Table des Matières

Introduction

Dans ce mémoire,on presente une étude spectrale de l'opérateur bi-laplacien sur une variété compacte et sans bord . Le but est d'étudier le comportement quand ε tend vers 0 de la première valeur propre et fonction propre de l'opérateur :

$$\varepsilon \Delta^2 u + c\,(x)\,u$$

Pour cela ,on suit le travail récemment obtenu dans [8] .
Le manuscrit est organisé comme suit . Dans le chapitre 1 , nous donnons les préliminaires. Le chapitre 2 est consacré à l'analyse du comportement asymptotique de la première valeur propre .Enfin , dans la dernière partie , nous établissons une estimation de l'erreur d'approximation de la première valeur propre.

Chapitre 1

Préliminaire

Considérons un point $P \in V$ et un système de coordonnées géodésiques normales $(y^1, y^2, ..., y^m)$centré en P, m est la dimension de la variété V.

Soit $S(r)$ l'ensemble des points situés à la distance r de P (r<d le rayon d$'$injectivité) et $d\Omega$ l'élément de l'aire sur $S_{m-1}(1)$ la sphère de rayon 1 à (m-1)dimensions.

Posons :

$$G(r) = \frac{1}{\omega_{m-1}} \int_{S(r)} \sqrt{|g|} d\Omega.$$

ω_{m-1} étant l'aire de $S_{m-1}(1)$ et $|g|$ le déterminant de la métrique.

Un développement limité de $G(r)$ au voisinage de 0 donne:

Proposition 1.1 [1]*:*

$$G(r) = 1 - \frac{R}{6m} r^2 + \frac{r^4}{360m(m+2)} \left[18\Delta R + 8R_{ij}R^{ij} - 3R_{ijkl}R^{ijkl} + 5R^2\right] + o\left(r^5\right).$$

Le développement limité de $\sqrt{|g|}$ au voisinage de P est :

Proposition 1.2 [1]*:*

$$\sqrt{|g|} = 1 - \frac{1}{6} R_{ij} y^i y^j - \frac{1}{12} R_{ijk} y^i y^j y^k + \frac{1}{4!} \left[-\frac{3}{5} R_{ijkl} - \frac{2}{15} R_{ipiq} R_{kl}^{p\ \ q} + \frac{1}{3} R_{ij} R_{kl}\right] y^i y^j y^k y^l + o\left(y^4\right)$$

où le tenseur de courbure ,celui de Ricci et ses dérivées sont à prendre en P.

Soit (M,g) une variété riemannièene ,et (Ω, ϕ) une carte locale de M .
Pour tout $u \in C^2(M)$ et en tout point de Ω on a :

Proposition 1.3 [7]*:*

$$\Delta_g u = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}.\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{|g|}.g^{ij}.\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

où les x_i désignent les coordonnées associées à (Ω, ϕ) et $|g|$désigne le déterminant de la métrique.

Dans les coordonnées géodésiques polaires la partie radiale de Δ_g s'écrit :

Proposition 1.4 [2]*:*

$$-\Delta_g = \frac{1}{r^{m-1}\sqrt{|g|}}\partial_r\left[r^{m-1}.\sqrt{|g|}.\partial_r\right].$$

Dans le système de coordonnée au point P, on a :

Proposition 1.5 [8]*:*

$$g_{ij}(P) = \delta_{ij} + O\left(\|x\|^2_{\mathbb{R}^m}\right).$$

On a les estimations suivantes :

Proposition 1.6 [1]*:*

$$\int_{S(r)} R_{ij}y^i y^j d\Omega = \frac{\omega_{m-1}}{m}R.\delta_{ij}.r^2$$

avec R est la courbure scalaire et R_{ij} le tenseur de Ricci.
et

$$\int_{S(r)} y^i y^j d\Omega = \frac{\omega_{m-1}}{m}\delta_{ij}.r^2.$$

p et q étant deux réels positifs , posons $p-q>1$,

on note :

$$I_p^q=\int_0^{+\infty}(1+t)^{-p}.t^q dt.$$

Alors

Proposition 1.7 [6]*:*

$$I_{p+1}^q=\frac{p-q-1}{p}I_p^q.$$

et

$$I_{p+1}^{q+1}=\frac{q+1}{p-q-1}I_{p+1}^q.$$

Chapitre 2

Comportement asymptotique de la première valeur propre

Dans ce chapitre nous étudions sur une variété riemanniènne (V_m, g) compacte sans bord et de métrique g le comportement de la première valeur propre de l'opérateur:

$$\varepsilon \Delta_g^2 u + c(x)u = \lambda u. \tag{E}$$

lorsque le paramètre ε devient petit.

La fonction $c(x)$ est une fonction de classe C^∞ et strictement positive .

Nous supposons que la dimension de la variété $m \geq 3$.

Plus précisement ,nous montrons le théorème suivant :

Théorème 2.1

Soit $\underset{V}{Min}\ c$ la valeur minimale de la fonction c sur V on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon = \underset{V}{Min}\ c.$$

où λ_ε est la première valeur propre de l'opérateur : $\varepsilon \Delta_g^2 u + c(x)u$.

Preuve:

Soit la fonctionnelle

$$I(u)=\frac{\int_V\left[\varepsilon\left|\Delta u\right|^2+c(x)u^2\right]dv(g)}{\int_V u^2dv(g)}.$$

Considérons un système de coordonnées normales $(y^1,y^2,...,y^m)$ géodésiques centrées en P.

Soit $S(r)$ l'ensemble des points situés à la distance r de P,($r<d$ rayon d'injectivité)et $d\Omega$ l'élément d'aire sur $S_{m-1}(1)$ la sphère de rayon 1 à (m-1) dimensions.

Posons

$$G(r)=\frac{1}{\omega_{m-1}}\int_{S(r)}\sqrt{|g|}d\Omega\ .$$

ω_{m-1} étant l'aire de $S_{m-1}(1)$ et $|g|$ le déterminant de la métrique.

Un développement limité de $G(r)$ en $r=0$ donne

$$G(r)=1-\frac{R}{6m}r^2+o(r^4).$$

Avec R égale à la courbure scalaire en P.

Soient P un point de V_m $(m>2)$ et $B_P(\delta)$ une boule fermée centrée en P de rayon $\delta>0$.On suppose que $(0<2\delta<d$ où d est le rayon d'injectivité).

Maintenat, considérons la fonction

$$\phi_\mu=\begin{cases}\frac{\mu^{\frac{m-2}{2}}}{(r^2+\mu^2)^{\frac{m-2}{2}}}-\frac{\mu^{\frac{m-2}{2}}}{(\delta^2+\mu^2)^{\frac{m-2}{2}}} & \text{sur } B_P\left(\delta\right).\\ 0 & \text{ailleurs.}\end{cases}$$

Soit $\eta(r)$ une fonction C^∞ égale à 1 sur $B_P(\delta)$ et 0 sur $V-B_P(2\delta)$.

Calculons les différents termes de la fonctionnelle

$$I_\mu=I(\eta\phi_\mu)\mid_{B_P(\delta)}\ .$$

On a

$$\nabla\phi_\mu(r) = \phi_\mu^{'}(r) = -(m-2)\mu^{\frac{m-2}{2}}.r(r^2+\mu^2)^{-\frac{m}{2}}.$$

et

$$\Delta_g\phi_\mu(r) = (m-2)\mu^{\frac{m-2}{2}}(r^2+\mu^2)^{-\frac{m}{2}}\left[\frac{m\mu^2}{r^2+\mu^2} + \partial_r \log\sqrt{|g|}.r\right].$$

Par conséquent

$$\left|\Delta_g\phi_\mu(r)\right|^2 = (m-2)^2\mu^{m-2}(r^2+\mu^2)^{-m}\left[\frac{m\mu^2}{r^2+\mu^2} + \partial_r \log\sqrt{|g|}.r\right]^2.$$

L'intégrale

$$A = \int_{B_P(\delta)} \left|\Delta\phi_\mu\right|^2 dv(g)$$

s'écrit

$$A = I_1^A + I_2^A + I_3^A \quad ,$$

où

$$I_1^A = m^2\mu^4\int_0^\delta \frac{r^{m-1}}{(r^2+\mu^2)^{m+2}}\left(1-\frac{R}{6m}r^2+o(r^4)\right)dr.$$

$$I_2^A = \int_0^\delta \frac{r^{m+1}}{(r^2+\mu^2)^m}(\partial_r\log\sqrt{|g|})^2\left(1-\frac{R}{6m}r^2+o(r^4)\right)dr.$$

et

$$I_3^A = -\frac{2}{3}\mu^2\int_0^\delta \frac{r^m}{(r^2+\mu^2)^{m+1}}\partial_r\log\sqrt{|g|}\left(1-\frac{R}{6m}r^2+o(r^4)\right)dr.$$

Un calcul simple montre que lorsque μ est assez proche de 0 , on aura :

$$I_1^A = \frac{m^2}{2\mu^2}\left[I_{m+1}^{\frac{m}{2}-1} + o\left(\mu^4\right)\right].$$

$$I_2^A = \frac{R^2}{9m^2}.\frac{1}{2\mu^m}o\left(\mu\right).$$

et

$$I_3^A = -\frac{R}{3\mu^m}o\left(\mu\right).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} A &= (m-2)^2 \mu^{m-2} \omega_{m-1} \left[\frac{m^2}{2\mu^m} I_{m+2}^{\frac{m}{2}-1} + o(\mu) \right]. \\ &= \frac{m^2 (m-2)^2}{2\mu^2} \left[I_{m+2}^{\frac{m}{2}-1} + o(\mu) \right]. \end{aligned}$$

Maintenant , calculons

$$B = \int_{B_P(\delta)} c(x)\, \phi_\mu^2(r)\, dv(g).$$

On montre que

$$B = I_1^B + I_2^B.$$

avec

$$I_1^B = \omega_{m-1} c(P) \int_0^\delta r^{m-1} \phi_\mu^2(r)\, dr.$$

et

$$I_2^B = \omega_{m-1} \left(\frac{\Delta c}{2m} + \frac{c(P) R}{6m} \right) \int_0^\delta r^{m+1} \phi_\mu^2(r)\, dr.$$

un calcul analogue montre que

$$I_1^B = c(P)\, \mu^2 J\left(\frac{\delta}{\mu}\right),$$

où

$$J\left(\frac{\delta}{\mu}\right) = \int_0^{\frac{\delta}{\mu}} u^{m-1} \left[\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{m-2}{2}}} - \frac{1}{(1+\delta^2)^{\frac{m-2}{2}}} \right]^2 du.$$

et

$$I_2^B = \left(\frac{\Delta c}{2m} + \frac{c(P) R}{6m} \right) o(\mu).$$

Enfin

$$B = \omega_{m-1} c(P)\, \mu^2 J\left(\frac{\delta}{\mu}\right) + o(\mu).$$

Maintenant , calculons

$$C=\int_{B_P(\delta)}\phi_\mu^2(r)dv(g)=I_1^C+I_2^C,$$

où

$$I_1^C=\int_0^\delta r^{m-1}\left[\frac{\mu^{\frac{m-2}{2}}}{(r^2+\mu^2)^{\frac{m-2}{2}}}-\frac{\mu^{\frac{m-2}{2}}}{(\delta^2+\mu^2)^{\frac{m-2}{2}}}\right]^2dr.$$

et

$$I_2^C=-\frac{R}{6m}\int_0^\delta r^{m+1}\left[\frac{\mu^{\frac{m-2}{2}}}{(r^2+\mu^2)^{\frac{m-2}{2}}}-\frac{\mu^{\frac{m-2}{2}}}{(\delta^2+\mu^2)^{\frac{m-2}{2}}}\right]^2dr.$$

Ainsi , pour μ est assez proche de 0 nous avons :

$$I_1^C=\mu^2 J\left(\frac{\delta}{\mu}\right).$$

et

$$I_2^C=-\frac{R}{6m}o\left(\mu\right).$$

Alors

$$C=\omega_{m-1}\mu^2 J\left(\frac{\delta}{\mu}\right)+o\left(\mu\right).$$

Maintenant , considérons la fonctionnelle suivante :

$$I_\mu=I\left(\eta\phi_\mu\right)|_{B_P(2\delta)-B_P(\delta)}\ .$$

avec

$B_P\left(\delta\right)$ est une boule fermée centrée en P de rayon δ .

$B_P\left(2\delta\right)$ est une boule fermée centrée en P de rayon 2δ .

On a

$$\begin{aligned}\nabla\left(\eta\phi_\mu\right) &= \frac{\partial\eta}{\partial r}.\phi_\mu+\eta.\phi_\mu^{'}\left(r\right).\\ &= M_1\left(r\right).\phi_\mu\left(r\right)+M_2\left(r\right).\phi_\mu^{'}\left(r\right).\end{aligned}$$

où $M_1(r)$ et $M_2(r)$ sont des fonctions de classe C^∞.

Ainsi

$$\begin{aligned}
-\Delta\left(\eta\phi_\mu\right) &= \frac{1}{r^{m-1}}\partial_r\left[r^{m-1}\nabla\left(\eta\phi_\mu\right)\right]+\partial_r\log\sqrt{|g|}.\nabla\left(\eta\phi_\mu\right).\\
&= \mu^{\frac{m-2}{2}}\left\{(m-1)\left[\frac{M_1(r)}{r}\left(\frac{1}{\left(r^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}-\frac{1}{\left(\delta^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}\right)\right.\right.\\
&\quad \left.-M_2(r)(m-2)\frac{1}{\left(r^2+\mu^2\right)^{\frac{m}{2}}}\right]+M_1'(r)\left(\frac{1}{\left(r^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}-\frac{1}{\left(\delta^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}\right)\\
&\quad -M_1(r)(m-2)\frac{r}{\left(r^2+\mu^2\right)^{\frac{m}{2}}}-(m-2)M_2'(r)\frac{r}{\left(r^2+\mu^2\right)^{\frac{m}{2}}}\\
&\quad -M_2(r)(m-2)\frac{(1-m)r^2+\mu^2}{\left(r^2+\mu^2\right)^{\frac{m}{2}+1}}+\partial_r\log\sqrt{|g|}\times\\
&\quad \left.\left[M_1(r)\left(\frac{1}{\left(r^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}-\frac{1}{\left(\delta^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}\right)-M_2(r)(m-2)\frac{r}{\left(r^2+\mu^2\right)^{\frac{m}{2}}}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Les quantités M_i , M_i' $(i=1,2,3)$ sont bornées sur $[0,\delta]$.

