Remerciements

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur S.M.Bouguima, professeur au département de mathématique, Faculté des Sciences, Université de Tlemcen, pour m'avoir soutenu tout au long de cette étude. Je lui témoigne ma profonde reconnaissance, pour ses conseils scientifiques et le soutien qu'il m'a accordé à mon travail. Je le remercie pour sa gentillesse, sa disponibilité, sa patience pendant des intenses et rationnelles discussions qui m'ont permis de réaliser ce travail dans de bonnes conditions. Pour tout cela et aussi pour son aide, sa confiance et son soutien moral, je le remercie vivement.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur M.YEBDRI, professeur au département de mathématique, Faculté des Sciences, Université de Tlemcen, de l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail en acceptant de présider le jury. Qu'il soit assuré de mon profond respect et de ma sincère reconnaissance.

Mes remerciements sincères et respectueux vont également à Monsieur A.Benchaib, maître assistant de classe A à l'Université de Tlemcen, de l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail en acceptant de le juger et de faire partie du jury. Qu'il soit assuré de ma profonde gratitude. Un grand merci aussi à tous mes collègues de l'option master Equations Différentielles.

Enfin, j'adresse mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à ce présent travail.

Meziane-El Korso Baya sana,

Dédicaces

Je dédie ce travail : A mes parents et mes beaux parents en témoignage de ma reconnaissance pour tout ce que je leur dois. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude et de mon amour. Que Dieu le Tout Puissant vous procure, santé et longue vie ;
A mon mari ELIAS qui m'a soutenue pendant toute la période de ce mémoire. Je lui souhaite une santé meilleure et longue vie ;
A mes deux frères AMINE et BACHIR qui n'ont jamais cessé de m'encourager
A mes deux beaux frères et belle soeur pour leurs soutiens ; Au petit poussin MAHDI que j'aime beaucoup ;
A mes trois meilleures amies SOFIA, YASMINA et LAMIA ;
A mes grands parents, mes oncles FOUZI, ISMAT, MOHAMED, SALIM et leurs enfants ;
A toutes mes cousins et mes cousines ;
A tous les enseignants et enseignantes qui ont contribué à ma formation ;
Ainsi qu'a tous mes amis en particuliers tous ceux qui m'ont procuré aide et réconfort durant la réalisation de ce travail.
Avec toute mon affection.

Meziane-El Korso Baya sana

Notations

Dans notre mémoire on a besoin des notations suivantes :
$\mathbb{R}$: Corps des nombres réels
$\mathbb{R}^+$: Corps des nombres réels qui ne sont pas négatifs
$\mathbb{R}^n$: Espace des vecteurs à n entrées réelles
$|.|$: valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
$\| \cdot \|$: norme sur $\mathbb{R}^n$.
$\ln(x)$: fonction logarithme de x.
$f\ '(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$:dérivée de la fonction $f(x)$ par rapport à la variable x .
$C^k(U)$: l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur G avec $k \in \mathbb{N}$.

Table des matières

Introduction

Divers modèles ont fait l'objet d'étude pour décrire la dynamique d'une population donnée. Dans ce travail,on considère un modèle discret structuré en âge .

L'étude est faite d'un point de vue qualitatif autrement dit, nous étudions la stabilité.

Ce mémoire est répartie de la manière suivante :

-Dans la première partie, on présente quelques modèles dans le cas continu.

-Dans la deuxième partie, on décrit le modèle de Fibonacci.

-La dernière partie est réservée à l'extension linéaire du modèle de Fibonacci.

Suite de Fibonacci

L'italien Fibonacci, dit Léonard de Pise, vécut de 1175 à 1245 environ.

Il propagea l'algèbre arabe et l'usage des chiffres arabes par son ouvrage (Liber abbaci). On lui doit aussi la série dite « suite de Fibonacci ».

