République Algérienne Démocratique et Populaire

Université ABOUBAKR BELKAÏD – TLEMCEN

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire pour l'obtention du Diplôme de

MAGISTER en Mathématiques

Thème

L'EXISTENCE DE SOLUTIONS POUR UN MODÈLE DÉCRIVANT L'ÉVOLUTION D'UNE POPULATION DE SOLE

Présenté par :

- KEDDAR Naima

Devant le jury composé de :

Président :

YEBDRI Mustapha — Prof. Univ. Tlemcen

Examinateurs

ABDELLAOUI Boumediènne — McA Univ. Tlemcen

MOUSSAOUI Ali — McA Univ. Tlemcen

Rapporteur :

BOUGUIMA SIDI MOHAMED — Prof Univ. Tlemcen

Année Universitaire : 2011-2012

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mon encadreur de mémoire, le professeur **Sidi Mohamed BOUGUIMA**, pour ses conseils, sa grande disponibilité et sa générosité avec laquelle il m'a fait partager, ses idées et ses intuitions. La pertinence de ses questions et de ses remarques ont toujours su me motiver et me diriger dans mes recherches. Je lui témoigne enfin ma profonde reconnaissance.

J'exprime mes plus sincères remerciements au professeur **Mustapha YEBDRI**, qui a accepté de présider le jury de cette thèse.

Toute l'expression de ma profonde reconnaissance et ma grande gratitude au professeur **Boumediènne Abdellaoui** et au professeur **Ali Moussaoui** d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail et d'y consacrer une part de leur temps

Je tiens également à remercier les différents membres du département de mathématiques de Tlemcen

Je n'ai pas de mots suffisants pour remercier mes parents qui m'ont encouragé et mon soutenu tout au long de ces années ; à ma petite sœur Farah et mes deux frères Sofiane et Mehdi.

Table des Matières

Introduction

Dans ce mémoire, nous modélisons chaque phase du cycle de vie de la population de Sole.

La première partie s'intéresse à donner quelques définitions, rappels, et propriétés sur les équations aux dérivées partielles.On a fait appel à deux méthodes de résolutions, séparation des variables, et transformation de Fourier.

La seconde partie, décrit un modèle mathématique qui contient trois équations, chacune développe une phase du cycle de vie de la Sole.La première est celle de la phase larvaire, l'équation d'écrit l'évolution de la sole de la naissance jusqu'à l'état juvénile. La Sole atteignant une taille critique, passe au stade juvénile, et elle est interprétée par la deuxième équation de ce modèle. la troisième équation est spécifique à l'étape adulte, la résolution de cette dernière nécessite une étude plus élaborée faisant intervenir la théorie des semi groupe, ce travail sera l'objet d'un projet ultérieur.

Finalement, quelques notions de contrôle optimal appliquées à la gestion des ressources halieutiques sont présentés à la fin de ce mémoire.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et résultats utiles pour la suite de ce mémoire.

1.1 Equations aux derivées partielles du premier ordre

1.1.1 Méthode des caractéristiques

On considère une fonction u de classe $C^1(U)$, avec U un ouvert de $\mathbb{R}^2(U \subseteq \mathbb{R}^2)$, telle que:

$$u : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

On suppose aussi que les fonctions a, b, c, f sont de classe $C^1(U)$.

Soit l'équation aux dérivées partielles à deux variables :

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \qquad (1)$$

Où:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= u_x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= u_y \end{aligned}$$

Remarque 1.1 *Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'équation (1) devient une équation differentielle linéaire du premier ordre.*

si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, La resolution de l'équation (1) revient à chercher un difféomorphisme Ψ, qui permet de simplifier l'équation.

Soit la fonction w de classe $C^1(V)$, avec V un ouvert de $\mathbb{R}^2$:

$$w : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

On pose:

$$u(x,y) = w(\xi, \eta) = w(\Psi^1(x,y), \Psi^2(x,y))$$

Avec:

$$\begin{cases} \xi = \Psi^1(x,y) \\ \eta = \Psi^2(x,y) \end{cases}$$

Ceci implique que:

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi . \frac{\partial \Psi^1}{\partial x} + u_\eta . \frac{\partial \Psi^2}{\partial x} \\ u_y &= u_\xi . \frac{\partial \Psi^1}{\partial y} + u_\eta . \frac{\partial \Psi^2}{\partial y} \end{aligned}$$

Alors on a:

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi . \Psi^1_x(x,y) + u_\eta . \Psi^2_x(x,y) \\ u_y &= u_\xi . \Psi^1_y(x,y) + u_\eta . \Psi^2_y(x,y) \end{aligned}$$

L'équation aux dérivées partielles (1) s'écrit en fonction des nouvelles variables:

$$\tilde{a}(\xi,\eta)(u_\xi.\Psi^1_x(x,y) + u_\eta.\Psi^2_x(x,y)) + \tilde{b}(\xi,\eta)(u_\xi.\Psi^1_y(x,y) + u_\eta.\Psi^2_y(x,y)) + \tilde{c}(\xi,\eta)w(\xi,\eta) = \tilde{f}(\xi,\eta)$$

$$[\tilde{a}(\xi,\eta)\Psi^1_x(x,y)+\tilde{b}(\xi,\eta)\Psi^1_y(x,y)]u_\xi+[\tilde{a}(\xi,\eta)\Psi^2_x(x,y)+\tilde{b}(\xi,\eta)\Psi^2_y(x,y)]u_\eta+\tilde{c}(\xi,\eta)w(\xi,\eta) = \tilde{f}(\xi,\eta)$$

On pose

$$\begin{aligned} A &= \tilde{a}(\xi,\eta)\Psi^1_x(x,y) + \tilde{b}(\xi,\eta)\Psi^1_y(x,y) \\ B &= \tilde{a}(\xi,\eta)\Psi^2_x(x,y) + \tilde{b}(\xi,\eta)\Psi^2_y(x,y) \end{aligned}$$

Alors l'équation devient:

$$Au_\xi + Bu_\eta + \tilde{c}u = \tilde{f}$$

On choisit le difféomorphisme Ψ de manière que $A = 0$

c'est à dire

$$\tilde{a}(\xi,\eta)\Psi^1_x(x,y) + \tilde{b}(\xi,\eta)\Psi^1_y(x,y) = 0$$

La fonction B ne s'annule pas en même temps que A; En effet:

Comme le Jacobien du difféomorphisme Ψ est non nul ,alors $B \neq 0$:

Avec la condition $A = 0$, l'équation (1) a été transformée en une équation differentielle ordinaire facile à intégrer; la forme obtenue est dite forme canonique de l'équation aux dérivées partielles:

$$Bw_\eta + \tilde{c}w = \tilde{f}$$

Soit l'équation (1); Supposons que

$$u = u(x,y) \text{ est une solution de } (1)$$

Soit

$$S = \{(x,y,u) \in \mathbb{R}^3; u = u(x,y)\} \text{ surface solution de } (1)$$

Si u est régulière, alors S admet en chaque points un plan tangent. Le vecteur normal $\vec{n}$ admet les composantes

$$\vec{n}(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1)$$

Soit

$$C = \{x = x(s), y = y(s), u = u(s), s \in I\}$$

une courbe dans $\mathbb{R}^3$solution de:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial s} = a(x,y) \\ \frac{\partial y}{\partial s} = b(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial s} = \tilde{f}(x,y,u) = f(x,y) - c(x,y)u \end{cases}$$

Si $\vec{T}$ est le vecteur tangent à (C), alors $\vec{T}(a, b, \tilde{f})$

Remarque 1.2
- *$\vec{T} \perp \vec{n}$ veut dire que $(C) \subset (S); (C)$ est dite courbe caracteristique.*
- *Sur les caracteristiques l'équation aux dérivées partielles (EDP) devient équation differentielle ordinaire (EDO).*

Exemple 1.1

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = Au(x,y)$$

une caractéristique assosiée est de la forme:

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

On obtient:

$$y - x \quad = \quad c \qquad , c \text{ une constante}$$

Par suite on choisit le changement de variables

$$\begin{cases} \xi = y - x \\ \eta = x \end{cases}$$

Tout point $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ *est atteint par une demie droite et une seule parallèle à la première bissectrice qui part du point* $(x - y, 0)$ *si* $x > y$, *du point* $(0, y - x)$ *si* $y > x$ *et de l'origine si* $x = y$.

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= Au \end{aligned}$$

Alors la solution $u(x, y) = \exp(Ax(t))$.

