit* Φ *une fonction de Young, et* $X \in L^{\Phi}(\Omega)$. *On définit alors la norme d'Orlicz de* X *par*

$$||X||_{\Phi} = \inf\left\{C > 0 : \mathbb{E}\Phi\left(\frac{|X|}{C}\right) \leq 1\right\}. \tag{1.14}$$

L'espace $L^{\Phi}(\Omega, ||\cdot||_{\Phi})$ est un espace de Banach muni de la norme de Luxemburg.

Remarques 1.5.2. *Par la suite et sauf indication contraire, on désigne par* Ψ *la fonction de Young définie pour tout* $t \geq 0$, *par :*

$$\Psi(t) = e^{t^2} - 1$$

Proposition 1.5.1. *Soit* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *une v.a.r centrée, et* Ψ *la fonction de Young définie précédemment, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $X \in Sub(\Omega)$.
2. $X \in L^{\Psi}(\Omega, || \cdot ||_{\Psi})$.

Preuve. *Soit* $\tau(X)$ *le standart de* X. *Le corollaire (1.3.1), montre que si* $X \in Sub(\Omega)$ *de paramètre* $\tau(X)$ *alors :*

$$\mathbb{E}\left(e^{X^2/6\tau^2(X)}\right) \leq 2;$$

d'autre part :

$$\mathbb{E}\left(e^{X^2/6\tau^2(X)}\right) \leq 2 \Longleftrightarrow \mathbb{E}\left\{\Psi\left(\frac{|X|}{\sqrt{6}\tau(X)}\right)\right\} \leq 1$$

ce qui prouve la proposition.

Les deux propositions suivantes ont pour but de faire une étude comparative des normes $\tau(\cdot)$ et $||\cdot||_\Psi$.

Proposition 1.5.2. *[8] Si X est une v.a.r sous-gaussienne, alors on a :*

$$||X||_\Psi \leq \sqrt{2+2\sqrt{2}}\tau(X).$$

Preuve. *Par l'inégalité* (1.8)*, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{E}(|X|^k) \leq 2\left(\frac{k}{e}\right)^{k/2} \tau^k(X) \tag{1.15}$$

Soit $a > 0$ (fixé), par (1.15) *on obtient*

$$\mathbb{E}\left(e^{X^2/a^2}\right) = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!}\mathbb{E}X^{2k}\frac{1}{a^{2k}} \leq 1 + 2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\frac{(2k)^k}{e^k}\tau^{2k}(X)\frac{1}{a^{2k}} \tag{1.16}$$

par la formule de Stirling

$$n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\Pi n}$$

d'où

$$\frac{n^n}{e^n n!} = \frac{1}{\sqrt{2\Pi n}} \leq \frac{1}{e} < \frac{1}{2} \tag{1.17}$$

On réinjecte tout ça dans l'équation (1.16) *pour obtenir*

$$\mathbb{E}\left(e^{X^2/a^2}\right) \leq 1 + \sum_{k\geq 1}\frac{(2k)!}{k!(2k)^k}e^k\tau^{2k}(X)\frac{1}{a^{2k}}$$

par la formule de Stirling , il est facile de voir que

$$\frac{(2k)!}{k!(2k)^k} \leq 2^k\sqrt{2}e^{-k}$$

d'où

$$\mathbb{E}\left(e^{X^2/a^2}\right) \leq 1 + \sqrt{2}\sum_{k\geq 1}\sum_{k\geq 1}\left(\frac{2\tau^2(X)}{a^2}\right)^k$$

pour $a > \sqrt{2}\tau(X)$, on obtient

$$\mathbb{E}\left(e^{X^2/a^2}\right) \leq 1 + \sqrt{2}\frac{2\tau^2(X)}{a^2 - 2\tau^2(X)}$$

maintenant, pour $a \geq \sqrt{(2+2\sqrt{2})}\tau(X)$, on obtient

$$\mathbb{E}\left(e^{X^2/a^2}\right) \leq 2,$$

ainsi, on conclut que

$$||X||_\Psi \leq \sqrt{(2+2\sqrt{2})}\tau(X)$$

Proposition 1.5.3. *[8] Pour toute variable $X \in Sub(\Omega)$, on a :*

$$\tau(X) \leq 2\sqrt{2}||X||_{\Psi}.$$

Définitions 1.5.1.

1. [13]Soient P et Q deux fonctions. On dit que Q domine P et l'on écrit $P \prec Q$ s'il existe une constante $c > 0$ et un réel t_0 tels que :

$$P(t) \leq Q(ct); \quad \forall |t| \geq t_0. \tag{1.18}$$

2. Deux fonctions P et Q sont dites équivalentes et l'on écrit $P \sim Q$ si chacune domine l'autre.

Remarques 1.5.3.

1. Si $P \prec Q$ alors, pour tout réel $t_0 > 0$, il existe une constante $c = c(t_0) > 0$ tels que (1.18) est vérifie.
2. Deux fonctions équivalentes à l'infini définissent le même espace d'Orlicz.

1.6 Les N-fonctions

Dans cette section, on se borne à rappeler quelques concepts et outils fondamentaux de la théorie des N-fonctions qui seront utiles par la suite.

Définition 1.6.1. *[13, page 7] On dit que $\Phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une N-fonction si Φ est continue, convexe avec $\Phi(t) > 0$ pour $t > 0$, $\frac{\Phi(t)}{t} \longrightarrow 0$ quand $t \to 0$ et $\frac{\Phi(t)}{t} \longrightarrow +\infty$ quand $t \to +\infty$.*

Remarques 1.6.1. *Si Φ est une N-fonction, alors Φ est une fonction de Young . La réciproque est fauuse en général, en effet : soit $\Phi : t \mapsto e^t - 1$, il est clair que Φ est une fonction de Young , mais*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\Phi(t)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \neq 0.$$

Dans la proposition suivante, on introduit une caractérisation des N-fonctions.

Proposition 1.6.1. *[13, page 9]Si Φ est une N-fonction, alors il est équivalent de dire que Φ admet la représentation : $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds$ où, $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante, continue à droite avec $\varphi(0) = 0$; $\varphi(t) > 0$ pour $t > 0$ et $\varphi(t)$ tend vers $+\infty$ quand $t \longrightarrow +\infty$.*

Exemples 1.6.1. *Comme exemples de N-fonctions on peut citer :*

1. $\Phi(t) = \frac{t^p}{p}$, $1 < p < +\infty$ *où* $\varphi(t) = t^{p-1}$.
2. $\Phi(t) = e^t - t - 1$, *où* $\varphi(t) = e^t - 1$.
3. $\Phi(t) = (1+t)\log(1+|t|) - |t|$.
4. $\Phi(t) = e^{at^p} - 1, \quad a > 0, p > 1$.
5. $\Phi(t) = \begin{cases} \left(\frac{ep}{2}\right)^{2/p} x^2, & si \quad |x| \leq \left(\frac{2}{p}\right)^{1/p} \\ e^{|x|^p}, & si \quad |x| > \left(\frac{2}{p}\right)^{1/p}, 0 < p < 1 \end{cases}$

A présent, on introduit une notion, qui joue un rôle trés important dans la définition des variables Φ-gaussiennes.

Définition 1.6.2. *Soit* Φ *une N-fonction, on dit que* Φ *satisfait la conditon* ***Q*** *si :*

$$\liminf_{x \to 0} \frac{\Phi(x)}{x^2} = c \in]0, +\infty). \tag{1.19}$$

Lemme 1.6.1. *Soit* Φ *une N-fonction, et* Φ^* *la conjuguée de* Φ*, alors on a*

1. Φ^* *est une N-fonction.*
2. *On a l'inégalité de Young-Fenchel suivante :*

$$st \leq \Phi(s) + \Phi^*(t) \quad \forall s, t > 0. \tag{1.20}$$

3. *Si* $s > 0$*, alors* $\Phi^*(s) = \sup_{t>0} \{st - \Phi(t)\}$ *et* $\Phi^*(-s) = \Phi^*(s)$.

Théorème 1.6.1. *Soit* Φ *une N-fonctions, alors il existe une autre N-fonction* Ψ *qui satisfait la condition* ***Q*** *telle que :* $\Phi \sim \Psi$.

On a le lemme suivant.

Lemme 1.6.2. *[4, 13]Soit* Φ *une N-fonctions, alors on a les assertions suivantes :*

a) $\Phi(\alpha t) \leq \alpha\phi(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* $0 \leq \alpha \leq 1$ *;*

b) $\Phi(\alpha t) \geq \alpha\phi(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* $\alpha > 1$ *;*

c) $\Phi(|s| + |t|) \geq \Phi(s) + \Phi(t), \forall s, t \in \mathbb{R}$.

1.7 L'espace des variables aléatoires Φ−gaussiennes

La notion des variavles Φ-sous-gaussiennes est une généralisation des variables sous-gaussiennes. Dans tout ce qui suit Φ désignera une N-fonction qui vérifie la condition **Q**.

Définitions 1.7.1.

1. On dit que la variable aléatoire $M \in Sub_{\Phi}(\Omega)$ si $\mathbb{E}(M) = 0$, $\mathbb{E}\left(e^{\lambda M}\right)$ existe pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda M}\right) \leq e^{\Phi(\lambda a)}. \tag{1.21}$$
On note par la suite $Sub_{\Phi}(\Omega)$, l'ensemble des v.a.r qui vérifient l'inégalité (1.21).
2. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique. On dit que $(M_t)_{t\geq 0} \subset Sub_{\Phi}(\Omega)$ si pour tout $t \geq 0$, $M_t \in Sub_{\Phi}(\Omega)$.

Remarques 1.7.1. *On peut répéter le même raisonnement qu'on a fait avec les variables sous-gaussiennes pour prouver que toute variable sous-gaussienne est centrée. D'autre part, la condition* ***Q*** *est trés importante, en effet, si on fait un développement de Taylor, on a*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{\lambda M}\right) &= 1 + \frac{\lambda^2}{2}\mathbb{E}(M^2) + o(\lambda^2)\\ &\leq e^{\Phi(\lambda a)} = 1 + \Phi(\lambda a) + o(\Phi(\lambda a)).\end{aligned}$$

ce qui implique
$$\frac{1}{2}\mathbb{E}(M^2) \leq \frac{\Phi(\lambda a)}{\lambda^2} + \frac{o(\Phi(\lambda a))}{\lambda^2}$$
si on a
$$\liminf_{\lambda\to 0} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^2} = 0$$
alors, il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$ *et*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Phi(\lambda_n a)}{\lambda_n^2} = 0$$
ce qui implique que $\mathbb{E}(M^2) = 0$*, et donc la variable* M *est nulle presque sûrement. Ainsi, on peut pas affaiblir la condition* ***Q****.*

On a besoin d'introduire la définition du standart associé à une variable Φ-gaussienne.