Cette suite contient de nombreuses propriétés :

1- Si on additionne les cinq premiers termes en ajoutant1,on obtient le septième.Si on additionne les six premiers termes en ajoutant1,on obtient le huitième et ainsi de suite. 2-Tout nombre de cette suite élevé au carré est égal au produit des deux nombres voisins augmenté ou diminué de 1,les signes$+1$ et -1alternant tout au long de la suite.

$$(Un)^2 = U_{n+1}U_{n-1} \quad -(-1)^n \quad \forall n > 1$$

3- Si on additionne les nombres de Fibonacci en sautant un terme à chaque fois (sans oublier le premier) on obtient le nombre qui vient juste après :

$$1 + 1 + 3 + 8 + 21 = 34$$

$$1 + 2 + 5 + 13 + 34 = 55$$

4- Si on prend par exemple le 4ème terme en l'élevant au carré

$$(3^2 = 9)$$

et qu'on procède à la somme du 5ème terme élevé au carré

$$(5^2 = 25)$$

on obtient le 9ème terme de la suite.

5- La suite de Fibonacci possède encore une autre propriété :

Elle fournit un mode de calcul du nombre d'or souvent noté τ ou ϕ appelé nombre d'or.

Sur un segment AB, la section d'or est déterminée par un point C tel qu'on ait

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Chacun des ces quotients est alors égal au nombre d'or et vaut

$$\frac{(1 + \sqrt{5})}{2}$$

On démontre que le rapport entre le (n+1)-ième terme et le n-ième terme (c'est à dire le rapport entre deux éléments consécutifs de cette suite) tend vers le nombre d'or lorsque n tend vers l'infini.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Définition :[4]

1.1.1 Système discret :

Soit : $D \subset \mathbb{R}^n$, $f \ : D \to \mathbb{R}^n$ une application continue étant donnée une condition initiale x_0 avec le premier terme est

$$x_1 = f \ (x_0)$$

Le second terme est

$$x_2 = f \ (x_1) = f(f \ (x_0)) = f \ ^2(x_0)$$

Le n ^{iemme} terme est

$$x_n = f \ (x_{n-1}) = ... = f \ ^n(x_0)$$

L'application f est appelée système discret.

1.1.2 Le point d'équilibre :

Soit f un système discret ,$\overline{x} \subset D$ est un point d'équilibre s'il vérifie $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

1.1.3 Point d'équilibre hyperbolique :

Soit :$\overline{x} \subset D$ un point d'équilibre si la matrice jacobienne $Df(\overline{x})$ n'a pas de valeur propre de module égale à 1 alors $\overline{x}$ est dit hyperbolique si non il est dit elliptique.

1.1.4 Stabilité du point d'équilibre :

Soit :$\overline{x}$ un point d'équilibre hyperbolique,si toutes les valeurs propres de $Df(\overline{x})$ sont de module inferieur à 1 ,alors $\overline{x}$ est stable c'est-à-dire :que toutes les conditions initiales tendent vers $\overline{x}$ quand $n \to +\infty$,s'il existe une valeur propre dont le module est supérieur à 1, $\overline{x}$ est instable.

1.2 Théorie de Morse :

Soit : $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞

1.2.1 Définition(1) :

1-a est un point critique de Fsi :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a) = 0$$

2-a est dit non dégénéré si :

$$\left| \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a) \right| \neq 0$$

Exemple 1 :

$$f\ (x) = x^2$$

$x = 0$ est point critique car :

$$f\ '(0) = 2 * 0 = 0$$

Et :

$$f\ ''(0) = 2 \neq 0$$

Conclusion :
a est un point critique non dégénéré.

Exemple 2 :

$$F(x_1, x_2) = x_1^2\ + x_2^2$$

$(x_1, x_2) = (0, 0)$ est point critique car :

$$\nabla F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\partial^2 F\,(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$|\partial^2 f\ (x_1, x_2)\,| = 4 \neq 0$
Donc :$(0,0)$ est un point critique non dégénéré.

1.2.2 Définition(2) :

-Si $x = a$ est un point critique non dégénéré pour F alors : F est dite une fonction de Morse dans un voisinage de $x = a$.

-Si $x = 0$ est un point critique non dégénéré pour F alors : $F(x) = F_0 - c_1 x_1^2 - c_2 x_2^2 - ... - c_k x_k^2 + c_{k+1} x_{k+1}^2 + ... + c_n x_n^2$

Avec :$c_i > 0$, $k =$ indice du point $x = 0$.