Exemple 1.2 *Considérons le système suivant:*

$$(S) \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial a} + \frac{\partial P}{\partial t} = -\mu(a)P(a,t) \qquad a \geq 0, \quad t \geq 0 \\ P(0,t) = \int_0^{+\infty} f(a)P(a,t)da \qquad t > 0 \\ P(a,0) = P_0(a) \qquad a \geq 0 \end{cases}$$

On suppose que les données du problème μ, f *et* P_0 *sont des fonctions continues par morceaux, positives,* μ *et* f *bornées,* $\int_0^{+\infty} \mu(x)dx = +\infty$ *(les individus meurent avec l'age) et que* $P_0 \in L^1(\mathbb{R}_+)$

La technique des caracteristiques(ici on a des demi-droites de pente +1) reduit la première équation du système (S) sur chacune de ces caractéristiques à une équation differentielle ordinaire dont la résolution est simple.

soit $(a_0, t_0) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[$. *On pose le changement de fonctions suivant :*

$$\begin{cases} \bar{P}(h) = P(a_0 + h, t_0 + h) \\ \bar{\mu}(h) = \mu(a_0 + h) \end{cases}$$

Alors de (S) on a:

$$\frac{d\bar{P}}{dh} = -\bar{\mu}(h)\bar{P}(h)$$

qui, admet pour chaque condition initiale $\bar{P}(0)$ une solution unique:

$$\bar{P}(h) = \bar{P}(0)e^{-\int_0^h \bar{\mu}(h)dx}$$

D'ou on a :

$$P(a_0 + h, t_0 + h) = P(a_0, t_0)e^{-\int_0^h \mu(a_0+x)dx}$$

Tout point $(a, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ est atteint par une demi-droite et une seule parallèle à la première bissectrice qui part du point $(a - t, 0)$ si $a > t$, du point $(0, t - a)$ si $t > a$ et de l'origine si $a = t$

Soit $(a, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$:

Si $a \geq t$, on pose $a_0 = a - t$, $t_0 = 0$ et $h = t$, alors

$$\begin{aligned} P(a, t) &= P(a_0 + h, t_0 + h) = P(a_0, t_0)e^{-\int_0^h \mu(a_0+x)dx} \\ &= P(a - t, 0)e^{-\int_0^h \mu(a_0+x)dx} \\ &= P(a - t, 0)e^{-\int_0^t \mu(a_0+x)dx} \end{aligned}$$

D'où

$$P(a, t) = P(a - t, 0)e^{-\int_0^t \mu(a-t+x)dx}$$

Si $a < t$, on pose $a_0 = 0$, $t_0 = t - a$ et $h = t$, alors

$$\begin{aligned} P(a,t) &= P(0,t-a)e^{-\int_0^h \mu(x)dx} \\ &= \int_0^{+\infty} f(x)P(x,t-a)dx e^{-\int_0^h \mu(x)dx} \end{aligned}$$

1.1.2 Séparation des variables

Théorème 1.1 *Considérons le système suivant:*

$$(E) \quad : \quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial s} = k\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} & s > 0, \ x > 0 \\ V(0,s) = 0 \\ \dfrac{\partial V(0,s)}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

La solution du système (E) est de la forme:

$$V(s,x) = e^{-w^2 s}(A\cos\frac{w}{\sqrt{k}}x + B\sin\frac{w}{\sqrt{k}}x)$$

Preuve: Cette méthode consiste à supposer que la solution est un produit d'une fonction qui dépend de x et d'une fonction qui depent de y.

On peut écrir alors:

$$V(x,s) = f(x)g(s)$$

Par conséquent on a:

$$
\begin{aligned}
V_x &= \frac{\partial V}{\partial x} = f'g \\
V_{xx} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = f"g
\end{aligned}
$$

$$V_s = \frac{\partial V}{\partial s} = fg'$$

En remplaçant dans l'équation on a :

$$f(x)g'(s) - kf"(x)g(x) = 0$$

En divisant par $f(x)g(s)$ on obtient:

$$\frac{g'(s)}{g(s)} - k\frac{f''(x)}{f(x)} = 0$$

c'est une équation à deux térmes, l'un dépend seulement de s et l'autre dépend seulement de x, alors

$$\frac{g'(s)}{g(s)} = k\frac{f''(x)}{f(x)}$$

Cette dernière quantité est constante,égale α .

Par suite on obtient un système à deux équations differentielles en f et g :

$$\begin{cases} kf''(x) - \alpha f(x) = 0 \\ g'(s) - \alpha g(s) = 0 \end{cases}$$

Soit l'équation caractéristique de l'équation en f :

$$k\beta^2 - \alpha = 0$$

Ceci donne

$$\beta^2 = \frac{\alpha}{k}$$

Discutons selon le signe de la constante α :

1−Pour $\alpha > 0$ c'est à dire $\alpha = w^2$:

$$\beta = \pm \frac{w}{\sqrt{k}}$$

Alors la solution f est de la forme:

$$f(x) = c_1 e^{\frac{w}{\sqrt{k}}x} + c_2 e^{-\frac{w}{\sqrt{k}}x}$$

avec c_1, c_2 deux constantes.D'aprés les conditions on a

$$\begin{aligned} f(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ f'(0) &= \frac{w}{\sqrt{k}}c_1 - \frac{w}{\sqrt{k}}c_2 = 0 \end{aligned}$$

On obtient $c_1 = c_2 = 0$, ce qui veut dire que f est identiquement nulle ($f \equiv 0$).

2−Pour $\alpha = 0$ c'est à dire $kf''(x) = 0$, La solution de cette équation est de la forme

$$f(x) = c_1 x + c_2$$

avec c_1, c_2 deux constantes.D'aprés les conditions

$$\begin{aligned} f(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ f'(0) &= c_2 = 0 \end{aligned}$$

On obtient $c_1 = c_2 = 0$, ce qui veut dire que f est identiquement nulle ($f \equiv 0$).

3$-$Pour $\alpha < 0$ c'est à dire $\alpha = -w^2$:

$$\beta = \pm i \frac{w}{\sqrt{k}}$$

La solution dans ce cas , est:

$$f(x) = c_1 \cos \frac{w}{\sqrt{k}} x + c_2 \sin \frac{w}{\sqrt{k}} x$$

La condition $f(0) = 0$ donne $c_1 = 0$

La solution de la deuxième équation en g du système est :

$$g(s) = ce^{\alpha s} \qquad , c \text{ : constante}$$

Pour le cas où $\alpha < 0 \Longrightarrow \alpha = -w^2$; avec A et B deux constantes:

$$V(x,s) = e^{-w^2 s}(A \cos \frac{w}{\sqrt{k}} x + B \sin \frac{w}{\sqrt{k}} x)$$

On dit que $V(x,s)$ est une solution de l'équation (E) ■

1.2 Transformée de Fourier

Définition 1.1 *Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f la fonction de la variable $k \in \mathbb{R}$, notée Fou $F[f]$, telle que :*

$$F[f](k) = F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Remarque 1.3 *Pour que cette expression ait un sens il faut que $f(x)e^{-ikx}$ soit sommable, ce qui est assuré par le fait que $f \in L^1(\mathbb{R})$*

Si f et g sont deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ telles que $f = g$ presque partout sur $\mathbb{R}$ alors $F[f] = F[g]$

Proposition 1 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a:*

- *$F[f]$ est bornée*
- *$F[f]$ est continue*
- $\lim_{|k| \to +\infty} F[f] = 0$

Exemple 1.3 *On considère la fonction f définie par :*

$$f = \begin{cases} 1 & si \;\; x \in \,]-a, a[\,; \quad a > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Sa transformée de Fourier est définie pour tout k réel comme :

$$\begin{aligned} F[f](k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ikx} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \frac{\sin ka}{ka} \end{aligned}$$

.

Remarque 1.4 *considèrons la fonction Gaussienne définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = e^{-ax^2}$, *avec* $a \in \mathbb{R}_+$. *La transformée de Fourier de* f *est aussi une Gaussienne, et s'exprime comme*

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

proposition 1.1 *La transformée de Fourier est une application linéaire de* $L^1(\mathbb{R})$ *dans l'espace des fonctions*

$$\forall (f_1, f_2) \in L^1(\mathbb{R}), \forall (b_1, b_2) \in \mathbb{C}; F[b_1 f_1 + b_2 f_2] = b_1 F[f_1] + b_2 F[f_2]$$

Théorème 1.2 *Soit* f *sommable, et* $b \in \mathbb{R}$, *alors on a :*

$$F[f(x+b)](k) = e^{ikb} F[f](k)$$

Théorème 1.3 *Soit* f *une fonction sommable et partout continue, dérivable presque partout et telle que* f'*soit sommable. Alors on a :*

$$F[f'](k) = ikF[f](k)$$

Théorème 1.4 *Soit f telle que ses m dérivées existent et soient sommables. Alors :*

$$F[f^{(m)}](k) = (ik)^m F[f](k)$$

1.3 Transformée inverse de Fourier

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, et soit F sa transformée de Fourier. Si F est sommable alors on a presque partout :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{+ikx} dk$$

Définition 2 *Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$. On définit l'opérateur inverse $\bar{F}$ par :*

$$\bar{F}[g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{+ikx} dk$$

Proposition 3 *Soit f une fonction sommable sur $\mathbb{R}$. Si sa transformée de Fourier F est sommable sur $\mathbb{R}$, alors presque partout on a :*

$$f(x) = \bar{F}[F[f]](x)$$

Théorème 1.5 *Considérons le système:*

$$(E) \quad : \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial s} = k\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & s > 0,\ x > 0 \\ V(0,s) = 0 & \\ \frac{\partial V(0,s)}{\partial x} = 0 & \\ V(x,0) = f(x) & \end{cases}$$

La solution du système (E) s'obtient par transformée de Fourier, et elle est donnée par la formule:

$$V(x,s) = \int_0^{+\infty} \Phi(s,x,y)f(y)dy$$

Avec

$$\Phi(s,x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k s}}[\exp(-\frac{(x+y)^2}{4ks}) - \exp(-\frac{(x-y)^2}{4ks})]$$

