République Algérienne Démocratique et PopulaireMinistère de l'enseignement supèrieure
Et de la recherche scientifique

Université Abou Bakr Belkaid– Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathèmatiques

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité : Equations différentielles

Par

TAOULI MOUNA

Sur le Thème

Sur la méthode de sous et sur solutions

Soutenu le /06/2017 **devant le jury composé de**

Mr M. YEBDRI	**Prof. Univ. Tlemcen**	**Président**
Mme **H. BENALLAL**	**MCB. Univ. Tlemcen**	**Examinatrice**
Mr A. BENSEDI	**MCB. Univ. Tlemcen**	**Examinateur**
Mme Y. NASRI-Dali Youcef	***MCA.*** **Univ. Tlemcen**	**Encadreur**

Année universitaire 2016-2017

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à

-Mes chèrs parents.

-Mon frère Sidi Mohamed et mes soeurs Sarah et Ghizlane.

-Ma tante Fatma et ses fils Rait, Adil et Houssem dine.

-Mon oncle Mohamed et ses fils Mohamed, Mostafa, Farid et sa fille Salima.

-Et à tout ceux qui m'ont aidé et encouragé pour finir ce travail.

Remerciements

J'exprime d'abord mes profonds remerciements, ma reconnaissance et ma gratitude à mon encadreur Mme Y. Nasri., MCA à Université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen pour ses conseils et ses précieuses orientations qu'elle n'a cessé de m'apporter tout au long de ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à Mr Yebdri, Professeur à l'université Abou bekr belkaid de Tlemcen, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Je remercie Mme H.Benallal Mr A.Bensedik, MCB à Université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen, d'avoir accepter d'examiner mon mémoire de master.

Enfin je remercie toute personne qui a contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des Matières

Notations

On donne ci-dessous l'ensemble des diverses notations employées tout au long de ce mémoire:

- λ : un paramètre rèel.
- Ω : désigne un ouvert bornè de $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 3$.
- $n \in \mathbb{N}$.
- $\partial\Omega$: la frontière de Ω.
- Δu : le laplacien de la fonction u tel que $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
- $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ... \frac{\partial u}{\partial x_n}) = \text{grad } u$.
- $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ muni de la norme $\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$.
- $C(\overline{\Omega})$: l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.
- $C^k(\Omega)$: l'espace des fonctions k fois continument différentiables sur Ω (avec $K \in \mathbb{N}^*$).
- $C_c(\Omega)$: l'espace des fonctions continus à support compact dans Ω .
- $C_0^1(\overline{\Omega})$: le sous espace vectoriel de $C^1(\overline{\Omega})$, constitué des fonctions de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ et nulles sur $\partial\Omega$.
- λ_1 :la première valeur propre.du $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.
- φ_1 : la fonction propre associée à λ_1.

- $C^k(\overline{\Omega})$: l'espace des fonctions u de $C^k(\Omega)$ telles que chaque multi-indice $\alpha, |\alpha| \leq k$, l'application $x \in \Omega \longmapsto D^\alpha u(x)$ se pronloge continument sur $\overline{\Omega}$.

Introduction

L'analyse fonctionnelle s'est développée pour résoudre divers problèmes, le plus souvent représentée par des équations différentielles ordinares ou des équations aux dérivées partielles.

Plusieurs techniques ont été développées dans ce sens.

Dans ce travail, on s'intéresse en particulier à la méthode de sous et sur solution. Cette dernière est utilisée pour la résolution des EDO et EDP.

Le principe de la méthode consiste à chercher une solution qui se situe entre la sous et la sur solution sous certaines conditions.

Ce mémoire il se présente sous forme de trois chapitres.

Le chapitre 1 est dédié aux principaux résultats utilisés dans ce mémoire.

Le chapitre 2 est consacré aux différents Théorèmes relatifs à la méthode de sous et sur solutions.

Dans le chapitre 3, nous détaillons une partie de l'article de: A.Ambrosetti, H.Brezis et G.Cerami [2] où ils ont fait appel à cette méthode pour assurer l'existence de solutions.

Chapitre 1

Préliminaires

Nous commençons par rappeler quelques définitions ainsi des résultats connus, qui nous seront utiles pour notre travail.

Définition 1.1 *[4] (Formule de Green)*
Soient u et v deux fonctions régulières, alors on définit la formule de Green comme suit:

$$\int_{\Omega}(\Delta u)vdx = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}vd\sigma - \int_{\Omega}\nabla u\nabla vdx \qquad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ , } \forall u \in C^2(\overline{\Omega}), \tag{1.1}$$

où $d\sigma$ est la mesure superficielle sur $\partial\Omega$.

1.1 Les espaces $\mathbf{L}^p$

Définition 1.2 *[4]*

i)Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \textit{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}},$$

où $\|.\|_{L^p(\Omega)}$ *est une norme sur* $L^p(\Omega)$.

ii) On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \ \textit{mesurable}, \exists \ c > 0 \ \textit{telle que} \ |f(x)| \leq c \ \textit{p.p sur} \ \Omega\}.$$

On note

$$\|f\|_\infty = \inf\{C, |f(x)| \leq C \ \textit{p.p sur} \ \Omega\}.$$

1.2 Les espaces de Sobolev

1.2.1 Définitions

Définition 1.3 *[4] Pour* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *et pour multi-indice* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^*$ *avec* $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ *, on définit la dérivée distributionnelle*

$$D^\alpha u = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1^{\alpha_1}} ... \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n^{\alpha_n}} u,$$

par

$$\langle \rho, D^\alpha u \rangle = \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} u D^\alpha \rho dx \qquad \forall \rho \in C_0^\infty(\Omega)$$

Définition 1.4 *[4] Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *et* $p \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$ *. L'espace de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *est définie par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \forall i \ , 1 \leq i \leq N, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)\},$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ désigne la première dérivée au sens des distributions.La norme associée est :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

La norme est équivalente à :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = (\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}}$$

Si p=2 l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est noté par $H^{1,2}(\Omega)$ où bien $H^1(\Omega)$.

Définition 1.5 *[4] On définit les espaces de Sobolev suivants*
Soit $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$désigne la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.On note $H_0^1\ (\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2(\Omega)}.$$

Pour $1 \leq p \leq \infty$ et $k \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^* \text{tel que} |\alpha| \leq m\}.$$

D^α est la dérivée au sens distributionnel

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = (\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}},$$

pour $1 \leq p < \infty$ et

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Proposition 1.1 *[4]*

i) $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.

ii) $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace réflexif pour $1 < p < \infty$.

iii) $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace séparable pour* $1 \leq p < \infty$.

iv) H^1 *est un espace de Hilbert séparable.*

Proposition 1.2 *[4] Pour* $k \in \mathbb{N}^*$,$1 \leq p \leq \infty$,$W^{k,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach, réflexif si* $1 < p < \infty$ *, séparable pour* $1 \leq p < \infty$.

$W^{k,2}(\Omega)$ *est un espace de Hilbert muni du produit scalaire*

$$(u,v)_{W^{k,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} v dx$$

1.2.2 Les injections de Sobolev

Théorème 1.1 *[4](Théorème Rellich-Kondrachov)On suppose* Ω *un domaine borné de classe* C^1*,on a*

i)Si $p < N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$,$\forall q \in [1, p^*[$ *où* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.

ii)Si $p = N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$.

iii)Si $p > N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,

avec des injections compactes.

Théorème 1.2 *[4] Soit* E *un espace de Banach réflexif et soit* (x_n) *une suite bornée dans* E*.Alors il existe une sous suite extraite* (x_{n_k}) *qui converge pour la topologie* $\sigma(E, E')$.

Théorème 1.3 *[9] Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un domaine borné à frontière lipschitzienne,* $k \in \mathbb{N}$ *et* $1 \leq p \leq \infty$ *.Alors*

i) Si $kp < n$*, alors* $W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *pour* $1 \leq q \leq \frac{n\,p}{n-kp}$ *avec injection continue.*

L'injection est compacte si $q < \frac{n\,p}{n-kp}$.

ii) Si $0 \leq m < k - \frac{n}{p} < m+1$, $m \in \mathbb{N}^*$*, on a* $W^{k,p}(\Omega) \subset C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ *pour* $0 \leq \alpha \leq k - m - \frac{n}{p}$ *avec injection continue. L'injection est compacte si* $\alpha < k - m - \frac{n}{p}$.