1.2.3 Lemme :

-Il existe un $C_1 - diff\grave{e}omorphisme$ qui transforme $F(x)$ à

$$G(y) = G(0) - y_1^2 - ... - y_k^2 + y_{k+1}^2 + ... + y_n^2$$

-si $k = 0$(l'indice est nul) alors :

$$G(y) = G(0) + y_1^2 + ... + y_n^2$$

Alors :

$$G(y) = 0$$

est une hyper surface.

Si $n = 2$ au voisinage de $y = 0$,nous aurons des orbites fermés.

Chapitre 2

Dynamique de populations :

2.1 Modèle de Malthus :

$N(t)$ est le nombre des individus à l'instant t.

b est le taux de croissance.

d est le taux de mortalité.

Après un temps court Δt le nombre des naissances est $b\ \Delta t\ N$, et le nombre des morts est $d\ \Delta t\ N$ alors on obtient cette relation :

$$N\,(t+\Delta t) = N\,(t) + b\ \Delta t\ N\,(t) - d\ \Delta t\ N\,(t)$$

Delà, découle l'équation différentielle ordinaire suivante lorsqu'on fait tendre $\Delta t \to 0$

$$\frac{dN(t)}{dt} = (b-d)\,N(t)$$

qui se résoud par la méthode de séparation des variables de la manière suivante :

L'équation différentielle implique que

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = (b-d)\ \ dt$$

En intégrant de 0 à t, on aura

$$\int_{N_0}^{N(t)} \frac{dN(t)}{N(t)} = \int_0^t (b-d)\ \ dt$$

Ce qui donne

$$N(t) = N_0\ e^{(b-d)\ t} \ \text{ pour tout } t \geq 0$$

2.2 Equation logistique :

Le modèle précédent ne tient pas compte des ressources limitées,alors pour remédier à ce cas on présente une correction sous la forme suivante :

$$\frac{dN}{dt} = rNF(N) \ = f(N)$$

On remarque que : $F(0) = 1$ car si $N \to 0$ alors N croit exponentiellement et $F(K) = 0$ car si $N = K$ alors N s'arrête de s'accroitre. On a aussi que si $N > K$ alors $F(N) < 0$.
Une fonction F qui répond à ces conditions est la suivante

$$F(N) = 1 - \frac{N}{K}$$

Cherchant les points d'équilibre de l'équation différentielle :
1) Existence :

$$f(N) = 0 \implies rN = \frac{rN^2}{K}$$

ce qui implique

$$rNK - rN^2 = 0$$

alors

$$\left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ N = K \end{array} \right.$$

On a deux points d'équilibres : $(N = 0)$ et $(N = K)$
2) Stabilité :

$$f\ '(N) = r - \frac{2rN}{K}$$

$f\ '(0) = r > 0$ donc : $N = 0$ est un point d'équilibre instable.
$f\ '(K) = r - 2r = -r < 0$ alors : $N = K$ est un point d'équilibre stable.

2.3 Modèle de Lotka Volterra :

L'accroissement relatif des effectifs de chacune des deux populations dépend linéairement des effectifs des deux populations.Il s'agit du couplage de deux modèles logistiques.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy & \text{(a)} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = bxy - cy & \text{(b)} \end{cases}$$

Où : a, b et c sont des constantes positives,et x, y sont respectivement les effectifs des proies et des prédateurs.

Equilibre de la population :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy \; = 0 \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = bxy - cy = 0 \end{cases}$$

On obtient deux points équilibres :
1- $(x, y) = (0, 0)$
2-$(x, y) = \left(\dfrac{c}{b}, \dfrac{a}{b}\right)$

Stabilité des solutions :
Soit :

$$f(x,y) \; = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ by & bx - c \end{pmatrix}$$

Propriété 1 :
Le point d'équilibre $(0, 0)$ est instable.

Preuve 1 :
f est différentiable en $(0,0)$
Et
$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$
Les valeurs propre de cette matrice sont $\lambda_1 = a$ et $\lambda_2 = -c$,on a $Re\lambda_1 > 0$ donc l'équilibre $(0,0)$ est instable.

Propriété2 :
On peut rien dire sur la stabilitée du point d'équilibre $(x,y) = \left(\frac{c}{b}, \frac{a}{b}\right)$.