Preuve: On utilise la transformée de Fourier pour résoudre le système (E); D'aprés le théorème (1), on a trouvé que

$$V(x,s) = e^{-w^2 s}(A\cos\frac{w}{\sqrt{k}}x + B\sin\frac{w}{\sqrt{k}}x)$$

La condition initiale implique

$$\begin{aligned} V(x,0) &= f(x) = A\cos\frac{w}{\sqrt{k}}x + B\sin\frac{w}{\sqrt{k}}x \\ f(x) &= H(w)\exp(i\frac{w}{\sqrt{k}}x) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
V(x,s) &= H(w)\exp(i\frac{w}{\sqrt{k}}x - w^2 s)\\
V(x,s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(w)\exp(\frac{-w}{\sqrt{k}}x - w^2 s)dw\\
V(x,0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(w)\exp(\frac{-w}{\sqrt{k}}x)dw
\end{aligned}$$

Ce qui veut dire que $f(x)$ est la transformée de Fourier de $H(w)$

Par suite :

$$H(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\frac{w}{\sqrt{k}}x)f(x)dx$$

Alors

$$V(x,s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\frac{w}{\sqrt{k}}y)f(y)dy\exp(\frac{iw}{\sqrt{k}}x - w^2 s)dw$$

$$V(x,s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\frac{iw}{\sqrt{k}}(x-y) - w^2 s)dw$$

Soit l'intégrale I_1 tel que:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\frac{iw}{\sqrt{k}}(x-y) - w^2 s)dw$$

On pose

$$\begin{aligned}
w\sqrt{ks} &= \frac{t}{\sqrt{2}} \Longrightarrow dw = \frac{dt}{\sqrt{2ks}}\\
\frac{x-y}{\sqrt{2ks}} &= z
\end{aligned}$$

L'intégrale I_1devient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\frac{-t^2}{2ks} + izt)\frac{dt}{\sqrt{2ks}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2ks}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(izt - \frac{t^2}{2ks})dt$$

Or

$$F(-\frac{t^2}{2}) = \sqrt{2\pi}\exp(-\frac{z^2}{2})$$

Donc on obtient:

$$\frac{1}{\sqrt{2ks}}\sqrt{2\pi}\exp(-\frac{(x-y)^2}{4ks})$$
$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{ks}}\exp(-\frac{(x-y)^2}{4ks})$$

Par consèquent pour $s > 0; x \in \mathbb{R}$:

$$V(x,s) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{ks}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4ks})f(y)dy$$

On pose

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= f(x) \quad si \ \ x > 0\\ \tilde{f}(x) &= -f(-x) \quad si \ \ x < 0\end{aligned}$$

La fonction $V(x,s)$ devient

$$V(x,s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ks}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4ks})\tilde{f}(y)dy$$

$$V(x,s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ks}} \int_{-\infty}^{0} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4ks})[-f(-y)]dy + \int_{0}^{+\infty} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4ks})f(y)dy$$

Pour $z = -y$:

$$V(x,s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ks}} \int_{0}^{+\infty} -\exp(-\frac{(x+z)^2}{4ks})[-f(z)]dz + \int_{0}^{+\infty} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4ks})f(y)dy$$

$$V(x,s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ks}} \int_{0}^{+\infty} \exp(-\frac{(x+y)^2}{4ks}) - \exp(-\frac{(x-y)^2}{4ks})f(y)dy$$

La solution de cette équation est donnée par:

$$V(x,s) = \int_{0}^{+\infty} \Phi(s,x,y)f(y)dy$$

avec

$$\Phi(x,s,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ks}}[\exp(-\frac{(x+y)^2}{4ks}) - \exp(-\frac{(x-y)^2}{4ks})]$$

■

1.4 Théorème de Green dans le plan

Théorème 1.6 *Soit B un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ et $\Gamma = \partial B$ le bord de B. Soient $f, g : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1,on a*

$$\iint\limits_{B} (\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y})dxdy = \oint\limits_{\Gamma} fdy + gdx$$

1.5 Condition necessaire d'Euler

Si le problème revient à étudier les variations d'une fonction x de la variable t sur un intervalle $[a; b]$, on est généralement conduit à minimiser (ou maximiser) une intégrale, appelée fonctionnelle, de la forme :

$$U = \int_a^b F(t, x, \dot{x}) dt$$

Il y aura extremum si :

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$

Chapitre 2

MODÈLE STRUCTURÉ EN ÂGE

2.1 Introduction

La sole est une espèce qui a fait l'objet de nombreux travaux. Dans le golfe de Gascogne, la sole represente une valeur commerciale dans les activités de pêche.

Dans ce travail, on étudie un modèle décrivant l'évolution d'une population de soles. Le modèle comprend trois phases du cycle de vie de cette espèce .La phase larvaire; est la période de production des œufs de soles, qui deviennent après éclosion des larves.La phase juvenille suit la phase larvaire,elle commence lorsque les larves atteignent une certaine taille. Durant la phase adulte, la principale caracterisation est la fécondité des individus.

2.2 Modèle mathématique

Le temps est évalué en fonction des années, on prend comme référence l'année zéro.

La croissance de la taille des larves est déterminée par la température qui est supposée uniforme (durant la période et dans la région de la croissance des larves).

Si $w(a, t)$ est la taille de larve au temps t à l'âge a, alors son évolution par le temps est donnée par la relation suivante :

$$\frac{dw}{dt} + \frac{dw}{da} = f(T(t))g(w(a,t)) \tag{2}$$

Où $T(t)$ est la température au temps t.

La fonction $\bar{f}(t) = f(T(t))$ représente la vitesse de croissance au temps t.

On suppose que $\bar{f}$ et g sont des fonctions réguliéres positives. On éxclut la possibilité de regression de la taille.

Les caracteristiques de l'équation (2) sont données par:

$$t - a = c$$

avec c une constante, on pose:

$$\begin{cases} w_1(t,a) = t - a = \xi \\ w_2(t,a) = t \qquad = \eta \end{cases}$$

Par dérivation on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial a} &= \frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial w}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial a} \\ \frac{\partial w}{\partial a} &= -\frac{\partial w}{\partial \xi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{aligned}$$

On remplace dans l'équation:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial a}+\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ &= \bar{f}(t)g(w(a,t)) \\ &= \bar{f}(\eta)g(w(\eta-\xi,\eta)) \\ &= \bar{f}(\eta)g(w(\eta-(t-a),\eta))\end{aligned}$$

La variable $[\eta-(t-a)]$ d'écrit l'âge, alors on a:

$$0 \leq \eta-(t-a) \leq a$$

Donc

$$(t-a) \leq \eta \leq a+(t-a)$$

Ainsi

$$t-a \leq \eta \leq t$$

La taille critique, lors du changement des larves à la forme juvénile, est une constante notée w^* .

Soit $w(a,t)$ la taille de larve au temps t à l'âge a. Par intégration de l'équation (2) sur les caractéristiques $t-a=c=$constante (*ie* la date de naissance des larves) jusqu'à t on obtient

$$w(a,t)-w(a,t-a)=\int_{t-a}^{t}\bar{f}(s)g(w(\eta-(s-a),s))ds$$

et par conséquent

$$w(a,t)=\int_{t-a}^{t}f(T(s))g(w(a,s))ds=\int_{t-a}^{t}\bar{f}(s)g(w(a,s))ds \tag{3}$$

Notation 4 *On note par $a^*(t)$ la fonction déterminé par :*

$$w(a^*(t),t) = w^* \qquad (4)$$

Dans une premiére approche on suppose que l'éspace est homogène en une direction parallele au bord de la mer. Seule la distance par rapport au bord est prise en consideration comme variable dans ce modèle. La représentation de l'éspace est reduite à la demi- droite d'origine sur le bord.

2.2.1 Fonctions d'états

On considère les variables suivantes :

- $B(t,x)$: La quantité d'œufs produits par unité de temps et d'espace à l'instant t et à la position x. Le nombre d'œufs produits dans l'intervalle $[x_1,x_2]$ au cours de la période $[t_1,t_2]$ est:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} B(t,x)dxdt$$

- $L(a,t,x)$:La quantité des larves par unité d'âge et d'espace, à l'instant t, d'âge a, à la position x.Le nombre des larves d'âge entre a_1 et a_2 occupant une région reprèsentée par l'intervalle $[y_1,y_2]$ au temps t est donner par la double intégrale

$$\int_{a_1}^{a_2}\int_{y_1}^{y_2} L(a,t,x)dxda$$

- $J(a,t,x)$: La quantité des juvéniles par unité d'espace, d'âge a, à l'instant t. Par définition tous les juvéniles se trouvent à l'intérieur de la zone $[0, x_0]$ (la nourricerie). Le nombre de juvéniles ayant à l'instant t un âge compris entre a_1 et a_2,est donné par:

$$\int_{a_1}^{a_2} \int_{0}^{x_0} J(a,t,x)dxda$$

Cette region est supposée homogène, alors Le nombre de juvéniles ayant à l'instant t un âge compris entre a_1 et a_2, devient:

$$x_0 \int_{a_1}^{a_2} J(a,t)da$$

- $M(a,t,x)$: La quantité d'adultes par unité d'âge et d'espace, à l'instant t, d'âge a, à la position x.Le nombre d'adultes ayant un âge entre a_1 et a_2 qui occupent une région reprèsentée par l'intervalle $[y_1, y_2]$ au temps t est donner par la double intégrale :

$$\int_{a_1}^{a_2} \int_{y_1}^{y_2} M(a,t,x)dxda$$

2.2.2 Les équations du modèle

La production des œufs:

Soit la fonction $\beta(a,t,x)$ representant la proportion par unité de temps, d'adultes d'âge a, à la position x, qui sont en phase de ponte à l'instant t.Soit la fonction $e(a)$ qui détermine le nombre d'œufs pondus par adulte d'âge a.