On a

$$\begin{aligned}
\left|\Delta\left(\eta\phi_\mu\right)\right| &\leq \mu^{\frac{m-2}{2}}\left\{(m-1)\left[\frac{M_1}{r}\left(\frac{1}{\left(r^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}+\frac{1}{\left(\delta^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}\right)+M_2(m-2)\frac{1}{\left(r^2+\mu^2\right)^{\frac{m}{2}}}\right]\right.\\
&\quad +K_1\left(\frac{1}{\left(r^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}+\frac{1}{\left(\delta^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}\right)+M_1(m-2)\frac{r}{\left(r^2+\mu^2\right)^{\frac{m}{2}}}\\
&\quad +(m-2)K_2\frac{r}{\left(r^2+\mu^2\right)^{\frac{m}{2}}}+M_2(m-2)\frac{(1-m)r^2+\mu^2}{\left(r^2+\mu^2\right)^{\frac{m}{2}+1}}\\
&\quad \left.+\partial_r\log\sqrt{|g|}\left[M_1\left(\frac{1}{\left(r^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}+\frac{1}{\left(\delta^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}\right)+M_2(m-2)\frac{r}{\left(r^2+\mu^2\right)^{\frac{m}{2}}}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Aprés un calcul simple et long , on obtient :

Lemme 2.1

$$\int_{B_P(2\delta)-B_P(\delta)} \left|\Delta\left(\eta\phi_\mu\right)\right|^2 dv\left(g\right) = o\left(\mu\right).$$

■

Preuve:

Ecrivons:

$$\int_{B_P(2\delta)-B_P(\delta)} \left|\Delta\left(\eta\phi_\mu\right)\right|^2 dv\left(g\right) = \sum_{i=1}^{29} I_i.$$

Avec les I_i $(i = 1, ..., 29)$ sont les intégrales des termes de l'expréssion $\left|\Delta\left(\eta\phi_\mu\right)\right|^2$

Faisons par exemple I_1

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mu^{m-2} M_1^2 \left(m-1\right)^2 \int_{B_P(2\delta)-B_P(\delta)} \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\left(r^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}} + \frac{1}{\left(\delta^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}\right)^2 dv\left(g\right). \\
&= \mu^{m-2} M_1^2 \left(m-1\right)^2 \omega_{m-1} \int_\delta^{2\delta} r^{m-3}\left(\frac{1}{\left(r^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}} + \frac{1}{\left(\delta^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}\right)^2 G\left(r\right) dr. \\
&= cste\ \Bigg\{ \frac{1}{2} I_{m-2}^{\frac{m}{2}-2} + \frac{\mu^{m-2}\left(2\delta\right)^{m-2}}{\left(m-2\right)\left(\delta^2+\mu^2\right)^{m-2}} + \frac{\mu^{m-2}}{\left(\delta^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}} I_{\frac{m}{2}-1}^{\frac{m}{2}-2} - \frac{1}{2} I_{m-2}^{\frac{m}{2}-2} - \frac{\mu^{m-2}\delta^{m-2}}{\left(m-2\right)\left(\delta^2+\mu^2\right)^{m-2}} \\
&\quad - \frac{R}{6m}\left[\frac{\mu^2}{2} I_{m-2}^{\frac{m}{2}-1} + \frac{\mu^{m-2}\left(2\delta\right)^m}{m\left(\delta^2+\mu^2\right)^{m-2}} + \frac{\mu^m}{\left(\delta^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}} I_{\frac{m}{2}-1}^{\frac{m}{2}-1}\right] + \frac{R}{6m}\left[\frac{\mu^2}{2} I_{m-2}^{\frac{m}{2}-1} + \frac{\mu^{m-2}\delta^m}{m\left(\delta^2+\mu^2\right)^{m-2}} + \right. \\
&\quad + o\left(\mu^{m-1}\right) + o\left(\mu^4\right) + o\left(\mu^{m-4}\right) \Bigg\}. \\
&= o\left(\mu\right) \quad , \quad \text{avec} \ \ m > 4.
\end{aligned}$$

De manière analogue on montre que les autres intégrales :

$$I_i = o\left(\mu\right) \qquad ; \quad i = 2, ..., 29$$

Par conséquent

$$\int_{B_P(2\delta)-B_P(\delta)} \left|\Delta\left(\eta\phi_\mu\right)\right|^2 dv\left(g\right) = o\left(\mu\right).$$

Calculons maintenant

$$\int_{B_P(2\delta)-B_P(\delta)} c(x)\left(\eta\phi_\mu\right)^2 dv(g).$$

remarquons que

$$\int_{B_P(2\delta)-B_P(\delta)} c(x)\left(\eta\phi_\mu\right)^2 dv(g) \leq M\int_{B_P(2\delta)-B_P(\delta)} c(x)\phi_\mu^2 dv(g).$$

avec M est une constante telle que $\eta \leq M$,

où

$$\begin{aligned}
\int_{B_P(2\delta)-B_P(\delta)} c(x)\phi_\mu^2 dv(g) &= \int_\delta^{2\delta}\int_{S(r)} r^{m-1}c(x)\phi_\mu^2\left(r\right)\sqrt{|g|}drd\Omega. \\
&= \omega_{m-1}\left[c\left(P\right)\int_\delta^{2\delta} r^{m-1}\phi_\mu^2\left(r\right)dr - \left(\frac{\Delta c}{2m}+\frac{c\left(P\right)R}{6m}\right)\int_\delta^{2\delta} r^{m+1}\phi_\mu^2\left(r\right)dr \right. \\
&\quad \left. +o\left(r^4\right)\right].
\end{aligned}$$

D'aprés [8] , on a :

$$\begin{aligned}
c\left(P\right)\int_\delta^{2\delta} r^{m-1}\phi_\mu^2\left(r\right)dr &= c\left(P\right)\left[\int_0^{2\delta} r^{m-1}\phi_\mu^2\left(r\right)dr - \int_0^{\delta} r^{m-1}\phi_\mu^2\left(r\right)dr\right]. \\
&= c\left(P\right)\mu^2\left[J\left(\frac{2\delta}{\mu}\right) - J\left(\frac{\delta}{\mu}\right)\right]
\end{aligned}$$

Maintenant , il est clair que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\Delta c}{2m}+\frac{c\left(P\right)R}{6m}\right)\int_\delta^{2\delta} r^{m+1}\phi_\mu^2\left(r\right)dr &= \left(\frac{\Delta c}{2m}+\frac{c\left(P\right)R}{6m}\right)\left[\int_0^{2\delta} r^{m+1}\phi_\mu^2\left(r\right)dr - \int_0^{\delta} r^{m+1}\phi_\mu^2\left(r\right)dr\right]. \\
&= o\left(\mu\right).
\end{aligned}$$

Comme

$$
\begin{aligned}
\int_{B_P(2\delta)-B_P(\delta)} \phi_\mu^2\ (r)\ dv(g) &= \omega_{m-1}\int_\delta^{2\delta} r^{m-1}\left[\frac{\mu^{\frac{m-2}{2}}}{(r^2+\mu^2)^{\frac{m-2}{2}}}-\frac{\mu^{\frac{m-2}{2}}}{\left(\delta^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}\right]^2 G(r)dr. \\
&= \omega_{m-1}\mu^{m-2}\left[\int_\delta^{2\delta} r^{m-1}\left(\frac{1}{(r^2+\mu^2)^{\frac{m-2}{2}}}-\frac{1}{\left(\delta^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}\right)^2 dr\right. \\
&\quad \left.-\frac{R}{6m}\int_\delta^{2\delta} r^{m+1}\left(\frac{1}{(r^2+\mu^2)^{\frac{m-2}{2}}}-\frac{1}{\left(\delta^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}\right)^2 dr + o\left(r^4\right)\right]. \\
&= o\left(\mu\right).
\end{aligned}
$$

Calculons

$$
\int_{B_P(2\delta)-B_P(\delta)} (\eta\phi_\mu\left(r\right))^2 dv\left(g\right)
$$

nous aurons

$$
\int_{B_P(2\delta)-B_P(\delta)} (\eta\phi_\mu\left(r\right))^2 dv\left(g\right) \leq M\int_{B_P(2\delta)-B_P(\delta)} \phi_\mu^2\ (r)\ dv(g).
$$

Finalement tenant compte des calculs précédents , nous aurons :

$$
\begin{aligned}
I\left(\eta\phi_\mu\right) &= \frac{\frac{\varepsilon m^2(m-2)^2}{2\mu^2}\omega_{m-1}\left(I_{m+2}^{\frac{m}{2}-1}+o\left(\mu\right)\right)+c(P)\mu^2 J(\frac{\delta}{\mu})+o\left(\mu\right)}{\omega_{m-1}\mu^2 J(\frac{\delta}{\mu})+o\left(\mu\right)}. \\
&= c(P)+\frac{\varepsilon m^2\left(m-2\right)^2\omega_{m-1}\ \ I_{m+2}^{\frac{m}{2}-1}}{2\mu^2\omega_{m-1}}.\frac{1}{\mu^2\left(J(\frac{\delta}{\mu})+o\left(\mu\right)\right)}. \\
&= c(P)+\frac{\varepsilon}{\mu^4}\alpha \qquad \text{avec} \quad \alpha=\frac{m^2\left(m-2\right)^2\omega_{m-1}\ \ I_{m+2}^{\frac{m}{2}-1}}{2\omega_{m-1}J(\frac{\delta}{\mu})+o(\mu)}.
\end{aligned}
$$

En prenant

$$
\varepsilon=\mu^5
$$

Il découle que

$$I\left(\eta\phi_{\mu}\right) = c(P) + \alpha.\ \varepsilon^{\frac{1}{5}} \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{m^2\left(m-2\right)^2\omega_{m-1}\ \ I_{m+2}^{\frac{m}{2}-1}}{2\omega_{m-1}J(\frac{\delta}{\mu}) + o(\mu)}$$

Lorsque ε est assez petit , on a

$$I\left(\phi_{\mu}\right) = c(P) + o(1).$$

Comme

$$\lambda_{\varepsilon} \geq \underset{V}{Min}\ c.$$

Nous déduisons que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_{\varepsilon} = c(P)\ .$$

■

Remarques

La même méthode peut être appliquée à plusieurs opérateurs.

Exemple 2.1

Considérons l'opérateur suivant :

$$\varepsilon\Delta^2 u + b(x)\Delta u + c(x)u = \lambda u. \tag{2.1}$$

Où $b(x)$ *est une fonction de classe* C^{∞} *sur* V*.*

Proposition 2.1

S'il existe $P \in V :\ b(P) = 0$ *alors*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \lambda_{\varepsilon} = c(P)$$

Preuve:

Dans le but d'établir le comportement de la première valeur propre de l'opérateur (2.1),nous calculons chaque terme de la fonctionnelle suivante :

$$I\left(\eta\phi_\mu\right)=\frac{\int_V\left[\varepsilon\left|\Delta\left(\eta\phi_\mu\right)\right|^2+b(x).\Delta\left(\eta\phi_\mu\right).\left(\eta\phi_\mu\right)+c(x)\left(\eta\phi_\mu\right)^2\right]dv(g)}{\int_V\left(\eta\phi_\mu\right)^2dv(g)}.$$

Il nous reste à calculer

$$\begin{aligned}\int_V b(x).\Delta\left(\eta\phi_\mu\right).\left(\eta\phi_\mu\right)dv(g) &= \int_{B_P(\delta)} b(x).\Delta\left(\eta\phi_\mu\right).\left(\eta\phi_\mu\right)dv(g)\\ &\quad+\int_{B_P(2\delta)-B_P(\delta)} b(x).\Delta\left(\eta\phi_\mu\right).\left(\eta\phi_\mu\right)dv(g)\end{aligned}$$

nous avons que $\phi_\mu=0$ sur $V-B_P(\delta)$

D'où

$$\int_{B_P(2\delta)-B_P(\delta)} b(x).\Delta\left(\eta\phi_\mu\right).\left(\eta\phi_\mu\right)dv(g)=0.$$

Ecrivons

$$b(x)=b(P)+(b(x)-b(P))\ ,$$

où

$$b(x)-b(P)=O(1)\qquad\text{pour tout }\ x\in B_P(\delta)$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_{B_P(\delta)} b(x).\Delta\left(\eta\phi_\mu\right).\left(\eta\phi_\mu\right)dv(g) &= (b(P)+O(1))\int_{B_P(\delta)}\left|\nabla\left(\eta\phi_\mu\right)\right|^2dv(g).\\ &= (b(P)+O(1))\,(c(m)+o(\mu))\ ,\end{aligned}$$

où $c(m)$ est une constante qui dépend de la dimension m de la variété V .

Ainsi

$$I\left(\phi_\mu\right)=\frac{\varepsilon m^2(m-2)^2\omega_{m-1}I_{m+2}^{\frac{m}{2}-1}}{2\mu^2\omega_{m-1}\left(J\left(\frac{\delta}{\mu}\right)+o(\mu)\right)}+c(P)+\frac{b(P)\,(c(m)+O(1))}{\omega_{m-1}\mu^2J\left(\frac{\delta}{\mu}\right)+o(\mu)}.$$

Prenons

$$\varepsilon = \mu^5$$

et

$$b(P) = 0$$

Alors , quand ε tend vers 0

$$I(\phi_\varepsilon) = c(P) + o(1)$$

D'où

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon = c(P).$$

■

Exemple 2.2

Considérons l'opérateur suivant :

$$\varepsilon \Delta u + c(x) u = \lambda h(x) u.$$

avec h est une fonction de classe C^∞ sur V .

Si $h \equiv 1$ ([1]).