Preuve 2 :
Aprés calcule on a trouvé que les parties réelles des valeurs propres sont nulles donc pour cela on va montrer qu'il existe une solution periodique autour de $(x,y) = \left(\frac{c}{b}, \frac{a}{b}\right)$ par la théorie de Morse.

La preuve ce fait en passant par les deux point suivant :

a)Il faut montrer que :
$$F(x,y) = bx - c\ln x + by - a\ln y$$
est une intégrale première.

b)Il faut montrer aussi que : $(x,y) = \left(\frac{c}{b}, \frac{a}{b}\right)$est un point critique non dégénéré et que F est une fonction de Morse en ce point.

Démonstration :
a)On a :
$$\frac{d}{dt}\left(F(x(t),y(t))\right) = bx' - c\frac{x'}{x} + by' - a\frac{y'}{y}$$
Après calcule :
$$\frac{d}{dt}\left(F(x(t),y(t))\right) = 0$$
Donc : $(F(x(t),y(t)))$ est une intégrale première.
b)
$$\nabla\left(F(x,y)\right) = \left(b - \frac{c}{x} \ , b - \frac{a}{y}\right) = 0$$

Implique que :

$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{b} \\ \\ y = \dfrac{a}{b} \end{cases}$$

Donc :

$$D^2\left(F(x,y)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{c}{x^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{a}{y^2} \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$\left|D^2\left(F(x,y)\right)\right| = \frac{ca}{x^2y^2} \neq 0$$

Alors : $(x,y) = \left(\frac{c}{b}\,,\frac{a}{b}\right)$est un point critique non dégénéré et F est une fonction de Morse au voisinage de $\left(\frac{c}{b}\,,\frac{a}{b}\right)$.

$$F(x,y) = F\left(\frac{c}{b}\,,\frac{a}{b}\right)+DF\left(\frac{c}{b}\,,\frac{a}{b}\right)\left(x-\frac{c}{b},y-\frac{a}{b}\right)+D^2F\left(\frac{c}{b}\,,\frac{a}{b}\right)\left(x-\frac{c}{b},y-\frac{a}{b}\right)^2+...$$

Puis :

$$\begin{aligned} F(x,y) &= F\left(\frac{c}{b}\,,\frac{a}{b}\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{c}{b}\,,\frac{a}{b}\right)\left(x-\frac{c}{b}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\left(\frac{c}{b}\,,\frac{a}{b}\right)\left(x-\frac{c}{b}\right)\left(y-\frac{a}{b}\right) \\ &\quad +D^2F\left(\frac{c}{b}\,,\frac{a}{b}\right)\left(y-\frac{a}{b}\right)^2 + ... \end{aligned}$$

Ainsi :

$$F(x,y) = F\left(\frac{c}{b}\,,\frac{a}{b}\right) + \frac{c}{\left(\frac{c}{b}\right)^2}\left(x-\frac{c}{b}\right)^2 + 0 + \frac{a}{\left(\frac{a}{b}\right)^2}\left(y-\frac{a}{b}\right)^2 + ...$$

Puisque au voisinage de $\left(\frac{c}{b}\,,\frac{a}{b}\right)$,l'indice=0

Donc on conclue qu'il existe une solution périodique qui autour de $\left(\frac{c}{b}\,,\frac{a}{b}\right)$.

Chapitre 3

Modèle structuré en âge :

3.1 Modèle de Fibonacci :[1]

3.1.1 Position du problème :

Le modèle considéré par Fibonacci, consiste à évaluer le nombre de lapins après 10 générations.

Pour cela Fibonnacci divise le cycle de vie en deux phases :la phase juvénile et la phase adulte.

Elle correspond a la durée d'une génération.

Dans le modèle,on suppose que les individus retenus ont une survie$\geqslant$ 10 mois, qui signifie que le taux de mortalité est nul. Avant de formuler le modèle,considérons le schéma suivant :

n								
0	N							
1	A							
2	N	A						
3	A	N	A					
4	A	N	A	N	A			
5	N	A	A	N	A	A	N	A

N :Nouveau née.

A :Adulte.

n :Nombre de générations.

u_n :Nombre d'adulte.