La densitè des œufs est donnée par:

$$B(t,x) = \int_{0}^{+\infty} \beta(a,t,x)e(a)M(a,t,x)da$$

La dynamique des larves:

La fonction L satisfait le système d'équations suivant:

$$\frac{\partial L}{\partial a} + \frac{\partial L}{\partial t} = k\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \mu_L(a)L - u\frac{\partial L}{\partial x} \qquad (5)$$

$$L(0,t,x) = B(t,x) \qquad (6.1)$$

$$L(a,0,x) = 0 \qquad (6.2)$$

$$L(a,t,0) = 0 \qquad (6.3)$$

Le terme $u\frac{\partial L}{\partial x}$ représente le transport qui est dû au courant marin.

La constante k est le coéfficient de diffusion océanique, la quantité $k(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2})$ représente la composante du mouvement aléatoire des larves

La fonction $\mu_L(a)$ est le taux de mortalité des larves à l'âge a.

On deduit la probabilité des survivants à l'âge a à partir du taux de mortalité comme suit:

$$S_L(a) = \exp(-\int_0^a \mu_L(s)ds) \qquad (7)$$

Les relations (6) sont des conditions sur le bord de l'équation (5).

La premiére relation éxprime le changement rapide des œufs en larves .Le modèle ne sépare pas la difference des œufs et des larves(le développement est au dessus de 5 à 6 jours pendant cette période, le taux de mortalité est élevé).

La relation $L(a,0,x) = 0$ éxprime le fait que le temps est initialisé au premier janvier de l'année zéro,et qu'il n'y a pas de larves en premier janvier. On admet que les larves ne survivent pas au-de-là d'une année aprés leurs naissances,plus precisement on suppose qu'il y a un âge maximum $\bar{a}_L < 1$, ainsi

$$\int_0^{\bar{a}_L} \mu_L(s)ds = +\infty$$

La troisiéme relation dans (6): $L(a,t,0) = 0$, est la condition à la frontiére du domaine.La côte de la mer est un obstacle naturel pour les soles, pour $x = 0$ on a

$$\frac{\partial L}{\partial x}(a,t,0) = 0$$

La dynamique des juvéniles:

Les larves qui entre dans la phase juvénile au temps t leur âge est $a^*(t)$,se trouvent à ce moment dans la zone $[0, x_0]$ qui est supposée une region homogène. Alors dans un intérvalle de temps de la forme $[t, t+dt]$,les juveniles ont un âge dans l'intervalle $[t - a^*(t), t+dt - a^*(t+dt)]$; cet intervalle est de longeur

$$\begin{aligned} t + dt - a^*(t+dt) - (t - a^*(t)) &= dt - (a^*(t+dt) - a^*(t)) \\ &= dt[1 - \frac{(a^*(t+dt) - a^*(t))}{dt} \end{aligned}$$

Pour $dt \to 0$, la relation $\frac{(a^*(t+dt)-a^*(t))}{dt}$ est par définition $(a^*)'(t)$

Par construction les juvéniles à l'âge 0 sont des larves à l'âge a^*

$$x_0 \; J(0,t) = [1 - (a^*)'(t)] \int_0^{x_0} L(a^*(t), t, x)dx$$

D'ou la densité des juvénile est donnée par :

$$J(0,t) = \frac{[1-(a^*)'(t)]}{x_0} \int_0^{x_0} L(a^*(t),t,x)dx \quad (J_1)$$

D'aprés les équations (3) et (4), on deduit la relation suivante:

$$w^* = \int_{t-a^*(t)}^{t} \bar{f}(s)ds$$

Aprés intégration on obtient :

$$\bar{f}(t) - \bar{f}(t-a^*(t))[t-a^*(t)]' = 0$$

$$\bar{f}(t) - \bar{f}(t-a^*(t))[1-a^{*'}(t)] = 0$$

La dynamique des juvenile est detérminé par l'équation suivante avec la condition initiale:

$$\frac{\partial J}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial J}{\partial t}(a,t) = -\mu_J(a)J(a,t) \quad (J_2)$$

$$J(a,0) = J_0(a) \qquad\qquad (J_3)$$

Où $\mu_J(a)$ est la mortalité des juvéniles. Le modèle suppose que les juvéniles se répartissent de manière homogène dans la nourricerie $[0, x_0]$. L'équation (J_2) prend en considération l'hypothèse selon laquelle, seules les larves passant au stade juvénile dans la nourricerie sont pris en compte. L'équation (J_3) donne la distribution des juvéniles à l'instant initial $t = 0$.

La dynamique des adultes

On suppose que la phase adulte commence aprés deux ans de la phase juvénile; et que le passage à l'âge adulte se fait dans les nourriceries.; Ainsi on obtient la relation de transfert de la forme juvénile à la forme adulte:

$$M(0,t,x) = J(2,t)H(x_0 - x)$$

Avec $H(x)$ est l'équation de Heaviside telle que :

$$H(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x < 0 \\ 1 \ si \ x > 0 \end{cases}$$

Les conditions aux bords satisfaites par M sont:

$$\begin{aligned} M(a,0,x) &= M_0(a,x) \\ M(a,t,0) &= 0 \\ \int_0^{+\infty} M(a,t,x)dx &< +\infty \end{aligned}$$

$M_0(a,x)$ est la distribution des adultes à l'instant $t = 0$.

Soit $k_M(x)$ le coefficient de diffusion qui correspond au processus de dispersion des individus à la sortie de la nourricerie. Nous avons

$$(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial t})M(a,t,x)dx=\frac{\partial}{\partial x}(k_M(x)\frac{\partial}{\partial x}M(a,t,x)-\frac{\partial}{\partial x}[\gamma(t,x)M(a,t,x)]-\mu_M(a)M(a,t,x)$$

2.3 La résolution de l'équation des larves

2.3.1 en abscence des courants marins.

On a vu précédemment que l'équation qui résume la phase larvaire est de la forme:

$$\frac{\partial L}{\partial a}+\frac{\partial L}{\partial t}=k\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}-\mu_L(a)L-u\frac{\partial L}{\partial x}$$

Dans un premier cas, on considére que le coéfficient u est nul ($u=0$),alors l'équation au dessus devient:

$$\frac{\partial L}{\partial a}+\frac{\partial L}{\partial t}=k\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}-\mu_L(a)L$$

On réduit le problème à une seule variable (au lieu de a et t) selon les caracteristiques de l'équation

$$(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial t})L(a,t,x).$$

Puisque $L(a,0,x)=0$, L est considéré identiquement nulle tout au long de la demi- droite $t=0,\ a>0$. Soit

$$\lambda(s,x) = L(s, s+t_0, x)$$

La fonction λ repésente la restriction aux caracteristiques de L passants par le point $a = 0,\ t = t_0$. Le point (a,t) donné pour $a < t$, a les même caracteristiques que les points sur l'axe $a = 0$ passant par $(0, t-a)$.

En effet:

On a l'équation

$$(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial t})L = k\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \mu_L(a)L$$

On pose $AL = k\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}$;L'équation devient

$$\begin{aligned}(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial t})L &= AL - \mu_L(a)L \\ (\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial t})L &= (A - \mu_L(a))L\end{aligned}$$

L'équation caracteristique associée est

Or

$$\frac{da}{dt} = 1$$

Par suite

$$t - a = c \in R$$

On pose

$$\begin{aligned}\lambda_1(a,t) &= t - a = \xi \\ \lambda_1(a,t) &= a = \eta\end{aligned}$$

Ceci implique

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial a} &= -\frac{\partial \lambda}{\partial \xi} + \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} \\
\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial \lambda}{\partial \xi}
\end{aligned}$$

En remplacant dans l'équation, nous aurons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial a} + \frac{\partial L}{\partial t} &= -\frac{\partial \lambda}{\partial \xi} + \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} + \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \\
\frac{\partial L}{\partial a} + \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial \lambda}{\partial \eta}
\end{aligned}$$

L'équation satisfaite par λ est :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda}{\partial s} &= k\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} - \mu_L(s)\lambda(s,x) \\
\lambda(0,x) &= B(t-a,x) \\
\lambda(s,0) &= 0
\end{aligned}$$

Soit $\bar{\lambda}$ solution de

$$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial s} = k\frac{\partial^2 \bar{\lambda}}{\partial x^2} \qquad s > 0 \ ; \ x > 0$$