Définition 1.7.1. *Soit* $M \in Sub_{\Phi}(\Omega)$*, on notera* $\tau_{\Phi}(M)$ *le plus petit réel* $a \geq 0$ *satisfaisant l'inégalité* (1.21)*,*
$$\tau_{\Phi}(M) = \inf\left\{a \geq 0 : \mathbb{E}\left(e^{\lambda M}\right) \leq e^{\Phi(\lambda a)}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}. \tag{1.22}$$
De même, pour tout processus stochastique $(M_t)_{t\geq 0} \subset Sub_{\Phi}(\Omega)$*, on définit l'application* $\tau_{\Phi} : t \longmapsto \tau_{\Phi}(M_t)$*, pour tout* $t \geq 0$*.*

On a le lemme suivant :

Lemme 1.7.1. *Soient $M \in Sub_\Phi(\Omega)$, $\tau_\Phi(M) > 0$ et $\varepsilon > 0$, alors on a les inégalités suivantes :*

$$\mathbb{P}(M > \varepsilon) \leq \exp\left\{-\Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\tau_\Phi(M)}\right)\right\};$$
$$\mathbb{P}(M < -\varepsilon) \leq \exp\left\{-\Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\tau_\Phi(M)}\right)\right\};$$
$$\mathbb{P}(|M| > \varepsilon) \leq 2\exp\left\{-\Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\tau_\Phi(M)}\right)\right\}.$$

Preuve. *Soit $\varepsilon > 0$, par l'inégalité de Markov et l'inégalité* (1.21), *on obtient alors pour tout $\lambda > 0$*

$$\mathbb{P}(X > \varepsilon) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda X} > e^{\lambda\varepsilon}\right) \leq \frac{E\exp\{\lambda X\}}{\exp(\lambda\varepsilon)} \leq \exp\{\Phi(\lambda\tau_\Phi(X)) - \lambda\varepsilon\}$$

cette dernière inégalité étant valable pour tout $\lambda > 0$ et le premier membre ne dépendant pas de λ, il en résulte que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > \varepsilon) &\leq \inf_{\lambda>0} \exp\{\Phi(\lambda\tau_\Phi(X)) - \lambda\varepsilon\}\\ &= \exp\{-\sup_{\lambda>0}\{\lambda\varepsilon - \Phi(\lambda\tau_\Phi(X))\}\}\\ &= \exp\left\{-\sup_{\lambda>0}\left\{\frac{\varepsilon}{\tau_\Phi(X)}\lambda\tau_\Phi(X) - \Phi(\lambda\tau_\Phi(X))\right\}\right\}\\ &= \exp\left\{-\Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\tau_\Phi(X)}\right)\right\}\end{aligned}$$

la première inégalité de ce lemme est prouvé. La deuxième inégalité peut être prouvé de la même manière. La troisième inégalité suit de

$$\mathbb{P}(|X| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X > \varepsilon) + \mathbb{P}(X < -\varepsilon).$$

Théorème 1.7.1. *$Sub_\Phi(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme $\tau_\Phi(\cdot)$.*

Preuve. *Pour prouver ce théorème, on procède comme on a fait avec le théorème (1.2.1).*

Remarques 1.7.2. *Si $\Phi(x) = x^2/2$, alors $Sub_\Phi(\Omega) = Sub(\Omega)$.*

Lemme 1.7.2. *Soit M une v.a.r centrée telle que $\mathbb{E}\left(e^{\lambda M}\right) = a(\lambda)$ existe pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*

(i)

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda M}\right) \geq 1; \tag{1.23}$$

(ii) *Tout les moments absolues $\mathbb{E}(|M|^p)$, $p > 0$ existent, de plus on a*

$$\mathbb{E}\exp|M|^p \leq \left(\frac{p}{e}\right)^p \inf_{\lambda>0} \frac{a(\lambda)+a(-\lambda)}{\lambda^p}. \tag{1.24}$$

(iii) *La fonction $\psi(\lambda) = \ln(a(\lambda))$ est convexe, de plus pour tout réel t_0 et $|\lambda| < t_0$ il existe une constante $T = T(t_0)$ tels que*

$$\mathbb{E}\exp(\lambda M) \leq \exp(T\lambda^2) \tag{1.25}$$

avec

$$T = \sup_{|\lambda|\leq t_0} \frac{\ln\left(\mathbb{E}\exp(\lambda M)\right)}{\lambda^2} < +\infty.$$

Preuve.

(i) Par l'inégalité de Jensen, on a

$$\mathbb{E}\exp(\lambda M) \geq \exp(\lambda\mathbb{E}(M)) = 1;$$

(ii) il facile de prouver que

$$\max_{t\geq 0} t^p e^{-t} = \left(\frac{p}{e}\right)^p \quad \forall p > 0;$$

alors, pour tout $t > 0$, $p > 0$ on a

$$t^p \leq \left(\frac{p}{e}\right)^p e^t;$$

posons maintenant $t = |\lambda M|$ et en prennant l'espérence, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\lambda M|^p &\leq \left(\frac{p}{e}\right)^p \mathbb{E}\exp(|\lambda M| \leq\leq \left(\frac{p}{e}\right)^p (\mathbb{E}\exp(\lambda M) + (-\mathbb{E}\exp(\lambda M) \\ &= \left(\frac{p}{e}\right)^p (a(\lambda)+a(-\lambda)).\end{aligned}$$

(iii) Aprés calcul, on trouve que

$$\psi''(\lambda) = \frac{a''(\lambda)a(\lambda) - (a'(\lambda))^2}{a^2(\lambda)};$$

et par l'inégalité de Hölder, on trouve

$$(a'(\lambda))^2 = \left[\mathbb{E}\left(Me^{\lambda M}\right)\right]^2 \leq \mathbb{E}\left(M^2e^{\lambda M}\right)\mathbb{E}\left(e^{\lambda M}\right) = a''(\lambda)a(\lambda),$$

ce qui montre que $\psi''(\lambda) \geq 0$ et par conséquent $\psi(\lambda)$ est convexe. De plus, pour tout $|\lambda| \leq t_0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{\lambda M}\right) &= e^{\frac{\ln\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda M}\right)\right)}{\lambda^2}\lambda^2} \\ &\leq e^{T\lambda^2}\end{aligned}$$

Théorème 1.7.2. *Soient Φ_1 et Φ_2 deux N-fonctions telles que $\Phi_1 \prec \Phi_2$. Supposons que $M \in Sub_{\Phi_1}(\Omega)$ alors, $M \in Sub_{\Phi_2}(\Omega)$, de plus il existe une constante $c(\Phi_1, \Phi_2)$ telle que*

$$\tau_{\Phi_2}(M) \leq c(\Phi_1, \Phi_2)\tau_{\Phi_1}(M).$$

Preuve. *Comme on a déjà vu, $\Phi_1 \prec \Phi_2$ entraîne que pour tout réel $t_0 > 0$, il existe une constante $c = c(t_0) > 0$ telle que*

$$\Phi_1(t) \leq \Phi_2(ct) \quad \forall t \geq t_0.$$

Soit $M \in Sub_{\Phi_1}(\Omega)$, posons $\tau_1 = \tau_{\Phi_1}(M)$; alors pour tout réel λ tel que $|\lambda|\tau_1 \geq t_0$ on a

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda M}\right) \leq \exp\left(\Phi_1(\lambda\tau_1)\right) \leq \exp\left(\Phi_2(\lambda c\tau_1)\right) \tag{1.26}$$

Soit $|\lambda| \leq t_0/\tau_1$; alors par l'inégalité (1.25), il existe $B(t_0)$ tel que pour tout $|\lambda| \leq t_0/\tau_1$ on a

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda M}\right) \leq \exp(B(t_0)\tau_1^2\lambda^2) \tag{1.27}$$

ou

$$B(t_0) = \sup_{|\lambda| \leq \frac{t_0}{\tau_1}} \frac{\ln(\mathbb{E}\exp(\lambda M))}{\tau_1^2\lambda^2} < +\infty.$$

et comme la fonction Φ_2 vérifie la condition ***Q****, alors il existe un réel z_0 et une constante c_1 tels que pour tout $|t| \leq z_0$ on a*

$$\Phi_2(t) \geq c_1 t^2$$

A présent, soit t_0 un réel vérifiant $t_0\left(B(t_0)\right)^{1/2}/c_1 \leq z_0$, alors par (1.27) on obtient pour tout $|\lambda| \leq t_0/\tau_1$

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda M}\right) \leq \exp\left(c_1\frac{B(t_0)}{c_1}\tau_1^2\lambda^2\right) \leq \exp\left\{\Phi_2\left(\lambda\tau_1\left(\frac{B(t_0)}{c_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right\} \tag{1.28}$$

et comme

$$|\lambda|\tau_1\left(\frac{B(t_0)}{c_1}\right)^{\frac{1}{2}} \leq t_0\tau_1\left(\frac{B(t_0)}{c_1}\right)^{\frac{1}{2}} \leq z_0.$$

En combinant (1.26) *et* (1.28), *on conclut que*

$$\mathbb{E}\exp(\lambda M) \leq \exp \Phi_2(\tau_1)L\lambda$$

où

$$L = \max\left(\left(\frac{B(t_0)}{c_1}\right)^{\frac{1}{2}}, c\right)$$

ainsi $M \in Sub_{\Phi_2}(\Omega)$ *et* $\tau_{\Phi_2}(M) \leq L\tau_{\Phi_1}(M)$.

Chapitre 2

Séries de variables aléatoires sous-gaussiennes

2.1 Variables aléatoires négativement dépendantes

L'indépendance est une notion très importante en théorie de probabilités, cependant dans de nombreuses situations les variables aléatoires considérées sont dépendantes, de nombreux mathématiciens ont alors proposé des concepts de dépendance afin de remédier à ce problème. Dans ce chapitre on s'intéresse à la notion de dépendance négative introduite par Lehmann en 1966, notre principale référence pour cette partie est [19].

Définition 2.1.1. *On dira que les v.a.r $X_1, X_2, ..., X_n$ sont négativement dépendantes (ND) si :* $\forall x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{n}\{X_j \leq x_j\}) \leq \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j \leq x_j) \tag{2.1}$$

et

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{n}\{X_j > x_j\}) \leq \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j > x_j) \tag{2.2}$$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r, on dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ est ND si : $\forall i_1, i_2, ..., i_n \in \mathbb{N}$, *$X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_n}$ sont ND.*

Remarques 2.1.1.

1. [14] Les conditions (2.1) et (2.2) sont équivalentes pour $n = 2$. En effet ;

supposons (2.1)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y) &= [1 - \mathbb{P}(X \leq x)][1 - \mathbb{P}(Y \leq y)] \\
&= 1 - [\mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(Y \leq y) + \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)] \\
&\geq 1 - [\mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(Y \leq y) + \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)] \\
&= 1 - \mathbb{P}(\{X \leq x\} \cup \{Y \leq y\}) \\
&= \mathbb{P}(X > x, Y > y)
\end{aligned}$$

Maintenant supposons (2.2)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y) &= [1 - \mathbb{P}(X > x)][1 - \mathbb{P}(Y > y)] \\
&= 1 - [\mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(Y > y) + \mathbb{P}(X > x)P(Y > y)] \\
&\geq 1 - [\mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(Y > y) + \mathbb{P}(X > x, Y > y)] \\
&= 1 - \mathbb{P}(\{X > x\} \cup \{Y > y\}) \\
&= \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)
\end{aligned}$$

2. [6] Si $n > 2$ alors (2.1) et (2.2) ne sont pas toujours équivalentes, en effet il suffit de voir l'exemple de Ebrahimi et Ghosh. Soient X_1, X_2, X_3 des v.a.r chacune suit la loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ et (X_1, X_2, X_3) prennent les valeurs $(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)$ et $(0,0,0)$ chacunes avec une probabilité $\frac{1}{4}$, alors $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2, X_3 > x_3) \leq \mathbb{P}(X_1 > x_1)\mathbb{P}(X_2 > x_2)\mathbb{P}(X_3 > x_3)$$

mais

$$\mathbb{P}(X_1 \leq 0, X_2 \leq 0, X_3 \leq 0) = \frac{1}{4} > \frac{1}{8} = \mathbb{P}(X_1 \leq 0)P(X_2 \leq 0)P(X_3 \leq 0)$$

3. [19] On peut voir aisément que si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des v.a.r indépendantes donc elles sont ND, la réciproque est fausse en général, et pour montrer ça il suffit de prendre X une v.a à support dans $\mathbb{R}$, posons $Y = -X$ alors Y et X sont ND sans être indépendantes, en effet ; soient $x, y \in \mathbb{R}$. Si $-y \leq x$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) &= \mathbb{P}(-y \leq X \leq x) \\
&= \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \leq -y) \\
&\leq \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \leq -y)\mathbb{P}(X \leq x) \\
&= \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)\left[\frac{1}{\mathbb{P}(Y \leq y)} - \frac{\mathbb{P}(X \leq -y)}{\mathbb{P}(Y \leq y)}\right] \\
&= \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)\left[\frac{1 - \mathbb{P}(X \leq -y)}{\mathbb{P}(Y \leq y)}\right] \\
&\leq \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y).
\end{aligned}$$

Si $-y > x$

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = 0 \leq \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y).$$

On donne, maintenant, un autre exemple concernant les variables négativement dépendantes.