Maintenant on va expliquer le tableau précédant qui se lit comme suit :

$$u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2 = u_1 + u_2, u_4 = 3 = u_2 + u_3, u_5 = 5 = u_3 + u_4$$

De manière générale on obtient :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \tag{1}$$

Celle-ci s'appelle la suite de Fibonacci.

3.1.2 Etude mathématique :

Soit E (espace vectoriel de dimension 2) l'ensemble des suites $u = u_n$qui vérifie la relation suivante :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

Avec :u_1 et u_2 deux nombres naturels.

Cherchons les suites géométriques $a_n$de raison r définies pour tout entier n par

$$a_n = a_0 r^n \tag{2}$$

qui appartient à E :

On remplaçant la relation (2) dans la relation (1) on obtient :

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Ce qui implique que

$$a_0 r^{n+2} = a_0 r^{n+1} + a_0 r^n$$

et

$$a_0 r^{n+2} - a_0 r^{n+1} - a_0 r^n = 0$$

Ainsi

$$a_0 r^n \left(r^2 - r - 1\right) = 0$$

Donc si $a_0 = 0$ ou $r = 0$ alors la suite a_n est nulle ce qui n'a aucun intérêt.

Alors on suppose que : $a_0 \neq 0$ et $r \neq 0$, ceci nous conduit à la relation :

$$r^2 - r - 1 = 0$$

Comme le discriminant

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 > 0,$$

alors on a deux racines réelles et distinctes

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

et

$$r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

On remarque que $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or donc on peut définir deux suites géométrique qui appartiennent à E.

$$a_n = a_0 r_2^n = a_0 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

et

$$b_n = b_0 r_1^n = b_0 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Si on suppose que $a_0 = b_0 = 1$ alors :

$$a_n = r_2^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

et :

$$b_n = r_1^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Par principe de superposition, on obtient :

$$u_n = Aa_n + Bb_n = u_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Remarque :

1-
$$A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = 0$$

-Si : $n = 0$ alors :
$$A + B = 0$$

-Et si :$n = 1$ alors :
$$A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

Cela implique que :
$$A = B = 0$$

Donc :
$$r_1^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Et
$$r_2^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Sont linéairements indépendantes.

2-Malgré l'apparence irrationnelle des u_n, ces derniers sont des nombres naturels.

Le calcule de A et B se fait en introduisant les conditions suivantes :
$$u_1 = 1, u_2 = 1$$

On trouve que $A > 0$ et $B \neq 0$.

Déterminons le comportement asymptotique du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ lorsque n est assez grand.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{Ar_2^{n+1} + Br_1^{n+1}}{Ar_2^n + Br_1^n} \tag{2.1}$$

Cherchons A en fonction de B :

Si on prend :$u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ alors :

$$0 = u_0 = Aa_0 + Bb_0$$

Puise que : $a_0 = b_0 = 1$
Donc :

$$0 = u_0 = A + B \implies A = -B$$

Alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-Br_2^{n+1} + Br_1^{n+1}}{-Br_2^n + Br_1^n} = \frac{r_1 r_1^n - r_2 r_2^n}{r_1^n - r_2^n}$$

Si on divise par r_2^n on trouve :

$$(\ 2.1) \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n - r_2}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n - 1}$$

Alors

$$\frac{r_1}{r_2} = 1pt \frac{1-\sqrt{5}}{2} \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(1-\sqrt{5})^2}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{1-5} = -0.38$$

Puisque : $\frac{r_1}{r_2} \in]-1, 1[$
Alors : $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n \to 0$ quand $n \to +\infty$
Finalement :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n - r_2}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n - 1} \to r_2$$

C'est-à-dire $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est asymptotiquement égale à $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui est le nombred'or.
On constate que la suite u_n croit géométriquement avec la raison :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

qui est compris entre $\frac{3}{2}$ et 2.