Remarque 1.1 *Le Théorème reste valable pour les espaces* $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Notation 1.1 *On désigne par* $W_0^{-1,p'}(\Omega)$ *l'espace dual de* $W_0^{1,p}(\Omega)$*(avec* $1 \leq p \leq \infty$*) et par* $H^{-1}(\Omega)$ *l'espace dual de* $H_0^1(\Omega)$.

Définition 1.6 *La topologie faible sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *est la topologie la moins fine telle que toutes les applications* $f : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *soient continues avec* $f \in W_0^{-1,p'}(\Omega)$.

Lemme 1.1 *[4]*

Si u_n *est une suite bornée dans un espace réflexif.Alors on peut extraire une sous suite telle que*

$u_n \to u \quad p.p.\ sur\ \Omega.$

$u_n \rightharpoonup u \quad H_0^1(\Omega).$

$u_n \to u \quad L^r(\Omega) \quad si\ r < 2^*.$

$$u_n \rightharpoonup u \qquad si \quad r = 2^* \ avec\ 2^* = \begin{cases} \frac{2n}{n-2} & si\ n \geq 3 \\ \infty & si\ n = 1, 2 \end{cases}$$

Définition 1.7 *i)On dit qu'une fonction* f *est convexe sur un intervalle* Ω *si*

$$\forall (u_1, u_2) \in \Omega^2, \forall \lambda \in]0, 1[\,, f(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \leq \lambda f(u_1) + (1-\lambda) f(u_2).$$

ii)On dit qu'une fonction f *est concave sur un intervalle* Ω *si et seulement si* $-f$ *est convexe*

Théorème 1.4 *[6](Théorème du point fixe de Schauder)*

Soient X *un espace de Banach et* R *un réel strictement positif. Si* $T : B(0,R) \to B(0,R)$ *est un opérateur compèlement continue(c'est-à-dire continu et tel que , pour toute partie bornée* D *de* X $\overline{T(D)}$ *est compacte). Alors* T *admet au moins un point fixe.*

1.3 Théorème de Lax Milgram

Définition 1.8 *[4]*

On dit qu'une forme bilinéaire $a(u, v)$ *:*$H \times H \to \mathbb{R}$ *est :*

i)continue s'il existe une constante C *telle que*

$$|a(u, v)| \leq C\,|u|\,|v| \quad \forall u, v \in H.$$

ii)coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(u,v) \geq \alpha \left|v\right|^2 \qquad \forall v \in H.$$

Théorème 1.5 *(Lax-Milgram) [4]*

Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire ,continue et coercive alors pour tout $\varphi \in H\'$ il existe $u \in H$ unique tel que

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \qquad\qquad \forall v \in H$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisée par la propriété:

$$u \in H \qquad et \qquad \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H}\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle\}$$

Théorème 1.6 *[4] (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)*

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}},$, une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$.On suppose que

- *$f_n(x) \rightarrow f(x)$p.p sur Ω*
- *Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur Ω.*

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0.$

Nous citons une des formes du principe du maximum.

Lemme 1.2 *[6] Si $\omega \in W^{2,p}(\Omega)$ avec $p > n$,vérifiant $\forall p.p.x \in \Omega$, $-\Delta\omega(x) \leq 0$.Alors ω ne peut pas atteindre un maximum $M \geq 0$ dans Ω sauf si ω est constante.*

Proposition 1.3 *[4] Soit U un espace topologique séparé.Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) U est compact

ii) De toute famille de fermés dont l'intersection est vide ,on peut extraire une sous-famille finie dont l'intersection est vide.

iii) Toute famille de fermés dont toute sous-famille finie est d'intersection non vide et elle meme d'intersection non vide

Chapitre 2

Théorèmes relatifs à la méthode de sous-sur solutions

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence de solutions via la méthode de sous-sur solutions. On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où f est une fonction définie de $\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Nous commençons par donner des définitions qui nous seront utiles dans ce chapitre.

Définition 2.1 *[6] i)On dit que $\underline{u}$ est une sous solution du problème (2.1)si :*

- *Pour presque tout $x \in \Omega$,* $-\Delta \underline{u}(x) \leq f(x, \underline{u}(x))$.
- *Pour tout $x \in \partial\Omega$,* $\underline{u}(x) \leq 0$.

ii)On dit que $\overline{u}$ est une sur solution du problème(2.1) si:

- Pour presque tout $x \in \Omega$, $-\Delta \overline{u}(x) \geq f(x, \overline{u}(x))$.
- Pour tout $x \in \partial\Omega$, $\overline{u}(x) \geq 0$.

L'existence de la solution dépend de la régularité de la fonction f .

Nous distinguons différents cas.

2.1 La fonction f de classe C^1

Le Théorème suivant montre que le problème (2.1) admet une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ quand $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1par rapport à la variable u.

Théorème 2.1 *[8] Soient $\underline{U}$(resp., $\overline{U}$) une sous solution (resp., une-sur solution) du problème (2.1) tel que $\underline{U} \leq \overline{U}$ dans Ω. Alors les propriètès suivantes sont satisfaites:*

- *i) Il existe une solution u du problème (2.1) satisfaisant $\underline{U} \leq u \leq \overline{U}$.*
- *ii) Ils existent des solutions minimales et maximales $u_{\min}$ et $u_{\max}$ du problème (2.1) dans l'intervalle $\left[\underline{U}, \overline{U}\right]$.*

La démonstration est basée sur la méthode monotone dévoloppée par Amman [3].

Preuve: i) Soit $g(x,u) := f(x,u) + au$ où a est une constante réelle.

On peut choisir $a \geq 0$ suffisament grand de sorte que $\mathbb{R} \ni u \longmapsto g(x,u)$ est croissante sur $[\underline{u}(x), \overline{u}(x)]$.

Pour $x \in \Omega$,on choisit $a \geq 0$ tel que

$$a \geq \max\left\{-f_u(x,u); x \in \overline{\Omega}, u \in [\underline{u}(x), \overline{u}(x)]\right\}.$$

Pour ce choix de a, nous définissons la suite de fonctions $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ comme suit:

$u_0 = \overline{u}$ et pout tout $n \geq 1$, u_n est la solution unique du problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_n + a u_n = g(x, u_{n-1}) & \text{dans } \Omega. \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Montrons que $\underline{u} \leq ... \leq u_{n+1} \leq u_n \leq ... \leq u_0 = \overline{u}$.

On a $u_1 \ \leq \overline{u}$. En effet

$$\begin{cases} -\Delta(\overline{u} - u_1\ ) + a(\overline{u} - u_1\ ) \geq g(x,\overline{u}) - g(x,\overline{u}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \overline{u} - u_1\ \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Par le principe du maximum, on déduit que $\overline{u} \geq u_1$ dans Ω.

Comme l'opérateur $-\Delta + aI$ est coercif , il s'en suit que $\overline{u} \geq u_1$ dans Ω.

Pour la preuve de $\underline{u} \leq u_1$, nous remarquons que $\underline{u} \leq 0 = u_1$ sur $\partial\Omega$.

Pour $x \in \Omega$, on a

$$-\Delta(\underline{u} - u_1\ ) + a(\underline{u} - u_1\ ) \leq f(x,\underline{u}) + a\underline{u} - g(x,\overline{u}) \leq 0.$$

La monotonie de g et le principe du maximum imliquent que $\underline{u} \leq u_1$.

Supposons que

$$\underline{u} \leq ... \leq u_n \leq u_{n-1} \leq ... \leq u_0\ = \overline{u}.$$

Il reste à prouver que

$$\underline{u} \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

On a

$$\begin{cases} -\Delta(u_n - u_{n+1}) + a(u_n - u_{n+1}) = g(x,u_{n-1}) - g(x,\underline{u}) \geq 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n - u_{n+1} \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

D'après le principe du maximum, on a $u_n \geq u_{n+1}$ dans Ω.

D'un autre coté, on a

$$\begin{cases} -\Delta\underline{u} + a\underline{u} \leq g(x,\underline{u}) & \text{dans } \Omega \\ \underline{u} \leq 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

d'après la définition de u_{n+1} , nous avons

$$\begin{cases} -\Delta(u_{n+1} - \underline{u}) + a(u_{n+1} - \underline{u}) = g(x,u_n) - g(x,\underline{u}) \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u_{n+1} - \underline{u} \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Par le principe du maximum, nous déduisons que

$$\underline{u} \leq u_{n+1} \text{ dans } \Omega.$$

D'après ce qui précède , il existe une fonction u telle que, pour chaque $x \in \Omega$ fixé on a

$$u_n(x) \searrow u(x) \text{ quand } n \to \infty.$$

Maintenant on doit montrer qu'on peut passer a la limite dans le problème (2.2).

