Sur les sous variétés d'espace Riemannienne

Mohammed ABDELMALEK

Table des Matières

Chapître 1

Introduction

Il est facile de voir que les sphères sont des exemples d' hypersurfaces fermées de l'espace euclidien de courbures moyennes constanes, mais il est dificile d'imaginer d'autres exemples. La question posée: est ce qu'une hypersurface fermée de l'espace euclidien de courbure moyenne constante est nécéssairement une sphère?

En 1958 A.D.Alexandrov [1] prouve que toute hypersurface fermée (compacte sans bord) plongée dans l'espace euclidien de courbure moyenne constante est nécéssairement une sphère. Ros et Mentiel ont prouvé ensuite que ce dernier résultat reste vrai si la courbure moyenne d'ordre superieure H_r est constante pour un certain $r = 1, ..., n$.

En 1984 Wente [22] a construit des surfaces fermées, immergées, non sphériques de courbure moyenne constante, le premier exemple. En 1987 Kapouleas [13] a costruit des surfaces fermées, immergées dans $\mathbb{R}^3$, de courbures moyennes constantes et de genre $g \geqslant 3$.

Dans le cas où le bord est non vide, le probléme consiste a trouver tous les hypersurfaces de courbures moyennes d'ordre supérieur H_r constantes et de bord une sphère Σ^{n-1}.

Dans l'article [14], l'auteur avait montré qu'une hypersurface de R^{n+1} de bord Σ^{n-1}, une sous-variété compacte, orientée de dimension $n-1$ fixée dans un hyperplan Π de R^{n+1}, et de courbure moyenne constante non nulle plongée hérite des symètries du bord pourvu qu'elle soit plongée et qu'elle ne coupe pas l'extérieur de Σ^{n-1} dans l'hyperplan $\Pi \subset R^{n+1}$. D'après le résultat d'Alexandrov précédent, l'auteur obtient en conséquence que si Σ^{n-1} est une sphère de dimension $n-1$ alors M^n est symétrique par rapport à tout hyperplan passant par le centre de Σ^{n-1} et orthoganal à l'hyperplan Π ,et par conséquent M^n est une calotte sphérique.

Dans un travail récent [2], les auteurs ont étudié la question précédente dans un contexte plus général.L'espace embiant étant une variété rièmannienne $\overline{M}^{n+1}$connexe et orientée de dimension $n+1$. P^nest une hypersurface connexe, orientable et totalement géodésique dans $\overline{M}^{n+1}$. $\Sigma^{n-1} \subset P^n$ est une sous-variété compacte, orientée de dimension $n-1$ plongée dans P^n. M^n est une variété connexe orientée de dimension n à bord régulier ∂M^n. Pour cette configuration géométrique les auteurs ont étudié la question de symétrie qui s'annonce comme suit : *comment est la géométrie de la variété M^n le long du bord ∂M^n relativement à l'inclusion $\Sigma^{n-1} \subset P^n$*. Une réponse partielle a été fournie et est donnée par l'expression suivante qui a lieu sur le bord ∂M^n : pour tout $1 \leq r \leq n-1$

$$\langle T_r \nu, \nu \rangle = (-1)^r \, s_r \, \langle \xi, \nu \rangle^r \tag{1.1}$$

où T_r désigne la transformation de Newton classique associée à la seconde forme fondamentale de $M^n \subset \overline{M}^{n+1}$. ν est le champ unitaire de vecteurs conormal à ∂M^n orienté vers l'extérieur, ξ est le champ unitaire de vecteurs normal de $P^n \subset \overline{M}^{n+1}$ et $s_r = s_r(\tau_1, ..., \tau_{n-1})$ est la fonction symétrique élémentaire d'ordre r fonction des courbures principales $\tau_1, ..., \tau_{n-1}$ de $\Sigma^{n-1} \subset P^n$ par rapport au champ de vecteurs normal sortant.

Comme conséquence directe de la formule (1.1) ils obtiennent une relation forte entre la transversalité de M^n relativement à P^n le long du bord et l'ellipticité sur M^n de la transformation de Newton d'order r , T_r.

Ce fait et le Théorème7.3 dans [21], permettent aux auteurs d'obtenir le résultat suivant:

Théorème 1 *Soient Σ^{n-1}une sous-variété compacte strictement convexe de dimension $n-1$ de l'hyperplan $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$ et $\psi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ une hypersurface compacte et plongée de bord Σ^{n-1}. Supposons que pour tout $2 \leq r \leq n$, la courbure moyenne d'ordre r, H_r de M^n est constante non nulle. Alors M^n hérite de toutes les symmétries de Σ^{n-1}. En particulier si le bord Σ^{n-1} est une sphère de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ alors M^n est une calotte sphèrique.*

Ce dernier résultat généralise partiellement la réponse a un vieux problème de géométrie différentielle classique qui consiste à chercher toutes les surfaces compactes de $\mathbb{R}^3$ de courbures moyennes constantes bordées par un cercle et dont il est conjuncturé qu'une surface compacte dans $\mathbb{R}^3$de courbure moyenne constante et de genre zéro ou bien plongée dans $\mathbb{R}^3$ est nécéssairement une calotte sphérique ou un disque plat.

Dans ce modeste travail de Magister, on essaie d'étendre quelques résultats obtenus dans [2] aux sous-variétés de condimension supérieure, en particulier la relation (1.1).

Nous obtenons le résultat de transversalité suivant:

Théorème 2 *Si pour tout* $k \in (1, ..., m)$ *les transformations de Newton* $T_{r,k}$ *sont définies positives pour un certain* $r \in (1, ..., n-1)$ *alors la sous-variété* M^n *est traverse à la sous-variété* P^n *le long de son bord* ∂M^n*.*

Chapitre 2

Généralités

Dans ce chapître nous rappelons quelques propriètés des immersions isométriques, qui sont nécessaires à la lecture des chapîtres suivants.

Définition 2.0.1 *Soit M et N deux variétés différentiables de dimensions respctives m et n. Une application différentiable $\varphi : M \to N$ est dite une immersion si on a: $d\varphi\,(p) : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ est injective pour tout $p \in M$.Si de plus $\varphi : M \to \varphi(M) \subset N$ est un homéomorphisme, où $\varphi\,(M)$ est muni de la topologie induite, φ est appelée un plongement.Si $M \subset N$ et l'inclusion $i : M \subset N$ est un plongement,on dit que M est une sous-variété de N. Si les variétés différentiables M, N sont riemanniennes et φ conserve la distance i.e.*

$$\langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v)\rangle_{\varphi(p)} = \langle u, v\rangle_p \tag{2.1}$$

l'immersion φ est dite une immersion isométrique.