Résultat :

La suite géométrique b_n de raison r_1 ne correspond pas a une solution plausible du problème car $r_1 < 0$,donc on peut écrire la solution de la manière suivante :

$$u_n = Aa_n + t_n$$

avec t_n la partie qui a une raison négative.
Autrement dit

$$u_n = Aa_n + o(a_n)$$

où $o(a_n)$ est une quantité trés petite .
Dans cette partie on peut conclure que notre solution n'est rien d'autre que :

La solution Fibonacci = La solution pure + Perturbation

3.1.3 Interprétation biologique :

Lorsque n est suffisamment grand le passage d'une génération a une autre est proportionnelle au nombre d'or qui est $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Autre preuve de la suite de Fibonacci :

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \end{cases}$$

On va passer par quatre étapes comme suit :
a) Cherchant que la fraction $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ inférieur à 2 :
On va faire cela par un raisonnement par récurrence
1- Pour $n = 2$ On remplaçant dans la formule on aura

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2 \leq 2 \qquad \text{(vrai)}$$

2- Hypothèse de récurrence :
On pose :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 2$$

3- On montre que

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leq 2$$

donc

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} + \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \leq 2$$

Finalement :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 2 \qquad \forall\ n$$

b) On pose :

$$f(x) =_{n \geqslant 1} a_n\ x^{n-1} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + ...$$

D'après le théorème de d'Alembert

$$f(x) \text{ converge ssi } |x| < \frac{1}{2}$$

c) Si $|x| < \frac{1}{2}$ alors : $f(x) = \dfrac{-1}{x^2 + x - 1}$

Démonstration :

On a :

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + ... \tag{a}$$

Donc :

$$xf(x) = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + ... \tag{b}$$

Et :

$$x^2 f(x) = x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 5x^6 + ... \tag{c}$$

Après un calcul simple , on obtient :

$$f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = 1$$

Ce qui donne

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}$$

d) Cherchons une autre forme de $f(x)$

Soit :

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}$$

Calculons le discriminant de $x^2 + x - 1$:

$$\Delta = (1)^2 - 4(1)(-1) = 5 > 0$$

Donc : on a deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\ ,\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Alors $f(x)$ s'écrit comme suit :

$$f(x) = \frac{-1}{\left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

Ceci implique que :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} - \frac{1}{\left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}\right)$$

e) On déduit que :

$$a_n = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Chapitre 4

Extension Linéaire de la suite de Fibonacci :

4.1 Position du problème :[1]

Dans la suite de Fibonaccci on a supposé que le taux de mortalité est nul et on obtient une seule femelle par portée. Si on va faire une extension de ce modèle, c'est-à-dire on prend un taux de mortalité non nul $\delta > 0$ et un nombre de femelle retenue $\beta \geq 1$, notre modèle se complique légèrement. Pour étudier ce nouveau modèle,on doit présenter explicitement les deux sous populations de la génération n :la première c'est les femelle nouveau-nés b_n

et la deuxième les femelles adultes a_n, on laissant toujours les hypothèses que la période de gestation est égale à la durée d'une génération.

On aura notre modèle si on exprime a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n

4.2 Etude mathématique :

$$\begin{cases} a_{n+1} = (1-\delta)(a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \beta(1-\delta)a_n \end{cases} \tag{3}$$

On pose : $u_n = a_n$, on peut éliminer les b_n est on se ramène à une relation de récurrence à retard (4) comme suit :

$$(3) \iff \begin{cases} u_{n+1} = (1-\delta)(u_n + b_n) & (3.1) \\ b_{n+1} = \beta(1-\delta)u_n & (3.2) \end{cases}$$

Ici,$\delta \in (0, 1)$ .Si on remplace (3.2) dans (3.1) on aura :

$$u_{n+1} = (1-\delta)\left[u_n + \beta(1-\delta)u_{n-1}\right]$$

ce qui implique

$$u_{n+1} = (1-\delta)u_n + \beta\left(1-\delta\right)^2 u_{n-1} \tag{4}$$

Cette dernière c'est la relation de récurrence à retard.