Soit $g_n(x) := g(x, u_n(x))$, remarquons que la suite (g_n) est bornée dans $L^\infty(\Omega)$, par conéquent elle est dans tout $L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$.

En passant à la limite dans (2.2) et d'après les estimations standard de Schauder la suite (u_n) est bornée dans $W^{2,p}(\Omega)$ pour tout $1 < p < \infty$. L'espace $W^{2,p}(\Omega)$ s'injecte de façon continue dans l'espace de Hölder $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, pour $\alpha = 1 - \frac{N}{2p}$ à condition que $p > \frac{N}{2}$. Donc (u_n) est bornée dans $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Par les estimations dans les espaces de Hölder , nous déduisons que (u_n) est bornée dans $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Comme l'injection de $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ dans $C^2(\overline{\Omega})$ est compacte, il s'en suit que

$$u_n \to u \quad \text{dans } C^2(\overline{\Omega}).$$

Puisque la suite est monotone , donc la suite converge vers u dans $C^2(\Omega)$.

Passons maintenant à la limite dans le problème (2.2) quand $n \to \infty$. Par conséquent u est une solution du problème (2.1).Le point i) est démontré

ii) On désigne par $\overline{u}$ la solution obtenue par la technique ci-dessus et en choisissant $u_0 = \overline{u}.u_{\max}$ est la solution maximale dans l'intervalle $(\underline{u}, \overline{u})$.

En effet, soit $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ une solution arbitraire.En utilisant les arguments précédents impliquent que $u \leq \overline{u}$.

On obtient que pour tout $n \geq 0$, on a $u \leq u_n$ ■

Exemple 2.1 *Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 3$, et soit*

$$f(x,u) = \lambda f(x) + u^{p-1}$$

où $p = \frac{2N}{N-2}$, λ un paramètre positif et f est une fonction continue sur Ω telle que $1 \leq f(x) \leq K < \infty$.

Soit u_f solution positive du problème:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors, $\underline{u} = \lambda u_f$ est une sous-solution du problème (2.1) pour tout $\lambda > 0$.

Notons par e la solution positive du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta e = 1 & \text{dans } \Omega, \\ e = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le Théorème de Lax Migram nous assure l'existence d'une unique solution.

On remarque que $\overline{u} = Ce$ est une sur solution du problème, car on peut trouver $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \lambda \leq \lambda_0$, il existe $C = C(\lambda) > 0$ satisfaisant

$$C \geq \lambda f(x) + C^{P-1} e^{p-1}.$$

En prenant λ suffisamment petit, on a

$$\lambda u_f \leq Ce.$$

D'après le Théorème 2.1 le problème (2.1) admet au moins une solution u telle que

$$\lambda u_f \leq u \leq Ce.$$

2.2 f est L^p Carathéodory

Dans cette partie , on s'intéresse à montrer l'existence de solutions lorsque f est une fonction L^p-Carathéodory.Dont nous donnons la définition ci-dessous:

Définition 2.2 *[6] Soit* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *On dit que f est* L^p*- Carathéodory si elle vérifie les conditions suivantes:*

- *Pour tout* $y \in \mathbb{R}$, $f(.,y)$ *est mesurable sur* Ω.
- *Pour p.p.* $x \in \Omega$, $f(x,.)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.
- $\forall R > 0, \exists h_R \in L^p(\Omega)$ *telle que* $\forall$*p.p.* $x \in \Omega$, $\forall y \in [-R, R] , |f(x,y)| \leq h_R(x)$

Définition 2.3 *[6]*

Soient a et b deux fonctions définis de Ω *dans* $\mathbb{R}$ *,bornées et telles que* $a \leq b$. *On définit une partie E de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *on pose*

$$E = \{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}/a(x) \leq y \leq b(x)\}$$

Pour tout $y \in \Omega$ *,on note*

$$A_y = \{x \in \Omega/a(x) \leq y \leq b(x)\}$$

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ *,on dit que* f *est* L^p *- Carathéodory si elle vérifie les conditions suivantes :*

- *Pour tout* $y \in \mathbb{R}$ *tel que* $A_y \neq \emptyset$ *, la fonction f(.,y) définie sur* A_y *est mesurable.*
- *Pour p.p.* $x \in \Omega, f(x,.)$ *est continue sur* $[a(x), b(x)]$.
- $\exists h \in L^p(\Omega)$ *telle que* $\forall (x,y) \in E, |f(x,y)| \leq h(x)$.

Lemme 2.1 *[6] Si on désigne par g une fonction appartenant à $L^p(\Omega)$ et que l'on considère le problème de Dirichlet suivant:*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = g(x) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

ce problème admet une seule solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$.De plus , $\exists C > 0, \exists C' > 0$ (C et C' constantes indépendantes de g) telles que $\forall g \in L^p(\Omega)$ la solution u de 2.2. , vérifie

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega).} \leq C \|g\|_{L^p(\Omega)} \quad et \quad \|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq C' \|g\|_{L^p(\Omega)} \tag{2.4}$$

Nous commençons par le cas où la sous solution est infèrieure à la sur-solution.

2.2.1 Sous-sur solutions ordonnées

Théorème 2.2 *[6] Soient α et β respectivement une sous -solution et une sur-solution de (2.1), vérifiant $\alpha \leq \beta$.Si $f : E \to \mathbb{R}$ est L^p-Carathéodory avec $E = \{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R} / \ \alpha \leq y \leq \beta\}$ et $p > n$.Alors le problème (2.1) admet une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$ telle que $\alpha \leq u \leq \beta$.*

Preuve: Considérons le problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, \gamma(x, u(x))) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

où γ est définie comme suit pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$\gamma(x,z) = \begin{cases} \alpha(x) & \text{si } z < \alpha(x), \\ z & \text{si } \alpha(x) \leq z \leq \beta(x), \\ \beta(x) & \text{si } z > \beta(x). \end{cases}$$

Notons d'abord que $\forall x \in \Omega, \forall z \in \mathbb{R}, \alpha(x) \leq \gamma(x,z) \leq \beta(x)$ et $(x, \gamma(x,z)) \in E$.

D'après l'hypothèse sur f, nous avons

$$\exists h \in L^p(\Omega)/\forall p.p.x \in \Omega, \forall z \in \mathbb{R}, |f(x,\gamma(x,z))| \leq h(x). \tag{2.6}$$

Nous démontrons le résultat en deux étapes:

♦Première étape: Le problème (2.5) a au moins une solution.

En effet, appliquons le Théorème du point fixe de Schauder à l'opérateur $T_2 : C_0^1(\overline{\Omega}) \to C_0^1(\overline{\Omega})$,où $u = T_2(v)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,\gamma(x,v(x))) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

♣. Montrons que T_2 est continu en v ,pour $v \in C_0^1(\overline{\Omega})$.

Considérons une suite (v_n) d'éléments de $C_0^1(\overline{\Omega})$ qui converge vers v dans $C_0^1(\overline{\Omega})$.

Pour tout $\omega \in C_0^1(\overline{\Omega})$, notons

$$g_\omega : \Omega \to \mathbb{R}, x \longmapsto f(x,\gamma(x,\omega(x))).$$

On remarque que g_ω est mesurable et pour p.p. $x \in \Omega$, $|g_\omega(x)| \leq h(x)$ par conséquent, $g_\omega \in L^p(\Omega)$.

Nous considérons

$$\begin{array}{rcl} \psi.C_0^1(\overline{\Omega}) & \to & L^p(\Omega) \\ w & \longmapsto & g_w \end{array}$$

D'après la relation (2.4), nous avons :

$$\exists\ C' > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \|T_2(v_n) - T_2(v)\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq C' \|\psi(v_n) - \psi(v)\|_{L^p(\Omega)}\ .$$

Pour montrer que T_2 est continu en v ,il suffit de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \psi(v_n) = \psi(v)$ dans $L^p(\Omega)$.

Par construction, on conclut

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega \ , |\gamma(x, v_n(x)) - \gamma(x, v(x))| \leq |v_n(x) - v(x)| \, .$$

La fonction

$$\begin{aligned} f(x,.) \quad &: \quad [\alpha(x), \beta(x)] \to \mathbb{R} \\ y \quad &\longmapsto \quad f(x,y) \end{aligned}$$

est continue pour p.p.$x \in \Omega$ .On conclut

$$\forall \text{ p.p.}x \in \Omega, \lim_{n \to +\infty} \psi(v_n)(x) = \psi(v)(x).$$

Par ailleurs ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \text{ p.p.}x \in \Omega, \ |\psi(v_n)(x)| \leq h(x).$$

Par application du Théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous déduisons que $\psi(v_n) \underset{n \to +\infty}{\to} \psi(v)$ dans $L^p(\Omega)$.