Si $h \neq 1$ alors

Proposition 1

Si $h(P) \geq 1$ *alors*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon = \underset{V}{Min} c \quad .$$

Preuve:

Soit la fonctionnelle suivante :

$$I(u) = \frac{\varepsilon \int_V |\nabla u|^2 dv(g) + \int_V c(x) u^2 dv(g)}{\int_V h(x) u^2 dv(g)}.$$

Prenons

$$u = \phi_\mu$$

où

$$\phi_\mu = \begin{cases} \frac{\mu^{\frac{m-2}{2}}}{\left(r^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}} - \frac{\mu^{\frac{m-2}{2}}}{\left(\delta^2+\mu^2\right)^{\frac{m-2}{2}}} & \text{sur} B_P\left(\delta\right) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Rappelons que

$$\varepsilon \int_V \left|\nabla \phi_\mu\right|^2 dv\left(g\right) = \varepsilon c\left(m\right) + \varepsilon o\left(\mu\right).$$

$$\int_V c\left(x\right)\phi_\mu^2\left(r\right) dv\left(g\right) = \mu^2 c\left(P\right)\omega_{m-1} J\left(\frac{\delta}{\mu}\right) + o\left(\mu\right).$$

et

$$\int_V h\left(x\right)\phi_\mu^2\left(r\right) dv\left(g\right) = \mu^2 h\left(P\right)\omega_{m-1} J\left(\frac{\delta}{\mu}\right) + o\left(\mu\right).$$

Alors

$$I\left(\phi_\mu\right) = \frac{\varepsilon c\left(m\right) + \varepsilon o\left(\mu\right)}{\mu^2\omega_{m-1} J\left(\frac{\delta}{\mu}\right) + o\left(\mu\right)} + \frac{c\left(P\right)}{h\left(P\right)}.$$

Prenons

$$\varepsilon = \mu^5$$

Donc

Pour ε assez petit

$$I\left(\phi_\mu\right) = \frac{c\left(P\right)}{h\left(P\right)} + o\left(1\right).$$

et comme ,

$$h(P) \geq 1$$

alors

$$\frac{c\left(P\right)}{h\left(P\right)} \leq c\left(P\right).$$

Par conséquent

$$\underset{V}{Min}\ c \leq \lambda_\varepsilon \leq c\left(P\right) + o\left(1\right).$$

Ainsi

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_\varepsilon = \underset{V}{Min}\ c.$$

■

Exemple 2.3

Considérons l'opérateur

$$\varepsilon\Delta^2 u + c(x)\,u = \lambda h(x)\,u.$$

avec h *est une fonction de classe* C^∞ *sur* V *.*

Proposition 2.2

Si $h(P) \geq 1$ *alors*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_\varepsilon = \underset{V}{Min} c$$

Preuve:

Soit la fonctionnelle

$$I(u) = \frac{\int_V \left[\varepsilon\,|\Delta u|^2 + c(x)\,u^2\right] dv(g)}{\int_V h(x)\,u^2 dv(g)}.$$

Prenons

$$u = \eta\phi_\mu$$

où

$$\phi_\mu = \begin{cases} \frac{\mu^{\frac{m-2}{2}}}{(r^2+\mu^2)^{\frac{m-2}{2}}} - \frac{\mu^{\frac{m-2}{2}}}{(\delta^2+\mu^2)^{\frac{m-2}{2}}} & \text{sur } B_P(\delta)\,. \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

et

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{sur } B_P(\delta)\,. \\ 0 & \text{sur } V - B_P(2\delta)\,. \end{cases}$$

Rappelons que :

$$\int_V \left|\Delta\left(\eta\phi_\mu\right)\right|^2 dv(g) = \int_{B_P(\delta)} \left|\Delta\left(\eta\phi_\mu\right)\right|^2 dv(g) = \frac{m^2(m-2)^2}{2\mu^2}\omega_{m-1}\left[I_{m+2}^{\frac{m}{2}-1} + o(\mu)\right].$$

d'autre part

$$\int_V c(x)\,\phi_\mu^2(r)\,dv(g) = \int_{B_P(\delta)} c(x)\,\phi_\mu^2(r)\,dv(g) = \mu^2 c(P)\,\omega_{m-1} J\left(\frac{\delta}{\mu}\right) + o(\mu)\,.$$

et

$$\int_V h(x)\,\phi_\mu^2(r)\,dv(g) = \int_{B_P(\delta)} h(x)\,\phi_\mu^2(r)\,dv(g) = \mu^2 h(P)\,\omega_{m-1} J\left(\frac{\delta}{\mu}\right) + o(\mu)\,.$$

Alors

$$I\left(\eta\phi_\mu\right) = \frac{c(P)}{h(P)} + \frac{\varepsilon m^2\ \ (m-2)^2\ \ \omega_{m-1}\ I_{m+2}^{\frac{m}{2}-1}}{2\mu^4\ h(P)\ \ \omega_{m-1}\ J\left(\frac{\delta}{\mu}\right) + o(\mu)}.$$

Prenons

$$\varepsilon = \mu^5 \quad \text{i.e} \ : \quad \mu = \varepsilon^{\frac{1}{5}}$$

Quand $\varepsilon \to 0$, nous aurons

$$I\left(\phi_\mu\right) = \frac{c(P)}{h(P)} + o(1)\,.$$

Ainsi

$$\underset{V}{Min}\ c \leq \lambda_\varepsilon \leq \frac{c(P)}{h(P)} + o(1)\,.$$

comme

$$h(P) \geq 1\ ,$$

Alors

$$\frac{c(P)}{h(P)} \leq c(P)\,.$$

puisque c est une fonction positive sur V.

D'où

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_\varepsilon = \underset{V}{Min}\ c\ .$$

■

Exemple 2.4

Considérons l'opérateur

$$\varepsilon\Delta^2 u + b(x)\Delta u + c(x) u = \lambda h(x) u.$$

S'il existe $P \in V$ telque

$$h(P) \geq 1 \ ,$$

$$c(P) = \underset{V}{Min}\ c \ ,$$

et

$$b(P) = 0.$$

Alors on a le résultat suivant :

Proposition 2.3

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon = \underset{V}{Min}\ c.$$

Preuve:

De manière équivalente , on montre que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon = \underset{V}{Min} c.$$

■

2.1 Concentration de la fonction propre principale:

Dans cette section , nous allons montrer que la première fonction propre possède des points de concentrations.

Concentration de la première fonction propre

Considérons l'opérateur

$$\varepsilon\Delta^2 u_\varepsilon + c\left(x\right)u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon. \tag{2.2}$$

Soit

$$\lambda_\varepsilon = \frac{\int_V \left[\varepsilon\left|\Delta u_\varepsilon\right|^2 + c(x)u_\varepsilon^2\right]dv\left(g\right)}{\int_V u_\varepsilon^2 dv\left(g\right)} ,$$

où u_ε est la première fonction propre normalisée associée à λ_ε ($\int_V u_\varepsilon^2 dv\left(g\right) = 1$)
Alors

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon &= \varepsilon\int_V \left|\Delta u_\varepsilon\right|^2 dv\left(g\right) + \int_V c(x)u_\varepsilon^2 dv\left(g\right). \\ &\geq \varepsilon\int_V \left|\Delta u_\varepsilon\right|^2 dv\left(g\right) + \underset{V}{Min}\ c. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$0 \leq \varepsilon\int_V \left|\Delta u_\varepsilon\right|^2 dv\left(g\right) \leq \lambda_\varepsilon - \underset{V}{Min}\ c.$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_V \left|\Delta u_\varepsilon\right|^2 dv\left(g\right) = 0.$$

Pour toute fonction $\phi \in C^2\left(V\right)$,multiplions l'équation (2.2) par $\left(\phi u_\varepsilon\right)$ et intégrons sur le domaine V , nous aurons

$$\varepsilon\int_V \Delta^2 u_\varepsilon.\left(\phi u_\varepsilon\right)dv\left(g\right) + \int_V c(x)u_\varepsilon^2.\phi dv\left(g\right) = \lambda_\varepsilon\int_V u_\varepsilon^2.\phi dv\left(g\right).$$

Calculons maintenant la quantité

$$I = \varepsilon\int_V \Delta^2 u_\varepsilon.\left(\phi u_\varepsilon\right)dv\left(g\right)$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
I &= \varepsilon \int_V \Delta\left(\Delta u_\varepsilon\right).\left(\phi u_\varepsilon\right) dv\left(g\right). \\
&= \varepsilon \int_V \Delta u_\varepsilon.\Delta\left(\phi u_\varepsilon\right) dv\left(g\right). \\
&= \varepsilon \int_V \Delta u_\varepsilon\left[\Delta u_\varepsilon.\phi + 2\nabla u_\varepsilon.\nabla\phi + u_\varepsilon.\Delta\phi\right] dv\left(g\right). \\
&= \varepsilon \int_V \left|\Delta u_\varepsilon\right|^2.\phi dv\left(g\right) + 2\varepsilon\int_V \Delta u_\varepsilon.\nabla u_\varepsilon.\nabla\phi dv\left(g\right) + \varepsilon\int_V \Delta u_\varepsilon.u_\varepsilon.\Delta\phi dv\left(g\right).
\end{aligned}$$

Soient

$$I_1 = \varepsilon \int_V \left|\Delta u_\varepsilon\right|^2.\phi dv\left(g\right).$$

$$I_2 = 2\varepsilon \int_V \Delta u_\varepsilon.\nabla u_\varepsilon.\nabla\phi dv\left(g\right)$$

et

$$I_3 = \varepsilon \int_V \Delta u_\varepsilon.u_\varepsilon.\Delta\phi dv\left(g\right).$$

On obtient

Lemme 2.2

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_i = 0\ ;\ i = 1,2,3$$

Preuve:

Commençons par calculer

$$I_1 = \varepsilon \int_V \left|\Delta u_\varepsilon\right|^2.\phi dv\left(g\right).$$

Comme ϕ est arbitraire dans $C^2\left(V\right)$ alors

$$\exists M > 0\ \ telle\ \ que\ \ \forall x \in V,\ \ \phi\left(x\right) \leq M$$

nous aurons

$$I_1 \leq \varepsilon M \int_V \left|\Delta u_\varepsilon\right|^2 dv\left(g\right).$$

Ainsi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_1 = 0 \quad , \quad \forall \phi \in C^2 (V) .$$

De même

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \left| \varepsilon \int_V \Delta u_\varepsilon . u_\varepsilon . \Delta \phi dv (g) \right| \\ &\leq \varepsilon \int_V |\Delta u_\varepsilon| . |u_\varepsilon| . |\Delta \phi| \, dv (g) \\ &\leq \varepsilon . C \int_V |\Delta u_\varepsilon| . |u_\varepsilon| \, dv (g) \end{aligned}$$

où C est une certaine constante positive.

De l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \varepsilon . C \left(\int_V |\Delta u_\varepsilon|^2 \, dv (g) \right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_V |u_\varepsilon|^2 \, dv (g) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \varepsilon . C \int_V |\Delta u_\varepsilon|^2 \, dv (g) \end{aligned}$$

Quand ε tend vers 0 , I_3 tend vers 0

L'intégrale

$$I_2 = 2\varepsilon \int_V \Delta u_\varepsilon . \nabla u_\varepsilon . \nabla \phi dv (g)$$

est bornée comme suit

$$|I_2| \leq 2\varepsilon \int_V |\Delta u_\varepsilon| . |\nabla u_\varepsilon . \nabla \phi| \, dv (g)$$

En utilisant l'inégalité de Hölder , on aura

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq 2\varepsilon \left(\int_V |\Delta u_\varepsilon|^2 \, dv (g) \right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_V |\nabla u_\varepsilon|^2 . |\nabla \phi|^2 \, dv (g) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\varepsilon . C \left(\int_V |\Delta u_\varepsilon|^2 \, dv (g) \right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_V |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dv (g) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

D'aprés une inégalité d'interpolation (voir [8])

pour tout $\eta > 0$,il existe une constante $C(\eta)$ telle que pour tout $u_\varepsilon \in H_2^2(V)$

$$\begin{aligned}
\int_V |\nabla u_\varepsilon|^2 dv(g) &\leq \eta \int_V |\Delta u_\varepsilon|^2 dv(g) + C(\eta) \int_V |u_\varepsilon|^2 dv(g) \\
&\leq \eta \int_V |\Delta u_\varepsilon|^2 dv(g) + C(\eta)
\end{aligned}$$

or

$$\int_V |\Delta u_\varepsilon|^2 dv(g) \leq \int_V (\Delta u_\varepsilon)^2 dv(g) + \beta \int_V |\nabla u_\varepsilon|^2 dv(g) \qquad \text{(voir [4]).}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_V |\nabla u_\varepsilon|^2 dv(g) &\leq \eta \left[\int_V (\Delta u_\varepsilon)^2 dv(g) + \beta \int_V |\nabla u_\varepsilon|^2 dv(g) \right] + C(\eta) \\
&\leq \eta \int_V |\Delta u_\varepsilon|^2 dv(g) + \eta\beta \int_V |\nabla u_\varepsilon|^2 dv(g) + C(\eta)
\end{aligned}$$

Choisissons η de sorte que

$$\eta\beta \leq \frac{1}{2}$$

Alors

$$\int_V |\nabla u_\varepsilon|^2 dv(g) \leq \eta \int_V |\Delta u_\varepsilon|^2 dv(g) + \frac{1}{2} \int_V |\nabla u_\varepsilon|^2 dv(g) + C(\eta)$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{2} \int_V |\nabla u_\varepsilon|^2 dv(g) \leq \eta \int_V |\Delta u_\varepsilon|^2 dv(g) + C(\eta)$$

Donc

$$\int_V |\nabla u_\varepsilon|^2 dv(g) \leq 2\eta \int_V |\Delta u_\varepsilon|^2 dv(g) + C_1 \ ,$$

avec

$$C_1 = 2C(\eta)$$

Alors

$$\begin{aligned}|I_2| &\leq 2\varepsilon.C\left(\int_V |\Delta u_\varepsilon|^2 \,dv\,(g)\right)^{\frac{1}{2}}.\left[2\eta\int_V |\Delta u_\varepsilon|^2 \,dv\,(g)+C_1\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\leq 2C\left(\varepsilon\int_V |\Delta u_\varepsilon|^2 \,dv\,(g)\right)^{\frac{1}{2}}.\left[2\eta\varepsilon\int_V |\Delta u_\varepsilon|^2 \,dv\,(g)+\varepsilon C_1\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_2 = 0$$

Par conséquent

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I = 0$$

En passant à la limite , on obtient :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_V (c(x)-\lambda_\varepsilon)\,\phi u_\varepsilon^2 dv\,(g) = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_V \left(c - \underset{V}{Min} c\right)\phi u_\varepsilon^2 dv\,(g) &= \int_V \left(c-\lambda_\varepsilon+\lambda_\varepsilon-\underset{V}{Min} c\right)\phi u_\varepsilon^2 dv\,(g)\\ &= \int_V (c-\lambda_\varepsilon)\,\phi u_\varepsilon^2 dv\,(g)+\int_V\left(\lambda_\varepsilon-\underset{V}{Min} c\right)\phi u_\varepsilon^2 dv\,(g)\end{aligned}$$

En passant à la limite , nous trouvons que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_V \left(c-\underset{V}{Min} c\right)\phi u_\varepsilon^2 dv\,(g) = 0 \tag{2.3}$$

Soit u est la limite faible de u_ε quand ε tend vers 0 , alors la relation (2.3)implique:

$$\forall\phi\in C^1(V)\quad,\quad \int_V\left(c-\underset{V}{Min} c\right)\phi u^2 dv\,(g) = 0$$

et soit

$$H = \left\{P\in V\ /\ C(P) = \underset{V}{Min}\ c\right\}$$

Remarquons que

$$mes\,(H) = 0$$

Ce qui donne

$$\int_{V\ \cap^c H} \left(c - \underset{V}{Minc}\right)\phi u^2 dv\,(g) + \int_H \left(c - \underset{V}{Minc}\right)\phi u^2 dv\,(g) = 0$$

or

$$\int_H \left(c - \underset{V}{Minc}\right)\phi u^2 dv\,(g) = 0$$

Donc

$$\int_{V\ \cap^c H} \left(c - \underset{V}{Minc}\right)\phi u^2 dv\,(g) = 0$$

Alors

$$\int_{V\ \cap^c H} \phi u^2 dv\,(g) = 0$$

car

$$c - \underset{V}{Minc} > 0 \quad , \quad sur\ V\ \ \cap^c H$$

Posons

$$\phi \equiv 1$$

on déduit que

$$u^2 = 0 \quad , \quad sur\ V \setminus H$$

et par conséquent

$$u = 0, \quad sur\ V \setminus H$$

■

Proposition 2.4

la suite u_ε a un point de concentration quand ε est assez petit.