Remarquons qu'une immersion isométrique induite sur M une structure riemannienne à partir de celle de N donnée par la relation 2.1.

On peut voir que si $\varphi : M \to N$ est une immersion isométrique, alors $m \leq n$. $n - m$ est appelée la codimension de l'immersion φ.

Théorème 3 *Soit $(M, \langle ., .\rangle)$ une variété riemannienne et $p \in M$.*

On définit l'application $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ par:

$$\langle R'(X, Y, W), Z\rangle = \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle Y, W\rangle\langle X, Z\rangle$$

pour tout $X, Y, W, Z \in T_pM$.

Alors M a une courbure sectionnelle constante égale à c si et seulement si:

$$R = cR'$$

Où R désigne le tenseur de courbure de M.

Définition 2.0.2 *Soit M une sous-variété d'une variété riemannienne $\overline{M}$. L'espace normal de M est le sous espace vectoriel $(T_pM)^{\perp}$ de $T_p\overline{M}$ formé des vecteurs v qui sont normaux à T_pM. i.e.*

$$(T_pM)^{\perp} = \left\{v \in T_p\overline{M}/, \langle v, w\rangle = 0, \forall w \in T_pM\right\}$$

Définition 2.0.3 *Le fibré normal de M, noté $N\,(M)$ est la réunion d'espaces vectoriels définie par:*

$$N\,(M) = \cup_{p\in M}(T_pM)^{\perp} = \left\{(p, v)/p \in M, v \in (T_pM)^{\perp}\right\}$$

Définition 2.0.4 *Soient M et N deux sous-variétés d'une variété riemannienne $\overline{M}$, alors M et N sont dites transverses si $M \cap N = \phi$, où bien $\forall p \in M \cap N$:*

$$T_pM + T_pN = T_p(\overline{M})$$

Soit $\overline{M}$ une variété rièmannienne, connexe et orientable de dimension $n+m$ et $\langle,\rangle$ et $\overline{\nabla}$ la métrique et la connexion de Levi- Civita correspondantes.

Soit M une variété riémannienne, connexe et orientable,de dimension n et du bord régulier ∂M.

Définition 2.0.5 *Soient M une sous-variété de $\overline{M}$ de dimension n connexe et orientable,du bord régulier ∂M et Σ une sous-variété orientable de $\overline{M}$ de dimension $n-1$. Alors M est dite sous-variété du $\overline{M}$ de bord Σ s'il existe une immersion isométrique $\psi : M \to \overline{M}$ telle que la restriction de ψ sur le bord ∂M est un difféomorphisme sur Σ.*

Notons par $\varkappa(M)$ l'algébre de Lie des champs de vecteurs définis sur M.

Soit $\psi : M \to \overline{M}$ une immersion isométrique.

Pour tout $p \in M$, l'espace tangent $T_p\overline{M}$ se décompose en la somme directe:

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp}$$

où $(T_pM)^{\perp}$ est le complément orthogonal de T_pM dans $T_p\overline{M}$.

Soit le tenseur deux fois covariant et une fois contravariant suivant:

$$\begin{gathered} B : \varkappa(M) \times \varkappa(M) \to \varkappa(\overline{M}) \\ (X, Y) \longmapsto B(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \end{gathered}$$

L'application B est bilinéaire et symmétrique.

Pour tout $\eta \in (T_pM)^{\perp}$, nous avons la forme bilinéaire symmétrique suivante:

$$\begin{aligned} H_\eta : T_pM \times T_pM &\to R \\ (u,v) &\longmapsto H_\eta(u,v) = \langle B(u,v), \eta \rangle \end{aligned}$$

Définition 2.0.6 *La seconde forme fondamentale est l'opérateur linéaire auto-adjoint A_η défini par:*

$$\begin{aligned} A_\eta : T_pM &\to T_pM \\ u &\longmapsto A_\eta u \end{aligned}$$

avec:

$$\langle A_\eta u, v \rangle = H\eta(u,v) = \langle B(u,v), \eta \rangle$$

Et nous avons de plus:

$$A_\eta(u) = -(\overline{\nabla}_u \eta)^\top$$

Etant donnés $u \in T_pM$, $\eta \in (T_pM)^\perp$, la composante tangentielle de $\overline{\nabla}_u \eta$ est alors:

$$(\overline{\nabla}_u \eta)^\top = -A_\eta(u)$$

et la composante normale de $\overline{\nabla}_u \eta$ est définie par

$$\nabla_u^\perp \eta = (\overline{\nabla}_u \eta)^N = \overline{\nabla}_u \eta - (\overline{\nabla}_u \eta)^\top = \overline{\nabla}_u \eta + A_\eta(u)$$

$\nabla^\perp$ remplit tous les axiomes d'une connexion,et est dite la *connexion normale* de l'immersion.

Le champ de tenseurs de courbure associé à la connexion normale est défini par

$$R^\perp(u,v)\eta = \nabla_v^\perp \nabla_u^\perp \eta - \nabla_u^\perp \nabla_v^\perp \eta + \nabla_{[u,v]}^\perp \eta$$

et est appelé le *champ de tenseurs de courbure normale de la connexion.*

Définition 2.0.7 *Le fibré normal est dit plat si $R^\perp \equiv 0$. Le champ de vecteurs ζ est dit parallèle sur le fibré normal si $\nabla_X^\perp \zeta = 0$ pour tout vecteur tangent X à M.*

On dit qu'un sous fibré $\widetilde{N}$ du fibré normal est parallèle dans le fibré normal s'il est invariant par translation parallèle par rapport à $\nabla^\perp$. ie si $\zeta \in \widetilde{N}$ alors:$\nabla_X^\perp \zeta \in \widetilde{N}$ pour tout vecteur tangent X à M.

On dit que le tensur de courbure de la connexion normale est parallèle dans le fibré normal si:

$$\nabla_X^\perp R^\perp(Y,Z) = 0$$

pour tout X, Y, Z dans l'espace tangent à M.

Choisissons maintenant une base orthonormale $\alpha_1, ..., \alpha_m$ de l'espace normal $(T_pM)^\perp$ en $p \in M$.

Nous avons donc pour $u \in T_pM$:

$$A_{\alpha_i}(u) = A_i(u) = -(\overline{\nabla}_u \alpha_i)^\top$$

Théorème 4 *(Elie Cartan):*

Si l'espace ambiant est de courbure constante alors Le fibré normal est plat si et seulement si,en chaque point, toutes les secondes formes fondamentales A_{α_i} sont simultanément diagonalisables.