♣Montrons que T_2 est complètement continu.

Soit D un ensemble bornée de $C_0^1(\overline{\Omega})$, comme f est L^p-Carathéodory alors $\psi(D)$ est bornée dans $L^p(\Omega)$. D'après (2.4), $T_2(D)$ est bornée dans$W^{2,p}(\Omega)$.

L'injection de $W^{2,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$est compacte alors $\overline{T_2(D)}$ est un compact de $C_0^1(\overline{\Omega})$.

♣Montons que la boule est stable par T_2.

D'après (2.4) et (2.6) , $\exists R > 0$ tel que $T_2(C_0^1(\overline{\Omega})) \subset B(0_{C_0^1(\overline{\Omega})}, R)$. Par exemple, on peut prendre $R = C' \left\| h \right\|_{L^p(\Omega)}$ où C' et h sont définis à partir des relations (2.4) et (2.6) respectivement .Donc $T_2(B(0_{C_0^1(\overline{\Omega})}, R)) \subset B(0_{C_0^1(\overline{\Omega})}, R)$.

Les hypothèses du Théorème du point fixe de Schauder sont satisfaites pour le problème (2.7), il en résulte que (2.5) admet une solution.

⧫Deuxième étape: Montrons que toute solution u de (2.5) vérifie $\alpha \leq u \leq \beta$.

Commençons par $\alpha \leq u$.

Raisonnons par l'absurde c'est-à-dire on suppose que $\alpha > u$, ainsi $\max_{\Omega}(\alpha - u) = M > 0$

Sur la frontière $\partial\Omega$,on a $\alpha \leq u$, donc $\exists\, x_0 \in \Omega$ tel que $\alpha(x_0) - u(x_0) = M$ et par continuité de $\alpha - u$, $\exists\, x_1 \in \Omega$ tel que $\alpha(x_1) - u(x_1) < M$.

On conclut qu'il existe $\Omega_1 \subset \Omega$ tel que pour tout $x \in \Omega_1$ $\alpha(x) - u(x) > 0$ et que $\alpha - u$ est non constante sur Ω_1 alors :

$$\begin{aligned} \forall\, x \quad &\in \quad \Omega_1, , -\Delta\left(\alpha - u\right)(x) \leq f\left(x, \alpha(x)\right) - f(x, \gamma(x, u(x))) \\ &= \quad f\left(x, \alpha(x)\right) - f\left(x, \alpha(x)\right) = 0 \end{aligned}$$

contradiction avec le principe du maximum.

Pour le cas $u \leq \beta$,il se démontre de la même manière que précedement.

On conclut que la solution u se trouve entre α et β. Pour tout $x \in \Omega$, on a $\gamma(x, u(x)) = u(x)$, u est solution de (2.5) et elle est pour le problème (2.1). ■

Exemple 2.2 *Considérons le problème aux limites unidimensionnel suivant:*

$$\begin{cases} -u'' = \frac{1}{\sqrt{u}} - 1 & sur]0, \pi[\\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Alors $\beta = 1$ est une sur-solution de ce problème(2.8) et $\alpha = cx^{\frac{3}{2}}(\pi - x)^{\frac{3}{2}}$ est une sous-solution pour $c > 0$ assez petit.On a $\alpha \leq \beta$.

On pose

$$\begin{aligned} f_1 \quad &: \quad]0, \pi[\, \times \mathbb{R}_+^\times \to \mathbb{R} \\ (x, u) \quad &\mapsto \quad \frac{1}{\sqrt{u}} - 1 \end{aligned}$$

On remarque que la fonction f_1 n'est pas définie pour $u \leq 0$.

Pour cela on pose

$$E = \{(x, y) \in\,]0, \pi[\, \times \mathbb{R} / \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}.$$

Par conséquent, la fonction

$$\begin{aligned} f_2 \quad &: \quad E \to \mathbb{R} \\ (x,u) \quad &\mapsto \quad \frac{1}{\sqrt{u}} - 1 \end{aligned}$$

est L^p-Carathéodory.

En effet, f_2 vérifie les conditions de la définition 2.3 ce qui implique que

$$\forall (x,y) \in E, |\ f_2(x,u)| \leq h(x) = \frac{1}{\sqrt{c} x^{\frac{3}{4}} (\pi - x)^{\frac{3}{4}}} + 1$$

avec $h \in L^p(0,\pi) \quad \forall p \in \left]1, \frac{3}{4}\right[$

Les conditions du Théorème 2.2 sont satisfaites.Alors le problème (2.1)admet une solution.

Le Théorème 2.2 peut être gènèralisé comme suit:

Théorème 2.3 *[6] On désigne par q et r deux entiers naturels non nuls. Soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q$, des sous-solutions de (2.1) et β_1,$\beta_2, ..., \beta_r$, des sur-solutions de (2.1) .Notons $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q)$ et $\beta = \min(\beta_1,\beta_2, ..., \beta_r)$et supposons que $\alpha \leq \beta$.*

Si $f : E \to \mathbb{R}$ est L^p-Carathéodory avec $E = \{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R} / \min\limits_{1 \leq i \leq q} \alpha_i(x) \leq y \leq \max\limits_{1 \leq j \leq r} \beta_j(x)\}$ et $p > n$ .Alors (2.1) admet une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$ telle que $\alpha \leq u \leq \beta$.

Le Théorème suivant fournit un raffinement de la localisation des solutions de (2.1) situées entre la sous et la sur solution.

Théorème 2.4 *:[6] Soient α , β respectivement une sous-solution et une sur-solution du problème (2.1) telles que $\alpha \leq \beta$ .Supposons que $f : E \to \mathbb{R}$ est L^p-Carathéodory avec $p > n$ et $E = \{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R} / \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ .Si le problème (2.1) admet au moins deux solutions situées entre α et β .Alors*

i)$\exists$ $u_{\min}, u_{\max}$ solutions de (2.1) telles que $\alpha \leq u_{\min} \leq u_{\max} \leq \beta$.

ii) Si u est une solution de (2.1) qui vérifie $\alpha \leq u \leq \beta$ alors $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$.

Dans ce cas $u_{\min}$(resp. $u_{\max}$) est appelée la solution minimale(resp. la solution maximale) du problème (2.1) par rapport à la paire de sous-solution et sur-solution (α, β).

Preuve: Nous démontrons le Théorème en 3 étapes .

considérons l'application

$$\begin{aligned} I \quad &: \quad C_0^1(\overline{\Omega}) \to C_0^1(\overline{\Omega}) \\ u \quad &\longmapsto \quad u \end{aligned}$$

▲Première étape:

Notons

$$U = \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) /\ \alpha \leq u \leq \beta \text{ et } u = T_1(u)\}$$

U est non vide (d'après le Théorème 2.2).

Montrons que U est un compact dans $C_0^1(\overline{\Omega})$.

U peut être écrit sous la forme suivante

$$U = \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) /\ u = T_2(u)\},$$

où T_2 est l'opérateur défini dans la preuve du Théorème 2.2 donc on a $U = T_2(U)$.

ainsi $T_2(U) \subset B(0_{C_0^1(\overline{\Omega})}, R)$, par concéquent, U est un borné dans $C_0^1(\overline{\Omega})$. Comme T_2 est complètement continu donc $T_2(U) = U$ est un compact de $C_0^1(\overline{\Omega})$.

▲Deuxième étape:

u est solution de (2.1) satisfaisant $\alpha \leq u \leq \beta$.

Posons

$$F_u = \{v \in C_0^1(\overline{\Omega}) /\ \alpha \leq v \leq u \text{ et } v = T_1(v)\},$$

F_u est non vide, fermé, compact et inclut dans U .

Soient $q \in \mathbb{N}^*$, $u_1, u_2, ...u_q$ des solutions de (2.1) vérifiant $\alpha \leq u_i \leq \beta$ pour tout $i \in [1, q]$ .Nous avons $\underset{1 \leq i \leq q}{\cap} F_{u_i} \neq \emptyset$

En effet, il suffit de considérer la fonction $\beta = \min(u_1, u_2, ...u_q)$et d'appliquer le Théorème 2.3, alors u est solution qui vérifie

$$\alpha \leq u \leq u_i \text{ pour tout} i \in [1, q]$$

D'après la propriété d'intersection finie des compacts, on conclut que $\underset{u \in U}{\cap} F_u \neq \emptyset$.