Exemples 2.1.1. *La loi multinomiale concerne le nombre de succés dans n épreuves de Bernoulli donnant chacune m résultats possibles. Les variables deviennent $X_i, i = \{1, ..., m\}$ et correspondants aux probabilités p_i avec les contraintes*

$$\sum_{i=1}^{m} X_i = n \quad et \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

La fonction de probabilité s'écrit alors, sous la condition portant sur la somme des variables

$$\mathbb{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2, ..., X_m = k_m) = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_2^{k_m} \mathbb{1}_{\sum_{i=1}^{m} x_i = n}$$

Chacune des variables X_i reste une variable binomiale $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_i)$.
prenant $p_1 = ... = p_m = p$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_1 \leq k_1, X_2 \leq k_2, ..., X_m \leq k_m) \\
&= \sum_{x_1=0}^{k_1} ... \sum_{x_m=1}^{k_m} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_m = x_m) \\
&= \sum_{x_1=0}^{k_1} ... \sum_{x_m=1}^{k_m} \frac{n!}{x_1!...x_m!} p^m \mathbb{1}_{\sum_{i=1}^{m} x_i = n}
\end{aligned}$$

D'autre part, comme on a : $(n!)^{m-1} \geq \prod_{i=1}^{m} (n - x_i)! \quad \forall x_i \leq n$, alors

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X_i \leq k_i) \\
&= \sum_{x_1=0}^{k_1} ... \sum_{x_m=1}^{k_m} C_n^{x_1} ... C_n^{x_m} p^m (1-p)^{n - \sum_{i=0}^{m} x_i} \\
&\geq \sum_{x_1=0}^{k_1} ... \sum_{x_m=1}^{k_m} C_n^{x_1} ... C_n^{x_m} p^m (1-p)^{n - \sum_{i=0}^{m} x_i} \mathbb{1}_{\sum_{i=1}^{m} x_i = n} \\
&\geq \sum_{x_1=0}^{k_1} ... \sum_{x_m=1}^{k_m} \frac{n!}{x_1!...x_m!} p^m \mathbb{1}_{\sum_{i=1}^{m} x_i = n} \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leq k_1, X_2 \leq k_2, ..., X_m \leq k_m)
\end{aligned}$$

De la même manière on montre que :

$$\mathbb{P}(X_1 > k_1, X_2 > k_2, ..., X_m > k_m) \leq \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X_i > k_i).$$

ce qui prouve que $X_1, X_2, ..., X_n$ sont négativement dépendants.

2.2 Propriétés des variables négativement dépendantes

Lemme 2.2.1. *[2] Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r ND, et soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions réelles et continues toute strictement monotones alors, $(f_n(X_n))_{n\geq 1}$ est une suite ND.*

Preuve. *Supposons que $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions continues, toute strictement croissantes. Soient $i_1, i_2, ..., i_n \in \mathbb{N}^*$, $y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_n} \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{n}\{f_{i_j}(X_{i_j}) \leq y_{i_j}\}) &= \mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{n}\{X_{i_j} \leq f_{i_j}^{-1}(y_{i_j})\}) \\
&\leq \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_{i_j} \leq f_{i_j}^{-1}(y_{i_j})) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(f_{i_j}(X_{i_j}) \leq y_{i_j})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{n}\{f_{i_j}(X_{i_j}) > y_{i_j}\}) &= \mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{n}\{X_{i_j} > f_{i_j}^{-1}(y_{i_j})\}) \\
&\leq \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_{i_j} > f_{i_j}^{-1}(y_{i_j})) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(f_{i_j}(X_{i_j}) > y_{i_j})
\end{aligned}$$

Le résultat suivant justifie le nom "négativement dépendants".

Lemme 2.2.2. *[2] Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des v.a.r positives ND alors :*

$$\mathbb{E}(\prod_{j=1}^{n} X_j) \leq \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j) \tag{2.3}$$

Preuve. *On peut voir que :*

$$X(\omega) = \int_0^{X(\omega)} dt = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{t \leq X(\omega)\}} dt$$

Donc par Tonelli,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\prod_{j=1}^{n} X_j) &= E(\prod_{j=1}^{n} \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{t_j \leq X_j\}} dt_j) \\
&= \mathbb{E}(\int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty} \prod_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{t_j \leq X_j\}} dt_1 ... dt_n) \\
&= \int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty} \mathbb{E}(\prod_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{t_j \leq X_j\}}) dt_1 ... dt_n \\
&= \int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 \geq t_1, X_2 \geq t_2, ..., X_n \geq t_n) dt_1 ... dt_n \\
&= \int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{n} \{X_j \geq t_j\}) dt_1 ... dt_n \\
&\leq \int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty} \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j \geq t_j) dt_1 ... dt_n \\
&= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j)
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.1. *Deux variables aléatoires X et Y sont négativement corrélés, si $cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)E(Y) \leq 0$, ainsi deux v. a. r positives ND sont négativement-corrélés.*

Le corollaire suivant se déduit facilement en combinant les deux lemmes : (2.2.1) et (2.2.2) .

Corollaire 2.2.1. *Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des v.a.r ND, $(f_k)_{k=1,...n}$ une suite de fonctions continues toute strictement monotones et positives, alors*

$$\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{n} f_j(X_j)\right] \leq \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[f_j(X_j)\right]$$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du corollaire (2.2.1).

Corollaire 2.2.2. *[2] Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des v.as ND, et $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{R}^+$ (ou bien $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{R}^-$) alors :*

$$\mathbb{E}\left[\exp(\sum_{j=1}^{n} t_j X_j)\right] \leq \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}[\exp(t_j X_j)]$$

Preuve. *Soient $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{R}^+$, les fonctions $x \mapsto \exp(t_j x)$ sont toute croissantes et positives, donc par le corollaire (2.2.1) les v.as $(\exp(t_j X_j))_{j=1,...,n}$ sont ND, ainsi en appliquant l'inégalité* (2.3) *en déduit que :*

$$\mathbb{E}\left[\exp(\sum_{j=1}^{n} t_j X_j)\right] \leq \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[\exp(t_j X_j)\right]$$

Lemme 2.2.3. *Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des v.a.r SGND, alors $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ est sous-gaussienne et*

$$\tau^2(\sum_{k=1}^{n} X_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \tau^2(X_k). \tag{2.4}$$

Preuve. *On sait que pour $t \in \mathbb{R}$, $(tX_n)_{n\geq 1}$ est ND, et à l'aide du corollaire (2.2.1)*

$$\mathbb{E}\left[\exp(t\sum_{k=1}^{n} X_k)\right] \overset{ND}{\leq} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\exp(tX_k)] \leq \prod_{k=1}^{n} \exp\left[\frac{t^2\tau^2(X_k)}{2}\right]$$

Remarque 2.2.2. *On a trouvé le même résultat* (1.10) *sous la condition d' indépendance.*

2.3 Convergences des sommes de v.a sous-gaussiennes

Le concept de la convergence complète a été introduit en 1947 par Hsu et Robbins [10], une suite de v.a.r $(X_n)_{n\geq 1}$ converge complètement vers une variable X si :

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < +\infty \quad \forall \varepsilon > 0.$$

En raison du lemme de Borel-Cantelli, la convergence complète des variables aléatoires implique la convergence presque sûrement. Par conséquent la convergence complète des variables aléatoires est un outil très important pour établir la convergence presque sûrement.

Théorème 2.3.1. *(LFGN de Marcinkiewicz) Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d.*

1. *Si $\mathbb{E}|X_1|^p < +\infty$ pour un $p \in]0,1[$, $\frac{S_n}{n^{1/p}} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 0$.*
2. *Si $\mathbb{E}|X_1|^p < +\infty$ pour un $p \in]1,2[$, $\frac{S_n - \mathbb{E}X_1}{n^{1/p}} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 0$.*
3. *S'il existe un $p \in]1,2[$ et une suite de constantes (b_n) tels que $\frac{S_n - b_n}{n^{1/p}} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 0$ alors $\mathbb{E}|X|^p < +\infty$.*

Notations 2.3.1. *Dans tout ce qui suit, on désigne par*

$$T_{nm} = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} X_k \quad et \quad A_n = \sum_{k\geq 1} a_{nk}^2$$

où $(a_{nk})_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}$ *et* $M_n = \{k : a_{nk} \geq 0, 1 \leq k \leq m\}$, *et* M_n^c *le complémentaire de* M_n.
Dans le cas $(T_{nm})_{m\geq 1}$ *converge, on note* T_n *sa limite (*$T_n = \sum\limits_{k\geq 1} a_{nk} X_k$*).*

On a le théorème suivant :

Théorème 2.3.2. *[3] Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a.r sous-gaussiennes ND avec* $\sup\limits_{k\geq 1} \tau(X_k) < \alpha$. *Supposons que pour tout* $n \geq 1$, $(T_{nm})_{m\geq 1}$ *converge vers* T_n, *alors*

$$\mathbb{E}[\exp(t|T_n|)] \leq 2\exp(t^2\alpha^2 A_n) \qquad \forall t > 0$$

et

$$\mathbb{P}(|T_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4\alpha^2 A_n}\right) \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Preuve. *Posons :*

$$T_{nm}^{(1)} = \sum_{k\in M_n} a_{nk} X_k \quad et \quad T_{nm}^{(2)} = \sum_{k\in M_n^c} a_{nk} X_k.$$

On peut affirmer que : $(a_{nk}X_k)_{k\in M_n}$ *et* $(a_{nk}X_k)_{k\in M_n^c}$ *sont deux suites de v.a.r sous-gaussienne ND, et par l'inégalité (2.4) on obtient* $T_{nm}^{(1)}, T_{nm}^{(2)} \in Sub(\Omega)$. *et*

$$\tau^2(T_{nm}^{(1)}) \leq \alpha \sum_{k\in M_n} a_{nk}^2 \quad et \quad \tau^2(T_{nm}^{(2)}) \leq \alpha \sum_{k\in M_n^c} a_{nk}^2.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp(tT_{nm})\right] &= E\left[\exp(tT_{nm}^{(1)})\exp(tT_{nm}^{(2)})\right] \\
&\leq \mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left[\exp(2tT_{nm}^{(1)})\right]\mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left[\exp(2tT_{nm}^{(2)})\right] \\
&\leq \left[\exp\left(\frac{1}{2}4\alpha^2t^2\sum_{k\in M_n} a_{nk}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}4\alpha^2t^2\sum_{k\in M_n^c} a_{nk}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \exp\left(\alpha^2t^2\sum_{k=1}^{m} a_{nk}^2\right)
\end{aligned}$$