D'aprés le théorème (1), par une séparation des variables on obtient:

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}(s,x) &= f(x) \times g(s) \\
f(x)g'(s) - kf"(x)g(x) &= 0
\end{aligned}$$

En divisant par $f(x)g(s)$ on obtient:

$$\frac{g'(s)}{g(s)} - k\frac{f''(x)}{f(x)} = 0$$

c'est une équation à deux térmes, l'un dépend seulement de s et l'autre dépend seulement de x, alors

$$\frac{g'(s)}{g(s)} = k\frac{f''(x)}{f(x)}$$

Les deux membres de cette équation doivent être constants égales à α :

$$\begin{aligned} \frac{g'(s)}{g(s)} &= \alpha \\ k\frac{f''(x)}{f(x)} &= \alpha \end{aligned}$$

Par suite on obtient un système à deux équations differentielles en f et g :

$$\begin{cases} kf''(x) - \alpha f(x) = 0 \\ g'(s) - \alpha g(s) = 0 \end{cases}$$

L'équation caractéristique de l'équation en f est:

$$\begin{aligned} k\beta^2 - \alpha &= 0 \\ \beta^2 &= \frac{\alpha}{k} \end{aligned}$$

Pour le cas $\alpha < 0$ on a $\alpha = -w^2$; avec A et B deux constantes:

$$\bar{\lambda}(s,x) = e^{-w^2 s}(A\cos\frac{w}{\sqrt{k}}x + B\sin\frac{w}{\sqrt{k}}x)$$

La condition initiale implique

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}(0,x) &= f(x) = A\cos\frac{w}{\sqrt{k}}x + B\sin\frac{w}{\sqrt{k}}x \\
f(x) &= H(w)\exp(i\frac{w}{\sqrt{k}}x)
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}(s,x) &= H(w)\exp(i\frac{w}{\sqrt{k}}x - w^2 s) \\
\bar{\lambda}(s,x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(w)\exp(\frac{-w}{\sqrt{k}}x - w^2 s)dw \\
\bar{\lambda}(0,x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(w)\exp(\frac{-w}{\sqrt{k}}x)dw
\end{aligned}$$

Ce qui veut dire que $f(x)$ est la transformée de Fourier de $H(w)$

Par suite :

$$H(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\frac{w}{\sqrt{k}}x)f(x)dx$$

Alors

$$\bar{\lambda}(s,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\frac{w}{\sqrt{k}}y)f(y)dy\exp(\frac{iw}{\sqrt{k}}x - w^2 s)dw$$

$$\bar{\lambda}(s,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\frac{iw}{\sqrt{k}}(x-y) - w^2 s)dw$$

Soit l'intégrale I_2 tel que:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\frac{iw}{\sqrt{k}}(x-y) - w^2 s)dw$$

On pose

$$\begin{aligned} w\sqrt{ks} &= \frac{t}{\sqrt{2}} \Longrightarrow dw = \frac{dt}{\sqrt{2ks}} \\ \frac{x-y}{\sqrt{2ks}} &= z \end{aligned}$$

l'intégrale I_2 devient

$$\begin{gathered} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\frac{-t^2}{2ks} + izt)\frac{dt}{\sqrt{2ks}} \\ \frac{1}{\sqrt{2ks}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(izt - \frac{t^2}{2ks})dt \end{gathered}$$

Or

$$F(-\frac{t^2}{2}) = \sqrt{2\pi}\exp(-\frac{z^2}{2})$$

Donc on obtient:

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sqrt{2ks}}\sqrt{2\pi}\exp(-\frac{(x-y)^2}{4ks}) \\ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{ks}}\exp(-\frac{(x-y)^2}{4ks}) \end{gathered}$$

Par conséquent pour $s > 0; x \in \mathbb{R}$:

$$\bar{\lambda}(s,x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{ks}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{(x-y)^2}{4ks})f(y)dy$$

Soit

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= f(x) \quad si \;\; x>0\\ \tilde{f}(x) &= -f(-x) \quad si \;\; x<0\end{aligned}$$

La fonction $\bar{\lambda}(s,x)$ devient

$$\bar{\lambda}(s,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ks}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{(x-y)^2}{4ks})\tilde{f}(y)dy$$

$$\bar{\lambda}(s,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ks}}\int_{-\infty}^{0}\exp(-\frac{(x-y)^2}{4ks})[-f(-y)]dy + \int_{0}^{+\infty}\exp(-\frac{(x-y)^2}{4ks})f(y)dy$$

Pour $z=-y$:

$$\bar{\lambda}(s,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ks}}\int_{0}^{+\infty}-\exp(-\frac{(x+z)^2}{4ks})[-f(z)]dz + \int_{0}^{+\infty}\exp(-\frac{(x-y)^2}{4ks})f(y)dy$$

$$\bar{\lambda}(s,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ks}}\int_{0}^{+\infty}\exp(-\frac{(x+y)^2}{4ks}) - \exp(-\frac{(x-y)^2}{4ks})f(y)dy$$

Alors la solution de cette équation est donnée par:

$$\bar{\lambda}(s,x) = \int_{0}^{+\infty}K(s,x,y)f(y)dy$$

Avec

$$K(s,x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k s}}[\exp(-\frac{(x+y)^2}{4ks}) - \exp(-\frac{(x-y)^2}{4ks})]$$

Et f une condition initiale verifiant

$$f(x) = B(t-a,x)$$

La fonction S_L le taux de survie, est donné par

$$S_L(a) = \exp - \int_0^a \mu_L(s)ds$$

La solution de l'équation

$$\frac{\partial\lambda}{\partial s} = k\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} - \mu_L(s)\lambda(s,x)$$

est donnée par la formule suivante:

$$\lambda(s,x) = S_L(a)\bar{\lambda}(s,x)$$

Finalement, la resolution de l'équation des larves pour $u = 0$ est trouvée en éxprimant L et B en $\bar{\lambda}$ et f on obtient la relation

$$L(a,t,x) = \begin{cases} S_L(a)\int_0^{+\infty} K_L(s,x,y)B(t-a,y)dy & \text{pour } t > a \\ 0 & \text{pour } t < a \end{cases} \quad \text{avec } a < a^*(t)$$

La fonction $K_L(s,x,y)$ donne une probabilité de distribution de transition de y à x durant une période a .

2.3.2 En présence des courants marins

On se ramène au cas précedent par un changement de variables.

Soit le changement de variables :

$$L(a,t,x) = \exp(\frac{u}{2k}x)\tilde{L}(a,t,x)$$

avec la fonction

$$\tilde{\mu}_L = \mu_L(a) + \frac{u^2}{4k}$$

et la condition intiale

$$\tilde{B}(a,t,x) = \exp(-\frac{u}{2k}x)B(a,t,x)$$

En remplaçant dans le premier, cas la solution est :

$$L(a,t,x) = \begin{cases} S_L(a)\exp(\frac{u^2}{4k}a)\int\limits_0^{+\infty} \exp(\frac{u}{2k}(x-y))K_L(a,x,y)B(t-a,y)dy \\ \qquad\qquad \text{pour } t > a \\ 0 \qquad\qquad \text{pour } t < a \end{cases}$$

Maintenant justifions le choix du changement de variables

On a:

$$L(a,t,x) = f(x)\ \tilde{L}(a,t,x)$$

On calcule les dérivées partielles:

$$\frac{\partial L}{\partial s} = f(x)\frac{\partial \tilde{L}}{\partial s}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = f'(x)\tilde{L} + f(x)\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = f''(x)\tilde{L} + 2f'(x)\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} + f(x)\frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial x^2}$$

On remplace:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial s} - k\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} &= f(x)\frac{\partial \tilde{L}}{\partial s} - k[f''(x)\tilde{L} + 2f'(x)\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} + f(x)\frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial x^2}] \\
&= -\mu_L f(x)\tilde{L} - u\ f'(x)\tilde{L} - u\ f(x)\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} \\
&= f(x)\frac{\partial \tilde{L}}{\partial s} - k[f''(x)\tilde{L} + 2f'(x)\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} + f(x)\frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial x^2}] + \\
&\quad +\mu_L f(x)\tilde{L} + u\ f'(x)\tilde{L} + u\ f(x)\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Par suite:

$$\tilde{L}[-kf''(x) + \mu_L f(x) + u\ f'(x)] + f(x)[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial s} + k\frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial x^2}] + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x}[-2kf'(x) + u\ f(x)] = 0$$

pour

$$-2kf'(x) + u\ f(x) = 0$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{u}{2k}$$

ce qui implique:

$$\ln f(x) = \frac{u}{2k}x$$

donc

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \exp(\frac{u}{2k}x) \\
& et
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u}{2k}\exp(\frac{u}{2k}x) \\
& et
\end{aligned}
$$

$$f"(x) = \frac{u^2}{4k^2}\exp(\frac{u}{2k}x)$$

Par conclusion:

$$L(a,t,x) = \exp(\frac{u}{2k}x)\ \tilde{L}(a,t,x)$$

Pour

$$-kf"(x) + \mu_L f(x) + u\ f'(x) = 0$$

$$-k\frac{u^2}{4k^2}\exp(\frac{u}{2k}x) + \mu_L\exp(\frac{u}{2k}x)\ + u\frac{u}{2k}\exp(\frac{u}{2k}x) = 0$$

$$\exp(\frac{u}{2k}x)[-k\frac{u^2}{4k^2} + \mu_L + u\frac{u}{2k}] = 0$$

$$
\begin{aligned}
\mu_L &= k\frac{u^2}{4k^2} - \frac{u^2}{2k} \\
&= \frac{u^2}{2k}[k\frac{1}{2k} - 1] \\
&= -\frac{u^2}{4k}
\end{aligned}
$$

Ceci implique:

$$\tilde{\mu} = \mu_L + \frac{u^2}{4k}$$

Finalement pour la condition initiale:

D'aprés :

$$L(a,t,x) = \exp(\frac{u}{2k}x)\ \tilde{L}(a,t,x)$$

pour $a = 0$ on a

$$L(0,t,x) = B(t,x) = \exp(\frac{u}{2k}x)\ \tilde{L}(0,t,x)$$

Alors

$$\tilde{L}(a,t,x) = B(t,x)\exp(-\frac{u}{2k}x)$$

Donc

$$\tilde{B}(t,x) = B(t,x)\exp(-\frac{u}{2k}x)$$

2.4 Resolution de l'équation des juvéniles

Dans ce qui suit, on suppose que $u = 0$.