Pour tout $i \in (1, ..., m)$, A_{α_i} est un opérateur linéaire auto-adjoint et si l'on suppose que le fibré normal est plat, alors d'aprés le théorème ci-dessus il existe une base de T_pM qui diagonalise tous les opérateurs A_{α_i}. Notons par $(e_1, ..., e_n)$ une telle base que l'on peut considérer comme base orthonormée.

On définit n invariant algébriques:

$$S_r(x_1, ..., x_n) = \sigma_r(x_1, ..., x_n) \tag{2.2}$$

où $\sigma_r : R^n \to R$ sont les fonctions élémentaires symétriques données par:

$$\sigma_r(x_1, ..., x_n) = \sum_{i_1 \langle ... \langle i_r} x_{i_1} ... x_{i_r}$$

Ces fonctions élémentaires ont des propriétés remarquables.

Lemme 2.0.8 *i) pour tout $1 \leq r \leq n$ on a:*

$$S_r(x_1, ..., x_n) = x_i S_{r-1}(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n) + S_r(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n) \tag{2.3}$$

ii) pour tout $1 \leq r \leq n$ on a:

$$S_r(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j}(x_1, ..., x_n) x_i^j. \tag{2.4}$$

Démonstration : $i)$ On a:

$$\begin{aligned} S_r(x_1, ..., x_n) &= \sum_{i_1 \langle ... \langle i_r} x_{i_1} ... x_{i_r} \\ &= \sum_{\substack{i_1 \langle ... \langle i_r \\ i_j \neq i}} x_{i_1} ... x_{i_r} + \sum_{\substack{i_1 \langle ... \langle i_r \\ i_j \neq i}} x_{i_1} ... x_i ... x_{i_r} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{i_1\langle ... \langle i_r \\ i_j \neq i}} x_{i_1}...x_{i_r} + x_i \sum_{\substack{i_1\langle ... \langle i_r \\ i_j \neq i}} x_{i_1}...\widehat{x_i}...x_{i_r}$$

$$= S_r(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n) + x_i S_{r-1}(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n)$$

d'où le résultat.

ii) Faisons une démonstration par réccurence sur r.

Pour $r = 0$ on a: $S_0(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n) = 1$ par définition. Donc la propriété (2.3) est vraie pour $r = 0$.

Supposons que l'égalité (2.3) est vraie jusqu'a l'ordre $r - 1$.

D'aprés la propriété (2.2) on a:

$$S_r(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n) = S_r(x_1, ..., x_n) - x_i S_{r-1}(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n)$$

$$= S_r(x_1, ..., x_n) + \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^{j+1} S_{r-1-j}(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n) x_i^{j+1}$$

Posons $l = j + 1$, alors:

$$S_r(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n) = S_r(x_1, ..., x_n) + \sum_{l=1}^{r} (-1)^l S_{r-l}(x_1, ..., , \widehat{x_i}, ..., x_n)$$

$$= \sum_{l=0}^{r} (-1)^l S_{r-l}(x_1, ..., , \widehat{x_i}, ..., x_n) x_i^l$$

D'où l'égalité. ■

Le polynôme caractéristique de l'opérateur A_i peut s'exprimer à l'aide des fonctions élémentaires symétriques $S_{r,i}$ comme

$$\det(tI - \ Ai) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_{r,i} t^{n-r} \tag{2.5}$$

avec:

$$S_{r,i} = S_r(x_{i,1}, ..., x_{i,r})$$

où $x_{i,1}, ..., x_{i,n}$ sont les valeurs propres de A_i.

Définition 2.0.9 *La courbure moyenne d'ordre r ($r \geq 1$) est le vecteur normal défini par*

$$\binom{n}{r} H_r = \sum_{k=1}^{m} S_{r,k} \alpha_k \tag{2.6}$$

où $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

En particulier pour $r = 1$, nous avons la notion de courbure moyenne classique

$$H_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} S_{1,k}\alpha_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} tr(A_k)\alpha_k$$

Pour $r = n$ nous obtenons

$$H_n = \sum_{k=1}^{m} S_{n,k}\alpha_k = \sum_{k=1}^{m} \det(A_k)\alpha_k$$

Remarque 2.0.10 *Dans* [11] *nous trouvons une définition analogue pour la courbure moyenne d'ordre supèrieure. Elle est définie comme suit*

Soit $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$*une base orthonormale de* $(T_pM)^{\perp}$*,et soit* $\xi \in (T_pM)^{\perp}$*.*

$$\xi \in (T_pM)^{\perp} \Rightarrow \xi = \sum_{i=1}^{m} \langle \alpha_i, \xi \rangle \alpha_i$$

$$A_\xi(\alpha_j) = A_{(\sum_{i=1}^{m} \langle \alpha_i, \xi \rangle \alpha_i)}(\alpha_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \langle \alpha_i, \xi \rangle A_{\alpha_i}(\alpha_j)$$

Les valeurs propres de la seconde forme fondamentale A_ξ sont appelées les courbures principales dans la direction de ξ, et les vecteurs propres correspondants sont appelées les directions principales.

Définition 2.0.11 *La courbure moyenne d'ordre* $r \geq 1$*,* $H_r(\xi)$*, en* ξ *est donnée par la* $r^{ième}$ *fonction élémentaire symmétrique*

$$\binom{n}{r} H_r(\xi) = S_r(x_1, ..., x_n)$$

où $x_1, ..., x_n$ *sont les courbures principales en* ξ*.*

Définition 2.0.12 *La courbure de Gauss* G_ξ *de* M *dans la direction de* ξ *est donnée par*

$$G_\xi = H_n(\xi) = \prod_{i=1}^{n} x_i = \det A_\xi$$

Remarque 2.0.13 *Dans le cas des hypersurfaces orientées, nous avons un champ de vecteurs normal global, et donc une seule seconde forme fondamentale*

$$\binom{n}{r} H_r = S_r(x_1, ..., x_n)$$

et:

$$G_\xi = H_n.$$

Proposition 2.0.14 ***(équation de Gauss)***
Pour $X, Y, Z, T \in \varkappa(M)$ nous avons

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle B(Y,T), B(X,Z)\rangle + \langle B(X,T), B(Y,Z)\rangle \tag{2.7}$$

Considérons maintenant B comme un champ de tenseurs symmétrique de type (3,0)

$$\begin{gathered} B : \varkappa(M) \times \varkappa(M) \times \varkappa(M)^\perp \to R \\ (X, Y, \eta) \longmapsto B(X, Y, \eta) = \langle B(X,Y), \eta\rangle \end{gathered}$$

La dérivée covariante de B est alors:

$$\overline{\nabla}_X B(Y,Z,\eta) = X(B(Y,Z,\eta)) - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta) - B(Y, Z, \nabla_X^\perp \eta)$$

où:

$$\nabla_X^\perp \eta = (\overline{\nabla}_X \eta)^N$$

$$= \overline{\nabla}_X \eta - (\overline{\nabla}_X \eta)^\top$$

$$= \overline{\nabla}_X \eta + A_\eta(X)$$

Proposition 2.0.15 ***(équation de Codazzi)***
Pour $X, Y, Z \in \varkappa(M)$ et $\eta \in \varkappa(M)^\perp$ nous avons:

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z, \eta\rangle = (\overline{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) \tag{2.8}$$

Chapître 3

Les transformations de Newton

Notons par $\varkappa(M)$ l'algébre de Lie des champs de vecteurs définis sur M.