Donc $T_{nm} \in Sub(\Omega)$ *et* $\tau(T_{nm}) \leq \alpha\sqrt{2\sum_{k=1}^{m} a_{nk}^2}$, *par suite*

$$\mathbb{E}\left[\exp(t|T_{nm}|)\right] \leq 2\exp\left(\alpha^2t^2\sum_{k=1}^{m} a_{nk}^2\right) \leq 2\exp(\alpha^2t^2A_n)$$

Puis, en appliquant le lemme de Fatou

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\liminf_{m\longrightarrow+\infty}\exp(t|T_{nm}|)\right] &\leq \liminf_{m\longrightarrow+\infty}\mathbb{E}\left[\exp(t|T_{nm}|)\right]\\ &\leq 2\exp(\alpha^2t^2A_n)\end{aligned}$$

ce qui implique que pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\{\exp(t|T_n|)\} \leq 2\exp(\alpha^2t^2A_n)$$

et par l'inégalité de Markov, on obtient pour tout $\varepsilon, h>0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|T_n|>\varepsilon) &= \mathbb{P}(h|T_n|>h\varepsilon) = \mathbb{P}(\exp(h|T_n|)>\exp(h\varepsilon))\\ &\leq \frac{\mathbb{E}[\exp(h|T_n|)]}{\exp(h\varepsilon)} \leq 2\exp(h^2\alpha^2A_n-h\varepsilon)\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}(|T_n|>\varepsilon) \leq 2\exp(h^2\alpha^2A_n-h\varepsilon) \quad \forall h>0$$

ceci implique

$$\mathbb{P}(|T_n|>\varepsilon) \leq 2e^{\min\limits_{h>0}(h^2\alpha^2A_n-h\varepsilon)} = 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4\alpha^2A_n}\right) \quad \textit{c.q.f.d}$$

Le théorème suivant est trés important pour prouver le théorème (2.3.4).

Théorème 2.3.3. *[16] Soient $X_1,...,X_n$ des v.a.r, posons $S(i,j)=\sum_{k=i}^{j}X_k$ et $M(i,j)=\max\{|S(i,i)|,|S(i,i+1)|,...,|S(i,j)|\}$ pour $1\leq i\leq j\leq n$. Supposons qu'ils existent une constante $k\geq 1$, une fonction $g(i,j)$ satisfaisant les conditions suivantes :*

$$g(i,j)\geq 0 \quad \forall 1\leq i\leq j\leq n \tag{2.5}$$
$$g(i,j)\geq g(i,j+1) \quad \forall 1\leq i\leq j\leq n \tag{2.6}$$
$$g(i,j)+g(j+1,k)\leq Qg(i,k) \quad \forall 1\leq i\leq j<k\leq n, 1\leq Q\leq 2 \tag{2.7}$$

et qu'il existe $t_0, 0<t_0\leq+\infty$, telles que

$$\mathbb{P}(|S(i,j)|\geq t)\leq k\exp[-\phi(t)/g(i,j)] \quad 0<t\leq t_0 \quad \textit{et} \quad 1\leq i\leq j\leq n$$

où $\Phi(t)>0$, $\forall 0<t\leq t_0$, et pour tout constante $0<C<1$

$$\inf_{0<t<t_0}\phi(Ct)/\phi(t)=\chi(C) \quad \textit{tels que} \quad \lim_{C\to 1^-}\chi(C)=1$$

Alors $\exists A=A(Q,\chi)\geq 1$ et $B=B(Q,\chi)\geq 1$ telle que

$$\mathbb{P}(M(1,n)\geq t)\leq Ak\exp[-\phi(t)/Bg(1,n)] \quad 0<t\leq t_0$$

Théorème 2.3.4. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r SGND, avec* $\sup\limits_{n\geq 1}\tau(X_n) \leq \alpha$, *supposons qu'il un réel $\beta > 0$, tel que pour tout $n \geq 1, \sum_{j=k}^{+\infty} a_{nj}^2 = O(k^{-\beta})$. Alors*

1. *Pour tout $n \geq 1, (T_{nm})_{m\geq 1}$ converge presque sûrement.*
2. *Si $\sum_{n=1} \exp(-\varepsilon^2/4\alpha^2 A_n) < +\infty$ alors, T_n converge presque sûrement vers 0.*

Pour montrer ce théorème, nous aurons besoin du premier lemme de Borel-Cantelli suivant.

Lemme 2.3.1. *Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'évenements d'un espace de probabilité $(\Omega, A, \mathbb{P})$. Nous avons :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 0.$$

Preuve. 1) *Soient $m_1 > m_2$ deux entiers, on a alors*

$$\begin{aligned} \tau^2(T_{nm_2} - T_{nm_1}) &\leq \sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_{nk}^2 \tau^2(X_k) \\ &\leq \alpha^2 \sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_{nk}^2 \end{aligned}$$

et comme $\sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_{nk}^2 = O\left((m_1+1)^{-\beta}\right)$, alors $\exists C > 0$ tel que :

$$\sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_{nk}^2 \leq \frac{C}{(m_1+1)^\beta}$$

et par suite

$$\mathbb{E}\left\{(T_{nm_2} - T_{nm_1})^2\right\} \leq \frac{C\alpha^2}{(m_1+1)^\beta} \underset{m_1\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et ceci entraîne que pour tout $n \geq 1$, $(T_{nm})_{m\geq 1}$ converge en moyenne quadratique, et par conséquent $(T_{nm})_{m\geq 1}$ converge en probabilité vers T_n, ce qui entraîne qu'il existe une sous-suite $(m_k)_{k\geq 1} \uparrow +\infty$ telle que presque sûrement, pour tout $\forall n \geq 1$

$$T_{nm_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} T_n$$

maintenant, posons :

$$W_{nk} = \max_{m_k \leq m \leq m_{k+1}} |T_{nm} - T_{nm_k}|$$

D'autre part :

$$T_{nm} - T_{nm_k} = \sum_{j=m_k+1}^{m} a_{nj} X_j \in Sub(\Omega)$$

car, $Sub(\Omega)$ est espace de Banach, et par l'inégalité (2.4), on obtient

$$\tau^2 \left(\sum_{j=m_k+1}^{m} a_{nj} X_j \right) \leq 2\alpha^2 \sum_{j=m_k+1}^{m} a_{nj}^2$$

et par le théorème (1.3.1), on a

$$\mathbb{P}(|T_{nm} - T_{nm_k}| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4\alpha^2 \sum_{j=m_k+1}^{m} a_{nj}^2} \right) \quad \forall \varepsilon \geq 0.$$

Posons

$$g_n(m_k, m) = 4\alpha^2 \sum_{l=m_k+1}^{m} a_{nl}^2, \quad et \quad \Phi(t) = t^2$$

et

$$\inf_{0<t<t_0} \phi(Ct)/\phi(t) = C^2; \quad \lim_{C \to 1^-} \chi(C) = 1$$

sous les hypothèses du théorème (2.3.3), ils existent deux constantes $A \geq 1$ et $B \geq 1$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\exists\ 0 < C < \infty$ tels que

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(W_{nk} > \varepsilon) &\leq 2A \sum_{k \geq 1} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4B\alpha^2 \sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} a_{nj}^2} \right) \\ &\leq 2A \sum_{k \geq 1} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 k^\beta}{4B\alpha^2 C} \right) < \infty. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Borel-Cantelli à la suite $(W_{nk})_{k \geq 1}$, on en déduit que presque sûrement

$$W_{nk} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

et puisque :

$$|T_{nm} - T_n| \leq W_{nk} + |T_{nm_k} - T_n| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad Pp.s$$

on obtient alors que pour tout $n \geq 1$, $(T_{nm})_{m \geq 1}$ converge presque sûrement.
2) *Soit $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|T_n| > \varepsilon) \leq 2 \sum_{n \geq 1} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4\alpha^2 A_n} \right) < +\infty.$$

Ainsi, en appliquant le lemme de Borel Cantelli, on en déduit que presque sûrement

$$T_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarques 2.3.1. *Si on a* $\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = 0$ *alors* $(T_{nm})_{m\geq 1}$ *est une martingale,et par suite* $(e^{h|T_{nm}|})_{m\geq 1}$*, est une sous-martingale pour tout* $h > 0$*, et si on applique l'inégalité de Doob on obtient*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max_{j\leq m}|T_{nj}| \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}\left(\max_{j\leq m} e^{h|T_{nj}|} \geq e^{h\varepsilon}\right)\\ &\leq \frac{\mathbb{E}(e^{h|T_{nm}|})}{\exp(h\varepsilon)}\\ &\leq 2\exp(-h\varepsilon + h^2\alpha^2 A_n) = \psi(h)\end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{P}(\max_{j\leq m}|T_{nj}| \geq \varepsilon) \leq \min_{h>0}\psi(h) = 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4\alpha^2 A_n}\right).$$

Corollaire 2.3.1. *Soit* $(X_k)_{k\geq 1}$ *une suite de v.a.r SGND. Posons*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

suposons qu'il existe un réel $\alpha > 0$ *tel que* $\sup_{k\geq 1}\tau(X_k) \leq \alpha$ *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-1/2}(\ln^{-(1+\beta)/2}(n))S_n = 0 \quad Pp.s$$

pour tout $\beta > 0$.