De la relation (J_1),et l'étude précedente, on a

$$J(0,t) \quad = \quad S_L(a^*(t))\frac{[1 - a^{*'}(t)]}{x_0}\int_0^{x_0}\int_0^{+\infty} K_L(a^*(t),x,y)B(t - a^*(t),y)dydx$$

Soit le système

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a}(a,t)+\frac{\partial J}{\partial t}(a,t) &= -\mu_J(a)J(a,t) \quad (J_2) \\ J(a,0) &= J_0(a) \qquad\qquad\quad (J_3) \end{aligned}$$

Dans ce cas les caracteristiques sont des droites de la forme:

$$c = t - a, \qquad\qquad c : \text{constante}$$

Notre système devient pour $t - a > 0$:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\mu_J(s)w(s)$$

avec la condition intiale:

$$w(t-a) = J(0, t-a)$$

Par intègration sur les courbes caracteristiques,on obtient les résultats suivants:

$$\int_{t-a}^{t} \frac{\partial w}{w(s)} = \int_{t-a}^{t} -\mu_J(s)ds$$

Alors

$$w(t) = \exp \int_{t-a}^{t} -\mu_J(s)ds \; w(t-a)$$

La fonction $\exp \int_{t-a}^{t} -\mu_J(s)ds$ est le taux de survie à l'age a, notée par $S_J(a)$; d'ou

$$J(a,t) = S_J(a) \; J(0, t-a)$$

Remarque 2.1 *La résolution de l'équation des adultes nécessite une étude plus élaborée et ce point constitue une projet future.*

Chapitre 3

NOTIONS DE CONTRÔLE OPTIMAL

3.1 Présentation du modéle

Le modèle pour la gestion optimale des ressources renouvelables est de la forme suivante:

$$\dot{x}(t) = F(x) - r(t) \qquad (1)$$

Avec

$x(t)$ est la taille de la population, $F(x)$ est le taux de croissance naturelle de la population. Nous supposerons dans cette étude que $F(x)$ est de type logistique:

$$F(x) = \alpha x(1 - \frac{x}{k})$$

Où α est taux de croissance intrinsèque de la population;k représente le niveau de saturation du milieu, et $r(t)$ est le taux de récolte au temps t.

On sait que $r(t)$ est une fonction de $x(t)$ et de l'éffort de pêche $E(t)$.

$$r(t) = x(t)E(t) \tag{2}$$

On suppose toujours que $t \geq 0,\ x(t) \geq 0$ et $r(t) \geq 0$ ce qui nous donne donc que $E(t) \geq 0$

Il est nécessaire d'utiliser un modèle pour reprèsenter la fonctionnelle objectif qui definit ici la valeur actuelle des profits accumulés dans le temps.

Soit p le prix constant par unité de biomasse et que les couts d'opérations sont proportionnelles à l'effort fourni,avec c est la constante de proportionnalité.

Alors la fonctionnelle objective est

$$\begin{aligned} VA &= \int_0^T \exp(-\delta t)[pr(t) - cE(t)]dt \\ &= \int_0^T \exp(-\delta t)[px(t) - c]E(t)dt \end{aligned}$$

Où $\delta > 0$, est la constante représentant le taux d'actualisation, T l' horizon du problème .

Dans notre étude il s'agit de maximiser le profit..Ce problème ainsi présenté est un problème typique de la théorie du contrôle optimal linéaire.

3.1.1 Resolution du problème

$$\begin{aligned}
\max VA &= \max_{x\in X}\int_0^T \exp(-\delta t)[pr(t)-cE(t)]dt\\
&= \max_{x\in X}\int_0^T \exp(-\delta t)[p(F(x)-\dot{x}(t))-c\frac{r(t)}{x(t)}]dt\\
&= \max_{x\in X}\int_0^T \exp(-\delta t)[p(F(x)-\dot{x}(t))-\frac{c}{x(t)}(F(x)-\dot{x}(t))]dt\\
&= \max_{x\in X}\int_0^T \exp(-\delta t)[p-\frac{c}{x(t)}](F(x)-\dot{x}(t))dt\\
&= \max_{x\in X}\int_0^T \exp(-\delta t)[p-c(x)](F(x)-\dot{x}(t))dt\\
&= \max_{x\in X}\int_0^T \{\exp(-\delta t)[p-c(x)]F(x)-\exp(-\delta t)[p-c(x)]\dot{x}(t)]\}dt
\end{aligned}$$

Où X est un ensemble de fonctions $x(t)$ qui satisfont $x(0)=x_0,\ x(T)=x_T$ et $c(x)=\frac{c}{x(t)}$

On pose

$$G(t,x)=\exp(-\delta t)[p-c(x)]F(x)$$

et

$$H(t,x)=-\exp(-\delta t)[p-c(x)]$$

On obtient un problème de la forme:

$$\max_{x\in X}\int_0^T [G(t,x)+H(t,x)\dot{x}(t)]dt \qquad (3)$$

On pose

$$f(t,x,\dot{x})=G(t,x)+H(t,x)\dot{x}(t)$$

alors

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x}(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} &= \frac{d}{dt}[H(t,x)] \\
&= \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} \\
&= \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial H}{\partial t}
\end{aligned}
$$

La condition necessaire d'Euler devient

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}$$

ce qui donne

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Considérons la contrainte suivante:

$$0 \leq E(t) \leq E_{\max}$$

Alors on a

$$A(x,t) = F(x) - xE_{\max} \leq \dot{x} \leq F(x) = B(x,t) \qquad (4)$$

proposition 3.1 *supposons que*

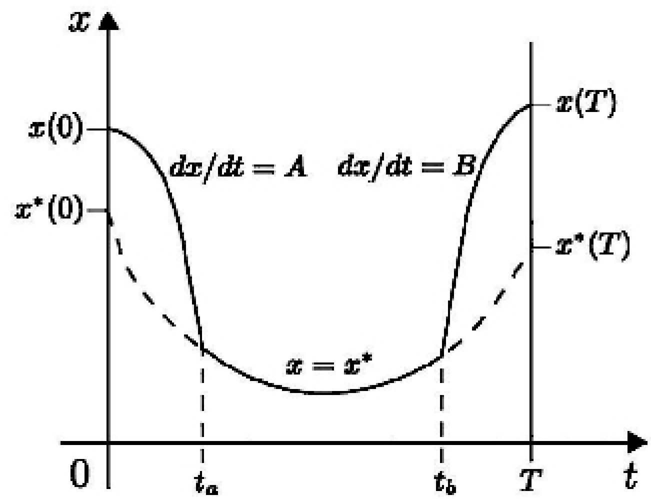
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial x} &< \frac{\partial H}{\partial t} \qquad \textit{si} \;\; x(t) > x^*(t) \\
\frac{\partial G}{\partial x} &> \frac{\partial H}{\partial t} \qquad \textit{si} \;\; x(t) < x^*(t)
\end{aligned}
$$

où $x^*(t)$ est la solution de l'équation

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (5)$$

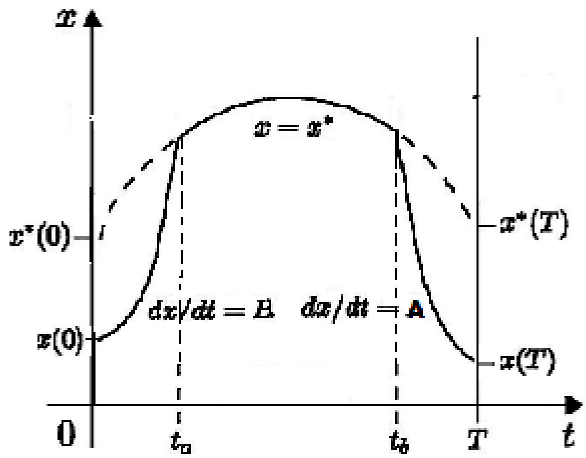
Alors la solution du problème (3) *sous l'hypothèse* (4) *est la trajectoire* $x(t)$ *qui satisfait les cas suivants:*