Preuve:

Soit

$$\psi \in C\left(V\right) \quad telle\ que : \psi \mid_{V(C_{\min})} = 0$$

où $V\left(C_{\min}\right)$ est un voisinage de l'ensemble des minimums de c.

Alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_V \psi u_\varepsilon^2 dv\left(g\right) = 0 \tag{2.4}$$

Si A est un sous-ensemble mesurable de V tel que $\bar{A}\cap C_{\min} = \phi$, $\bar{A}$ est la fermeture de A.

Appliquons (2.4) pour une fonction ψ , tel que supp$\psi = A$ avec $A\cap C_{\min} = \emptyset$ et $\psi \geq 1$ sur A, nous obtenons:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_V \psi u_\varepsilon^2 dv\left(g\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_A \psi u_\varepsilon^2 dv\left(g\right) = 0$$

et comme

$$\psi \geq 1$$

nous déduisons que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_A u_\varepsilon^2 dv\left(g\right) = 0$$

■

Proposition 2.5

Toute sous-suite $\{\varepsilon_n, n\in\mathbb{N}\}$*convergente vers zéro,contient une sous-suite* $\{\varepsilon_{n_k}, k\in\mathbb{N}\}$ *telle que les fonctions propres correspondantes* $u_{\varepsilon_{n_k}}$*convergent vers une somme convexe de distributions de Dirac concentrées aux points minimum de c.*

Preuve:

Supposons que

$$\int_V u_{\varepsilon_n}^2 dv\left(g\right) = 1$$

et considérons la décomposition suivante:

$$\int_V \phi u_\varepsilon^2 dv\,(g) = \sum_{P\in C_{\min}} \int_{B_P(\delta)} [(\phi - \phi\,(P)) + \phi\,(P)]\, u_\varepsilon^2 dv\,(g) + \int_{V-\underset{P\in C_{\min}}{\cup} B_P(\delta)} \phi u_\varepsilon^2 dv\,(g) \tag{2.5}$$

La relation (2.5) implique que :

$$\begin{aligned}\int_V \phi u_\varepsilon^2 dv\,(g) - \phi\,(P) \sum_{P\in C_{\min}} \int_{B_P(\delta)} u_\varepsilon^2 dv\,(g) &= \sum_{P\in C_{\min}} \int_{B_P(\delta)} (\phi - \phi\,(P))\, u_\varepsilon^2 dv\,(g) \\ &\quad + \int_{V-\underset{P\in C_{\min}}{\cup} B_P(\delta)} \phi u_\varepsilon^2 dv\,(g) \qquad (2.6)\end{aligned}$$

Par la continuité de ϕ , étant donné un $\eta > 0$, il exite un $\delta\,(\eta) > 0$, tel que $|\phi\,(x) - \phi\,(P)| \leq \eta$ si $x \in B_P\,(\delta\,(\eta))$

Soit

$$N = Card \;\; C_{\min}$$

Alors

$$\left| \sum_{P\in C_{\min}} \int_{B_P(\delta(\eta))} (\phi - \phi\,(P))\, u_\varepsilon^2 dv\,(g) \right| \leq N\eta$$

La relation (2.3) implique que

$$\int_{V-\underset{P\in C_{\min}}{\cup} B_P(\delta)} \phi u_\varepsilon^2 dv\,(g) = 0$$

Aprés un choix d'une sous-suite de $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{N}\}$, notée $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{N}\}$

On peut supposer que les limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_V \;\phi u_{\varepsilon_n}^2 dv\,(g)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{B_P(\delta(\eta))} \;u_{\varepsilon_n}^2 dv\,(g)$, existent ,($P \in C_{\min}$)

La relation (2.6) implique aprés passage à une sous-suite que

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \int_V \;\phi u_{\varepsilon_n}^2 dv\,(g) - \phi\,(P) \sum_{P\in C_{\min}} \int_{B_P(\delta(\eta))} u_{\varepsilon_n}^2 dv\,(g) \right| \leq N\eta \tag{2.7}$$

Maintenant , montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{B_P(\delta)} u_{\varepsilon_n}^2 dv\,(g)$ ne dépend pas de δ .

Soient δ_1,δ_2 tel que $\delta_1\leq\delta_2$

on a

$$\int_{B_P(\delta_2)} u_{\varepsilon_n}^2 dv\,(g)=\int_{B_P(\delta_1)} u_{\varepsilon_n}^2 dv\,(g)+\int_{B_P(\delta_2)-B_P(\delta_1)} u_{\varepsilon_n}^2 dv\,(g)$$

La relation (2.3) implique que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{B_P(\delta_2)-B_P(\delta_1)} u_{\varepsilon_n}^2 dv\,(g)=0$$

ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{B_{P_i}(\delta(\eta))} u_{\varepsilon_n}^2 dv\,(g)=\gamma_{P_i}$$

La relation (2.6) implique que

$$\forall\eta>0\quad,\quad\left|\lim_{n\to+\infty}\int_V \phi u_{\varepsilon_n}^2 dv\,(g)-\sum_{P\in C_{\min}}\phi\,(p)\,\gamma_P\right|\leq N\eta$$

et par suite

$$\lim_{n\to+\infty}\int_V \phi u_{\varepsilon_n}^2 dv\,(g)=\sum_{P\in C_{\min}}\phi\,(p)\,\gamma_P \tag{2.8}$$

Comme $\phi\in C\,(V)$ est arbitraire , (2.8) montre que la suite des mesures $u_{\varepsilon_n}^2 dv\,(g)$ converge faiblement (dans le sens de mesure) vers la mesure $\sum\limits_{P\in C_{\min}}\gamma_P\;\delta_P$

Si on applique la formule (2.8) à la fonction constante 1 ,nous obtenons

$$\sum_{P\in C_{\min}}\gamma_P=1$$

■

Proposition 2.6

$\sup\limits_V u_\varepsilon$ *diverge vers l'infini quand* $\varepsilon\to0$.

Preuve:

Puisque

$$u_\varepsilon \rightharpoonup 0 \qquad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0$$

Alors

$$< u_\varepsilon, \varphi > \underset{\varepsilon \to 0}{\to} < 0, \varphi > \quad , \forall \varphi \in C(V)$$

c'est -à-dire

$$\int_V u_\varepsilon . \varphi \; dv(g) \to 0 \quad , \forall \varphi \in C(V)$$

En particulier pour $\varphi = 1$, nous aurons

$$\int_V u_\varepsilon dv(g) \to 0 \;\; , \;\; \text{quand} \;\; \varepsilon \to 0$$

Supposons que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M_\varepsilon \qquad \text{existe}$$

avec

$$M_\varepsilon = \sup_V u_\varepsilon$$

Alors

$$n1 = \int_V u_\varepsilon^2 dv(g) \leq M_\varepsilon . \int_V u_\varepsilon dv(g)$$

Comme le second membre tend vers zéro , on obtient une contradiction

D'où

$$\sup_V u_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\to} +\infty$$

Par conséquent , la fonction u_ε à un point de concentration quand $\varepsilon \to 0$. ■

Chapitre 3

Erreur d'approximation

Notre but est de montrer que la première valeur propre de l'opérateur (E) satisfait l'inégalité suivante :

Théorème 3.1

La première valeur propre λ_ε de l'opérateur (E) satisfait l'inégalité suivante:

$$\textit{Il existe } \Lambda > 0 \ : \ \underset{V}{Min} c \leq \lambda_\varepsilon \leq \underset{V}{Min} c + \Lambda\varepsilon + o\left(\varepsilon^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{4}}\right)$$

où

$$\Lambda = A.\varepsilon^{\frac{3}{4}} + A\sum_{i=1}^{3}\frac{Ric_{ii}}{12}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\varepsilon^{\frac{5}{4}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{\lambda_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{Ric_{ii}}{12}\sqrt{\varepsilon}.$$

Preuve:

Pour tout u dans $H_2^2(V)$, on sait que la valeur propre vérifie

$$\lambda = \inf_{u \epsilon H_2^2(V)-\{0\}} \frac{\int_V [\varepsilon\left|\Delta u\right|^2 + cu^2]dv(g)}{\int_V u^2 dv(g)}$$

Soit

$$u = \eta\phi_\varepsilon$$

où

$$\phi_\varepsilon = (e^{-\sum \mu_i \frac{x_i^2}{2}} - e^{-\frac{\rho}{2\sqrt{\varepsilon}}}).$$

et

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{sur} \quad N_P\left(\rho\right) \\ 0 & \text{sur} \quad V - N_P\left(2\rho\right) \end{cases}$$

avec $N_P\left(\rho\right)$ est la composante connexe de l'ensemble $\left\{X \ / \ \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\lambda_i} x_i^2 \leq \rho\right\}$ qui contient 0 , où ρ est pris petit tel que $N_P\left(\rho\right)$ inclue dans $B_P\left(\delta\right)$.

Prenons $m = 3$, calculons les termes suivants :

$$\Delta_g = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det g}.g^{ij}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

où

$$g^{ij}\left(P\right) = \delta_{ij} + O\left(\|x\|_{R^3}^2\right).$$

et

$$\sqrt{\det g} = 1 - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{Ric_{ij}}{6} x_i x_j + O\left(\|x\|_{R^3}^3\right).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \sqrt{\det g} \quad = \quad & 1 - \frac{Ric_{11}}{6} x_1^2 - \frac{Ric_{12}}{6} x_1 x_2 - \frac{Ric_{13}}{6} x_1 x_3 - \frac{Ric_{21}}{6} x_1 x_2 - \frac{Ric_{22}}{6} x_2^2 \\ & - \frac{Ric_{23}}{6} x_2 x_3 - \frac{Ric_{31}}{6} x_1 x_3 - \frac{Ric_{32}}{6} x_2 x_3 - \frac{Ric_{33}}{6} x_3^2 + O\left(\|x\|_{R^3}^3\right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det g}.g^{ij}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad = \quad & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sqrt{\det g}.g^{11}\right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sqrt{\det g}.g^{12}\right) \frac{\partial}{\partial x_2} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sqrt{\det g}.g^{13}\right) \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sqrt{\det g}.g^{21}\right) \frac{\partial}{\partial x_1} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sqrt{\det g}.g^{22}\right) \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sqrt{\det g}.g^{23}\right) \frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sqrt{\det g}.g^{31}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sqrt{\det g}.g^{32}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sqrt{\det g}.g^{33}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

or

$$g^{ij}=\delta_{ij}+O\left(\|x\|_{R^3}^2\right)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det g}.g^{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\sqrt{\det g}\left(1+O\left(\|x\|_{R^3}^2\right)\right)\right]\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\sqrt{\det g}.O(\|x\|_{R^3}^2)\right]\frac{\partial}{\partial x_2}\\
&+\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\sqrt{\det g}.O\left(\|x\|_{R^3}^2\right)\right]\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\sqrt{\det g}.O\left(\|x\|_{R^3}^2\right)\right]\frac{\partial}{\partial x_1}\\
&+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\sqrt{\det g}.\left(1+O\left(\|x\|_{R^3}^2\right)\right)\right]\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\sqrt{\det g}.O\left(\|x\|_{R^3}^2\right)\right]\frac{\partial}{\partial x_3}\\
&+\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\sqrt{\det g}.O\left(\|x\|_{R^3}^2\right)\right]\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\sqrt{\det g}.O\left(\|x\|_{R^3}^2\right)\right]\frac{\partial}{\partial x_2}\\
&+\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\sqrt{\det g}.\left(1+O\left(\|x\|_{R^3}^2\right)\right)\right]\frac{\partial}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det g}.g^{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(O\left(\|x\|_{R^3}^5\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\\
&+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(O\left(\|x\|_{R^3}^5\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(O\left(\|x\|_{R^3}^5\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_3}\\
&+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(O\left(\|x\|_{R^3}^5\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(O\left(\|x\|_{R^3}^5\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(O\left(\|x\|_{R^3}^5\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_3}\\
&+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(O\left(\|x\|_{R^3}^5\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(O\left(\|x\|_{R^3}^5\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\\
&+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(O\left(\|x\|_{R^3}^5\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_3}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det g}.g^{ij}\right)\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_2}\right)\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_3}\right)+O\left(\|x\|_{R^3}^4\right).\end{aligned}$$

Sur $N_P(\rho)$ on a

$$\eta\equiv 1$$

il découle que

$$\begin{aligned}\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_1} &= \sqrt{\det g}\frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial x_1}=\sqrt{\det g}\left(-\mu_1\ x_1e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i\frac{x_i^2}{2}}\right)\\ &= e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i\frac{x_i^2}{2}}\left[-\mu_1x_1+\frac{1}{6}\mu_1Ric_{11}x_1^3+\frac{1}{6}\mu_1Ric_{12}x_1^2x_2\right.\\ &\quad+\frac{1}{6}\mu_1Ric_{13}x_1^2x_3+\frac{1}{6}\mu_1Ric_{21}x_1^2x_2+\frac{1}{6}\mu_1Ric_{22}x_1x_2^2\\ &\quad+\frac{1}{6}\mu_1Ric_{23}x_1x_2x_3+\frac{1}{6}\mu_1Ric_{31}x_1^2x_3+\frac{1}{6}\mu_1Ric_{32}x_1x_2x_3\\ &\quad\left.+\frac{1}{6}\mu_1Ric_{33}x_1x_3^2+O\left(\|x\|_{R^3}^4\right)\right]\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_1}\right) &= e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i\frac{x_i^2}{2}}\left[-\mu_1+\left(\mu_1x_1\right)^2+\frac{1}{2}\mu_1Ric_{11}x_1^2\right.\\ &\quad+\frac{1}{3}\mu_1Ric_{12}x_1x_2+\frac{1}{3}\mu_1Ric_{13}x_1x_3+\frac{1}{3}\mu_1Ric_{21}x_1x_2\\ &\quad+\frac{1}{6}\mu_1Ric_{22}x_2^2+\frac{1}{6}\mu_1Ric_{23}x_2x_3+\frac{1}{3}\mu_1Ric_{31}x_1x_3\\ &\quad\left.+\frac{1}{6}\mu_1Ric_{32}x_2x_3+\frac{1}{6}\mu_1Ric_{33}x_3^2+O\left(\|x\|^3\right)\right].\end{aligned}$$