Preuve. *Soit* $\varepsilon > 0$*. Puisque* $Sub(\Omega)$ *est un espace de Banach, alors* $S_n \in Sub(\Omega)$ *et par l'inégalité* (2.4) *on a*

$$\tau^2(S_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \tau^2(X_k) \leq n\alpha^2$$

en appliquant le théorème (1.3.1), on obtient alors

$$\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}\left(|S_n| > \varepsilon\sqrt{n(\ln^{(1+\beta)} n)}\right) \leq 2\sum_{n\geq 1}\underbrace{\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n \ln^{(1+\beta)}(n)}{2\alpha^2 n}\right)}_{U_n}$$

Puisque $\sum U_n$ *serie à termes positifs et* $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$*, alors d'aprés le critère de d'Alembert* $\sum U_n$ *est une serie convergente, ainsi par le lemme de Borel-Cantelli*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-1/2}(\ln^{-(1+\beta)/2}(n))S_n = 0 \quad Pp.s$$

Théorème 2.3.5. *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a.r SGND et supposons qu'il existe un réel* $\alpha > 0$ *tel que* $\sup_{k\geq 1}\tau(X_k) < \alpha$ *alors :*

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{nk}^2 = l \neq 0 < +\infty$, *alors* $\forall \beta > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-\beta} \sum_{k=1}^{n} a_{nk} X_k = 0 \quad Pp.s$$

2. *Si* $a_{nk} = O(n^{-\beta})$ *pour* $k \leq n$ *et* $\beta > \frac{1}{2}$, *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{nk} X_k = 0 \quad Pp.s$$

3. *Si* $\sum_{k=1}^{n} a_{nk}^2 = O(n^{-\beta})$ *pour* $\beta > 0$,*alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{nk} X_k = 0 \quad Pp.s$$

4. *Si* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, *alors pour tout* $\beta > \frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-\beta} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \quad Pp.s$$

Preuve. *Par les notations précédentes*

$$T_{nn} = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} X_k \in Sub(\Omega)$$

et

$$\tau^2(T_{nn}) \leq 2\alpha^2 \sum_{k=1}^{n} a_{nk}^2,$$

en appliquant le théorème (1.3.1), on obtient alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n\geq 1} P(n^{-\beta} |\sum_{k=1}^{n} a_{nk} X_k| > \varepsilon) \leq 2 \sum_{n\geq 1} \underbrace{\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n^{2\beta}}{4\alpha^2 \sum_{k=1}^{n} a_{nk}^2}\right)}_{U_n}$$

1. *Puisque* $\sum U_n$ *est une serie à termes positifs et*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4\alpha^2 \sum_{k=1}^{n} a_{nk}^2} ((n+1)^{2\beta} - n^{2\beta})\right) < 1$$

alors d'aprés le critère de d'Alembert $\sum U_n$ *est une serie convergente, ainsi par le lemme deBorel-Cantelli*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-\beta} \sum_{k=1}^{n} a_{nk} X_k = 0 \quad Pp.s$$

2. *Si* $a_{nk} = O(n^{-\beta})$ *alors* $\exists 0 < M < +\infty$ *telle que* $|a_{nk}| \leq Mn^{-\beta}$, *et par conséquent* $\sum_{k=1}^{n} a_{nk}^2 \leq M^2 n^{-2\beta+1}$ *et donc*

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(|\sum_{k=1}^{n} a_{nk}X_k| > \varepsilon \right) \leq 2 \sum_{n\geq 1} \underbrace{\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n^{2\beta-1}}{4\alpha^2 M^2} \right)}_{V_n}$$

or, pour tout $\beta > \frac{1}{2}$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4\alpha^2 M^2}((n+1)^{2\beta-1} - n^{2\beta-1}) \right) < 1$$

puisque $\sum V_n$ *est une serie à termes positifs et* $\frac{V_{n+1}}{V_n} < 1$ *alors d'aprés le critère de d'Alembert* $\sum V_n$ *est une serie convergente, ainsi par le lemme de Borel-Cantelli*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{nk}X_k = 0 \quad Pp.s$$

3. *Si* $\sum_{k=1}^{n} a_{nk}^2 = O(n^{-\beta}), \beta > 0$, *alors* $\exists 0 < M < +\infty, \sum_{k=1}^{n} a_{nk}^2 \leq Mn^{-\beta}$ *et donc*

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(|\sum_{k=1}^{n} a_{nk}X_k| > \varepsilon \right) \leq 2 \sum_{n\geq 1} \underbrace{\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n^{\beta}}{4\alpha^2 M^2} \right)}_{V_n}$$

et de même

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4\alpha^2 M^2}((n+1)^{\beta} - n^{\beta}) \right) < 1 \quad (\beta > 0)$$

puisque $\sum V_n$ *serie à termes positifs et* $\frac{V_{n+1}}{V_n} < 1$ *alors d'aprés le critère de d'Alembert* $\sum V_n$ *est convergente, ainsi par le lemme de Borel-Cantelli*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{nk}X_k = 0 \qquad Pp.s$$

4. *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* $\beta > \frac{1}{2}$

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(|\sum_{k=1}^{n} X_k| > \varepsilon n^{\beta} \right) \leq \sum_{n\geq 1} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n^{2\beta-1}}{4\alpha^2} \right) < +\infty.$$

Ainsi, d'aprés le lemme de Borel-Cantelli

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-\beta} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \quad Pp.s$$

Chapitre 3

Applications

3.1 lois fortes des grands nombres

Dans ce paragraphe on s'intéresse à la loi forte des grands nombres (L. F.G.N) pour des variables sous-gaussiennes en faisant appel aux résultats du chapitre précédent et en supposant que ces dernières sont seulement négativement dépendantes. Commençons par rappeler la célèbre loi forte des grands nombres dans le cas i. i. d et qui a été établie en 1929 par Kolmogorov-Khintchine.

Théorème 3.1.1. *Si $(X_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles i.i.d.,*

$$\frac{S_n}{n} \text{converge } p.s \Longleftrightarrow \mathbb{E}|X_1| < +\infty.$$

Lorsqu'il y a convergence, la limite est $\mathbb{E}(X_1)$.

Maintenant, nous verrons une autre version de la loi forte des grands nombres dû à Kolmogorov, pour des v.a.r dans L^2 et indépendantes.

Théorème 3.1.2. *Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes vérifiant :*

1. *pour tout $k \geq 1, \mathbb{E}X_k^2 < +\infty$;*
2. *il existe une suite $(a_k)_{k\geq 1}$ de réels strictement positifs qui tend en croissant vers $+\infty$ telle que*
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{Var(X_k)}{a_k^2} < +\infty.$$

Alors $(S_n - \mathbb{E}S_n)/a_n$ converge presque sûrement vers 0. Si de plus $a_n^{-1}\mathbb{E}S_n \longrightarrow m$, S_n/a_n converge p.s. vers m.

Les conditions de moments d'ordre 2 sont plus sévères qu'au théorème 3.1.1, mais il faut noter qu'on ne suppose plus les X_k de même loi. Une bonne référence pour la preuve de ce théorème est Feller[7].
On termine cette section par un théorème qui donne une LFGN pour des variables aléatoires SGND.

Théorème 3.1.3. *[2] Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a.r SGND. Supposons qu'il existe une suite* $(\alpha_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}^+$ *telle que, pour tout* $k \geq 1$, $\tau(X_k) \leq \alpha_k$, *et ils existent* $0 < c < +\infty$ *et* $0 < \beta < 2$ *tels que* $\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \leq cn^\beta$ *pour tout* $n \geq 1$, *alors :*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad Pp.s$$

Il est intéressant de remarquer que la condition de sous gaussiagnité implique que les variables ont des moments exponentiels, mais il faut noter qu'on ne suppose plus les X_k indépendants.

Preuve. *Soit* $n \geq 1$, *posons*

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

Comme on a déjà vu dans le théorème (1.2.1), $Sub(\Omega)$ *est un espace de Banach, donc* $S_n \in Sub(\Omega)$, *d'autre part les variables sont ND, et par l'inégalité* (2.4) *on a*

$$\tau^2(S_n) \leq \sum_{k=1}^n \tau^2(X_n) \leq \alpha^2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2$$

ainsi, en appliquant le théorème (1.3.1), on obtient alors

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}|S_n| > \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n^2}{2\alpha^2}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n^{2-\beta}}{2c}\right)$$

par suite

$$\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}|S_n| > \varepsilon\right) \leq 2\sum_{n\geq 1}\underbrace{\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n^{2-\beta}}{2c}\right)}_{U_n}$$

et comme $\sum\limits_{n\geq 1} U_n$ *est une serie à termes positifs et* $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ *, donc d'aprés le critère d'Alembert*

$$\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}|S_n| > \varepsilon\right) < +\infty$$

en appliquant le lemme de Borel-Cantelli à la suite $\left\{\frac{1}{n}S_n, n \geq 1\right\}$, *on en déduit que* $\frac{1}{n}S_n$ *converge presque sûrement vers* 0.

3.2 Lois du logarithme itéré pour des variables aléatoires fortement intégrables

La loi du logarithme itéré (L.L.I) est un résultat très important en théorie de probabilités, elle exprime le fait que lorsque elles sont convenablement normalisées, les sommes partielles de variables aléatoires i. i. d et ayant un carré intégrable restent dans une bande déterministe bien définie, elle peut être considérée comme un résultat intermédiaire entre la loi forte des grands nombres et le théorème central limite, elle est due à Khintchine (1924) qui l'obtint pour des variables de Bernoulli, en 1941 Hartman-Wintner, généralisèrent le résultat de Khintchine aux variables aléatoires i.i.d. Commençons par faire rappels sur les limites supérieures et inférieures.
Etant donnée une suite d'évènements $(A_n)_{n\geq 1}$, deux évènements assez complexes mais fort utiles sont :

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n &= \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m \\ \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n &= \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} A_m \end{aligned}$$

On parle respectivement de limites supérieure et inférieure de la suite d'ensembles $(A_n)_{n\geq 0}$.
Ainsi la limite supérieure d'une suite d'ensembles est l'ensembles des points qui appartiennent à une infinité de ces ensembles, tandis que la limite inférieure d'une suite d'ensembles est l'ensemble des points qui appartiennent à tous ces ensembles à partir d'un certain rang.

Proposition 3.2.1. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r, alors :*

1. *Pour prouver que $\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n \geq M$ presque sûrement, il suffit de prouver que $\forall a < M \quad \mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to\infty}}\{X_n \geq a\}) = 1$.*
2. *De la même manière, on voit que pour avoir $\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n \leq M$ presque sûrement, il suffit de prouver que $\forall a > M \quad \mathbb{P}(\underline{\lim_{n\to\infty}}\{X_n < a\}) = 1$, ou de manière équivalente que $\forall a > M \quad \mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to\infty}}\{X_n \geq a\}) = 0$.*

A présent, on donne le lien entre lim inf, lim sup d'ensembles et de fonctions :

Proposition 3.2.2. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r, alors on a :*

$$\begin{aligned} &\liminf_{n\to\infty}\{X_n \leq t\} = \{\limsup_{n\to\infty} X_n \leq t\}, \quad \limsup_{n\to\infty}\{X_n \leq t\} = \{\liminf_{n\to\infty} X_n \leq t\}, \\ &\liminf_{n\to\infty}\{X_n \geq t\} = \{\liminf_{n\to\infty} X_n \geq t\}, \quad \limsup_{n\to\infty}\{X_n \geq t\} = \{\limsup_{n\to\infty} X_n \geq t\}. \end{aligned}$$

Notations Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ des v.a.r pas necessairement i.i.d . Posons :

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad et \quad M_n = \max_{1\leq k\leq n} |S_k|.$$

De plus, on note par $F_{b,k}$ la fonction de répartition conjointe des variables $X_{b+1}, X_{b+2}, ..., X_{b+k}$ et soit

$$S_{b,k} = \sum_{i=b+1}^{b+k} X_i = S_{b,k} - S_b \quad (S_{b,0} = 0)$$

et

$$M_{b,k} = \max\{|S_{b,1}|, |S_{b,2}|, ..., |S_{b,k}|\}.$$

ainsi $S_k = S_{0,k}$ et $M_n = M_{0,n}$ et $F_n = F_{0,n}$.

Théorème 3.2.1. *[15] supposons qu'il existe une fonction $g(F_{b,k})$ positive satisfaisant :*

$$g(F_{b,k}) + g(F_{b+k,l}) \leq g(F_{b,k+l}) \quad (\forall b \geq 0, k \geq 1, l \geq 1) \tag{3.1}$$

telle que

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda|S_{b,k}|}\right) \leq Ce^{\lambda^2 g(F_{b,k})} \quad (\forall b \geq 0, k \geq 1, \lambda > 0). \tag{3.2}$$

alors

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda M_{b,k}}\right) \leq 8Ce^{12\lambda^2 g(F_{b,k})} \quad (\forall b \geq 0, \forall k \geq 1, \lambda > 0). \tag{3.3}$$

et

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda M_n}\right) \leq 8Ce^{12\lambda^2 g(F_n)} \quad (\forall n \geq 1, \lambda > 0). \tag{3.4}$$

Le théorème suivant est un premier résultat dans la recherche d'une loi du logarithme itéré pour des v.a.r SGND.