- *Si* $x(0) > x^*(0)$, *alors le chemin optimal* $x(t)$ *utilise le taux de décroissance le plus rapide* ($\dot{x} = A(x,t)$) *jusqu'à ce que le chemin singulier* $x^*(t)$ *soit atteint en un temps* t_a.*(voir le graphe* 1*)*



*graphe*1

- *Si Si* $x(0) < x^*(0)$, *alors le chemin optimal* $x(t)$ *utilise le taux de croissance le plus rapide* ($\dot{x} = B(x,t)$) *jusqu'à ce que le chemin singulier* $x^*(t)$ *soit atteint en un temps* t_a.*(voir le graphe* 2*)*



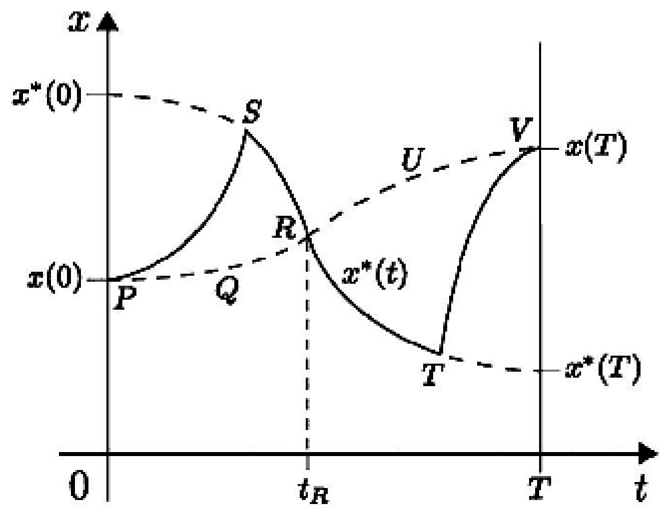
graphe2

- $x(t) = x^*(t)$ *pour* $t_a \leq t \leq t_b$.

Remarque 3.1 *Si* $x(t) \neq x^*(t)$ *on essaye de diriger le stock initial vers la position d'équilibre aussi vite que possible.*

En effet, on veut montrer que si on prend n'importe quelle situation la trajectoire optimale $x(t)$ vérifie toujours les mêmes propriétés *i.e*, à toujours le même comportement par rapport à d'autres trajectoires.

Preuve: Si on considère par exemple la situation du graphe3 sous la forme si dessous:



*graphe*3

Telque la trajectoire optimale $x(t)$ est représentée par la courbe continue $PSRTV$, et une courbe $x_1(t)$ admissible de $(0, x_0)$ à (T,x_T) representée par des pointillés $PQRUV$

D'après le graphe 2 on remarque que $x_0 < x_0^*$ alors $x(t)$ va utiliser un taux de croissance maximal $i.e$ pour $0 \leq t \leq t_a$ par conséquent $x_1(t) < x(t)$ pour $t \leq t_a$, dans ce cas $x_1(t)$ $< x(t)$ pour $0 < t \leq t_R$ et $x_1(t_R) = x(t_R)$, alors on obtient:

$$\int_0^{t_R} [G(t,x) + H(t,x)\dot{x}]dt \quad - \int_0^{t_R} [G(t,x_1) + H(t,x_1)\dot{x}_1]dt \quad (6)$$

On se base sur une simple application du théorème de Green dans le plan, qui permet d'écrire la fonctionnelle objective sous la forme de l'integrale curviligne :

$$\int_0^T [G(t,x) + H(t,x)\dot{x}]dt = \int_C [G(t,x)dt + H(t,x)dx]$$

Ou C est la courbe

$$x = x(t), 0 \leq t \leq T$$

Par suite d'aprés le graphe 2 la formule (6) implique

$$
\begin{aligned}
& \int\limits_{PSR} [G(t,x)dt + H(t,x)dx] - \int\limits_{PQR} [G(t,x)dt + H(t,x)dx] \\
= \quad & - \int\limits_{RSP} [G(t,x)dt + H(t,x)dx] - \int\limits_{PQR} [G(t,x)dt + H(t,x)dx] \\
= \quad & - \oint\limits_{PQRSP} [G(t,x)dt + H(t,x)dx] \\
= \quad & \iint\limits_{C(x)} (\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial t}) dxdt
\end{aligned}
$$

Et puisque la courbe $C(x) = PQRSP$ se trouve au dessous du chemin singulier $x^*(t)$ $i.e$ $x(t) < x^*(t)$,

alors d'aprés les hypothèses de la proposition on a:

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial t} > 0 \text{ sur } PQRSP$$

Donc

$$\iint\limits_{C(x)} (\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial t}) dxdt > 0$$

Cela veut dire que

$$\int_0^{t_R} [G(t,x) + H(t,x)\dot{x}]dt \quad - \int_0^{t_R} [G(t,x_1) + H(t,x_1)\dot{x}_1]dt \ > 0$$

Ce qui confirme l'optimalité de la trajectoire à l'interieur de l'intervalle de temps $0 \leq t \leq t_R$ $i.e$ $x_1(t) < x(t)$.

On utilise le meme argument pour démontrer l'optimalité de $x(t)$ dans l'intervalle de temps $t_R \leq t \leq T$

Pour pouvoir ce servir de la proposition il nous reste à montrer l'unicité du chemin singulier $x^*(t)$ qui satisfait l'équation (5)

Ceci nous amène à résoudre l'équation

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Sachant que

$$\begin{aligned} G(t,x) &= \exp(-\delta t)[p - c(x)]F(x) \\ & \quad et \\ H(t,x) &= -\exp(-\delta t)[p - c(x)] \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= \exp(-\delta t)\frac{\partial}{\partial x}\{[p - c(x)]F(x)\} \\ &= \exp(-\delta t)\frac{\partial}{\partial x}\{[p - c(x)][\alpha x(1 - \frac{x}{k})]\} \\ &= \exp(-\delta t)\frac{\partial}{\partial x}\{[p - \frac{c}{x}][\alpha x(1 - \frac{x}{k})]\} \\ &= \exp(-\delta t)\frac{\partial}{\partial x}[(p\alpha x - \alpha c)(1 - \frac{x}{k})] \\ &= \exp(-\delta t)[\alpha p - \frac{\alpha p}{k}x - \frac{\alpha p}{k}x + \frac{\alpha c}{k}] \\ &= \exp(-\delta t)[-2\frac{\alpha p}{k}x + \alpha(p + \frac{c}{k})] \end{aligned}$$

Et

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \delta \exp(-\delta t)[p - c(x)]$$

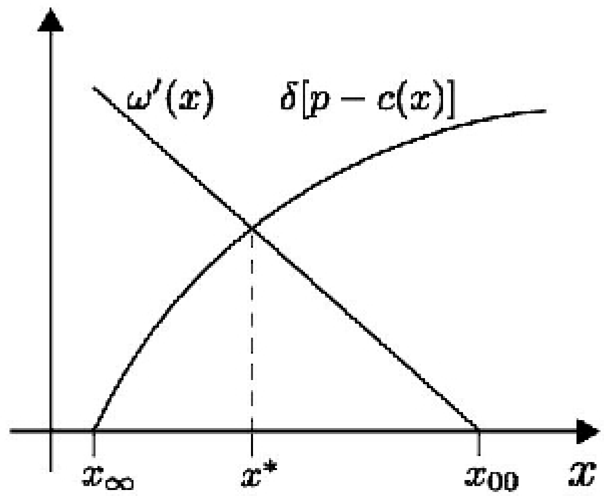
Donc

$$\exp(-\delta t)\frac{\partial}{\partial x}\{[p - c(x)]F(x)\} = \delta \exp(-\delta t)[p - c(x)]$$

Ceci implique

$$-2\frac{\alpha p}{k}x + \alpha(p + \frac{c}{x}) = \delta[p - c(x)]$$

Et $x^*(t)$ est le point d'intérsection des graphes de $\frac{\partial G}{\partial x}$ avec celui de $\frac{\partial H}{\partial t}$ ce qui montre graphiquement l'unicité de $x^*(t)$:



graphe 4

■

Remarque 3.2 *cette approche est critique dans le sens où on ne peut pas controller le stock x*

Chapitre 4

PRINCIPE DU MINIMUM DE PONTRYAGIN

4.1 Formulation du principe du minimum de Pontryagin

Le principe du minimum de Pontryagin est utilisé dans la théorie du contrôle optimal pour trouver la commande optimale permettant d'amener un système dynamique d'un état à un autre, en présence de contraintes portant sur l'état ou les commandes d'entrée

Soit x un vecteur a n dimention, et soit le système :

$$\dot{x} = f(x, u)$$

où u est un vecteur a m dimention, dit contrôle.
L'état initial au temps $t = 0$,est donnée par x_0. L'état final temps $t = t_f$,est donnée par x_f.
L'instant final t_f peut être fixé ou libre.
On défini la fonctionnelle J telle que:

$$J = \int_0^{t_f} f_0(x, u)dt$$

Soit U l'espace des contrôles admissibles. On cherche le controle optimale $u \in U$, tet que le système passe d'un état initial x_0 à un état final x_f.au temps t_f avec une valeur minimale de J

Soit x_0 la solution du système:

$$\dot{x}_0 = f_0(x,u); \qquad x_0(0) = 0$$

Alors le cout associé est:

$$J = x_0(t_f)$$

On introduit maintenant le vecteur $\hat{x}$, de dimension$(n+1)$, et de composantes $x_i, \ i = 0, 1, ..., n$. On definit de manière similaire le vecteur $\hat{f}$.