Les transformations de Newton

$$T_{r,k} : \varkappa(M) \longrightarrow \varkappa(M)$$

sont définies par la relation réccurente:

$$T_{0,k} = I$$

$$T_{r,k} = S_{r,k}I - A_k T_{r-1,k}$$

où I est l'identité dans $\varkappa(M)$. Ceci est équivalent à:

$$T_{r,k} = S_{r,k}I - S_{r-1,k}A_k + ... + (-1)^{r-1}S_{1,k}A_k^{r-1} + (-1)^r A_k^r$$

Le polynôme caractéristique de l'opérateur A_k est donnée par la relation

$$P_{n,k}(t) = \det(tI - A_k) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r S_{r,k} t^{n-r}$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton, A_k est un zéro du polynôme caractéristique.

i.e.

$$P_{n,k}(A_k) = 0$$

ce qui donne:

$$T_{n,k} = 0$$

Proposition 3.0.16 *$T_{r,k}$ est aussi un opérateur linéaire auto-adjoint.*

Démonstration : Faisons une démonstration par réccurence sur r.

Il est évident que

$$T_{0,k} = I$$

est un opérateur linéaire auto-adjoint.

Supposons que $T_{j,k}$ est un opérateur linéaire auto-adjoint pour $1 \leq j \leq r-1$ et soient $u, v \in \varkappa(M)$

$$\langle T_{r,k}u, v\rangle = \langle (S_{r,k}I - A_kT_{r-1,k})u, v\rangle$$

$$= \langle (S_{r,k}I)u, v\rangle - \langle (A_kT_{r-1,k})u, v\rangle$$

$$= \langle u, (S_{r,k}I)v\rangle - \langle (T_{r-1,k})u, A_kv\rangle$$

$$= \langle u, (S_{r,k}I)v\rangle - \langle (T_{r-1,k})u, (T_{r-1,k})A_kv\rangle$$

$$= \langle u, ((S_{r,k}I) - (T_{r-1,k}A_k))v\rangle$$

$$= \langle u, T_{r,k}v\rangle$$

$T_{r,k}$ est alors un opérateur auto-adjoint. ■

On remarque aussi que $T_{r,k}$ commute avec A_k. Par conséquent d'aprés le théorème de diagonalisation simultanée, la base $(e_1, ..., e_n)$ diagonalisante A_k diagonalise aussi $T_{r,k}$ et on obtient

Lemme 3.0.17 ***i)*** *Pour tout $i \in (1, ..., n)$, on a:*

$$T_{r,k}(e_i) = \mu_{i,r}e_i$$

avec:

$$\mu_{i,r} = \sum_{\substack{i_1 \langle ... \langle i_r \\ i_j \neq i}} x_{i_1}...x_{ir} = S_{r,k}(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n)$$

ii) *pour tout $1 \leq r \leq n$,on a:*

$$tr(T_{r,k}) = (n-r)S_{r,k} \tag{3.1}$$

iii) *pour tout $1 \leq r \leq n$,on a:*

$$tr(A_kT_{r,k}) = (r+1)S_{r+1,k} \tag{3.2}$$

Démonstration : *i)* Faisons uns démonstration par réccurence sur r

Pour $r = 1$ nous avons

$$T_{1,k}(e_i) = (S_{1,k}I - A_k T_{0,k})(e_i)$$
$$= S_{1,k}I(e_i) - A_k(e_i)$$
$$= (x_1 + ... + x_n - x_i)e_i$$
$$= S_{1,k}(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n)(e_i)$$

Donc la relation est vraie pour $r = 1$.

Supposons que la relation est vraie jusqu'a l'ordre $r - 1$.

Nous avons

$$T_{r,k}(e_i) = (S_{r,k}I - A_k T_{r-1,k})(e_i)$$
$$= S_{r,k}(e_i) - A_k T_{r-1,k}(e_i)$$
$$= S_{r,k}(e_i) - A_k(S_{r-1,k}(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n)(e_i))$$
$$= S_{r,k}(e_i) - S_{r-1,k}(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n)A_k(e_i)$$
$$= (S_{r,k}(x_1, ..., x_n) - x_i S_{r-1,k}(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n))(e_i)$$
$$= S_{r,k}(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n))(e_i)$$

Donc

$$\mu_{i,r} = \sum_{\substack{i_1 \langle ... \langle i_r \\ i_j \neq i}} x_{i_1}...x_{ir} = S_{r,k}(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n)$$

ii) Montrons que: $tr(T_{r,k}) = (n - r)S_{r,k}$.

Nous avons

$$(x + x_1)...(x + x_n) = \sum_{r=0}^{n} S_{r,k}(x_1, ..., x_n)x^{n-r}$$

et en dérivant les deux termes par rapport à x, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sum_{r=0}^{n} S_{r,k}(x_1, ..., x_n)x^{n-r}) \quad = \sum_{r=0}^{n-1}(n - r)S_{r,k}(x_1, ..., x_n)x^{n-r-1}$$

et:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x + x_1)...(x + x_n) = \sum_{i=1}^{n}(x + x_1)...(x + x_{i-1})(\widehat{x + x_i})(x + x_{i+1})...(x + x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=0}^{n-1} S_{r,k}(x_1, ...\widehat{x_i}, ..., x_n)x^{n-r-1}$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1}(\sum_{i=1}^{n} S_{r,k}(x_1, ...\widehat{x_i}, ..., x_n))x^{n-r-1}$$

Considérons le coefficient de x^{n-r-1} dans les deux dérivations,on trouve:

$$(n-r)S_{r,k}(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} S_{r,k}(x_1, ...\widehat{x_i}, ..., x_n)$$

D'où le résultat.