Théorème 3.2.2. *[15]Supposons qu'il existe un nombre K et une suite $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{N}$ tel que :*

$$\mathbb{E}(e^{\lambda|S_{b,k}|}) \leq Ce^{\frac{1}{2}K\lambda^2 A_{b,k}^2} \quad (\textit{pour tout } b \geq 0, k \geq 1, \lambda > 0) \tag{3.5}$$

où :

$$A_{b,k}^2 = \sum_{i=b+1}^{b+k} a_i^2 \quad et \quad A_n = A_{0,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty. \tag{3.6}$$

alors

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n|}{(2KA_n^2 \log\log A_n^2)^{1/2}} \leq 1\right) = 1. \tag{3.7}$$

Preuve. *D'aprés la proposition*(3.2.1), *montrer* (3.7), *revient à montrer que pour tout* $\theta > 2K$

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty}\left\{\frac{|S_n|}{(\theta A_n^2 \log\log A_n^2)^{1/2}} > 1\right\}\right) = 0.$$

et pour cela, il suffit de montrer que pour tout $\theta > 2K$

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{(\theta A_n^2 \log\log A_n^2)^{1/2}} > 1\right) < +\infty. \tag{3.8}$$

Soit $\delta > 1$ *fixé, on définit la suite d' entiers :* $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \ldots$ *de la manière suivante :*

$$A_{n_k-1}^2 \leq \delta^k < A_{n_k}^2 \quad (k = 1, 2, ..., A_0 = 0). \tag{3.9}$$

A présent on considère la fonction croissante μ *définie par :* $\mu(n) = (\theta A_n^2 \log\log A_n^2)^{1/2}$, *on pose aussi :* $\gamma = \frac{\theta}{2K}$.
et par l'inégalité de Markov et (3.5) , *on obtient pour tout* $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|S_{n_k}| \geq \mu(n_{n_k})\right) &\leq \mathbb{P}\left(e^{\lambda|S_{n_k}|} \geq e^{\lambda\mu(n_{n_k})}\right)\\ &\leq \frac{\mathbb{E}\left(e^{\lambda|S_{n_k}|}\right)}{e^{\lambda\mu(n_{n_k})}}\\ &\leq Ce^{\frac{1}{2}K\lambda^2 A_{n_k}^2 - \lambda\mu(n_{n_k})}.\end{aligned}$$

Ceci implique

$$\mathbb{P}\left(|S_{n_k}| \geq \mu(n_{n_k})\right) \leq Ce^{\min\limits_{\lambda>0}(\frac{1}{2}K\lambda^2 A_{n_k}^2 - \lambda\mu(n_{n_k}))}.$$

Le terme de droite est optimal pour $\lambda = \mu(n_k)/KA_{n_k}^2$, *on obtient alors*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|S_{n_k}| \geq \mu(n_{n_k})\right) &\leq Ce^{-\frac{\theta}{2K}\log\log A_{n_k}^2}\\ &= C\frac{1}{(\log A_{n_k}^2)^\gamma}\\ &\leq \frac{C}{(\log\delta)^\gamma}\frac{1}{k^\gamma}\end{aligned}$$

d'où

$$\sum \mathbb{P}\left(|S_{n_k}| \geq \mu(n_{n_k})\right) \leq \sum_{k\geq 1}\frac{C}{(\log\delta)^\gamma}\frac{1}{k^\gamma} < +\infty$$

ainsi, par le lemme de Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{k\to+\infty}\left\{|S_{n_k}| \geq (\theta A_{n_k}^2 \log\log A_{n_k}^2)^{1/2}\right\}\right) = 0.$$

et donc :

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{k\to+\infty}\frac{|S_{n_k}|}{(\theta A_{n_k}^2\log\log \geq A_{n_k}^2)^{1/2}}\leq 1\right)=1$$

c'est-à-dire, presque sûrement, pour tout ω*, il existe un certain rang* $k_0 = k_0(\omega)$ *tels que, pour tout* $k \geq k_0$*, on a*

$$|S_{n_k}| \leq (\theta A_{n_k}^2 \log\log \geq A_{n_k}^2)^{1/2}. \tag{3.10}$$

Ce qui établit le résultat pour une sous suite.
Nous allons à présent établir (3.8) *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *alors* $\exists k \in \mathbb{N}$ *tel que :* $n = n_k$ *ou* $n_k < n < n_{k+1}$*.*
Si $n_k < n < n_{k+1}$*, on a*

$$\frac{S_n}{\mu(n)} = \frac{S_{n_k}}{\mu(n_k)}\frac{\mu(n_k)}{\mu(n)} + \frac{S_n - S_{n_k}}{\overline{\mu}(n_k)}\frac{\overline{\mu}(n_k)}{\mu(n)}$$

où :

$$\overline{\mu}(n_k) = (12\theta A_{n_k,\nu_k-1}^2 \log\log A_{n_k}^2)^{1/2} \quad et \quad \nu_k = n_{k+1} - n_k.$$

et donc

$$\begin{aligned}
\frac{|S_n|}{\mu(n)} &\leq \frac{|S_{n_k}|}{\mu(n_k)}\underbrace{\frac{\mu(n_k)}{\mu(n)}}_{\leq 1} + \frac{|S_n - S_{n_k}|}{\overline{\mu}(n_k)}\frac{\overline{\mu}(n_k)}{\mu(n)} \\
&\leq \frac{|S_{n_k}|}{\mu(n_k)} + \frac{|S_n - S_{n_k}|}{\overline{\mu}(n_k)}\frac{\overline{\mu}(n_k)}{\mu(n)} \\
&\leq \frac{|S_{n_k}|}{\mu(n_k)} + \frac{\overline{\mu}(n_k)}{\mu(n)}\max_{n_k<n<n_{k+1}}\frac{|S_n - S_{n_k}|}{\overline{\mu}(n_k)}
\end{aligned}$$

ceci implique

$$\frac{|S_n|}{\mu(n)} \leq \frac{|S_{n_k}|}{\mu(n_k)} + \frac{\overline{\mu}(n_k)}{\mu(n)}\frac{M_{n_k,\nu_k-1}}{\overline{\mu}(n_k)} \tag{3.11}$$

en outre

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{\mu}(n_k)}{\mu(n)} &= \frac{(12\theta A_{n_k,\nu_k-1}^2)^{1/2}}{(\theta A_n^2)^{1/2}}\underbrace{\frac{(\log\log A_{n_k}^2)^{1/2}}{(\log\log A_n^2)^{1/2}}}_{\leq 1} \\
&\leq \sqrt{12}\frac{A_{n_k,\nu_k-1}}{A_n}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A_{n_k,\nu_k-1}^2 &= \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}-1} a_i^2 = A_{n_{k+1}-1}^2 - A_{n_k}^2 \\
&\leq \delta^k(\delta - 1)
\end{aligned}$$

et comme $n_k < n$ *alors* $\delta^k < A_{n_k}^2 < A_n^2$, *d'où*

$$\frac{\overline{\mu}(n_k)}{\mu(n)} \leq \sqrt{12(\delta-1)}$$

alors

$$\frac{|S_n|}{\mu(n)} \leq \frac{|S_{n_k}|}{\mu(n_k)} + \sqrt{12(\delta-1)}\frac{M_{n_k,\nu_k-1}}{\overline{\mu}(n_k)}$$

Nous allons tout d'abord vérifier que, presque-sûrement, pour tout ω, *il existe un certain rang* $k_0 = k_0(\omega)$ *tels que, pour tout* $k \geq k_0$, *on a*

$$M_{n_k,\nu_k-1} \leq \overline{\mu}(n_k) \tag{3.12}$$

Posons :

$$g(F_{b,k}) = \frac{1}{2}KA_{b,k}^2.$$

g *vérifie la condition* (3.1) *du théorème (3.2.1), telle que l'inégalité*(3.2) *est vérifiée, et par l'inégalité de Markov et l'inégalité*(3.3) *on obtient pour tout* $\lambda, y > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_{b,k} \geq y) &= \mathbb{P}(e^{\lambda M_{b,k} > e^{\lambda y}}) \\
&\leq e^{-\lambda y}\mathbb{E}(e^{\lambda M_{b,k}}) \\
&\leq 8Ce^{-\lambda y}e^{12\lambda^2 g(F_{b,k})} \\
&= 8Ce^{6\lambda^2 KA_{b,k}^2 - \lambda y}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}(M_{b,k} \geq y) \leq 8Ce^{\min_{\lambda>0} 6\lambda^2 KA_{b,k}^2 - \lambda y}.$$

Le terme de droite est optimal pour $\lambda = y/12KA_{n_k}^2$, *on obtient alors*

$$\mathbb{P}\left(M_{b,k} \geq y\right) \leq 8C\exp\left(-\frac{y^2}{24KA_{b,k}^2}\right), \tag{3.13}$$

par suite

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(M_{n_k,\nu_k-1} \geq \overline{\mu}(n_k)\right) &\leq 8C\exp\left(-\frac{\theta}{2K}\log\log A_{n_k}^2\right) \\
&= 8C\exp\left(-\gamma\log\log A_{n_k}^2\right) \\
&= \frac{8C}{(\log A_{n_k}^2)^\gamma} \\
&\leq \frac{8C}{(k\log\delta)^\gamma}
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\sum_{k:n_{k+1}-n_k-1>0} \mathbb{P}\left(M_{n_k,\nu_k-1} \geq \overline{\mu}(n_k)\right) \leq \sum_{k:n_{k+1}-n_k-1>0} \frac{8C}{(k\log\delta)^{\gamma}} < +\infty$$

alors par le lemme de Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{k\to+\infty}\left\{M_{n_k,\nu_k-1} \geq (12\theta A_{n_k,\nu_k-1}\log\log A_{n_k}^2)^{1/2}\right\}\right) = 0.$$

donc

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{k\to+\infty}\frac{M_{n_k,\nu_k-1}}{(12\theta A_{n_k,\nu_k-1}\log\log A_{n_k}^2)^{1/2}} \leq 1\right) = 1$$

maintenant, en faisant tendre $\delta \longrightarrow 1$
En combinant (3.10), (3.11) *et* (3.12) *on obtient, presque sûrement, pour tout* ω, *il existe un certain rang* $n_0 = n_0(w)$ *tels que, pour tout* $n \geq n_0$

$$\frac{|S_n|}{(\theta A_n^2 \log\log A_n^2)^{1/2}} \leq 1.$$

c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty}\frac{|S_n|}{(\theta A_n^2\log\log A_n^2)^{1/2}} \leq 1\right) = 1$$

ce qui termine la preuve du théorème.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème (3.2.2).