Notre système peut être écrit

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial t} = \hat{f}(x,u)$$

L'Hamiltonian du système $H(x, \hat{z}, u)$ est défini par

$$H = \hat{z}^T \hat{x}^{\cdot} = \sum_{i=0}^{n} z_i f_i$$

Le vecteur $\hat{z} = (z_0, z_1, ..., z_n)$ estdit vecteur dual associé à $\hat{x}$. On a alors

$$\frac{\partial \hat{z}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

L'Hamiltonian H ne depend pas de x_0, d'où

$$\dot{z}_0 = 0, \ \dot{z}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \ i = 1, 2, ..., n$$

Le principe de Pontryagin se rèsume dans les points suivants:

Supposons que le problème admet une solution optimale avec un contrôle optimal $u^{*\cdot}$

(i) $z_0 = -1$.

(ii) u^*est un contrôle appartenant à U, pour lequel $H(\hat{x}, \hat{z}, u^*)$ atteint son minimum(supremum)

$$H(\hat{x}, \hat{z}, u^*) = \min_{u \in U} H(\hat{x}, \hat{z}, u)$$

(iii) L'équation duale admet une solution $\hat{z}^*$, et l'équation d'état admet la solution x^* ayant la valeur x_0 au temps $t = 0$, et x_f au temps $t = t_f$.

(iv) l'Hamiltonian est constant sur la trajectoire optimale , et nulle si le temps final est libre:

$$\begin{aligned} H(x^*, \hat{z}^*, u^*) &= \text{constant} \quad \text{si } t_f \text{ est fixé} \\ &= 0 \qquad\qquad \text{si } t_f \text{ est libre et positif} \end{aligned}$$

Il est également possible de dériver des conditions spécifiques sur l'Hamiltonien. Si l'instant final t_f est fixé et que l'hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps ($\frac{\partial H}{\partial t} = 0$), alors :

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) \equiv \text{constant}$$

si l'instant final t_f n'est pas fixé, alors :

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) \equiv 0$$

Où $x^*(t)$ est la trjectoire d'état optimale et $\lambda^*(t)$ est la trjectoire duale optimale

Les conditions nécessaires pour la minimisation d'une fonctionnelle sont les suivantes: Soit x l'état du système dynamique et u la variable de commande, telle que

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad u(t) \in U, \quad t \in [0, T]$$

où U est l'espace des commandes admissibles et T l'instant de l'état final du système. La commande doit être déterminée pour tout $t \in [0, T]$ afin de maximiser la fonctionnelle J, définie par :

$$J = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x(t), u(t))dt$$

Les contraintes sur la dynamique du système peuvent être adjointes au Lagrangien L en introduisant le vecteur des multiplicateurs de Lagrange λ. Ces éléments sont appelés co-états du système. et Ψ est une fonction continue.

Cela permet de construire l'Hamiltonien H défini pour tout $t \in [0, T]$ par :

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \lambda^{\intercal}(t) f(x(t), u(t)) + L(x(t), u(t))$$

où $\lambda^{\intercal}$ est le transposé de λ.

4.2 Application

Problème 5 *On suppose qu'on a un système donné par une seule variable x définie par :*

$$\dot{x} = x - ux \quad ; \qquad 0 \leq u \leq h$$

Où

$x(t)$ est la densité de la population de poissons, u est le taux de récolte, h le taux maximal

.

On suppose aussi que $x = 1$ est le stock initial et T est le temps final supposè fixé.On souhaite savoir comment maximiser la quantité de poissons récoltés. Dans ce qui suit on va minimiser la fonctionnelle

$$J = -\int_0^T ux \, dt$$

L'équation d' hamiltonien associée à ce système est

$$H(x, z, u) = ux + zx(1 - u)$$

On pose

$$\begin{aligned} u &= 0 \qquad pour \quad z > 1 \\ u &= h \qquad pour \quad z < 1 \end{aligned}$$

Puisque $x(T)$ est déterminée, alors $z(T) = 0$ est la condition de transversalité.L'équation duale est :

$$\dot{z} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

Ce qui nous donne

$$\dot{z} = -u - z(1-u)$$

L'etat du système vérifie

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial z}$$

- *pour $u = 0$:*

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -z \\ z(t) &= A\exp(-t) \ ; \qquad A \text{ est une constante} \end{aligned}$$

- *pour $u = h$:*

$$\dot{z} = -h - z(1-h)$$

et

$$z(t) = -\frac{h}{1-h} + B\exp[(h-1)t]; \qquad B \text{ est une constante}$$

Par suite la condition de transversalité est donnée par:

$$z(T) = 0$$

et

$$B = \frac{h}{1-h}\exp[-(h-1)T]$$

D'ou

$$
\begin{aligned}
z(t) &= -\frac{h}{1-h} + \frac{h}{1-h}\exp[-(h-1)T]\exp[(h-1)t] \\
z(t) &= \frac{h}{1-h}\{-1+\exp[(h-1)(t-T)]\}
\end{aligned}
$$

On suppose qu'au temps $t = \tau$ *on a* $z = 1$,*Ainsi on pose:*

$$\tau = T - \delta,\ et\ ,\delta = \frac{\ln h}{h-1}$$

Avec δ *est une valeur positive de* h

Pour $u = h$ *et* $T < \delta$ *, alors pour tout* t *la solution de l'équation , est donnée par la formule:*

$$x(t) = \exp[(1-h)t]$$

Et le minimum de la fonction J :

$$
\begin{aligned}
J &= -\frac{h}{1-h}\{-1+\exp[(h-1)(t-T)]\}\Big|_0^T \\
J &= -\frac{h}{1-h}\{-1+\exp[(h-1)(0-T)]\} \\
J &= -\frac{h}{1-h}\{-1+\exp[(1-h)T]\}
\end{aligned}
$$

Ce qui veut dire que le maximum de la fonction J *est*

$$-J = \frac{h}{1-h}\{-1+\exp[(1-h)T]\}$$

Pour $T > \delta$, *alors la solution de l'équation :*

- *si* $u = 0$; *on a* $t < \tau < T$

$$x(t) = \exp(t)$$

- *si* $u = h$; *on a* $\tau < t < T$

$$\int_\tau^t \frac{dx}{x} = \int_\tau^t (1-h)ds$$

$$x(t) = \exp[h\tau + (1-h)t]$$

Ainsi que la fonction optimale de J est de la forme:

$$\begin{aligned}
-J &= \int_{\tau}^{T} hx\ dt \\
-J &= h\int_{\tau}^{T} x(t)\ dt \\
-J &= h\{\int_{\tau}^{T} \exp[h\tau - (1-h)t]dt\} \\
-J &= \frac{h}{1-h}\{\exp h\tau \times (\exp[(1-h)T] - \exp[(1-h)\tau])\} \\
-J &= \frac{h}{1-h}\{\exp(h\tau + [(1-h)T]) - \exp(h\tau(1-h)\tau)\}
\end{aligned}$$

$$-J = \frac{h}{h-1}\{\exp\tau - \exp[h\tau - (h-1)T]\}$$

Conclusion

On a décrit dans ce travail un modèle mathématique contenant les trois phases du cycle de vie de la population des Soles, La première équation concerne la phase larvaire, pour la résolution de cette équation on a fait appelle à la théorie des caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles, ainsi qu'aux deux méthodes: la séparation des variables, et la transformation de Fourier. La seconde équation s'intéresse à la quantité des juvéniles dans un espace homogène, la dernière équation donne la proportion des juvéniles entrant dans l'état adulte, sa résolution fait intervenir la théorie des semi groupes qu'on laisser pour un projet ultérieur.

Dans la dernière section on a décrit l'évolution d'une population renouvelable (qui est la population des poissons) qui fait appelle à un problème d'optimisation qui consiste à maximiser la fonctionnelle objective correspondant aux aspirations d'une industrie de pêche.

Bibliographie

[1] O.Arino, C.Koutsikopoulos, A. Ramzi: Elements of mathematical modeling of evolution in number of a Sole population. Wold Science publishing company. Journal of Biological systems. Vol 4, N°4, February(1996) p 445-458.

[2] O.Le Pape. Les nourriceries de la sole du GG : étendue, qualité et recrutement. Lab. ECO-HAL, IFREMER Nantes

[3] David Bleecker,G.Csordas: Basic Partial Differentiel Equations. International Press, Cambridge, Massachsetts 1996

[4] Michel Leconte. Transformée de Fourier, Cours et Exercices. Ecole des Mines de Douai Juillet 2001

[5] J.F. Bonnans et P. Rouchon, Commande et Optimisation de Systèmes Dynamiques, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2005

[6] D.Lavigne, Notions de controle optimal appliquées à la gestion d'une ressource renouvelable, Collége Millitaire Royal de Saint-Jean, Bulletin AMQ, n°4, décembre 2008.