iii) Nous avons:

$$A_k T_{r,k} = S_{r+1,k} I - T_{r+1,k}$$

d'où:

$$\begin{aligned} tr(A_k T_{r,k}) &= tr(S_{r+1,k} I - T_{r+1,k}) \\ &= S_{r+1,k} tr(I) - tr(T_{r+1,k}) \\ &= n S_{r+1,k} - (n-1-r) S_{r+1,k} \end{aligned}$$

et d'après l'égalité (3.1), on trouve:

$$tr(A_k T_{r,k}) = (r+1) S_{r+1,k}$$

■

3.1 Divergence de la transformation de Newton

La dérivée covariante de la transformation de Newton est le champ de tenseurs deux fois covariant et une fois contravariant

$$\begin{aligned} \nabla T_{r,k} : \varkappa(M) \times \varkappa(M) &\longrightarrow \varkappa(M) \\ (u, v) &\longmapsto \nabla T_{r,k} = (\nabla_u T_{r,k})(v) \end{aligned}$$

avec

$$(\nabla_u T_{r,k})(v) = \nabla_u (T_{r,k}(v)) - T_{r,k}(\nabla_u v)$$

Lemme 3.1.1 *Pour* $k \in (1, ..., m)$, *nous avons:*

$$div_M T_{0,k} = 0$$

$$div_M T_{r,k} = -A_k(div_M T_{r-1,k}) - \sum_{i=1}^{n} \overline{R}(\alpha_k, T_{r-1,k}(e_i))e_i)^{\top} -$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[tr(A_{\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha_k}\circ T_{r-1,k})-(A_{\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha_k}\circ T_{r-1,k})\right]e_i \tag{3.3}$$

où $\overline{R}$ est le champ de tenseurs de courbure de $\overline{M}^{n+m}$.

Démonstration : on a

$$div_M T_{r,k} = tr\,(\nabla T_{r,k}) = \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}T_{r,k})e_i$$

pour $r=0$ nous avons

$$div_M T_{0,k} = tr\nabla I = 0$$

car:

$$\begin{aligned}(\nabla_u I)(v) &= \nabla_u(I(v)) - I(\nabla_u v)\\ &= 0\end{aligned}$$

et par suite

$$div_M T_{0,k} = 0$$

Soit $k \in (1,...,n)$,on a alors

$$(\nabla_{e_i}T_{r,k})(e_i) = \nabla_{e_i}(T_{r,k}(e_i)) - T_{r,k}(\nabla_{e_i}e_i)$$

$$= \nabla_{e_i}((S_{r,k}I - A_kT_{r-1,k})e_i) - (S_{r,k}I - A_kT_{r-1,k})(\nabla_{e_i}e_i)$$

$$= \nabla_{e_i}(S_{r,k}e_i) - \nabla_{e_i}(A_kT_{r-1,k}(e_i)) - S_{r,k}(\nabla_{e_i}e_i) + (A_kT_{r-1,k})(\nabla_{e_i}e_i)$$

$$= e_i(S_{r,k})e_i + S_{r,k}(\nabla_{e_i}e_i) - \nabla_{e_i}(A_kT_{r-1,k}(e_i)) - S_{r,k}(\nabla_{e_i}e_i) + (A_kT_{r-1,k})(\nabla_{e_i}e_i)$$

$$= e_i(S_{r,k})e_i - (\nabla_{e_i}(A_kT_{r-1,k}(e_i)) - (A_kT_{r-1,k})(\nabla_{e_i}e_i))$$

$$= (d_{e_i}S_{r,k})(e_i) - (\nabla_{e_i}(A_kT_{r-1,k}))e_i$$

$$= \langle\nabla S_{r,k}, e_i\rangle e_i - (\nabla_{e_i}A_k)(T_{r-1,k}(e_i) - A_k((\nabla_{e_i}T_{r-1,k})(e_i))$$

Et alors

$$div_M T_{r,k} = \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}T_{r,k})(e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla S_{r,k}, e_i\rangle e_i - \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}A_k)(T_{r-1,k}(e_i)) - \sum_{i=1}^{n}A_k((\nabla_{e_i}T_{r-1,k})(e_i))$$

$$= \nabla S_{r,k} - A_k div_M T_{r-1,k} - \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}A_k)(T_{r-1,k}(e_i))$$

L'équation de Godazzi et le fait que $\nabla_{e_i} A_k$ est un opérateur autoadjoint nous permet d'écrire:

$$\sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_{e_i}A_k)(T_{r-1,k}(e_i)),v\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(\alpha_k,T_{r-1,k}(e_i))e_i,v\rangle+tr(T_{r-1,k}\circ\nabla_v A_k)-$$

$$\langle\sum_{i=1}^{n}\left[tr(A_{\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha_k}\circ T_{r-1,k})-(A_{\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha_k}\circ T_{r-1,k})\right]e_i,v\rangle$$

En effet nous avons pour tous $X,Y,Z\in T_pM$ et $\eta\in(T_pM)^{\perp}$

$$\langle\overline{R}(X,Y)Z,\eta\rangle=(\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta)-(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta)$$

$$=Y(B(X,Z,\eta))-B(\nabla_Y X,Z,\eta)-B(X,\nabla_Y Z,\eta)-B(X,Z,\nabla^{\perp}_Y\eta)-X(B(Y,Z,\eta))+$$

$$B(\nabla_X Y,Z,\eta)+B(Y,\nabla_X Z,\eta)+B(Y,Z,\nabla^{\perp}_X\eta)$$

$$=Y(\langle B(X,Z),\eta\rangle)-\langle B(\nabla_Y X,Z),\eta\rangle-\langle B(X,\nabla_Y Z),\eta\rangle-\langle B(X,Z),\nabla^{\perp}_Y\eta\rangle-$$

$$X\langle B(Y,Z),\eta\rangle+\langle B(\nabla_X Y,Z),\eta\rangle+\langle B(Y,\nabla_X Z),\eta\rangle+\langle B(Y,Z),\nabla^{\perp}_X\eta\rangle$$

$$=Y(\langle A_\eta(X),Z\rangle-\langle A_\eta(Z),\nabla_Y X\rangle-\langle A_\eta(X),\nabla_Y Z\rangle-\langle A_{\nabla^{\perp}_Y\eta}(X),Z\rangle-X(\langle A_\eta(Y),Z\rangle)+$$

$$\langle A_\eta(Z),\nabla_X Y\rangle+\langle A_\eta(Y),\nabla_X Z\rangle+\langle A_{\nabla^{\perp}_X\eta}(Y),Z\rangle$$