Théorème 3.2.3. *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a.r SGND et* $(a_i)_{i\geq 1}$ *une suite de réels positifs (où bien de réels négatifs). Supposons qu'il existe un réel* $\alpha > 0$ *tel que :* $\sup_{n\geq 1}\tau(X_n) \leq \alpha$. *Posons*

$$A_{b,k} = \left(\sum_{i=b+1}^{b+k} a_i^2\right)^{1/2} \quad \textit{et} \quad A_n = A_{0,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

et pour tout $b, k, n \geq 1$

$$S_{b,k} = \sum_{i=b+1}^{b+k} a_i X_i \quad \textit{et} \quad S_n = S_{0,n}.$$

alors

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty}\frac{|S_n|}{(2\alpha^2 A_n^2\log\log A_n^2)^{1/2}} \leq 1\right) = 1. \tag{3.14}$$

Preuve. *En utilisant le théorème (1.2.1), $(a_n X_n)_{n\geq 1} \subset Sub(\Omega)$, et comme les a_n sont tous positifs(resp. tous négatifs), alors $(a_n X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.r SGND, par l'inégalité* (2.4), *on obtient*

$$\tau^2(S_{b,k}) \leq \sum_{i=b+1}^{b+k} a_i^2 \tau^2(X_i) \leq \alpha^2 \sum_{i=b+1}^{b+k} a_i^2,$$

maintenant, le théorème (1.3.1) entraîne que pour tout $\lambda > 0$

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda|S_{b,k}|}\right) \leq 2e^{\frac{1}{2}\alpha^2\lambda^2 A_{b,k}^2} \quad (\forall b, k \geq 1) \tag{3.15}$$

sous les hypothèse du théorème (3.2.2), on obtient l'inégalité (3.14).

Dans le cas i.i.d, le théorème de la loi du logarithme itéré s'énonce comme suit :

Théorème 3.2.4. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r i.i.d possédant un moment d'orde 2 fini. Notons μ leur esperance , σ leur écart type supposé non nul et posons $S_n = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)$. Nous avons les deux égalités suivantes :*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{(2n\sigma^2 \log\log n)^{1/2}} = 1 \quad \textit{presque sûrement.} \tag{3.16}$$

et

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{S_n}{(2n\sigma^2 \log\log n)^{1/2}} = -1 \quad \textit{presque sûrement.} \tag{3.17}$$

Remarque 3.2.1. *Ce théorème signifie que presque sûrement pour tout $c \in]0,1[$, la suite des S_n sortira une infinité de fois par le bas et une infinité de fois par le haut du segment $[-c\sigma\sqrt{2n\log\log n}, +c\sigma\sqrt{2n\log\log n}]$ et qu'elle restera définitivement à partir d'un certain rang (aléatoire) dans $[-c'\sigma\sqrt{2n\log\log n}, +c'\sigma\sqrt{2n\log\log n}]$ pour tout $c' > 1$.*

3.3 Fonction à variation régulière et fonction à variation lente

La notion des fonctions à variation régulière (resp. à variation lente) a été introuit par Karamata [12].

3.3.1 Fonctions à variation lente

Définition 3.1. *Une fonction mesurable $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est dite à variation lente à l'infini, si*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1, \quad \forall x > 0. \tag{3.18}$$

De même, on dit que L est à variation lente au voisinage de 0, si $L\left(\frac{1}{t}\right)$ est à variation lente à l'infini.

Beaucoup de résultats concernants les fonctions aux variations lentes sont dus à Jovan Karamata, et l'un des résultats les plus importants est le théorèmes de représentation suivant :

Théorème 3.3.1. *Une fonction L est à variation lente au voisinage de l'infini si et seulement si elle peut être représentée sous la forme suivante :*

$$L(x) = c(x) \exp\left\{\int_b^x \frac{\Phi(t)}{t} dt\right\}, \quad \forall a \leq b \leq x. \tag{3.19}$$

où : c et Φ sont deux fonctions mesurables sur $]a, +\infty[(a \geq 0)$ telles que :

$$\lim_{x \to +\infty} c(x) = c_0 \in]0, +\infty[\quad et \quad \lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0.$$

De même, une fonction L est à variation lente dans $(0, A)$ (i.e au voisinage de 0) si et seulement si elle peut être représentée sous la forme suivante :

$$L(x) = c(x) \exp\left\{\int_x^A \frac{\Phi(t)}{t} dt\right\}, \quad \forall 0 \leq x \leq A. \tag{3.20}$$

où : c et Φ sont deux fonctions mesurables sur $]0, A[(A \geq 0)$ telles que :

$$\lim_{x \to 0} c(x) = c_0 \in]0, +\infty[\quad et \quad \lim_{x \to 0} \Phi(x) = 0.$$

Remarques 3.3.1. *On appelle (3.19)(resp. (3.20)) la représentation de Karamata d'une fonction lente à l'infini (resp. à l'origine).*

Exemples 3.3.1. *Avec la définition ou le théorème de représentation d'une fonction à variation lente à l'infini, on peut vérifier que toute fonctions mesurable et positive sur un voisinage de l'infini a une limite positive à l'infini est une fonction qui varie lentement à l'infini. La fonction logarithme $(x \mapsto \ln x)$, les itérations du logarithme $(x \mapsto \ln \ln ... \ln x)$ et la fonction $(x \mapsto \exp\{(\ln x)^\gamma\} (0 < \gamma < 1)$ sont, aussi, des fonctions qui varient lentement à l'infini.*

Le lemme suivant sera utile dans la preuve du théorème (3.3.4).

Lemme 3.3.1. *Soit L une fonction à variation lente à l'origine dans $(0, A]$. Soient a et b deux constantes positives, avec $0 < a < b$, alors*

$$\lim_{\substack{x \to 0, y \to 0 \\ a \leq y/x \leq b}} \frac{L(x)}{L(y)} = 1.$$

Preuve. *Sous les hypothèses du théorème, L peut s'écrit sous la forme*

$$L(x) = c(x) \exp \left\{ \int_x^A \frac{\Phi(t)}{t} dt \right\}, \quad \forall 0 \leq x \leq A.$$

avec

$$\lim_{x \to 0} c(x) = c_0 \in]0, +\infty[\quad et \quad \lim_{x \to 0} \Phi(x) = 0.$$

il est clair que :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{c(x)}{c(y)} = 1$$

d'autre part, supposons que $x \leq y$;
Noter que $\lim_{x \to 0} \Phi(x) = 0$, implique que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $R > 0$ tel que, pour tout $x < z < y < R$, on a : $|\Phi(z)| \leq \varepsilon$, ce qui implique

$$-\varepsilon \log \left(\frac{y}{x} \right) \leq \int_x^y \frac{\Phi(z)}{z} dz \leq \varepsilon \log \left(\frac{y}{x} \right)$$

et par suite

$$b^{-\varepsilon} \leq \exp \left\{ \int_x^y \frac{\Phi(z)}{z} dz \right\} \leq b^{\varepsilon}$$

maintenant, on fait tendre ε vers 0, on obtient

$$\lim_{\substack{x \to 0, y \to 0 \\ a \leq y/x \leq b}} \exp \left\{ \frac{\Phi(z)}{z} dz \right\} = 1.$$

ce qui établit le lemme.

3.3.2 Fonction à variation régulière

Définition 3.2. *Une fonction mesurable $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est dite à variation régulière à l'infini d'indice α et on note $h \in RV_\alpha$ si pour tout $x > 0$, nous avons*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^{\alpha}. \tag{3.21}$$

Remarques 3.3.2.

1. Une fonction h est à variation régulière à l'infini d'indice $\alpha \in \mathbb{R}$ si et seulement si, elle est mesurable, positive dans un voisinage de l'infini et vérifie (3.21).

2. Si $h \in RV_0$ alors h est une fonction à variation lente à l'infini, donc une fonction à variation lente à l'infini est une fonction à variation régulière à l'infini d'indice $\alpha = 0$.

On peut aussi définir la notion de la variation régulière à l'origine.

Définition 3.3.1. *Une fonction mesurable $h :]0, a[\longrightarrow \mathbb{R}^+ (a > 0)$ est dite à variation régulière à l'origine(à droite de l'origine) d'indice $\alpha \in \mathbb{R}$, et on note $h \in VR^0_\alpha$, si :*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^\alpha, \quad \forall x > 0. \tag{3.22}$$

Remarques 3.3.3. *Dans le cadre de la définition ci-dessus, dire que $h \in VR^0_\alpha$ est équivalent de dire que la fonction $x \mapsto h(1/x)$ est à variation régulière à l'infini d'indice $-\alpha$.*

Dans le théorème qui suit, on va donner des caractérisations de la notion de variation régulière à l'infini :

Théorème 3.3.2. *Soit $h :]a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ (a \geq 0)$ une fonction mesurable et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$h \in RV_\alpha$.*
2. *$\exists L \in RV_0$ vérifiant :*

$$h(x) = x^\alpha L(x), \quad \forall x > a. \tag{3.23}$$

3. *Il existe une fonction positive g telle que :*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = g(y), \quad \forall y > 0. \tag{3.24}$$

et dans ce cas $g(y) = y^\alpha$.

Proposition 3.3.1. *Soient f et g deux fonctions mesurables et positives sur un voisinage de l'infini et soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :*

$$(g \in RV_\alpha \quad et \quad f \sim g \text{à l'infini}) \Longrightarrow f \in RV_\alpha.$$

Comme dans le cas de la notion de variation lente à l'infini, grâce à (3.19) et (3.23), on peut donner une représentation des fonctions qui varient régulièrement à l'infini :

Théorème 3.3.3. *Une fonction h est à variation régulière à l'infini d'indice $\alpha \in \mathbb{R}$ si et seulement si elle peut être représentée sous la forme suivante :*

$$h(x) = c(x) \exp\left\{\int_b^x \frac{\Phi(t)}{t} dt\right\}, \quad \forall x \geq b > a. \tag{3.25}$$

où : c et Φ sont deux fonctions définies mesurables sur $]a, +\infty[(a \geq 0)$ telles que :

$$\lim_{x \to +\infty} c(x) = c_0 \in]0, +\infty[\quad et \quad \lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = \alpha.$$

Remarques 3.3.4. *On appelle* (3.25) *la représentation de Karatama de fonction $h \in RV_\alpha$.*

Exemples 3.3.2. *En utilisant* (3.21),(3.23) *et* (3.25), *on peut vérifier que α et γ dans $\mathbb{R}$, les fonctions : $x \longmapsto x^\alpha$, $x \longmapsto x^\alpha \ln(1+x)$, $[x \longmapsto x \ln(1+x)]^\alpha$, $x \longmapsto x^\alpha (\ln x)^\gamma$ et $x \longmapsto x^\alpha (\ln x \ln x)^\gamma$ varient régulièrement à l'infini d'indice α.*

3.3.3 Loi du logarithme itéré pour des processus stochastiques

Théorème 3.3.4. *[5] Soit $(M_t)_{t>0}$ une martingale. Supposons qu'il existe un réel $A > 0$ et une fonction h positive sur $(0, A)$ et à variation régulière à l'origine tels que :*

$$\sup_{t \leq A} \mathbb{E}\left[e^{h(t)|M_t|}\right] = B < +\infty. \tag{3.26}$$

Alors :

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t \to 0} \frac{h(t) M_t}{\log\log(1/t)} \leq 1\right) = 1. \tag{3.27}$$

La preuve repose sur l'inégalité maximale de Doob suivante.