De manière équivalente nous calculons le deuxième et le troisième terme , nous aurons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_2}\right) &= e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i\frac{x_i^2}{2}}\left[-\mu_2+\left(\mu_2x_2\right)^2+\frac{1}{6}\mu_2Ric_{11}x_1^2+\frac{1}{3}\mu_2Ric_{12}x_1x_2\right.\\ &\quad+\frac{1}{6}\mu_2Ric_{13}x_1x_3+\frac{1}{3}\mu_2Ric_{21}x_1x_2+\frac{1}{2}\mu_2Ric_{22}x_2^2+\frac{1}{3}\mu_2Ric_{23}x_2x_3\\ &\quad\left.+\frac{1}{6}\mu_2Ric_{31}x_1x_3+\frac{1}{3}\mu_2Ric_{32}x_2x_3+\frac{1}{6}\mu_2Ric_{33}x_3^2+O\left(\|x\|^3\right)\right].\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_3}\right) &= e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i\frac{x_i^2}{2}}\left[-\mu_3+\left(\mu_3x_3\right)^2+\frac{1}{6}\mu_3Ric_{11}x_1^2+\frac{1}{6}\mu_3Ric_{12}x_1x_2\right.\\ &\quad+\frac{1}{3}\mu_3Ric_{13}x_1x_3+\frac{1}{6}\mu_3Ric_{21}x_1x_2+\frac{1}{6}\mu_3Ric_{22}x_2^2+\frac{1}{3}\mu_3Ric_{23}x_2x_3\\ &\quad\left.+\frac{1}{3}\mu_3Ric_{31}x_1x_3+\frac{1}{3}\mu_3Ric_{32}x_2x_3+\frac{1}{2}\mu_3Ric_{33}x_3^2+O\left(\|x\|^3\right)\right].\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\Delta\left(\eta\phi_\varepsilon\right) &= -\frac{1}{\sqrt{\det g}}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det g}g^{ij}\right)\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_j}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{\det g}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_2}\right)\right.\\ &\quad\left.+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_3}\right)+O\left(\|x\|^3\right)\right\}\\ &= -\frac{e^{-\sum\mu_i\frac{x_i^2}{2}}}{\sqrt{\det g}}\left\{-\sum_{i=1}^{3}\mu_i+\sum_{i=1}^{3}\left(\mu_ix_i\right)^2+Ric_{11}x_1^2\left(\frac{1}{2}\mu_1+\frac{1}{6}\mu_2+\frac{1}{6}\mu_3\right)+\right.\\ &\quad+Ric_{12}x_1x_2\left(\frac{1}{3}\mu_1+\frac{1}{3}\mu_2+\frac{1}{6}\mu_3\right)+Ric_{13}x_1x_3\left(\frac{1}{3}\mu_1+\frac{1}{6}\mu_2+\frac{1}{3}\mu_3\right)\\ &\quad+Ric_{21}x_1x_2\left(\frac{1}{3}\mu_1+\frac{1}{3}\mu_2+\frac{1}{6}\mu_3\right)+Ric_{22}x_2^2\left(\frac{1}{6}\mu_1+\frac{1}{2}\mu_2+\frac{1}{6}\mu_3\right)\\ &\quad+Ric_{23}x_2x_3\left(\frac{1}{6}\mu_1+\frac{1}{3}\mu_2+\frac{1}{3}\mu_3\right)+Ric_{31}x_1x_3\left(\frac{1}{3}\mu_1+\frac{1}{6}\mu_2+\frac{1}{3}\mu_3\right)\\ &\quad\left.+Ric_{32}x_2x_3\left(\frac{1}{6}\mu_1+\frac{1}{3}\mu_2+\frac{1}{3}\mu_3\right)+Ric_{33}x_3^2\left(\frac{1}{6}\mu_1+\frac{1}{6}\mu_2+\frac{1}{2}\mu_3\right)+O\left(\|x\|^3\right)\right\}.\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_V \left|\Delta\left(\eta\phi_\varepsilon\right)\right|^2 dv(g) &= \int_V \left|\Delta\left(\eta\phi_\varepsilon\right)\right|^2 \sqrt{\det g}\,dx_1dx_2dx_3 \\
&= \int_{N_P(\rho)} \frac{e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2}}{\det g}\left\{\left(\sum_{i=1}^{3}\mu_i\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{3}\mu_i\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\mu_i x_i\right)^2\right.\right. \\
&\quad +\frac{1}{2}Ric_{11}x_1^2\left(\mu_1+\frac{1}{3}\mu_2+\frac{1}{3}\mu_3\right)+\frac{1}{3}Ric_{12}x_1x_2\left(\mu_1+\mu_2+\frac{1}{2}\mu_3\right) \\
&\quad +\frac{1}{3}Ric_{13}x_1x_3\left(\mu_1+\frac{1}{2}\mu_2+\mu_3\right)+\frac{1}{3}Ric_{21}x_1x_2\left(\mu_1+\mu_2+\frac{1}{2}\mu_3\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}Ric_{22}x_2^2\left(\frac{1}{3}\mu_1+\mu_2+\frac{1}{3}\mu_3\right)+\frac{1}{3}Ric_{23}x_2x_3\left(\frac{1}{2}\mu_1+\mu_2+\mu_3\right) \\
&\quad +\frac{1}{3}Ric_{31}x_1x_3\left(\mu_1+\frac{1}{2}\mu_2+\mu_3\right)+\frac{1}{3}Ric_{32}x_2x_3\left(\frac{1}{2}\mu_1+\mu_2+\mu_3\right) \\
&\quad \left.\left.+\frac{1}{2}Ric_{33}x_3^2\left(\frac{1}{3}\mu_1+\frac{1}{3}\mu_2+\mu_3\right)\right]+O\left(\|x\|^3\right)\right\}dx_1dx_2dx_3
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\sqrt{\det g} = 1 - A$$

avec

$$A = \sum_{i,j=1}^{3}\frac{Ric_{ij}}{6}x_ix_j + O\left(\|x\|^3\right)$$

par conséquent

$$\frac{1}{\sqrt{\det g}} = 1 + \sum_{i,j=1}^{3}\frac{Ric_{ij}}{6}x_ix_j + O\left(\|x\|^3\right)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_V \left|\Delta\left(\eta\phi_\varepsilon\right)\right|^2 dv(g) &= \int_{N_P(\rho)} e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2}\left\{\left(\sum_{i=1}^{3}\mu_i\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{3}\mu_i\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\mu_i x_i\right)^2\right.\right. \\
&\quad +\frac{1}{2}Ric_{11}x_1^2\left(\mu_1+\frac{1}{3}\mu_2+\frac{1}{3}\mu_3\right)+\frac{1}{3}Ric_{12}x_1x_2\left(\mu_1+\mu_2+\frac{1}{2}\mu_3\right) \\
&\quad +\frac{1}{3}Ric_{13}x_1x_3\left(\mu_1+\frac{1}{2}\mu_2+\mu_3\right)+\frac{1}{3}Ric_{21}x_1x_2\left(\mu_1+\mu_2+\frac{1}{2}\mu_3\right)
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}Ric_{22}x_2^2\left(\frac{1}{3}\mu_1+\mu_2+\frac{1}{3}\mu_3\right)+\frac{1}{3}Ric_{23}x_2x_3\left(\frac{1}{2}\mu_1+\mu_2+\mu_3\right)$$
$$+\frac{1}{3}Ric_{31}x_1x_3\left(\mu_1+\frac{1}{2}\mu_2+\mu_3\right)+\frac{1}{3}Ric_{32}x_2x_3\left(\frac{1}{2}\mu_1+\mu_2+\mu_3\right)$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}Ric_{33}x_3^2\left(\frac{1}{3}\mu_1+\frac{1}{3}\mu_2+\mu_3\right)\right]+O\left(\|x\|^3\right)\right\}dx_1dx_2dx_3.$$

Maintenant , calculons chaque terme de

$$\int_{N_{(P)}(\rho)}|\Delta(\eta\phi_\varepsilon)|^2\,dv(g)$$

Commençons par I_1

$$\begin{aligned}I_1 &= \left(\sum_{i=1}^{3}\mu_i\right)^2\int_{N_P(\rho)}e^{-\sum_{i=1}^{3}\mu_ix_i^2}dx_1dx_2dx_3\\ &= \left(\sum_{i=1}^{3}\mu_i\right)^2\int_{N_P(\rho)}e^{-\left(\sum_{i=1}^{3}x_i\sqrt{\mu_i}\right)^2}dx_1dx_2dx_3\end{aligned}$$

posons

$$z_i=x_i\sqrt{\mu_i}\Rightarrow dz_i=\sqrt{\mu_i}dx_i$$

Donc

$$\begin{aligned}I_1 &= \left(\sum_{i=1}^{3}\mu_i\right)^2\int_{B\left(0,\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\right)}e^{-\sum_{i=1}^{3}z_i^2}\frac{dz_i}{\sqrt{\mu_i}}.\\ &= \left(\sum_{i=1}^{3}\mu_i\right)^2\frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^3 \qquad\qquad \text{(pour } \varepsilon \text{ assez petit)}\\ &= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}.\frac{\left(\sum_{i=1}^{3}\mu_i\right)^2}{8}.\end{aligned}$$

Un calcul analogue donne et pour ε assez petit les formules suivantes

$$\begin{aligned} I_2 &= -2\sum_{i=1}^{3}\mu_i \int_{N_P(\rho)} \sum_{i=1}^{3} (\mu_i x_i)^2 \, e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2} dx_i \\ &= -\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i\right)^2}{8} . \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \quad \text{avec} \quad \mu = \prod_{i=1}^{3}\mu_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= -\sum_{i=1}^{3}\mu_i \left(\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 + \frac{1}{3}\mu_3\right) Ric_{11} \int_{N_P(\rho)} x_1^2 e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= -\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \frac{Ric_{11}}{16\mu_1} \left(\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 + \frac{1}{3}\mu_3\right) \sum_{i=1}^{3}\mu_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= -\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3}\mu_i \left(\mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{2}\mu_3\right) Ric_{12} \int_{N_P(\rho)} x_1 x_2 e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \left(\mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{2}\mu_3\right) \frac{Ric_{12}}{12\sqrt{\mu_1\mu_2}} \sum_{i=1}^{3}\mu_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_5 &= -\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3}\mu_i \left(\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 + \mu_3\right) Ric_{13} \int_{N_P(\rho)} x_1 x_3 e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \left(\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 + \mu_3\right) \frac{Ric_{13}}{12\sqrt{\mu_1\mu_3}} \sum_{i=1}^{3}\mu_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_6 &= -\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3}\mu_i \left(\mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{2}\mu_3\right) Ric_{21} \int_{N_P(\rho)} x_1 x_2 e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \left(\mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{2}\mu_3\right) \frac{Ric_{21}}{12\sqrt{\mu_1\mu_2}} \sum_{i=1}^{3}\mu_i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_7 &= -\sum_{i=1}^{3}\mu_i\left(\frac{1}{3}\mu_1+\mu_2+\frac{1}{3}\mu_3\right)Ric_{22}\int_{N_P(\rho)} x_2^2 e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2}dx_1dx_2dx_3\\
&= -\sum_{i=1}^{3}\mu_i\left(\frac{1}{3}\mu_1+\mu_2+\frac{1}{3}\mu_3\right)\frac{Ric_{22}}{16\mu_2}.\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_8 &= -\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3}\mu_i\left(\frac{1}{2}\mu_1+\mu_2+\mu_3\right)Ric_{23}\int_{N_P(\rho)} x_2x_3 e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2}dx_1dx_2dx_3\\
&= -\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\left(\frac{1}{2}\mu_1+\mu_2+\mu_3\right)\frac{Ric_{23}}{12\sqrt{\mu_2\mu_3}}\sum_{i=1}^{3}\mu_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_9 &= -\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3}\mu_i\left(\mu_1+\frac{1}{2}\mu_2+\mu_3\right)Ric_{31}\int_{N_P(\rho)} x_1x_3 e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2}dx_1dx_2dx_3\\
&= -\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\left(\mu_1+\frac{1}{2}\mu_2+\mu_3\right)\frac{Ric_{31}}{12\sqrt{\mu_1\mu_3}}\sum_{i=1}^{3}\mu_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{10} &= -\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3}\mu_i\left(\frac{1}{2}\mu_1+\mu_2+\mu_3\right)Ric_{32}\int_{N_P(\rho)} x_2x_3 e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2}dx_1dx_2dx_3\\
&= -\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\left(\frac{1}{2}\mu_1+\mu_2+\mu_3\right)\frac{Ric_{32}}{12\sqrt{\mu_2\mu_3}}\sum_{i=1}^{3}\mu_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{11} &= -\sum_{i=1}^{3}\mu_i\left(\frac{1}{3}\mu_1+\frac{1}{3}\mu_2+\mu_3\right)Ric_{33}\int_{N_P(\rho)} x_3^2 e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2}dx_1dx_2dx_3\\
&= -\sum_{i=1}^{3}\mu_i\left(\frac{1}{3}\mu_1+\frac{1}{3}\mu_2+\mu_3\right)\frac{Ric_{33}}{16\mu_3}\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}
\end{aligned}$$