$$=\langle\nabla_Y(A_\eta(X)),Z\rangle+\langle A_\eta(X),\nabla_Y Z\rangle-\langle A_\eta(Z),\nabla_Y X\rangle-\langle A_\eta(X),\nabla_Y Z\rangle-\langle A_{\nabla^{\perp}_Y\eta}(X),Z\rangle-$$

$$\langle\nabla_X(A_\eta(Y)),Z\rangle-\langle A_\eta(Y),\nabla_X Z\rangle+\langle A_\eta(Z),\nabla_X Y\rangle+\langle A_\eta(Y),\nabla_X Z\rangle+\langle A_{\nabla^{\perp}_X\eta}(Y),Z\rangle$$

$$=\langle\nabla_Y(A_\eta(X)),Z\rangle-\langle A_\eta(Z),\nabla_Y X\rangle-\langle\nabla_X(A_\eta(Y)),Z\rangle+\langle A_\eta(Z),\nabla_X Y\rangle+\langle A_{\nabla^{\perp}_X\eta}(Y),Z\rangle-$$

$$\langle A_{\nabla^{\perp}_Y\eta}(X),Z\rangle$$

$$=\langle\nabla_Y(A_\eta(X))-A_\eta(\nabla_Y X),Z\rangle-\langle\nabla_X(A_\eta(Y))-A_\eta(\nabla_X Y),Z\rangle+\langle A_{\nabla^{\perp}_X\eta}(Y),Z\rangle-\langle A_{\nabla^{\perp}_Y\eta}(X),Z\rangle$$

$$=\langle(\nabla_Y A_\eta)(X),Z\rangle-\langle(\nabla_X A_\eta)(Y),Z\rangle+\langle A_{\nabla^{\perp}_X\eta}(Y),Z\rangle-\langle A_{\nabla^{\perp}_Y\eta}(X),Z\rangle$$

Posons maintenant

$$X=v,Y=e_i,Z=T_{r-1,k}(e_i),\eta=\alpha_k$$

nous avons donc

$$\langle\overline{R}(v,e_i)T_{r-1,k}(e_i),\alpha_k\rangle=\langle(\nabla_{e_i}A_{\alpha_k})(v)-(\nabla_v A_{\alpha_k})(e_i),T_{r-1,k}(e_i)\rangle+$$

$$\langle A_{\nabla_v^\perp \alpha_k}(e_i) - A_{\nabla_{e_i}^\perp \alpha_k}(v), T_{r-1,k}(e_i)\rangle$$

Or

$$\langle A_{\nabla_v^\perp \alpha_k}(e_i) - A_{\nabla_{e_i}^\perp \alpha_k}(v), T_{r-1,k}(e_i)\rangle = \langle B(T_{r-1,k}(e_i), e_i), \nabla_v^\perp \alpha_k\rangle - \langle B(v, T_{r-1,k}(e_i)), \nabla_{e_i}^\perp \alpha_k\rangle$$

et nous avons

$$\sum_{i=1}^n \langle B(v, T_{r-1,k}(e_i)), \nabla_{e_i}^\perp \alpha_k\rangle = \sum_{i=1}^n \langle B(T_{r-1,k}(e_i), v), \nabla_{e_i}^\perp \alpha_k\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \langle A_{\nabla_{e_i}^\perp \alpha_k}(T_{r-1,k}(e_i)), v\rangle$$

$$= \langle \sum_{i=1}^n (A_{\nabla_{e_i}^\perp \alpha_k} \circ T_{r-1,k})(e_i), v\rangle$$

Et si on pose $v = \sum_{j=1}^n \langle v, e_j\rangle e_j$, nous avons alors

$$\sum_{i=1}^n \langle A_{\nabla_v^\perp \alpha_k}(e_i), T_{r-1,k}(e_i)\rangle = \sum_{i=1}^n \langle B(T_{r-1,k}(e_i), e_i), \nabla_v^\perp \alpha_k\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v, e_j\rangle \langle B(T_{r-1,k}(e_i), e_i), \nabla_{e_j}^\perp \alpha_k\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v, e_j\rangle \langle (A_{\nabla_{e_j}^\perp \alpha_k})(T_{r-1,k}(e_i)), e_i\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^n \langle v, e_j\rangle \sum_{i=1}^n \langle (A_{\nabla_{e_j}^\perp \alpha_k} \circ T_{r-1,k})(e_i), e_i\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^n \langle v, e_j\rangle tr(A_{\nabla_{e_j}^\perp \alpha_k} \circ T_{r-1,k})$$

$$= \langle v, \sum_{j=1}^n tr(A_{\nabla_{e_j}^\perp \alpha_k} \circ T_{r-1,k}) e_j\rangle$$

Ceci nous donne

$$\sum_{i=1}^n \langle A_{\nabla_v^\perp \alpha_k}(e_i) - A_{\nabla_{e_i}^\perp \alpha_k}(v), T_{r-1,k}(e_i)\rangle = \langle v, \sum_{j=1}^n tr(A_{\nabla_{e_j}^\perp \alpha_k} \circ T_{r-1,k}) e_j\rangle - \langle \sum_{i=1}^n (A_{\nabla_{e_i}^\perp \alpha_k} \circ T_{r-1,k})(e_i), v\rangle$$

$$= \langle \sum_{j=1}^{n} tr(A_{\nabla^{\perp}_{e_j}\alpha_k} \circ T_{r-1,k})e_j - \sum_{i=1}^{n} (A_{\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha_k} \circ T_{r-1,k})e_i, v\rangle$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{n} \left[tr(A_{\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha_k} \circ T_{r-1,k}) - (A_{\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha_k} \circ T_{r-1,k}) \right] e_i, v\rangle$$

Nous avons donc

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(v, e_i)T_{r-1,k}(e_i), \alpha_k\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{e_i} A_{\alpha_k})(v) - (\nabla_v A_{\alpha_k})(e_i), T_{r-1,k}(e_i)\rangle +$$

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \left[tr(A_{\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha_k} \circ T_{r-1,k}) - (A_{\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha_k} \circ T_{r-1,k}) \right] e_i, v\rangle$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{e_i} A_k)(T_{r-1,k}(e_i)), v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(v, e_i)T_{r-1,k}(e_i), \alpha_k\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_v A_k)(e_i), T_{r-1,k}(e_i)\rangle -$$

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \left[tr(A_{\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha_k} \circ T_{r-1,k}) - (A_{\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha_k} \circ T_{r-1,k}) \right] e_i, v\rangle$$

et alors

$$\langle div_M T_{r,k}, v\rangle = \langle \nabla S_{r,k}, v\rangle - \langle A_k div_M T_{r-1,k}, v\rangle - \langle \sum_{i=1}^{n} \overline{R}(\alpha_k, T_{r-1,k}(e_i))e_i, v\rangle - tr(T_{r-1,k} \circ \nabla_v A_k) +$$