Posons

$$G_u = \{v \in C_0^1(\overline{\Omega}) / \ u \leq v \leq \beta \text{ et } v = T_1(v)\},$$

G_u est non vide , fermé, compact et inclut dans U.

Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $u_1, u_2, ...u_r$ des solutions de (2.1) vérifiant

$$\alpha \leq u_j \leq \beta \text{ pour tout } j \in [1, r]$$

.Nous avons $\underset{1 \leq i \leq q}{\cap} G_{u_j} \neq \emptyset$

En effet ,il suffit de considérer la fonction $\alpha = \max(u_1, u_2, ...u_r)$ et d'appliquer le Théorème 2.3 alors u est solution qui vérifie $u_j \leq u \leq \beta$ pour tout $j \in [1, r]$.

D'après la propriété d'intersection finie des compacts on conclut que $\underset{u \in U}{\cap} G_u \neq \emptyset$.

▲Troisième étape:

Soient $\hat{u} \in \underset{u \in U}{\cap} F_u$ et $\tilde{u} \in \underset{u \in U}{\cap} G_u$, nous avons $\hat{u} \in U$. Pour $u \in U$ nous avons $\hat{u} \leq u \leq \tilde{u}$.

Ce qui montre que $\underset{u \in U}{\cap} F_u = \{\hat{u}\}$ et que $\underset{u \in U}{\cap} G_u = \{\tilde{u}\}$, il suffit alors de poser $u_{\min} = \hat{u}$ et $u_{\max} = \tilde{u}$.

On conclut que toute solution u de (2.1) telle que $\alpha \leq u \leq \beta$ vérifie

$$\alpha \leq u_{\min} \leq u \leq u_{\max} \leq \beta.$$

■

Exemple 2.3 *Considérons le problème aux limites.*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_2 \ \max\{-u-2, \min\{u, -u+2\}\} := f(u) & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{2.9}$$

Où λ_2 est la deuxième valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ sur $H_0^1(\Omega)$.

Notons φ_2 une fonction propre associée à la valeur propre λ_2 telle que $\|\varphi_2\|_\infty = 1$.

Les fonctions de la forme $x \longmapsto u(x) = \mu\varphi_2(x)$, avec μ constante réelle , telle que $|\mu| \leq 1$, sont solutions de (2.9).

Les fonctions α et β définies par $\alpha(x) = -2$ et $\beta(x) = 2$ sont respectivemet sous-solution et sur-solution de (2.9)

Par le Théorème 2.4, $\exists\ u_{\max}, \exists\ u_{\min}$ solutions de (2.9) vérifiant $-2 \leq u_{\min} \leq 0 \leq u_{\max} \leq 2$.

Mais nous pouvons être plus précis aux inégalités $u_{\min} \leq 0 \leq u_{\max}$ .En effet, si nous donnons à μ successivement les valeurs 1 et -1 par exemple, nous pouvons déduire que l'on a nécessairement $u_{\min} \leq -|\varphi_2| \leq |\varphi_2| \leq u_{\max}$ .Par régularité de $u_{\min}$ et $u_{\max}$ nous avons donc $u_{\min} << 0 << u_{\max}$.

2.2.2 Sous-sur solutions mal ordonnées

Définition 2.4 *[6]*

Une sous-solution α(resp.Une sur-solution β) de (2.1) est dite ***strite ,*** *si pour toute solution u de (2.1) ,on a :$u \geq \alpha \Rightarrow u >> \alpha$ resp.$u \leq \beta \Rightarrow u << \beta$*

Le Théorème suivant constitu une alternative du Théorème 2.2 dans le cas où la sous solution α et la sur solution β ne vérifient pas $\alpha \leq \beta$.

Théorème 2.5 *[6]On suppose que la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est L^p-Carathéodory, avec $p > n$ et que le problème (2.1) admet une sous-solution α et une sur-solution β telles que:*

1) $\exists\ x_0 \in \Omega,\ \alpha(x_0) > \beta(x_0)$.

2) $\exists\ h \in L^p(\Omega), \forall p.p.x \in \Omega, \forall u \in \mathbb{R}, |f(x,u) - \lambda_1 u| \leq h(x)$.

Le problème (2.1) admet au moins une solution $u \in \vartheta$ où

$$\vartheta = \left\{ u \in C_0^1(\overline{\Omega}) / \ u \ngeq \alpha \ \text{et} \ u \nleq \beta \right\} = \left\{ u \in C_0^1(\overline{\Omega}) / \min(u - \alpha) < 0 < \max(u - \beta) \right\}$$

La démonstration de ce Théorème fait appel au Théorème d'Amman. Un résultat de multiplicité qui est connu sous le nom Théorème des trois solutions:

Théorème 2.6 *[6] Supposons que nous ayons deux sous-solutions strictes α_1 et α_2 de (2.1) et deux sur-solutions strictes β_1 et β_2 de (2.1) qui vérifient*

$$\alpha_1 << \beta_1, \alpha_2 << \beta_2, \alpha_2 \nleq \beta_1, \alpha_1 \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \beta_2.$$

Si $f : E \to \mathbb{R}$ est L^p-Carathéodory avec $E = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} / \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ et $p > n$ alors (2.1) admet au moins trois solutions u_1, u_2, et u_3 qui vérifient

$$\alpha_1 << u_1 << \beta_1, \alpha_2 << u_2 << \beta_2, \text{et } \alpha_1 << u_3 << \beta_2, \text{avec } u_3 \nleq \beta_1 \text{et} u_3 \ngeq \alpha_2$$

Remarque 2.1 *Si nous reprenons exactement les mêmes hypothèses du Théorème d'Amman alors le problème (2.1) admet au moins trois solutions u_1, u_2 et u_3 qui vérifient*

$$\alpha_1 << u_1 << \beta_{1,} \alpha_2 << u_2 << \beta_2 \text{et } u_1 \lneqq u_3 \lneqq u_2 \text{avec } u_3 \nleq \beta_1 \text{et} u_3 \ngeq \alpha_2$$

Preuve: Considérons le problème modifié suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda_1 u(x) + g_r(x, u(x)) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.10}$$

où, r est un paramètre réel strictement positif

$$\forall z \in \mathbb{R}\ , \forall p.p. x \in \Omega,\ g_r(x, z) = \begin{cases} f(x, z) - \lambda_1 z & \text{si } |z| < r \\ (1 + r - |z|)(f(x, z) - \lambda_1 z) - (|z| - r)\frac{z}{r} & \text{si } |z| \in [r, r + 1] \\ -\frac{z}{r} & \text{si } |z| > r + 1 \end{cases}$$

On remarque que g_r est une fonction de $f(x,u)$.

Le théorème se démontre en trois étapes .

♠Première étape:

Il existe α_1 une sous-solution de (2.10) telle que $\alpha_1 \leq -r-2$ et il existe β_2 une sur-solution de (2.10) telle que $\beta_2 \geq r+2$.

En effet,considérons la solution w du problème

$$\begin{cases} -\Delta w = (\lambda_1 - \frac{1}{r})w & \text{dans } \Omega, \\ w = r+2 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

φ_1 est la fonction propre associée à λ_1 qui vérifie $\|\varphi_1\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} = 1$ et $\varphi_1 >> 0$.

Soit k un réel positif suffisament grand choisi tel que $k\varphi_1 + w \geq r+2$ sur $\overline{\Omega}$. Un tel réel existe car $(r+2) - w \in C_0^1(\overline{\Omega})$.

Posons

$$\beta_2 = k\varphi_1 + w \text{ et } \alpha_1 = -\beta_2$$

Nous avons ,

$$\begin{aligned} -\Delta\beta_2 &= \lambda_1 k\varphi_1 + (\lambda_1 - \frac{1}{r})w = \lambda_1 k\varphi_1 + (\lambda_1 - \frac{1}{r})(\beta_2 - k\varphi_1) \\ &= (\lambda_1 - \frac{1}{r})\beta_2 + \frac{1}{r}k\varphi_1 \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

On conclut que

$$-\Delta\beta_2 \geq (\lambda_1 - \frac{1}{r})\beta_2 = \lambda_1\beta_2 + g_r(x,\beta_2) \qquad \text{dans } \Omega$$

Nous avons que $\beta_2 \geq 0$ sur $\partial\Omega$ donc β_2 est une sur solution du problème (2.10).