Pour l'intégrale I_{12} , nous aurons la formule suivante

$$\begin{aligned}
I_{12} &= \int_{N_P(\rho)} e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2} O\left(\|x\|^3\right) dx_1dx_2dx_3 \\
&\leq M\int_{N_P(\rho)} e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2} \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{\frac{3}{2}} dx_1dx_2dx_3 \\
&\leq \frac{M}{\sqrt{\mu}}\int_{B\left(0,\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\right)} e^{-\sum\limits_{i=1}^{3} z_i^2} \left(\frac{z_1^2}{\mu_1}+\frac{z_2^2}{\mu_2}+\frac{z_3^2}{\mu_3}\right)^{\frac{3}{2}} dz_1dz_2dz_3 \\
&\leq \frac{M}{\sqrt{\mu}}\int_{B\left(0,\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\right)} e^{-\sum\limits_{i=1}^{3} z_i^2} \left(\frac{z_1^2}{\mu_1}+\frac{z_2^2}{\mu_2}+\frac{z_3^2}{\mu_3}\right)^{3} dz_1dz_2dz_3 \\
&\leq \frac{M}{\sqrt{\mu}}\left[\int_{B\left(0,\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\right)} \frac{z_1^4}{\mu_1^2}.e^{-\sum\limits_{i=1}^{3} z_i^2} + 2\int_{B\left(0,\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\right)} \frac{z_1^2}{\mu_1}.\frac{z_2^2}{\mu_2}e^{-\sum\limits_{i=1}^{3} z_i^2} + \int_{B\left(0,\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\right)} \frac{z_2^4}{\mu_2^2}e^{-\sum\limits_{i=1}^{3} z_i^2}\right. \\
&\quad \left. +2\int_{B\left(0,\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\right)} \frac{z_1^2}{\mu_1}.\frac{z_3^2}{\mu_3}e^{-\sum\limits_{i=1}^{3} z_i^2} + 2\int_{B\left(0,\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\right)} \frac{z_2^2}{\mu_2}.\frac{z_3^2}{\mu_3}e^{-\sum\limits_{i=1}^{3} z_i^2} + \int_{B\left(0,\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\right)} \frac{z_3^4}{\mu_3^2}e^{-\sum\limits_{i=1}^{3} z_i^2}\right] dz_1dz_2dz_3 \\
&\leq \frac{M}{\sqrt{\mu}}\left[\frac{1}{\mu_1^2}\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} z_1^4.e^{-z_1^2}dz_1 \int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} e^{-z_2^2}dz_2 \int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} e^{-z_3^2}dz_3\right. \\
&\quad +\frac{2}{\mu_1\mu_2}\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} z_1^2e^{-z_1^2}dz_1 \int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} z_2^2e^{-z_2^2}dz_2 \int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} e^{-z_3^2}dz_3 \\
&\quad +\frac{1}{\mu_2^2}\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} e^{-z_1^2}dz_1 \int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} z_2^4e^{-z_2^2}dz_2 \int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} e^{-z_3^2}dz_3 \\
&\quad +\frac{2}{\mu_1\mu_3}\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} z_1^2e^{-z_1^2}dz_1 \int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} e^{-z_2^2}dz_2 \int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} z_3^2e^{-z_3^2}dz_3 \\
&\quad +\frac{2}{\mu_2\mu_3}\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} e^{-z_1^2}dz_1 \int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} z_2^2e^{-z_2^2}dz_2 \int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} z_3^2e^{-z_3^2}dz_3 \\
&\quad \left.+\frac{1}{\mu_3^2}\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} e^{-z_1^2}dz_1 \int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} e^{-z_2^2}dz_2 \int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} z_3^4e^{-z_3^2}dz_3\right]
\end{aligned}$$

Calculons chaque terme de cette dernière expression:

Commençons par I_1^* , où

$$\begin{aligned}
I_1^* &= \frac{1}{\mu_1^2}\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} z_1^4.e^{-z_1^2}dz_1\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} e^{-z_2^2}dz_2\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} e^{-z_3^2}dz_3 \\
&\leq \frac{1}{\mu_1^2}\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} z_1^{4-\alpha_1}dz_1\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} z_2^{-\alpha_2}dz_2\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} z_3^{-\alpha_3}dz_3 \qquad (\alpha_i>0\ \ ;\ i=1,2,3) \\
&\leq \frac{1}{\mu_1^2}\left[\frac{1}{5-\alpha_1}z_1^{5-\alpha_1}\right]_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}}\cdot\left[\frac{1}{1-\alpha_2}z_2^{1-\alpha_2}\right]_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}}\cdot\left[\frac{1}{1-\alpha_3}z_3^{1-\alpha_3}\right]_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} \\
&\leq \frac{1}{\mu_1^2}\left[\frac{1}{5-\alpha_1}\frac{\rho^{5-\alpha_1}}{\varepsilon^{\frac{5-\alpha_1}{4}}}\right].\frac{1}{1-\alpha_2}\left(\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\right)^{1-\alpha_2}.\frac{1}{1-\alpha_3}\left(\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\right)^{1-\alpha_3} \\
&\leq \frac{1}{\mu_1^2(5-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}.\frac{\rho^{7-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}}{\varepsilon^{\frac{7-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{4}}} \\
&\leq \frac{\rho^{7-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}}{(5-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\,\varepsilon^{\frac{7-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{4}}}.\frac{\varepsilon}{\lambda_1} \quad \text{avec } \frac{1}{\mu_1^2}=\frac{\varepsilon}{\lambda_1} \\
&= \frac{\rho^{7-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}}{\lambda_1(5-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}\varepsilon^{\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-3}{4}} \quad \text{avec } \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\geq 4 \\
&= o\left(\varepsilon^{\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-3}{4}}\right)
\end{aligned}$$

Un calcul similair nous donne les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
I_2^* &= \frac{2}{\mu_1\mu_2}\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} z_1^2e^{-z_1^2}dz_1\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} z_2^2e^{-z_2^2}dz_2\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} e^{-z_3^2}dz_3 \\
&= o\left(\varepsilon^{\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-3}{4}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3^* &= \frac{1}{\mu_2^2}\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} e^{-z_1^2}dz_1\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} z_2^4e^{-z_2^2}dz_2\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} e^{-z_3^2}dz_3 \\
&= o\left(\varepsilon^{\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-3}{4}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4^* &= \frac{2}{\mu_1\mu_3}\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} z_1^2e^{-z_1^2}dz_1\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} e^{-z_2^2}dz_2\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} z_3^2e^{-z_3^2}dz_3 \\
&= o\left(\varepsilon^{\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-3}{4}}\right)
\end{aligned}$$

De même façon on trouve que

$$I_5^* = I_6^* = o\left(\varepsilon^{\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-3}{4}}\right)$$

Finalement

$$\begin{aligned} I_{12} &= \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(I_1^* + I_2^* + ... + I_6^*\right) = \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{\frac{1}{4}}}\left(I_1^* + I_2^* + ... + I_6^*\right) \\ &= o\left(\varepsilon^{\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-3}{4}}\right) \qquad \textit{avec} \left(\alpha_i > 0, i = 1,2,3 \text{ et } \sum_{i=1}^{3}\alpha_i \geq 4\right) \end{aligned}$$

Maintenant , on va reprendre les mêmes calculs sur $N_P(2\rho) - N_P(\rho)$
calculons

$$\int_{N_P(2\rho)-N_P(\rho)} \left|\Delta\left(\eta\phi_\varepsilon\right)\right| dv\left(g\right)$$

Rappelons que

$$\Delta_g = -\frac{1}{\sqrt{\det g}}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det g}.g^{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

avec

$$g^{ij} = \delta_{ij} + O\left(\|x\|_{R^3}^2\right)$$

et

$$\sqrt{\det g} = 1 - \sum_{i,j=1}^{3}\frac{Ric_{ij}}{6}x_i x_j + O\left(\|x\|_{R^3}^3\right)$$

Calculons

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det g}.g^{ij}\right)\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{\det g}.g^{11}\right)\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sqrt{\det g}.g^{22}\right)\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_2} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sqrt{\det g}.g^{33}\right)\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_3} + O\left(\|x\|_{R^3}^4\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_2}\right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_3}\right) + O\left(\|x\|_{R^3}^4\right) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\eta\phi_{\varepsilon}\right)}{\partial x_1} &= \frac{\partial\eta}{\partial x_1}.\phi_{\varepsilon}+\eta.\frac{\partial\phi_{\varepsilon}}{\partial x_1} \\
&= \frac{\partial\eta}{\partial x_1}\left(e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i\frac{x_i^2}{2}}-e^{-\frac{\rho}{2\sqrt{\varepsilon}}}\right)+\eta\left(-\mu_1 x_1 e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i\frac{x_i^2}{2}}\right) \\
&= \frac{\partial\eta}{\partial x_1}\left(e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i\frac{x_i^2}{2}}-e^{-\frac{\rho}{2\sqrt{\varepsilon}}}\right)-\mu_1\eta x_1 e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i\frac{x_i^2}{2}}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_{\varepsilon}\right)}{\partial x_1} = & \left(e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i\frac{x_i^2}{2}}-e^{-\frac{\rho}{2\sqrt{\varepsilon}}}\right)\Bigg[\frac{\partial\eta}{\partial x_1}-\frac{Ric_{11}}{6}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}x_1^2-\frac{Ric_{12}}{6}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}x_1x_2 \\
& -\frac{Ric_{13}}{6}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}x_1x_3-\frac{Ric_{21}}{6}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}x_1x_2-\frac{Ric_{22}}{6}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}x_2^2-\frac{Ric_{23}}{6}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}x_2x_3 \\
& -\frac{Ric_{31}}{6}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}x_1x_3-\frac{Ric_{32}}{6}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}x_2x_3-\frac{Ric_{33}}{6}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}x_3^2+\frac{\partial\eta}{\partial x_1}O\left(\|x\|_{R^3}^3\right)\Bigg] \\
& -\mu_1 e^{-\sum\limits_{i=3}^{3}\mu_i\frac{x_i^2}{2}}\Bigg[\eta x_1-\frac{Ric_{11}}{6}\eta x_1^3-\frac{Ric_{12}}{6}\eta x_1^2x_2-\frac{Ric_{13}}{6}\eta x_1^2x_3 \\
& -\frac{Ric_{21}}{6}\eta x_1^2x_2-\frac{Ric_{22}}{6}\eta x_1x_2^2-\frac{Ric_{23}}{6}\eta x_1x_2x_3-\frac{Ric_{31}}{6}\eta x_1x_3^2 \\
& -\frac{Ric_{32}}{6}\eta x_1x_2x_3-\frac{Ric_{33}}{6}\eta x_1x_3^2+O\left(\|x\|_{R^3}^4\right).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_{\varepsilon}\right)}{\partial x_1}\right) = & e^{-\sum\mu_i\frac{x_i^2}{2}}\Bigg\{-\mu_1\eta+\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}-\left(2\mu_1+\frac{Ric_{11}}{3}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x_1}x_1 \\
& -\frac{1}{6}\left(Ric_{12}+Ric_{21}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x_1}x_2-\frac{1}{6}\left(Ric_{13}+Ric_{31}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x_1}x_3 \\
& +\left(\mu_1^2\eta\frac{Ric_{11}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}+\mu_1\frac{Ric_{11}}{2}\eta\right)x_1^2+\left(-\frac{Ric_{22}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}+\mu_1\frac{Ric_{22}}{6}\eta\right)x_2^2 \\
& +\left(-\frac{Ric_{33}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}+\mu_1\frac{Ric_{33}}{6}\eta\right)x_3^2 \\
& +\left(-\frac{Ric_{12}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}-\frac{Ric_{21}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}+\mu_1\frac{Ric_{12}}{3}\eta+\mu_1\frac{Ric_{21}}{3}\eta\right)x_1x_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(-\frac{Ric_{13}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}-\frac{Ric_{31}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}+\mu_1\frac{Ric_{13}}{3}\eta+\mu_1\frac{Ric_{31}}{6}\eta\right)x_1x_3\\
&+\left(-\frac{Ric_{23}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}-\frac{Ric_{32}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}+\mu_1\frac{Ric_{23}}{6}\eta+\mu_1\frac{Ric_{32}}{6}\eta\right)x_2x_3+O\left(\|x\|^3\right)\Bigg\}\\
&-e^{\frac{-\rho}{2\sqrt{\varepsilon}}}\left\{\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}-\frac{Ric_{11}}{3}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}x_1-\frac{Ric_{11}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}x_1^2-\frac{Ric_{12}}{6}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}x_2\right.\\
&-\frac{Ric_{12}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}x_1x_2-\frac{Ric_{13}}{6}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}x_3-\frac{Ric_{13}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}x_1x_3-\frac{Ric_{21}}{6}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}x_2\\
&-\frac{Ric_{21}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}x_1x_2-\frac{Ric_{22}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}x_2^2-\frac{Ric_{23}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}x_2x_3-\frac{Ric_{31}}{6}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}x_3\\
&\left.-\frac{Ric_{31}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}x_1x_3-\frac{Ric_{32}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}x_2x_3-\frac{Ric_{33}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}x_3^2+O\left(\|x\|^3\right)\right\}
\end{aligned}
$$