L'étude des racines de l'équation (4) révèle une variété de situations suivant les valeurs des paramètres β et δ. Revenons à nos calculs : Si

$$u_n = a_n = a_0 r^n = r^n$$

(sachant que $a_0 = 1$)

Donc :

$$u_{n+1} = r^{n+1}$$

Et :

$$u_{n-1} = r^{n-1}$$

Ainsi :

$$r^{n+1} = (1-\delta)r^n + \beta(1-\delta)^2 r^{n-1} \iff r^{n-1}[r^2 - (1-\delta)r - \beta(1-\delta)^2] = 0$$

Puisque : $r^{n-1} \neq 0$ alors :

$$r^2 - (1-\delta)r - \beta(1-\delta)^2 = 0$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = \left(-(1-\delta)\right)^2 - 4(1)(-\beta(1-\delta)^2) = (1-\delta)^2(1+4\beta)$$

Donc $\Delta > 0$ car $1 + 4\beta > 0$

Puisque notre discriminant est supérieur à zéro alors on a deux racines $r_1$et r_2

$$r_1 r_2 = \frac{-\beta(1-\delta)^2}{1} = -\beta(1-\delta)^2 < 0$$

Donc on a une racine positive et l'autre négative avec le module de la racine négative est plus petit que la racine positive

Car :

$$|r_1| - |r_2| < 0$$

On remarque que $r = 1$ est une racine de l'équation (4) si et seulement si la relation suivante est vérifiée

$$s(\beta, \delta) = \delta - \beta(1-\delta)^2 = 0 \tag{5}$$

Démonstration :

On a :

$$r^{n-1}[r^2 - (1-\delta)r - \beta(1-\delta)^2] = 0 \qquad (4.1)$$

On pose :$r = 1$

Donc :(4.1) $\iff 1-\ (1-\delta) - \beta(1-\delta)^2 = 0$

$\iff \delta - \beta(1-\delta)^2 = 0$

Par définition on écrit :

$$s(\beta, \delta) = \delta - \beta(1-\delta)^2$$

Le signe de la fonction $s(\beta, \delta)$ détermine la nature stable ou instable de la solution.

Lemme :

a) si $s(\beta, \delta) < 0 \implies$ toutes les solutions explosent c'est-à-dire devienne infiniment grande quand $n \to +\infty$.

b) si $s(\beta, \delta) > 0 \implies$ toutes les solutions tendent vers zéro quand $n \to +\infty$.

c) si $s(\beta, \delta) = 0 \implies$ (cas critique) toutes les solutions ont une limite finie qui dépend de la condition initiale.

Preuve :

On a l'équation caractéristique suivante :

$$r^2-\ (1-\delta)r - \beta(1-\delta)^2 = 0 \iff r^2-\ (1-\delta)r - \delta \underbrace{+\delta - \beta(1-\delta)^2}_{s(\beta,\delta)} = 0$$

$$\iff r^2-\ (1-\delta)r - \delta + s(\beta, \delta) = 0$$

$$\iff s(\beta,\delta) = -r^2 + (1-\delta)r + \delta$$

On va étudier maintenant les trois cas de r :

a) $r = 1 \implies s(\beta,\delta) = 0$

b) $r > 1$ implique que $r^2 > 1$

Ce qui donne :

$$r^2 - (1-\delta)r > 1 - (1-\delta)1$$

Et

$$r^2 - (1-\delta)r - \delta > 1 - (1-\delta)1 - \delta$$

Ainsi

$$r^2 - (1-\delta)r - \delta > 0$$

Donc :

$$-r^2 + (1-\delta)r + \delta < 0$$

Finalement

$$s(\beta,\delta) < 0$$

c) $r < 1$ implique que $r^2 < 1$

Ce qui donne :

$$r^2 - (1-\delta)r < 1 - (1-\delta)1$$

Et :

$$r^2 - (1-\delta)r - \delta < 1 - (1-\delta)1 - \delta$$

Ainsi :

$$r^2 - (1-\delta)r - \delta < 0$$

Donc :

$$-s(\beta,\delta) < 0$$

Finalement :

$$s(\beta,\delta) > 0$$

Remarque :

Si on note que : $\beta = 1$ *et* $\delta = 0$

On trouve :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases} \tag{6}$$

C'est-à-dire qu'on revient au modèle précédent,le modèle de Fibonacci.

4.3 Interprétation biologique

On remarque que la survie de la population dépend du signe de la quantité de $s(\beta, \delta)$.Ce résultat est plus significatif d'un point de vue biologique, car il tient compte de la mortalité et de natalité en même temps.