On a

$$\alpha_1 = -\beta_2 = -(k\varphi_1 + w)$$

Nous avons

$$-\Delta\alpha_1 = \Delta\beta_2 = -\lambda_1 k\varphi_1 - (\lambda_1 - \frac{1}{r})w = -\lambda_1 k\varphi_1 - (\lambda_1 - \frac{1}{r})(-\alpha_1 - k\varphi_1) = (\lambda_1 - \frac{1}{r})\alpha_1 - \frac{1}{r}k\varphi_1 \text{ dans } \Omega$$

On conclut que

$$-\Delta\alpha_1 \leq (\lambda_1 - \frac{1}{r})\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 - g_r(x, \alpha_1) \text{ dans } \Omega$$

Nous avons aussi $\alpha_1 \leq 0$ sur $\partial\Omega$ donc α_1 est une sous solution du problème (2.10). Par conséquent $\alpha_1 << \beta_2$

♠Deuxième étape:

Montrons que pour tout réel $r > \max(\|\alpha\|_\infty, \|\beta\|_\infty)$, il existe une solution u_r du problème (2.10) telle que $u_r \in \overline{\vartheta}$.

Sous la condition ci-dessus , α et β sont respectivement une sous solution et une sur solution du problème (2.10).On se retrouve dans le cas du théorème d'Amman, i.e dans ce cas nous n'avons pas le caractère strict de α et β

On a deux situations:

α et β sont strictes , et par le théorème d'Amman et la remarque 2.1 il existe une solution u_r du problème (2.10) telle que $u_r \in \vartheta$.

α et β ne sont pas strictes donc il existe une solution u_r du problème (2.10) telle que $\in \partial\vartheta$.

Par conséquent , il existe dans tout les cas une solution u_r du problème (2.10) telle que $u_r \in \overline{\vartheta}$.

Montrons qu'il existe $r > 0$ tel que ,u_r est une solution du problème (2.1)

♠troisième étape:

Montrons qu'il existe une constante réelle positive K telle que

$$\forall r \geq K, \forall u \text{ solution de (2.10) telle que } u \in \overline{\vartheta}, \text{on a } \|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} < K$$

Pour cela raisonnons par l'absurde. Supposons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists r_n > n, \exists\ u_n \text{ solution de (2.10) avec } r = r_n, \text{telle que } \ u_n \in \overline{\vartheta}, \quad \text{ et } \ \|u_n\|_{C^1(\overline{\Omega})} > n$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{C^1(\overline{\Omega})}}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,on a

$$\begin{cases} -\Delta v_n = \lambda_1 v_n + \frac{g_{r_n}(x,u_n)}{\|u_n\|_{C^1(\overline{\Omega})}} & \text{dans } \Omega, \\ v_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous pouvons décomposer g_{r_n} sous la forme suivante:

$$g_{r_n}(x, u_n) = p_n(x, u_n)u_n + q_n(x, u_n)$$

avec p_n et q_n deux fonctions satisfaisant:

$$\forall p.p.x \in \Omega, \ \frac{-1}{r_n} \leq p_n(x, u_n(x)) \leq 0 \text{ et } \ |q_n(x, u_n(x))| \leq h(x).$$

On remarque d'après ce qui précede que la suite

$$((\lambda_1 + p_n(x, u_n))v_n + \frac{q_n(x, u_n)}{\|u_n\|_{C^1(\overline{\Omega})}})$$

est bornée dans $L^p(\Omega)$. C'est à dire il existe $c > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \left\|(\lambda_1 + p_n(x, u_n))v_n + \frac{q_n(x, u_n)}{\|u_n\|_{C^1(\overline{\Omega})}})\right\|_{L^p(\Omega)} \leq c.$$

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$ on a ,$\|v_n\|_{W^{2.p}(\Omega)} \leq C$,

Par conséquent, on peut extraire de la suite (v_n) une sous-suite $(v_{n_m})_m$ telle que $v_{n_m} \underset{m\to+\infty}{\to} v$ faiblement dans $W^{2,p}(\Omega)$ et telle que $v_{n_m} \underset{m\to+\infty}{\to} v$ fortement dans $C_0^1(\overline{\Omega})$ grace à l'injection compacte de $W^{2,p}(\Omega)$ dans $C_0^1(\overline{\Omega})$.

Par passage à limite , la fonction v satisfait le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda_1 v & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Comme $\|v\|_{C^1(\overline{\Omega})} = 1$, alors $v = \pm\varphi_1$.

On a deux possibilités, soit la suite $(v_{n_m})_m$ converge vers φ_1 ou vers $-\varphi_1$ dans $C_0^1(\overline{\Omega})$ et ceci à partir d'un certain rang M

$$\frac{u_n}{\|u_n\|_{C^1(\overline{\Omega})}} - \varphi_1 \geq -\frac{1}{2}\varphi_1$$

où

$$\frac{u_n}{\|u_n\|_{C^1(\overline{\Omega})}} + \varphi_1 \leq \frac{1}{2}\varphi_1$$

C'est-à-dire que, pour $m \geq M$, nous avons

$$u_{n_m} \geq \frac{1}{2}\|u_{n_m}\|_{C^1(\overline{\Omega})}\ \varphi_1 >> \alpha$$

ou bien

$$u_{n_m} \leq -\frac{1}{2}\|u_{n_m}\|_{C^1(\overline{\Omega})}\ \varphi_1 << \beta$$

Ceci est vrai, pour m assez grand,contradiction avec le fait que u_{n_m}est u élément de $\overline{\vartheta}$.

On conclut que pour $r \geq K$, il existe une solution u_r de (2.10) appartenant à $\overline{\vartheta}$ tel que$\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} < K < r$. De cette construction on déduit que u_r est une solution du (2.1). ■

Remarque 2.2 *L'hypothèse $\underline{u} \leq \overline{u}$ n'est pas toujours satisfaite. C'est-à-dire il se peut que $\underline{u} > \overline{u}$ sur Ω .L'exemple èlèmentaire est le suivant :*

considèrons le problème de la valeur propre suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u & \textit{dans } \Omega \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Le problème admet une solution u de la forme suivante $u = Ce_1$ où C est une constante réel et

$e_1(x) > 0$ *pour tout* $x \in \Omega$

Choisissons

$$\underline{u} = e_1 \text{ et } \overline{u} = -e_1$$

Alors $\underline{u}$ *(resp.*$\overline{u}$*) est sous solution (resp.sur solution) du problème (2.1) mais* $\underline{u} > \overline{u}$.

2.3 f est une fonction de Carathéodory

Maintenant, on va s'intéresser au Théorème relatif lorsque f est une fonction de Carathéodory.

Définition 2.5 *[6](Fonction de Carathéodory)*
Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *,* f *une fonction de* $\Omega \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est dite de Carathéodory , si elle vérifie:*

- *1.L'application*

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$$

  est continue pour presque tout $x \in \Omega$.

- *2.L'application*

$$\begin{array}{ccc} f & : & \Omega \to \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$$

  est mesurable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = g\,(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.11}$$

Dans certains cas, on peut faire appel à la définition de sous et sur solutions au sens faible.

Définition 2.6 • *On dit que $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ est une sur solution faible pour le problème (2.11), si $\overline{u} \geq u_0$ sur $\partial\Omega$ et*

$$\int_\Omega \nabla\overline{u}\nabla v dx \geq \int_\Omega g(x,\overline{u}(x))v(x)dx, \quad \forall v \in C_0^\infty\,(\Omega)\,, v \geq 0.$$

• *On dit que $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ est une sous solution faible pour le problème (2.11), si $\underline{u} \geq u_0$ sur $\partial\Omega$ et*

$$\int_\Omega \nabla\underline{u}\nabla v dx \leq \int_\Omega g(x,\underline{u}(x))v(x)dx, \ \forall v \in C_0^\infty\,(\Omega)\,, v \geq 0.$$

On peut énoncer le Théorème:

Théorème 2.7 *[9] Soit $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory telle que $|g(x,u(x))| \leq C(R)$, pour tout $R > 0$ et pour tout u telle que $|u(x)| \leq R$ presque partout.*

Supposons que $\underline{u}$ et $\overline{u}$ une sous et sur solutions du problème (P).Supposons qu'il existe $\underline{c}$ et $\overline{c}$ $\in \mathbb{R}$ tel que $-\infty < \underline{c} \leq \underline{u} \leq \overline{u} \leq \overline{c} < +\infty$ presque partout dans Ω. Alors le problème (P) admet une solution $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.

Pour la preuve du Théorème ainsi l'exemple nous invitons le lecteur à consulter le livre de Struwe [9].