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \left[tr(A_{\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha_k} \circ T_{r-1,k}) - (A_{\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha_k} \circ T_{r-1,k}) \right] e_i, v\rangle$$

On peut montrer que

$$\langle \nabla S_{r,k}, v\rangle = tr(T_{r-1,k} \circ \nabla_v A_k).$$

En effet, soit $(e_1, ..., e_n)$ la base de T_pM formée par les vecteurs propres de A_k

$$(\nabla_v A_k)(e_i) = \nabla_v(A_k(e_i)) - A_k(\nabla_v e_i)$$

$$= \nabla_v(\lambda_{i,k} e_i) - A_k(\sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_v e_i, e_j\rangle e_j)$$

$$= \lambda_{i,k} \nabla_v e_i + v(\lambda_{i,k})e_i - \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_v e_i, e_j\rangle A_k(e_j)$$

$$= v(\lambda_{i,k})e_i + \lambda_{i,k}\nabla_v e_i - \sum_{j=1}^{n}\langle \nabla_v e_i, e_j\rangle \lambda_{j,k} e_j$$

$$= v(\lambda_{i,k})e_i + \lambda_{i,k}\sum_{j=1}^{n}\langle \nabla_v e_i, e_j\rangle e_j - \sum_{j=1}^{n}\langle \nabla_v e_i, e_j\rangle \lambda_{j,k} e_j$$

$$= v(\lambda_{i,k})e_i + \sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,k}\langle \nabla_v e_i, e_j\rangle e_j - \sum_{j=1}^{n}\langle \nabla_v e_i, e_j\rangle \lambda_{j,k} e_j$$

$$= v(\lambda_{i,k})e_i + \sum_{j=1}^{n}(\lambda_{i,k} - \lambda_{j,k})\langle \nabla_v e_i, e_j\rangle e_j$$

Par conséquent

$$T_{r-1,k}((\nabla_v A_k)(e_i)) = v(\lambda_{i,k})T_{r-1,k}(e_i) + \sum_{j=1}^{n}(\lambda_{i,k} - \lambda_{j,k})\langle \nabla_v e_i, e_j\rangle T_{r-1,k}(e_j)$$

$$= v(\lambda_{i,k})T_{r-1,k}(e_i) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\lambda_{j,k}\langle \nabla_v e_i, e_j\rangle T_{r-1,k}(e_j)$$

Puisque $e_1, ..., e_n$ sont des vecteurs propres de A_k, alors se sont aussi des vecteurs propres de $T_{r-1,k}$ et on a

$$\langle T_{r-1,k}((\nabla_v A_k)(e_i)), e_i\rangle = \langle v(\lambda_{i,k})S_{r-1,k}(\widehat{\lambda_i})e_i, e_i\rangle - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\lambda_{j,k}\langle \nabla_v e_i, e_j\rangle S_{r-1,k}(\widehat{\lambda_j})\langle e_i, e_j\rangle$$

$$= v(\lambda_{i,k})S_{r-1,k}(\widehat{\lambda_i})$$

$$= v(\lambda_{i,k})\sum_{\substack{i_1\langle i_2\langle ...\langle i_{r-1}\\ i_j\neq i}}\lambda_{i_1,k}...\lambda_{i_{r-1},k}.$$

Nous obtenons alors

$$tr(T_{r-1,k}\circ \nabla_v A_k) = \sum_{i=1}^{n} v(\lambda_{i,k})\sum_{\substack{i_1\langle i_2\langle ...\langle i_{r-1}\\ i_j\neq i}}\lambda_{i_1,k}...\lambda_{i_{r-1},k}$$

$$= v(\sum_{i_1\langle i_2\langle ...\langle i_r}\lambda_{i_1,k}...\lambda_{i_r,k})$$

$$= v(S_{r,k})$$

$$= \langle \nabla S_{r,k}, v\rangle$$

Nous avons donc

$$\langle\ div_M T_{r,k}, v\rangle = -\langle A_k div_M T_{r-1,k}, v\rangle - \langle\sum_{i=1}^{n}\overline{R}(\alpha_k, T_{r-1,k}(e_i))e_i, v\rangle -$$

$$\langle\sum_{i=1}^{n}\left[tr(A_{\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha_k}\circ T_{r-1,k}) - (A_{\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha_k}\circ T_{r-1,k})\right] e_i, v\rangle$$

$$= -\langle A_k div_M T_{r-1,k}, v\rangle - \langle\sum_{i=1}^{n}(\overline{R}(\alpha_k, T_{r-1,k}(e_i))e_i)^{\top}, v\rangle -$$

$$\langle\sum_{i=1}^{n}\left[tr(A_{\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha_k}\circ T_{r-1,k}) - (A_{\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha_k}\circ T_{r-1,k})\right] e_i, v\rangle$$

d'où

$$div_M T_{r,k} = -A_k div_M T_{r-1,k} - \sum_{i=1}^{n}(\overline{R}(\alpha_k, T_{r-1,k}(e_i))e_i)^{\top} -$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[tr(A_{\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha_k}\circ T_{r-1,k}) - (A_{\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha_k}\circ T_{r-1,k})\right] e_i$$

■

Corollaire 3.1.2 *Si le champ de vecteurs α_k est parallèle sur le fibré normal, alors $\overline{\nabla}^{\perp}_{e_i}\alpha_k = 0$ et nous avons dans ce cas*

$$div_M T_{r,k} = -A_k(div_M T_{r-1,k}) - \sum_{i=1}^{n}\overline{(R}(\alpha_k, T_{r-1,k}(e_i))^{\top}$$

ou $\overline{R}$ est le tenseur de courbure de $\overline{M}^{n+m}$.
Ceci est équivalent pour tout $v \in \varkappa(M)$ à

$$\langle div_M T_{r,k}, v\rangle = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}(-1)^j\langle\overline{R}(\alpha_k, T_{r-j,k}(e_i)), A_k^{j-1}v\rangle \tag{3.4}$$

Démonstration : Pour l'égalité (3.4) faisons une démonstration par réccurence sur r.