Théorème 3.3.5. *Supposons que $(X_t)_{t>0}$ est une sous-martingale et positive, alors*

$$\lambda^p \mathbb{P}\left(\sup_{s \leq t} X_s > \lambda\right) \leq \mathbb{E}(|X_t|^p), \quad \forall \lambda > 0, \forall p \geq 1. \tag{3.28}$$

Preuve. *Pour prouver* (3.27), *il suffit donc de prouver que pour $\delta > 0$*

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t \to 0} \frac{h(t) M_t}{\log\log(1/t)} < 1 + \delta\right) = 1$$

Par l'inégalité maximale de Doob 3.28, on a pour tout $\delta, \lambda > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{s\le t} M_s > \frac{(1+\delta)}{h(t)}\log\log(1/t)\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{s\le t} e^{\lambda M_s} > e^{\frac{(1+\delta)}{h(t)}\log\log(1/t)}\right)\\ &\le \exp\left(-(1+\delta)\frac{\lambda}{h(t)}\log\log(1/t)\right)\mathbb{E}\left(e^{\lambda M_t}\right)\\ &\le \exp\left(-(1+\delta)\frac{\lambda}{h(t)}\log\log(1/t)\right)\mathbb{E}\left(e^{\lambda|M_t|}\right)\end{aligned}$$

prenant $\lambda = h(t)$*, alors on obtient*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\le t} M_s > \frac{(1+\delta)}{h(t)}\log\log(1/t)\right) \le Be^{-(1+\delta)\log\log(1/t)} \tag{3.29}$$

Soit $0 < \theta < 1$*, fixé, prenant* $t = \theta^n$*,* $n \in \mathbb{N}$*, alors on obtient*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\le \theta^n} M_s > \frac{(1+\delta)}{h(\theta^n)}\log\log(1/\theta^n)\right) \le \frac{B}{(-n\log\theta)^{(1+\delta)}}$$

ce qui implique

$$\sum_{n\ge 0}\mathbb{P}\left(\sup_{s\le \theta^n} M_s > \frac{(1+\delta)}{h(\theta^n)}\log\log(1/\theta^n)\right) \le \frac{B}{(-\log\theta)^{(1+\delta)}}\sum_{n\ge 0}\frac{1}{n^{(1+\delta)}} < +\infty$$

d'aprés le lemme de Borel-Cantelli, on a

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty}\left\{\sup_{s\le \theta^n} M_s > \frac{(1+\delta)}{h(\theta^n)}\log\log(1/\theta^n)\right\}\right) = 0$$

Et en passant aux complémentaires

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty}\left\{\frac{h(\theta^n)\sup_{s\le\theta^n} M_s}{\log\log(1/\theta^n)} \le (1+\delta)\right\}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty}\frac{h(\theta^n)\sup_{s\le\theta^n} M_s}{\log\log(1/\theta^n)} \le (1+\delta)\right) = 1\end{aligned}$$

c'est-à-dire, presque sûrement, pour tout ω*, il existe un certain rang* $n_0 = n_0(\omega)$ *tels que, pour tout* $n \ge n_0$*, on a*

$$\sup_{s\le\theta^n} M_s \le \frac{(1+\delta)}{h(\theta^n)}\log\log\frac{1}{\theta^n}$$

A présent, soit $t \in (\theta^{n+1}, \theta^n]$*, pour tout* $n \ge n_0$*, on a*

$$M_t \le \sup_{s\le\theta^n} M_s \le \frac{(1+\delta)}{h(\theta^n)}\log\log\frac{1}{\theta^n} \le \frac{(1+\delta)}{h(t)}\left(\log\log\frac{1}{t}\right)\frac{h(t)}{h(\theta^n)} \tag{3.30}$$

et comme h est à variation régulière à l'origine, alors il existe un réel $\alpha > 0$ et une fonction H à variation lente dans $(0, A)$ tels que :

$$h(t) = t^{\alpha} H(t).$$

d'autre part

$$\theta^{n+1} \leq t \leq \theta^{n} \Longleftrightarrow \theta \leq \frac{t}{\theta^{n}} \leq 1; \tag{3.31}$$

d'où, par (3.30) et (3.31), en on déduit

$$\begin{aligned} M_t &\leq \frac{(1+\delta)}{h(t)} \left(\log\log\frac{1}{t}\right) \frac{H(t)}{H(\theta^n)} \left(\frac{t}{\theta^n}\right)^{\alpha} \\ &\leq \frac{(1+\delta)}{h(t)} \left(\log\log\frac{1}{t}\right) \frac{H(t)}{H(\theta^n)} (1 \vee \theta^{\alpha}) \end{aligned}$$

il reste à montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un reél ν tel que, pour tout $n > \nu$, on a

$$\frac{H(t)}{H(\theta^n)} \leq 1 + \varepsilon, \quad \theta^{n+1} \leq t \leq \theta^{n}. \tag{3.32}$$

pour cela, en appliquant le lemme 3.3.1, on obtient

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ \theta \leq t/\theta^n \leq 1}} \frac{H(t)}{H(\theta^n)} = 1.$$

ainsi, (3.32) entraîne que presque sûrement, on a

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{h(t) M_t}{\log\log(1/t)} \leq (1+\delta)(1 \vee \theta^{\alpha}).$$

maintenant, en faisant tendre δ vers 0 et θ vers 1, on obtient (3.27).

Théorème 3.3.6. *[5] Soit $(M_t)_{t \geq 0} \subset Sub_{\Phi}(\Omega)$ une martingale. Supposons que Φ^* la transformée de Young-fenchel de Φ est monotone et l'application τ_{Φ} est à variation régulière à l'origine, alors :*

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t \to 0} \frac{M_t}{\tau_{\Phi}(t)(\Phi^*)^{-1}(\log\log(1/t))} \leq 1 \right) = 1. \tag{3.33}$$

Preuve. *Pour montrer (3.33), il suffit de prouver que pour tout $\delta > 0$*

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t \to 0} \frac{M_t}{\tau_{\Phi}(t)(\Phi^*)^{-1}(\log\log(1/t))} \leq 1 + \delta \right) = 1.$$

Par l'inégalité maximale de Doob 3.28, on a pour tout $\delta, \lambda > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq t} M_s > x\right) \leq e^{-\lambda x}\mathbb{E}\left(e^{\lambda M_t}\right) \leq \exp\left\{-\lambda x + \Phi(\lambda \tau_\Phi(t))\right\}.$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq t} M_s > x\right) &\leq \exp\left\{\min_{\lambda>0}(-\lambda x + \Phi(\lambda\tau_\Phi(t)))\right\}\\ &= \exp\left\{-\sup_{\lambda>0}(\lambda x - \Phi(\lambda\tau_\Phi(t)))\right\}\\ &= \exp\left\{-\sup_{\lambda>0}(\lambda\tau_\Phi(t)\frac{x}{\tau_\Phi(t)} - \Phi(\lambda\tau_\Phi(t)))\right\}\\ &= \exp\left\{-\Phi^*(x/\tau_\Phi(t))\right\}.\end{aligned}$$

Soit $0 < \theta < 1$*, fixé, prenant* $t = \theta^n$*,* $n \in \mathbb{N}$*, alors pour tout* $\delta > 0$*, on obtient*

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq t} M_s > (1+\delta)\tau_\Phi(\theta^n)(\Phi^*)^{-1}(\log\log(1/\theta^n))\right)\\ &\leq \exp\left\{-\Phi^*((1+\delta)(\Phi^*)^{-1}(\log\log(1/\theta^n)))\right\}\\ &\leq \exp\left\{-(1+\delta)\log\log(1/\theta^n)\right\}\\ &= \frac{1}{(-\log\theta)^{1+\delta}}\frac{1}{n^{1+\delta}}.\end{aligned}$$

où, on a utilisé la relation

$$\Phi^*((1+\delta)y) \geq (1+\delta)\Phi^*(y), \quad \delta > 0.$$

ce qui implique que

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq t} M_s > (1+\delta)\tau_\Phi(\theta^n)(\Phi^*)^{-1}(\log\log(1/\theta^n))\right) < +\infty.$$

pour le reste de la démenstration, on procède comme dans la preuve du théorème (3.3.4).

Résumé : Dans ce mémoire nous explorons les variables aléatoires sous-gaussiennes. Nous présentons également des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variable aléatoire soit sous-gaussienne, et nous discutons brièvement la structure du l'espace des variables sous-gausiennes.

Ce mémoire nous a également permis de discuter quelques propriétées des variables aléatoires négativement dépendantes et de prolonger des inégalités largement répendues pour des variables indépendantes.

Différentes aplications sont données pour illustrer nos résultats abstraits, par exemple, la loi forte des grands nombres et la loi du logarithme itéré.

Abstract In this memory we explore sub-gaussian random variables and their basic properties. We also present equivalent formulations of the sub-gaussian conditions, and we discuss briefly the structure of the space of sub-gaussian random variables.

This memory also allowed us to discuss some properties of negatively dependent random variables. We extend some inequalities widely used for independent random variables to the case of negatively dependent random variables.

Various applications are given to illustrate our abstrat results, for example, the strong law of large numbers and the law of iterated logarithm.

Bibliographie

[1] Allan Gut, *Probability : A Graduate Course.*

[2] Amini. M, Azarnoosh. H, Bozorgnia. A., 2004. *The strong law of large numbers for negatively dependent generalized Gaussian random variables*, Stoch. Anal. Appl. 22, 893-901.

[3] Amini. M, Zarei. H, Bozorgnia. A., 2007. *Some strong limit theorems of weighed sums for negatively dependent generalized Gaussian random variables*, Statist. Probab. Lett. 77, 1106-1110.

[4] Buldygin. V, Kozachenko. Yu., 2000. *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[5] Castellucci. A and Giuliano Antonini. R, 2005, *Laws of iterated logarithm for stochastic integrals of generalized sub-gaussian processes.*,

[6] Ebrahimi, N. and Ghosh, M., 1981. *Multivariate negative dependence, Comm. Statist.* Theory Methods A10 , 307-337.

[7] Feller.W. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. II.Wiley

[8] Giuliano Antonini. R., 2000. *Sub-Gaussianity and exponential integrability of real random variables : comparison of the norms*, Boll. Un. Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) 3 , no 1, pp.147-157.

[9] Hoeffding.W., 1963. *Probability inequalities for sums of bounded random variables*, Journal of the American Statistical Association, vol. 58, no. 301, pp. 13-30,

[10] Hsu. P. L. and Robbins. H., 1947.*Complete convergence and the law of large numbers*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 33, 25-31.

[11] Kahane.J.P., 1930. *Propriétés locales des fonctions à séries de Fourier aléatoires.*Stud. Math. 19 (1960), 1 - 25.

[12] Karamata, J., *Sur une mode de croissance régulière des fonctions.* Mathematica (Cluj) 4, 38-53 .

[13] Krasnolek'Stii, M. and Rutickii, Ya, 1961. *Convex functions and Orlicz spaces*, Noordhoff .

[14] Lehmann. E., 1966. *Some concepts of dependence*, Ann. Math. Statist. 37 1137-1153.

[15] Móricz. F., 1976. *Probability inequalities of exponential type and laws of the interated logarithm*, Acta Sci. Math., 38, 325-341.

[16] Móricz. F. A, Serfling. R. J, Stout. W. F., 1982. *Moment and probability bounds with quasi-superadditive structure for the maximum partial sum*, The Annals of Probability, Vol. 10, No. 4, 1032-1040.

[17] Rao, M.M., and Ren., Z.D., 2002. *Applications Of Orlicz Spaces*, CRC Pres ;1 edition.

[18] Rao. M. M and Ren. Z. D. 1991. *Theory of Orlicz spaces*, volume 146 of Monographs and textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker Inc., New York.

[19] R.L. Taylor, R.F. Patterson and A. Bozorgnia, 2001. *weak laws of large numbers for arrays of rowwise negatively dependent random variables*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis,227-236.