Chapitre 3

Application de la méthode de sous-sur solutions

3.1 Introduction

Dans de ce chapitre, on s'intéresse à appliquer les différentes techniquess utilisées dans le précédent chapitre.

Dans cette partie, on montre l'existence de solutions du problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $0 < q < 1 < p < 2^\star - 1 = \frac{N+2}{N-2}$ $(N \geq 3)$ et λ un paramètre positif.

La fonctionnelle d'énergie associé au problème (3.1) est définie par

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx. \tag{3.2}$$

Ce problème a été traité dans l'article d'Ambrosetti, Brézis and Cerami [1].

La particularité de ce problème, réside dans le fait qu'il y a un terme concave ($q < 1$) et un terme convexe ($p > 1$). Les Théorèmes énoncés dans le précédent chapitre ne sont pas appliquables.

Ambrosetti-Brézis-Cerami ont fait appel à la notion de sous-sur solutions qui leur permis de prouver le résultat suivant:

Théorème 3.1 *[1]Pour tout* $0 < q < 1 < p$ *,il existe* $\Lambda \in \mathbb{R}; \Lambda > 0$ *tel que:*

i)Pour tout $\lambda \in (0, \Lambda)$*,le problème (3.1) admet une solution minimale* u_λ *tel que* $I_\lambda(u_\lambda) < 0$ *.*

ii)Pour $\lambda = \Lambda$*, le problème (3.1) admet au moins une solution faible* $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$*.*

iii)Pour tout $\lambda > \Lambda$ *le problème (3.1) n'admet aucune solution.*

Remarque 3.1 *La solution minimale pour ce problème est dans le sens que* u_λ *est une solution à énergie minimale.*

3.2 Lemmes

Avons d'entamer la démonstration du Théorème 3.1.

Définissons

$$\Lambda = \sup\{\lambda > 0, : \text{le probléme (3.1) admet une solution}\}.$$

Nous établissons quelques lemmes auxiliaires.

Lemme 3.1 *[1] On a ,* $0 < \Lambda < \infty$.

Preuve: Soit e soltution du problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta e = 1 & \text{dans } \Omega, \\ e = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

e est la solution unique du problème (3.3), ceci d'après le Théorème de Lax-Milgram.

$\overline{u} = Me$ une sur solution du problème (3.1) où M est une constante positive.

En effet ,$\overline{u}$ satisfait

$$-\Delta Me \geq \lambda(Me)^q + (Me)^p$$

alors

$$M \geq \lambda M^q e^q + M^p e^p$$

Comme $0 < q < 1 < p$, on peut trouver $\lambda_0 > 0$ telle que pour tout $0 < \lambda \leq \lambda_0$ il existe $M = M(\lambda) > 0$ satisfaisant

$$M \geq \lambda M^q \|e\|_\infty^q + M^p \|e\|_\infty^p \geq \lambda M^q e^q + M^p e^p.$$

On a pour tout $x \in \partial\Omega$, $\overline{u}(x) = 0$.

Donc,$\overline{u}(x) = Me$ est une sur-solution de (3.1).

Soit $\underline{u} = \varepsilon\varphi_1$ où $\varepsilon > 0$,φ_1 est la fonction propre associée au problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$\underline{u}$ est une sous solution du problème (3.1).En effet

$$-\Delta\varepsilon\varphi_1 \leq \lambda(\varepsilon\varphi_1)^q + (\varepsilon\varphi_1)^p,$$

ceci implique que

$$\varepsilon(-\Delta\varphi_1) \leq \lambda(\varepsilon\varphi_1)^q + (\varepsilon\varphi_1)^p.$$

Donc

$$\varepsilon\lambda_1\varphi_1 \leq \lambda(\varepsilon\varphi_1)^q + (\varepsilon\varphi_1)^p$$

pour ε assez petit ,pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $x \in \partial\Omega$, $\underline{u}(x) = 0$ car $\varphi_1 = 0$ sur $\partial\Omega$.

Ainsi $\underline{u}(x) = \varepsilon\varphi_1$ est une sous solution du problème (3.1).

Par conséquent ,

$$\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x) \text{ i.e } \varepsilon\varphi_1 \leq Me$$

Donc le problème (3.1) admet une solution $\varepsilon\varphi_1 \leq u \leq Me$ pour tout $\lambda \leq \lambda_0$ et $\Lambda \geq \lambda_0$.

Soit $\overline{\lambda}$ tel que

$$\overline{\lambda} t^q + t^p > \lambda_1 t \quad \forall t \in \mathbb{R} \; t > 0. \tag{3.4}$$

Si λ est telle que le problème (3.1) admet une solution u, nous allons multiplier le problème (3.1) par φ_1 et intégrons sur Ω on obtient

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx = \lambda \int_\Omega u^q \varphi_1 dx + \int_\Omega u^p \varphi_1 dx \; . \tag{3.5}$$

De (3.4) et (3.5) on conclut que $\lambda < \overline{\lambda}$ et on a montrer que $\Lambda \leq \overline{\lambda}$. ■

Lemme 3.2 *[1] Pour tout* $0 < \lambda < \Lambda$, *le problème (3.1) admet une solution.*

Preuve: Supposons $\lambda < \Lambda$, soit u_μ solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u^q + u^p & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$0 < q < 1 < p$.

pour $\lambda < \mu < \Lambda$,u_μ est une sur solution du problème (3.1) donc $\varepsilon\varphi_1 \leq u_\mu$ pour ε assez petit.

Par conséquent le problème (3.1) admet une solution . ■

Lemme 3.3 *[1] supposons que* $f(t)$ *est une fonction telle que* $t^{-1}f(t)$ *est décroissante pour* $t > 0$.

Supposons que v *et* w *satisfont*

$$\begin{cases} -\Delta v \leq f(v) & \textit{dans } \Omega \\ v > 0 & \textit{dans } \Omega \\ v = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.6}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta w \geq f(w) & dans\ \Omega \\ w > 0 & dans\ \Omega \\ w = 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.7}$$

Alors $w \geq v$ *dans*Ω

Preuve: :

Multiplions l'équation (3.6) par w et l'équation (3.7) par v, on a

$$w(-\Delta v) \leq f(v) \quad w \tag{3.8}$$

et

$$v(-\Delta w) \geq f(w) \quad v \tag{3.9}$$

La soustraction de (3.8) et (3.9), nous donne

$$\begin{aligned} -v\Delta w + w\Delta v &\geq (f(w) \quad v) - (f(v) \ \ w) \\ &= vw(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Soit $\theta(t)$ une fonction non décroissante telle que

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \quad t \leq 0 \end{cases}$$

Posons

$$\theta_\varepsilon(t) = \theta(\frac{t}{\varepsilon})$$

On a $\theta_\varepsilon(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Multiplions (3.10) par $\theta_\varepsilon(v - w)$ et intégrons sur Ω.

On a

$$\int_\Omega [-v\ \Delta w + w\Delta v]\ \theta_\varepsilon(v-w)dx = \int_\Omega \left[\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\right]\theta_\varepsilon(v-w)dx. \tag{3.11}$$

En utilisant la formule de Green, on obtient:

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega v\theta_\varepsilon(v-w)\nabla w(\nabla v-\nabla w)dx - \int_\Omega w\ \theta'_\varepsilon(v-w)\nabla v(\nabla v-\nabla w)dx \\
&= \int_\Omega v\theta'_\varepsilon(v-w)(\nabla w-\nabla v)(\nabla v-\nabla w)dx + \int_\Omega (v-w)\theta'_\varepsilon(v-w)\nabla v(\nabla v-\nabla w)dx \\
&\leq \int_\Omega (v-w)\ \theta'_\varepsilon(v-w)\ \nabla v\ (\nabla v-\nabla w)dx \\
&= \int_\Omega \nabla v\ \nabla\left[\gamma_\epsilon(v-w)\right]dx - \int_\Omega \Delta v\ \gamma_\epsilon(v-w)\ dx
\end{aligned}$$

où $\gamma_\varepsilon(t) = \int_0^t s\theta'(s)ds$.

Puisque

$$0 \leq \gamma_\varepsilon(t) \leq \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

il s'en suit que

$$\int_\Omega [-v\ \Delta w + w\Delta v]\,\theta_\varepsilon(v-w)dx \leq \varepsilon.$$

En remplaçant cette dernière dans (3.11) on a

$$\int_\Omega vw\left[\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\right]\theta_\varepsilon(v-w)dx \leq \varepsilon$$

comme $\varepsilon \to 0$, donc

$$\int_{[v>w]} vw\left[\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\right]dx \leq 0.$$

Or

$$\frac{f(v)}{v} < \frac{f(w)}{w} \ \text{ sur } [v>w] \text{ et } meas\,[v>w] = 0,$$

donc $v \leq w$. ∎

Lemme 3.4 *[1]Pour tout $0 < \lambda < \Lambda$ le problème (3.1) admet une solution minimale u_λ.*

Preuve: Soit v_λ l'unique solution positive du problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda v^q & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.12}$$

Ceci découle d'après les résultats de [5].