D'une manière équivalente , nous aurons

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_2}\right) &= e^{-\sum\mu_i\frac{x_i}{2}}\left[-\mu_2\eta+\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}-\frac{1}{6}\left(Ric_{12}+Ric_{21}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x_2}x_1\right.\\
&-\frac{1}{6}\left(2\mu_2+\frac{Ric_{22}}{3}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x_2}x_2-\frac{1}{6}\left(Ric_{23}+Ric_{32}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x_2}x_3\\
&-\frac{1}{6}\left(Ric_{11}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}-\mu_2Ric_{11}\eta\right)x_1^2+\left(-\frac{Ric_{22}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}+\mu_2^2\frac{Ric_{22}}{2}\eta\right)x_2^2\\
&-\frac{1}{6}\left(Ric_{33}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}-\mu_2Ric_{33}\eta\right)x_3^2\\
&+\left(-\frac{Ric_{12}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}-\frac{Ric_{21}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}+\mu_2\frac{Ric_{12}}{3}\eta+\mu_2\frac{Ric_{21}}{3}\eta\right)x_1x_2\\
&+\left(-\frac{Ric_{13}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}-\frac{Ric_{31}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}+\mu_2\frac{Ric_{13}}{3}\eta+\mu_2\frac{Ric_{31}}{6}\eta\right)x_1x_3\\
&\left.+\left(-\frac{Ric_{23}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}-\frac{Ric_{32}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}+\mu_2\frac{Ric_{23}}{3}\eta+\mu_2\frac{Ric_{32}}{3}\eta\right)x_2x_3+O\left(\|x\|^3\right)\right]\\
&-e^{\frac{-\rho}{2\sqrt{\varepsilon}}}\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}-\frac{Ric_{11}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}x_1^2-\frac{Ric_{12}}{6}\left(x_1\frac{\partial\eta}{\partial x_2}+x_1x_2\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}\right)\right.\\
&-\frac{Ric_{13}}{6}x_1x_3\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}-\frac{Ric_{21}}{6}\left(x_1\frac{\partial\eta}{\partial x_2}+x_1x_2\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}\right)\\
&-\frac{Ric_{22}}{6}\left(2x_2\frac{\partial\eta}{\partial x_2}+x_2^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}\right)-\frac{Ric_{23}}{6}\left(x_3\frac{\partial\eta}{\partial x_2}+x_2x_3\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}\right)\\
&\left.-\frac{Ric_{31}}{6}x_1x_3\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}-\frac{Ric_{32}}{6}\left(x_3\frac{\partial\eta}{\partial x_2}+x_2x_3\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}\right)-\frac{Ric_{33}}{6}x_3^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}+O\left(\|x\|^3\right)\right]
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_3}\right) &= e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i\frac{x_i^2}{2}}\left[-\mu_3\eta+\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}-\frac{1}{6}\left(Ric_{13}+Ric_{31}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x_3}x_1\right.\\
&-\frac{1}{6}\left(Ric_{23}+Ric_{32}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x_3}x_2-\left(2\mu_3+\frac{Ric_{33}}{3}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x_3}x_3\\
&-\frac{Ric_{11}}{6}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}-\mu_3\eta\right)x_1^2-\frac{Ric_{22}}{6}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}-\mu_3\eta\right)x_2^2\\
&-\left(\frac{Ric_{33}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}+\mu_3^2\eta+\mu_3\frac{Ric_{33}}{2}\eta\right)x_3^2\\
&+\left(-\frac{Ric_{12}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}-\frac{Ric_{21}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}+\mu_3\frac{Ric_{12}}{6}\eta+\mu_3\frac{Ric_{21}}{6}\eta\right)x_1x_2\\
&+\left(-\frac{Ric_{13}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}-\frac{Ric_{31}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}+\mu_3\frac{Ric_{13}}{3}\eta+\mu_3\frac{Ric_{31}}{3}\eta\right)x_1x_3\\
&\left.+\left(-\frac{Ric_{23}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}-\frac{Ric_{32}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}+\mu_3\frac{Ric_{23}}{3}\eta+\mu_3\frac{Ric_{32}}{3}\eta\right)x_2x_3+O\left(\|x\|^3\right)\right]\\
&-e^{\frac{-\rho}{2\sqrt{\varepsilon}}}\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}-\frac{Ric_{11}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}x_1^2-\frac{Ric_{12}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}x_1x_2-\frac{Ric_{13}}{6}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}x_1x_3+\frac{\partial\eta}{\partial x_3}x_1\right)\right.\\
&-\frac{Ric_{21}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}x_1x_2-\frac{Ric_{22}}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}x_2^2-\frac{Ric_{23}}{6}\left(x_2\frac{\partial\eta}{\partial x_3}+\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}x_2x_3\right)\\
&-\frac{Ric_{31}}{6}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}x_1x_3+\frac{\partial\eta}{\partial x_3}x_1\right)-\frac{Ric_{32}}{6}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_3}x_2+\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}x_2x_3\right)\\
&\left.-\frac{Ric_{33}}{6}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x_3^2}x_3^2+2\frac{\partial\eta}{\partial x_3}x_3\right)+O\left(\|x\|^3\right)\right].
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
\Delta_g\left(\eta\phi_\varepsilon\right) &= \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sqrt{\det g}\frac{\partial\left(\eta\phi_\varepsilon\right)}{\partial x_3}\right)+O\left(\|x\|^3\right)\right]\\
&= \frac{e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i\frac{x_i^2}{2}}}{\sqrt{\det g}}\left[\alpha_0+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_1^2+\alpha_5x_2^2+\alpha_6x_3^2+\alpha_7x_1x_2+\alpha_8x_1x_3+\alpha_9x_2x_3\right.\\
&\left.+O\left(\|x\|^3\right)\right]
\end{aligned}
$$

avec

$$
\alpha_0=-\sum_{i=1}^{3}\mu_i.\eta+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_i^2}
$$

$$\alpha_1 = \left(-2\mu_1 - \frac{Ric_{11}}{\partial x_1}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x_1} - \frac{1}{6}\left(Ric_{12} + Ric_{21}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x_2} - \frac{1}{6}\left(Ric_{13} + Ric_{31}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x_3}$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{6}\left(Ric_{12} + Ric_{21}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x_1} - \left(2\mu_2 + \frac{Ric_{22}}{3}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x_2} - \frac{1}{6}\left(Ric_{23} + Ric_{32}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x_3}$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{6}\left(Ric_{13} + Ric_{31}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x_1} - \frac{1}{6}\left(Ric_{23} + Ric_{32}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x_2} - \left(2\mu_3 + \frac{Ric_{33}}{3}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x_3}$$

$$\alpha_4 = \mu_1^2\eta - \frac{Ric_{11}}{6}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i^2} - \eta\left(3\mu_1 + \mu_2 + \mu_3\right)\right)$$

$$\alpha_5 = \mu_2^2\eta - \frac{Ric_{22}}{6}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i^2} - \eta\left(\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3\right)\right)$$

$$\alpha_6 = \mu_3^2\eta - \frac{Ric_{33}}{6}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i^2} - \eta\left(\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3\right)\right)$$

$$\alpha_7 = -\frac{1}{6}\left(Ric_{12} + Ric_{21}\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i^2} - \eta\left(2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3\right)\right)$$

$$\alpha_8 = -\frac{1}{6}\left(Ric_{13} + Ric_{31}\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i^2} - \eta\left(2\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3\right)\right)$$

$$\alpha_9 = -\frac{1}{6}\left(Ric_{23} + Ric_{32}\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i^2} - \eta\left(\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3\right)\right)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\left|\Delta\left(\eta\phi_\varepsilon\right)\right|^2 &= \frac{e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2}}{\det g}\Big\{\alpha_0^2 + 2\alpha_0\big(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_2^2 + \alpha_6 x_3^2 + \alpha_7 x_1 x_2 + \alpha_8 x_1 x_3 \\
&\quad + \alpha_9 x_2 x_3\big) + \alpha_1^2 x_1^2 + 2\alpha_1 x_1\left(\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3\right) + \alpha_2^2 x_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3 x_2 x_3 + \alpha_3^2 x_3^2 + O\left(\|x\|^3\right)\Big\} \\
&= \frac{e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2}}{\det g}\Big\{\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 x_1 + 2\alpha_0\alpha_2 x_2 + 2\alpha_0\alpha_3 x_3 + \left(2\alpha_0\alpha_4 + \alpha_1^2\right)x_1^2 \\
&\quad + \left(2\alpha_0\alpha_5 + \alpha_2^2\right)x_2^2 + \left(2\alpha_0\alpha_6 + \alpha_3^2\right)x_3^2 + 2\left(\alpha_0\alpha_7 + \alpha_1\alpha_2\right)x_1 x_2 \\
&\quad + 2\left(\alpha_0\alpha_8 + \alpha_1\alpha_3\right)x_1 x_3 + 2\left(\alpha_0\alpha_9 + \alpha_2\alpha_3\right)x_2 x_3 + O\left(\|x\|^3\right)\Big\}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_{N_P(2\rho)-N_P(\rho)} \left|\Delta\left(\eta\phi_\varepsilon\right)\right|^2 dv(g) &= \int_{N_P(2\rho)-N_P(\rho)} \frac{e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2}}{\det g}\left\{\alpha_0^2+2\alpha_0\alpha_1x_1+2\alpha_0\alpha_2x_2+2\alpha_0\alpha_3x_3\right.\\ &+\left(2\alpha_0\alpha_4+\alpha_1^2\right)x_1^2+\left(2\alpha_0\alpha_5+\alpha_2^2\right)x_2^2+\left(2\alpha_0\alpha_6+\alpha_3^2\right)x_3^2\\ &+2\left(\alpha_0\alpha_7+\alpha_1\alpha_2\right)x_1x_2+2\left(\alpha_0\alpha_8+\alpha_1\alpha_3\right)x_1x_3\\ &\left.+2\left(\alpha_0\alpha_9+\alpha_2\alpha_3\right)x_2x_3+O\left(\|x\|^3\right)\right\}\sqrt{\det g}dx_1dx_2dx_3.\end{aligned}$$

Comme précédement , nous avons

$$\sqrt{\det g}=1-A$$

avec

$$A=\sum_{i,j=1}^{3}\frac{Ric_{ij}}{6}x_ix_j+O\left(\|x\|^3\right)$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{\det g}}=\frac{1}{1-A}=1+A+O\left(\|x\|^3\right)$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_{N_P(2\rho)-N_P(\rho)} \left|\Delta\left(\eta\phi_\varepsilon\right)\right|^2 dv(g) &= \int_{N_P(2\rho)-N_P(\rho)} e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2}\left\{\left[1+\frac{Ric_{11}}{6}x_1^2+\frac{Ric_{12}}{6}x_1x_2+\frac{Ric_{13}}{6}x_1x_3\right.\right.\\ &+\frac{Ric_{21}}{6}x_1x_2+\frac{Ric_{22}}{6}x_2^2+\frac{Ric_{23}}{6}x_2x_3+\frac{Ric_{31}}{6}x_1x_3\\ &\left.\left.+\frac{Ric_{32}}{6}x_2x_3+\frac{Ric_{33}}{6}x_3^2+O\left(\|x\|^3_{R^3}\right)\right]\right\}\\ &\times\left\{\alpha_0^2+2\alpha_0\alpha_1x_1+2\alpha_0\alpha_2x_2+2\alpha_0\alpha_3x_3+\left(2\alpha_0\alpha_4+\alpha_1^2\right)x_1^2\right.\\ &+\left(2\alpha_0\alpha_5+\alpha_2^2\right)x_2^2+\left(2\alpha_0\alpha_6+\alpha_3^2\right)x_3^2+2\left(\alpha_0\alpha_7+\alpha_1\alpha_2\right)x_1x_2\\ &+2\left(\alpha_0\alpha_8+\alpha_1\alpha_3\right)x_1x_3+2\left(\alpha_0\alpha_9+\alpha_2\alpha_3\right)x_2x_3\\ &\left.+O\left(\|x\|^3\right)\right\}dx_1dx_2dx_3.\end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{N_P(2\rho)-N_P(\rho)} \left|\Delta\left(\eta\phi_{\varepsilon}\right)\right|^2 dv(g) &= \int_{N_P(2\rho)-N_P(\rho)} e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2} \left[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 x_1 + 2\alpha_0\alpha_2 x_2 + 2\alpha_0\alpha_3 x_3\right. \\
&+ \left(\alpha_4 + \alpha_1^2 + \frac{Ric_{11}}{6}\alpha_0^2\right) x_1^2 + \left(\alpha_5 + \alpha_2^2 + \frac{Ric_{22}}{6}\alpha_0^2\right) x_2^2 \\
&+ \left(\alpha_6 + \alpha_3^2 + \frac{Ric_{33}}{6}\alpha_0^2\right) x_3^2 \\
&+ \left(\alpha_7 + 2\alpha_1\alpha_2 + \frac{Ric_{12}}{6}\alpha_0^2 + \frac{Ric_{21}}{6}\alpha_0^2\right) x_1 x_2 \\
&+ \left(\alpha_8 + 2\alpha_1\alpha_3 + \frac{Ric_{13}}{6}\alpha_0^2 + \frac{Ric_{31}}{6}\alpha_0^2\right) x_1 x_3 \\
&+ \left.\left(\alpha_9 + 2\alpha_2\alpha_3 + \frac{Ric_{23}}{6}\alpha_0^2 + \frac{Ric_{32}}{6}\alpha_0^2\right) x_2 x_3 + O\left(\|x\|^3\right)\right] dx_1 dx_2 dx_3.
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.1

$$\int_{N_P(2\rho)-N_P(\rho)} \left|\Delta\left(\eta\phi_{\varepsilon}\right)\right|^2 dv(g) = O\left(\varepsilon^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-4}{4}}\right).$$

Preuve:

Calculons chaque terme de

$$\int_{N_P(2\rho)-N_P(\rho)} \left|\Delta\left(\eta\phi_{\varepsilon}\right)\right|^2 dv(g)$$

Calculons par exemple I_1 où

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{N_P(2\rho)-N_P(\rho)} e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2} \alpha_0^2 dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \int_{N_P(2\rho)-N_P(\rho)} e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2} \left(-\sum_{i=1}^{3}\mu_i\eta + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_i^2}\right)^2 dx_1 dx_2 dx_3 \\
&\leq \int_{N_P(2\rho)-N_P(\rho)} e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2} \left(-\sum_{i=1}^{3}\mu_i M_1 + M_2\right)^2 dx_1 dx_2 dx_3
\end{aligned}$$

avec M_1, M_2 sont des constantes positives .

Alors

$$I_1 \leq \left(-\sum_{i=1}^{3}\mu_i M_1 + M_2\right)^2 \int_{N_P(2\rho)-N_P(\rho)} e^{-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i x_i^2} dx_1 dx_2 dx_3$$

Posons

$$z_i = x_i\sqrt{\mu_i} \qquad \text{alors} \quad dz_i = \sqrt{\mu_i}dx_i$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
I_1 \quad &\leq \quad \frac{\left(-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i M_1 + M_2\right)^2}{\sqrt{\mu}} \int_{B\left(0,\frac{2\rho}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}\right)-B\left(0,\frac{\rho}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}\right)} e^{-\sum\limits_{i=1}^{3} z_i^2} dz_1 dz_2 dz_3 \\
&\leq \quad \frac{\left(-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i M_1 + M_2\right)^2}{\sqrt{\mu}} \int_{\frac{\rho}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}}^{\frac{2\rho}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}} e^{-z_1^2}dz_1 \int_{\frac{\rho}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}}^{\frac{2\rho}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}} e^{-z_2^2}dz_2 \int_{\frac{\rho}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}}^{\frac{2\rho}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}} e^{-z_3^2}dz_3 \\
&\leq \quad \frac{\left(-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i M_1 + M_2\right)^2}{\sqrt{\mu}} \left[\frac{1}{1-\alpha_1}z^{1-\alpha_1}\right]_{\frac{\rho}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}}^{\frac{2\rho}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}} \cdot \left[\frac{1}{1-\alpha_2}z^{1-\alpha_2}\right]_{\frac{\rho}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}}^{\frac{2\rho}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}} \cdot \left[\frac{1}{1-\alpha_3}z^{1-\alpha_3}\right]_{\frac{\rho}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}}^{\frac{2\rho}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}} \\
&\leq \quad \frac{\left(-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i M_1 + M_2\right)^2}{\sqrt{\mu}\,(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)} \left(2^{(1-\alpha_1)}-1\right)\left(2^{(1-\alpha_2)}-1\right)\left(2^{(1-\alpha_3)}-1\right) . \frac{\rho^{3-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}}{\varepsilon^{\frac{3-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{4}}} \\
&\leq \quad \frac{\left(-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i M_1 + M_2\right)^2 \left(2^{(1-\alpha_1)}-1\right)\left(2^{(1-\alpha_2)}-1\right)\left(2^{(1-\alpha_3)}-1\right)}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)} . \frac{\rho^{3-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}}{\varepsilon^{\frac{3-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{4}}} . \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{\frac{1}{4}}}
\end{aligned}$$

avec

$$\mu_i = \sqrt{\frac{\lambda_i}{\varepsilon}}\ , \ i = 1, 2, 3$$

Ainsi

$$I_1 \leq \frac{\left(-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i M_1 + M_2\right)^2 \left(2^{(1-\alpha_1)}-1\right)\left(2^{(1-\alpha_2)}-1\right)\left(2^{(1-\alpha_3)}-1\right)\rho^{3-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{\frac{1}{4}}} \varepsilon^{\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{4}}$$

or

$$\begin{aligned}
\left(-\sum_{i=1}^{3}\mu_i M_1 + M_2\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{3}\mu_i\right)^2 M_1^2 - 2M_1M_2\sum_{i=1}^{3}\mu_i + M_2^2 \\
&= \left(\mu_1+\mu_2+\mu_3\right)^2 M_1^2 - 2M_1M_2\left(\mu_1+\mu_2+\mu_3\right) + M_2^2 \\
&= \left(\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 M_1^2 - 2M_1M_2\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{\varepsilon}} + M_2^2 \\
&= \frac{\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)^2}{\varepsilon} M_1^2 - 2M_1M_2\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{\varepsilon}} + M_2^2
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
I_1 \;\leq\; & \frac{\left(2^{1-\alpha_1}-1\right)\left(2^{1-\alpha_2}-1\right)\left(2^{1-\alpha_3}-1\right)\rho^{3-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}}{\left(1-\alpha_1\right)\left(1-\alpha_2\right)\left(1-\alpha_3\right)\left(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right)^{\frac{1}{4}}}\left[\frac{\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)^2}{\varepsilon}M_1^2\right. \\
& \left. -2M_1M_2\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{\varepsilon}} + M_2^2\varepsilon^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{4}}\right] \\
\leq\; & \frac{\left(2^{1-\alpha_1}-1\right)\left(2^{1-\alpha_2}-1\right)\left(2^{1-\alpha_3}-1\right)\rho^{3-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}}{\left(1-\alpha_1\right)\left(1-\alpha_2\right)\left(1-\alpha_3\right)\left(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right)^{\frac{1}{4}}}\left[\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)^2 M_1^2.\varepsilon^{\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-4}{4}}\right. \\
& \left. -2M_1M_2\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)\varepsilon^{\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-2}{4}} + M_2^2\varepsilon^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{4}}\right]
\end{aligned}$$