4.4 Autre forme du modèle de Fibonacci

On peut écrire le modèle de Fibonacci sous la forme d'un système :
$u_{1,n}$:le nombre des nouveaux nés au mois n.
$u_{2,n}$:le nombre des adultes au mois n.

$$\begin{cases} u_{1,n+1} = u_{2,n} \\ u_{2,n+1} = u_{1,n} + u_{2,n} \end{cases}$$

Du système précédent on peut extraire une matrice L comme suit :

$$\begin{pmatrix} u_{1,n+1} \\ u_{2,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,n} \\ u_{2,n} \end{pmatrix}$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cela est équivalent à :

$$U_{n+1} = L\ U_n$$

Cherchons les valeurs propres de L :

$$det(L - \lambda I_d) = 0 \iff \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Où : I_d est la matrice identité.
On a deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Et :

$$\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Cherchons les vecteurs propres : $v_1$et v_2 :
Soit :

$$v_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (L - \lambda_1 I_d) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

On a :

$v_1 = (L - \lambda_1 I_d) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Ce qui donne :
$v_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Alors :

$$\begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}x + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}y = 0 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}y = 0 \end{cases}$$

La première équation nous donne :

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}y$$

Ce qui implique :
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix}$
Donc on peut choisir comme un deuxième vecteur :

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$v_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (L - \lambda_2 I_d) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

On a :

$v_2 = (L - \lambda_2 I_d)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ce qui donne :

$v_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors :

$$\begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}x + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}y = 0 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}y = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation nous donne :

$$x = -y$$

Ce qui implique :

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc on peut choisir comme un premier vecteur :

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solution générale est de la forme :

$$U_n = c_1\ \lambda_1^n v_1 + c_2\ \lambda_2^n v_2$$

Qui implique que :

$$U_n = \lambda_1^n (c_1\ v_1 + c_2\ \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n v_2$$

Si :

$$\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$$

Alors :

$$U_n \to c_1 \ \lambda_1^n v_1$$

Remarque :

L :est dite matrice de Leslie et ses valeurs propres décrivent le comportement asymptotique.

conclusion

Le modèle de Fibbonacci , certes est simple mais il contient des principes de bases qu'on rencontre souvent dans des modèles compliqués.Il faut noter aussi, que le nombre d'or est présent d'une manière surprenante dans la structure des plantes (exemple tourne sol) et quelques coquillages.Ceci suscite une étude plus approfondie pour ramener des explications satisfaisantes.

Bibliographie

[1] *Ovide Arino*, Mathématiques Appliquées à la Dynamique de Population (calcul de la distribution asymptotique stable), *22-30*,www.horizon.documentation.ird,fr/exl-doc/.../*010024488*.pdf.

[2] *J.M.Cushing, S.M.Henson,* and *L.-I.WuRoeger*, Coexistence of Competing Juvénile-Adulte Structured Populations, Journal of Biological Dynamics : *1, 201-231, 2007.*

[3] *Predrag Cvitanovic*, Universality in Chaos *2* ème edition, Adam Hilger, Bristol and New-York, *1989.*

[4] *F.Z.Derrar*, Introduction à la Théorie du Chaos, Mémoire de magister, Université Abou Berk Belkaid de Tlemcen, *24/06/2007.*

[5] *J.Hale* and *H.Koçak*, Dynamics and Bifurcations, Springer-Verlag, *1991.*

[6] *Pat Haley*, The Art of Mathematics and Fishing, *1-22,4/01/2009*, www.home*2*.fvcc.edu/~dhicketh/DiffEqus/spring*09*projects/.../final project ph*2*.pdf.

[7] *Richard A. Holmgren*, A First Course in Discrete Dynamical Systems (second edition), springer-Verlag New York –Berlin- Heidelberg, *1996.*

[8] *Manfred Schroeder*, Fractals, Chaos, Powers Laws, W.H.Freeman and Company, *1991.*

[9] *H.L.Smith*, Planar Competitive and Cooperative Difference Equations, Journal of Difference Equations and Applications : *3,335-357, 1998.*

[10] *Teitgen, Jurgens, Saupe*, Chaos and Fractals, springer-Verlag, New-York, *1992.*

[11] *S.Wiggins*, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, *1990.*