D'aprés ce qui précède, on sait que (3.1) admet une solution $u > 0$ pour tout $\lambda \in (0, \Lambda)$.

Comme $-\Delta u \geq \lambda u^q$,on peut utiliser le lemme 3.3 avec $w = u$. On déduit que chaque solution du problème (3.1) doit satisfaire $u \geq v_\lambda$ où v_λ est une sous-solution de (3.1).

Utilisons l'itération monotone suivante:

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} = \lambda u_n^q + u_n^p \\ u_0 = v_\lambda \end{cases}$$

avec $u_n \nearrow u_\lambda$, et u_λ est une solution de (3.1) .

u_λ est une solution minimale. En effet ,si u est une solution du problème (3.1), par construction, on a $u \geq v_\lambda$ donc u est une sur-solution de (2.1) .Par conséquent $u_n \leq u$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,par suite $u_\lambda \leq u$. ■

Lemme 3.5 *[1] Soit $\psi < \Psi$ où ψ une sous solution et Ψ une sur solution du problème(3.1).Supposons que ψ n'est pas une solution. Soit u une solution minimale telle que $\psi \leq u \leq \Psi$ alors $v_1 := \lambda_1[-\Delta - a(x)] \geq 0$ où $a = a(x) = \lambda q u^{q-1} + p u^{p-1}$ et $\lambda_1[-\Delta - a(x)]$ est la première valeur propre de $-\Delta - a(x)$ avec des conditions aux limites nulles sur $\partial\Omega$.*

Remarque 3.2 *Le lemme 3.5 peut être appliqué pour la solution minimale u_λ.*

En particulier, la relation $\int_\Omega (|\nabla\phi|^2 - a\phi^2)dx \geq 0, \ \ \forall \phi \in H$ avec

$$a = a_\lambda = \lambda q u_\lambda^{q-1} + p u_\lambda^{p-1}.$$

Ceci est vraie si et seulement si $\lambda_1[-\Delta - a(x)] \geq 0$.*Donc pour* $a = a_\lambda$ *on a*

$$\int_\Omega (|\nabla\phi|^2 - a_\lambda\phi^2)dx \geq 0 \quad \forall\phi \in H \ . \tag{3.13}$$

Démontrons maitenant le résultat principal

Preuve: (La preuve du Théorème 3.1):

D'après le lemme 3.1, 3.2 et 3.4 , le problème (3.1) admet une solution minimale u_λ pour tout $\lambda \in (0, \Lambda)$.

On a

$$I_\lambda(u_\lambda) = \frac{1}{2}\|u_\lambda\|_2^2 - \frac{\lambda}{q+1}\|u_\lambda\|_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{p+1}\|u_\lambda\|_{p+1}^{p+1}$$

On sait que u_λ est une solution du problème (3.1), alors

$$\|u_\lambda\|_2^2 = \lambda\|u_\lambda\|_{q+1}^{q+1} + \|u_\lambda\|_{p+1}^{p+1} \tag{3.14}$$

D'après le lemme 3.5 et la remarque 3.1 , on a

$$\|u_\lambda\|_2^2 \geq \lambda\|u_\lambda\|_{q+1}^{q+1} + \|u_\lambda\|_{p+1}^{p+1} \quad . \tag{3.15}$$

De (3.14) et (3.15) on obtient

$$\lambda(1-q)\|u_\lambda\|_{q+1}^{q+1} \geq (p-1)\|u_\lambda\|_{p+1}^{p+1} \ . \tag{3.16}$$

En remplaçant (3.14) dans $I_\lambda(u_\lambda)$,on a

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_\lambda) &= \frac{\lambda}{2}\|u_\lambda\|_{q+1}^{q+1} + \frac{1}{2}\|u_\lambda\|_{p+1}^{p+1} - \frac{\lambda}{q+1}\|u_\lambda\|_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{p+1}\|u_\lambda\|_{p+1}^{p+1} \\ &= \lambda(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1})\|u_\lambda\|_{q+1}^{q+1} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\|u_\lambda\|_{p+1}^{p+1} \\ &= \lambda(\frac{q-1}{2(q+1)})\|u_\lambda\|_{q+1}^{q+1} + (\frac{p-1}{2(p+1)})\|u_\lambda\|_{p+1}^{p+1}. \end{aligned}$$

En utilisant (3.16) on obtient

$$I_\lambda(u_\lambda) \leq \lambda(\frac{-p+q}{(p+1)+(q+1)})(\frac{1-q}{2}) \left\| u_\lambda \right\|_{q+1}^{q+1} < 0.$$

Il nous reste à montrer que $u_\lambda < u_{\lambda_1}$ pour tout $\lambda < \lambda_1$.

En effet, si $\lambda < \lambda_1$ alors u_{λ_1} est une sur solution du problème (3.1) .Comme $\varepsilon > 0$ assez petit et $\varepsilon\varphi_1 < u_{\lambda_1}$ alors le problème (3.1) possède une solution v telle que

$$\varepsilon\varphi_1 \leq v \leq u_{\lambda_1}$$

Or u_λ est la solution minimale du problème (3.1) alors d'après le principe du maximum on aura $u_\lambda \leq u_{\lambda_1}$,or $\lambda < \lambda_1$ donc $u_\lambda < u_{\lambda_1}$

D'où la preuve du premier point.

Pour le deuxième point , soit λ_n une suite tel que $\lambda_n \nearrow \Lambda$, puisque les solutions $u_n = u_{\lambda_n}$ satisfont $I_{\lambda_n}(u_n) < 0$. Donc, il exicte $c > 0$ telle que

$$\left\| \nabla u_n \right\|^2 \leq c,$$

Comme l'injection de $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ est continue, alors

$$\left\| u_n \right\|_{p+1}^{p+1} \leq c.$$

L'espace $W_0^{1,2}(\Omega)$ est réflexif, alors il existe u^* telle que $u_n \to u^* > 0$ p.p.dans Ω, fortement dans $L^{p+1}(\Omega)$ et faiblement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ ainsi u^* est une solution faible du problème (3.1) pour $\lambda = \Lambda$.

3. Pour $\lambda > \Lambda$ le problème (3.1) n'admet pas de solutions. Ceci découle de la définition de Λ. $\blacksquare$

Conclusion

L'idée c'était d'exploiter certaines propriétés afin de trouver la solution recherchée , plus précisément on a montrer que si on peut trouver une sous- solution $\underline{u}$ et une sur-solution $\overline{u}$ d'un problème aux limites bien particulier , et si de plus $\underline{u} \leq \overline{u}$ alors il existe une solution qui satisfait

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$$

Ce qui nous assure l'existence de solutions.

Pour le cas non ordonnée c'est-à-dire $\underline{u} \lneqq \overline{u}$, il faut d'autres hypoyhèses.

Bibliographie

[1] A.Ambrostti, H. Brezis, G. Cerami, Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Elliptic Problems, J. Funct. Anal. Appl 122 (1994) ,519-543.

[2] A.Ambrosetti, M.Badiale ,The dual variational principle and elliptic problems with discontinuous nonlinearities ,J math.Anal .Appl.140 (1989),363-381.

[3] H.Amman, Fixed point equations and non linear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, SIAM Review, vol.18 ,n°4 ,(1976), 620-709

[4] H.Brezis, Analyse Fonctionnelle théorie et applications ,Masson ,Paris (1983).

[5] H.Brezis, S.Kamin, Sublinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$,Manuscripta math (1992)74 87-106.

[6] C.De Coster, J.Tapka ,Introduction à la théorie des sous et sur solutions Institut des Sciences et Techniques de Valenciennes (2010) ,1-32.

[7] L.C.Evans, Partial differential equations , American Mathematical society ,Vol.19(1997)

[8] V.D.Radulescu, Qualitative analusis of non linear elliptic partial differential equations :Monotonocity Analytic , and Variational Methods ,Hindawi , Vol.6 (2008).

[9] M.Struwe ,Variational Methods ,applications to non linear partial differential equations and hamiltonian systems Fourth Edition ,Springer Vol. 34 (2008).