Pour ε assez petit , nous obtenons que

$$\begin{aligned}
I_1 &= O\left(\varepsilon^{\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-4}{4}}\right) + O\left(\varepsilon^{\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-2}{4}}\right) + O\left(\varepsilon^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{4}}\right) \\
&= O\left(\varepsilon^{\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-4}{4}}\right)
\end{aligned}$$

D'une manière analogue , nous calculons les autres intégrales et nous trouverons

$$I_i = O\left(\varepsilon^{\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-4}{4}}\right) \qquad i = 2, ..., 11$$

et comme

$$\int_{N_P(2\rho)-N_P(\rho)} \left|\Delta\left(\eta\phi_\varepsilon\right)\right|^2 dv(g) = \sum_{i=1}^{11} I_i$$

alors

$$\int_{N_P(2\rho)-N_P(\rho)} |\Delta(\eta\phi_\varepsilon)|^2 \, dv(g) = O\left(\varepsilon^{\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-4}{4}}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_V |\Delta(\eta\phi_\varepsilon)|^2 \, dv(g) &= \int_{N_P(\rho)} |\Delta(\eta\phi_\varepsilon)|^2 \, dv(g) + \int_{N_P(2\rho)-N_P(\rho)} |\Delta(\eta\phi_\varepsilon)|^2 \, dv(g) \\
&= I_1 + I_2 + ... + I_{12} + O\left(\varepsilon^{\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-4}{4}}\right) \\
&= -\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \sum_{i=1}^{3} \mu_i \left[\frac{Ric_{11}}{16\mu_1}\left(\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 + \frac{1}{3}\mu_3\right) + \frac{Ric_{22}}{16\mu_2}\left(\frac{1}{3}\mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{3}\mu_3\right)\right. \\
&\left. + \frac{Ric_{33}}{16\mu_3}\left(\frac{1}{3}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 + \mu_3\right)\right] \\
&- \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \sum_{i=1}^{3} \mu_i \left[\frac{Ric_{13}}{12\sqrt{\mu_1\mu_3}}\left(\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 + \mu_3\right) + \frac{Ric_{12}}{12\sqrt{\mu_1\mu_2}}\left(\mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{2}\mu_3\right)\right. \\
&+ \frac{Ric_{23}}{12\sqrt{\mu_2\mu_3}}\left(\frac{1}{2}\mu_1 + \mu_2 + \mu_3\right) + \frac{Ric_{31}}{12\sqrt{\mu_1\mu_3}}\left(\frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 + \mu_3\right) \\
&\left. + \frac{Ric_{32}}{12\sqrt{\mu_2\mu_3}}\left(\frac{1}{2}\mu_1 + \mu_2 + \mu_3\right)\right] + O\left(\varepsilon^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{4}}\right) + O\left(\varepsilon^{\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-4}{4}}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
Q(\eta\phi_\varepsilon) &= \frac{1}{\int_{N_P(\rho)} (\eta\phi_\varepsilon)^2 \, dv(g) + \int_{N_P(2\rho)-N_P(\rho)} (\eta\phi_\varepsilon)^2 \, dv(g)} \left[\varepsilon \int_{N_P(\rho)} |\Delta(\eta\phi_\varepsilon)|^2 \, dv(g)\right. \\
&\left. + \varepsilon \int_{N_P(2\rho)-N_P(\rho)} |\Delta(\eta\phi_\varepsilon)|^2 \, dv(g) + \int_{N_P(\rho)} c(\eta\phi_\varepsilon)^2 \, dv(g) + \int_{N_P(2\rho)-N_P(\rho)} c(\eta\phi_\varepsilon)^2 \, dv(g)\right] \\
&= \frac{1}{1 - \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{Ric_{ii}}{12}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda_i}} + O_w\left(e^{\frac{-\rho}{2\varepsilon^{\frac{1}{2}}}}\right)} \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \left[\varepsilon \sum_{i=1}^{3} \mu_i \frac{Ric_{11}}{16\mu_1}\left(\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 + \frac{1}{3}\mu_3\right)\right. \\
&- \varepsilon \sum_{i=1}^{3} \mu_i \frac{Ric_{22}}{16\mu_2}\left(\frac{1}{3}\mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{3}\mu_3\right) - \varepsilon \sum_{i=1}^{3} \mu_i \frac{Ric_{33}}{16\mu_3}\left(\frac{1}{3}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 + \mu_3\right) \\
&- \varepsilon \sum_{i=1}^{3} \mu_i \frac{Ric_{13}}{12\pi\sqrt{\mu_1\mu_3}}\left(\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 + \mu_3\right) - \varepsilon \sum_{i=1}^{3} \mu_i \frac{Ric_{12}}{12\pi\sqrt{\mu_1\mu_2}}\left(\mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{2}\mu_3\right) \\
&- \varepsilon \sum_{i=1}^{3} \mu_i \frac{Ric_{23}}{12\pi\sqrt{\mu_2\mu_3}}\left(\frac{1}{2}\mu_1 + \mu_2 + \mu_3\right) - \varepsilon \sum_{i=1}^{3} \mu_i \frac{Ric_{31}}{12\pi\sqrt{\mu_1\mu_3}}\left(\frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 + \mu_3\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\varepsilon\sum_{i=1}^{3}\mu_i\frac{Ric_{32}}{12\pi\sqrt{\mu_2\mu_3}}\left(\frac{1}{2}\mu_1+\mu_2+\mu_3\right)+c(P)+\frac{1}{2}\sum\left(\lambda_i-c\left(P\right)\frac{Ric_{ii}}{6}\right)\sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda_i}} \\
& \left.+O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right)+\varepsilon O\left(\varepsilon^{\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-4}{4}}\right)+O\left(\varepsilon^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{4}}\right)\right].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q\left(\eta\phi_\varepsilon\right) &= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{1-\sum_{i=1}^{3}\frac{Ric_{ii}}{12}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda_i}}+O_w\left(e^{\frac{-\rho}{2\varepsilon^{\frac{1}{2}}}}\right)}\left[-\frac{Ric_{11}}{48}\frac{\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(3\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)}{\left(\lambda_1^3\lambda_2\lambda_3\right)^{\frac{1}{4}}}\varepsilon^{\frac{5}{4}}\right. \\
& -\frac{Ric_{22}}{48}\frac{\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_1}+3\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)}{\left(\lambda_1^3\lambda_2\lambda_3\right)^{\frac{1}{4}}}\varepsilon^{\frac{5}{4}} \\
& -\frac{Ric_{33}}{48}\frac{\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+3\sqrt{\lambda_3}\right)}{\left(\lambda_1^3\lambda_2\lambda_3\right)^{\frac{1}{4}}}\varepsilon^{\frac{5}{4}} \\
& -\frac{Ric_{12}}{24\pi}\frac{\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(2\sqrt{\lambda_1}+2\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)}{\left(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right)^{\frac{1}{2}}}\varepsilon^{\frac{5}{4}} \\
& -\frac{Ric_{13}}{24\pi}\frac{\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(2\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+2\sqrt{\lambda_3}\right)}{\left(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right)^{\frac{1}{2}}}\varepsilon^{\frac{5}{4}} \\
& -\frac{Ric_{23}}{24\pi}\frac{\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_1}+2\sqrt{\lambda_2}+2\sqrt{\lambda_3}\right)}{\sqrt{\lambda_1}.\lambda_2}\varepsilon^{\frac{5}{4}} \\
& -\frac{Ric_{32}}{24\pi}\frac{\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_1}+2\sqrt{\lambda_2}+2\sqrt{\lambda_3}\right)}{\left(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right)^{\frac{1}{2}}}\varepsilon^{\frac{5}{4}} \\
& \left.+c(P)\left(1-\sum_{i=1}^{3}\frac{Ric_{ii}}{12}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda_i}}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{\varepsilon\lambda_i}+O\left(\varepsilon^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{4}}\right)\right] \\
&= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{1-\sum_{i=1}^{3}\frac{Ric_{ii}}{12}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda_i}}}\left[A.\varepsilon^{\frac{5}{4}}+c(P)\left(1-\sum_{i=1}^{3}\frac{Ric_{ii}}{12}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda_i}}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{\varepsilon\lambda_i}+O\left(\varepsilon^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{4}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
A &= -\frac{Ric_{11}}{48}\frac{\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(3\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)}{\left(\lambda_1^3\lambda_2\lambda_3\right)^{\frac{1}{4}}} \\
& -\frac{Ric_{22}}{48}\frac{\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_1}+3\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)}{\left(\lambda_1^3\lambda_2\lambda_3\right)^{\frac{1}{4}}} \\
& -\frac{Ric_{33}}{48}\frac{\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+3\sqrt{\lambda_3}\right)}{\left(\lambda_1^3\lambda_2\lambda_3\right)^{\frac{1}{4}}}
\end{aligned}
$$

$$-\frac{Ric_{12}}{24\pi}\frac{\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(2\sqrt{\lambda_1}+2\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)}{\left(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$-\frac{Ric_{13}}{24\pi}\frac{\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(2\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+2\sqrt{\lambda_3}\right)}{\left(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$-\frac{Ric_{32}}{24\pi}\frac{\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_1}+2\sqrt{\lambda_2}+2\sqrt{\lambda_3}\right)}{\left(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right)^{\frac{1}{2}}}$$

D'où

$$\begin{aligned}
Q\left(\eta\phi_\varepsilon\right) &= \pi^{\frac{3}{2}}\left[\frac{A}{1-\sum_{i=1}^{3}\frac{Ric_{ii}}{12}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda_i}}}\varepsilon^{\frac{5}{4}}+c\left(P\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{\varepsilon\lambda_i}.\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{3}\frac{Ric_{ii}}{12}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda_i}}}+O\left(\varepsilon^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{4}}\right)\right] \\
&= \pi^{\frac{3}{2}}\left[A\left(1+\sum_{i=1}^{3}\frac{Ric_{ii}}{12}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda_i}}\right)\varepsilon^{\frac{5}{4}}+c\left(P\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{\varepsilon\lambda_i}\left(1+\sum_{i=1}^{3}\frac{Ric_{ii}}{12}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda_i}}\right)\right. \\
&\quad \left. +O\left(\varepsilon^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{4}}\right)\right] \\
&= \pi^{\frac{3}{2}}\left[c\left(P\right)+A.\varepsilon^{\frac{5}{4}}+A\sum_{i=1}^{3}\frac{Ric_{ii}}{12}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda_i}}\varepsilon^{\frac{5}{4}}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{\varepsilon\lambda_i}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{\varepsilon\lambda_i}.\sum_{i=1}^{3}\frac{Ric_{ii}}{12}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda_i}}\right. \\
&\quad \left. +O\left(\varepsilon^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{4}}\right)\right] \\
&= \pi^{\frac{3}{2}}\left[c\left(P\right)+\Lambda\sqrt{\varepsilon}+O\left(\varepsilon^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{4}}\right)\right]
\end{aligned}$$

où

$$\Lambda = A.\varepsilon^{\frac{3}{4}}+A\sum_{i=1}^{3}\frac{Ric_{ii}}{12}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\varepsilon^{\frac{5}{4}}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{\lambda_i}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{Ric_{ii}}{12}\sqrt{\varepsilon}.$$

■

Bibliographie

[1] T. Aubin , Equations differentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, J. Math .Pure . Appl ., 55,1976, p. 269 à 296.

[2] T. Aubin , Some Nonlinear Problems In Riemannian Geometry , Springer -Verlag , 1998.

[3] H. Boughazi , "Sur Le Second Invariant De Paneitz-Branson",Mémoire de Magistère ,2007.

[4] D.Caraffa , Equations elliptiques du quatrième ordre avec exposants critiques sur les variétés riemanniènnes compactes , J. Math .Pure . Appl .80 (9) (2001) 941-960.

[5] D.Caraffa , Etude des problèmes elliptiques non linéaires du quatrième ordre avec exposants critiques sur les variétés riemanniènnes compactes , J. Math .Pures . Appl. 83 (2004) 115 - 136.

[6] O.Druet , E.Hebey , F.Robert , Blow -Up Theory For Elliptic PDES In Riemannian Geometry , Princetar , University Press , 2003.

[7] E.Hebey , Intoduction à l'analyse non–linéaire sur les variétés , Paris , Janvier 1997.

[8] D.Holcman , I.Kupka ,Singular perturbation for the first eigenfunction and blow up analysis , http : arxiv . org / math-ph / 0506059 V1.

[9] D.Holcman , I.Kupka , C.R.Acad . Sci.Paris , Se.I 341 (2005) , p . 243-246.

[10] O.Lablée ,Spectre du laplacien et de l'opérateur de Schrödinger sur une variété : de la géométrie spectrale à l'analyse semi-classique , SMF-Gazette-116 , avril 2008.