Pour $r = 1$ on a d'aprés (3.3)

$$\langle\ div_M T_{1,k}, v\rangle = -\langle A_k div_M T_{0,k}, v\rangle - \langle\sum_{i=1}^{n}\overline{R}(\alpha_k, T_{0,k}(e_i))e_i, v\rangle$$

$$= -\langle A_k div_M I, v\rangle - \langle\sum_{i=1}^{n}\overline{R}(\alpha_k, I(e_i))e_i, v\rangle$$

$$= -\langle\sum_{i=1}^{n}\overline{R}(\alpha_k, e_i)e_i, v\rangle$$

et l'égalité (3.4) est bien vérifiée pour $r = 1$.

Supposons maintenant que (3.4) est vraie jusqu'à l'ordre $r-1$, on obtient par l'égalité (3.3)

$$\langle\ div_M T_{r,k}, v\rangle = -\langle A_k div_M T_{r-1,k}, v\rangle - \langle\sum_{i=1}^{n}\overline{R}(\alpha_k, T_{r-1,k}(e_i))e_i, v\rangle$$

$$= -\langle div_M T_{r-1,k}, A_k v\rangle - \langle\sum_{i=1}^{n}\overline{R}(\alpha_k, T_{r-1,k}(e_i))e_i, v\rangle$$

$$= -\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^j\langle\overline{R}(\alpha_k, T_{r-j-1,k}(e_i))e_i, A_k^j v\rangle - \langle\sum_{i=1}^{n}\overline{R}(\alpha_k, T_{r-1,k}(e_i))e_i, v\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{r-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{j+1}\langle\overline{R}(\alpha_k, T_{r-j-1,k}(e_i))e_i, A_k^j v\rangle - \langle\sum_{i=1}^{n}\overline{R}(\alpha_k, T_{r-1,k}(e_i))e_i, v\rangle$$

Posons $l = j + 1$, alors

$$\langle div_M T_{r,k}, v\rangle = \sum_{l=2}^{r}\sum_{i=1}^{n}(-1)^l\langle\overline{R}(\alpha_k, T_{r-l,k}(e_i))e_i, A_k^{l-1}v\rangle - \langle\sum_{i=1}^{n}\overline{R}(\alpha_k, T_{r-1,k}(e_i))e_i, v\rangle$$

$$= \sum_{l=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}(-1)^l\langle\overline{R}(\alpha_k, T_{r-l,k}(e_i))e_i, A_k^{l-1}v\rangle.$$

■

En particulier si l'espace ambient $\overline{M}$ a une courbure sectionnelle constante,

$$\langle\overline{R}(\alpha_k, T_{r-l,k}(e_i))e_i, A_k^{l-1}v\rangle = 0$$

et donc:

$$\langle div_M T_{r,k}, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in \varkappa(M).$$

ce qui donne:

$$div_M T_{r,k} = 0.$$

Chapitre 4

Configuration géométrique

Soit $\overline{M}^{n+m}$une variété rièmannienne orientable de métrique $\langle , \rangle$. Soit $P^n \subset \overline{M}^{n+m}$ une sous-variété connexe orientée dans $\overline{M}^{n+m}$ de dimension n, et $\Sigma^{n-1} \subset P^n$ une hypersurface compacte de dimension $n-1$.

Soit $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+m}$une sous-variété orientable, connexe et compacte du bord ∂M^n, lors on se pose la question naturelle suivante:

Quelle est la géométrie de M^n le long du bord ∂M^n relativement à la géométrie de l'inclusion $\Sigma^{n-1} \subset P^n$ et de l'inclusion $P^n \subset \overline{M}^{n+m}$?

Nous allons essayer d'étudier partiellement cette question. Nous suivant le modèle dans [2]. Nous commencerons par choisir une orientation de cette configuration.

Soit $p \in \partial M^n$ et $(e_1, ..., e_{n-1})$ une base orthonormale de $T_p\Sigma^{n-1}$.

On peut choisir un champ de vecteurs unitaire η normal à Σ^{n-1} dans P^n tel que $(e_1, ..., e_{n-1}, \eta(p))$ soit une base orthonormale de T_pP^n.

On a la décomposition

$$T_p\overline{M}^{n+m} = T_pP^n \oplus (T_pP^n)^{\perp}$$

où $(T_pP^n)^{\perp}$ désigne l'ortogonal de T_pP^n.

Soit $(\zeta_1, ..., \zeta_m)$une base orthonormale de $(T_pP^n)^{\perp}$.

Donc: $(e_1, ..., e_{n-1}, \eta(p), \zeta_1, ..., \zeta_m)$ est une base orthonormale de $T_p\overline{M}^{n+m}$.

De même, puisque Σ^{n-1} est le bord de M^n qui est supposée par hypothèse orientée et par suite elle induit une orientation sur Σ^{n-1}, et donc il existe un champ de vecteurs ν tel que $(e_1, ..., e_{n-1}, \nu(p))$ soit une base de T_pM^n.

Notons par $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ une base orthonormale de $(T_pM^n)^{\perp}$.

Donc: $(e_1, ..., e_n, \nu(p), \alpha_1, ..., \alpha_m)$ est une base orthonormale de $T_p\overline{M}^{n+m}$.

Soit A_Σ l'opérateur de la seconde forme fondamentale de l'inclusion $\Sigma^{n-1} \subset P^n$ associée au champ de vecteurs unité η, et pour $l \in (1, ..., m)$ notons par

$A_{P,l}$ l'opérateur de la seconde forme fondamentale de l'inclusion $P^n \subset \overline{M}^{n+m}$ associée au champ de vecteurs unitaire ζ_l.

Pour $i, j \in (1, ..., n-1)$ on a

$$\overline{\nabla}_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^{n-1} \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, e_k \rangle e_k + \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \eta \rangle \eta + \sum_{l=1}^{m} \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \zeta_l \rangle \zeta_l$$

et aussi

$$\overline{\nabla}_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^{n-1} \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, e_k \rangle e_k + \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \nu \rangle \nu + \sum_{l=1}^{m} \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \alpha_l \rangle \alpha_l$$

et par conséquent

$$\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \eta \rangle \eta + \sum_{l=1}^{m} \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \zeta_l \rangle \zeta_l = \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \nu \rangle \nu + \sum_{l=1}^{m} \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \alpha_l \rangle \alpha_l.$$

Or

$$\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \alpha_l \rangle = -\langle e_j, \overline{\nabla}_{e_i} \alpha_l \rangle + e_i(\langle e_j, \alpha_l \rangle)$$

et puisque

$$\langle e_j, \alpha_l \rangle = 0$$

alors

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \alpha_l \rangle &= -\langle e_j, \overline{\nabla}_{e_i} \alpha_l \rangle \\
&= \langle e_j, (-\overline{\nabla}_{e_i} \alpha_l) \rangle \\
&= \langle e_j, (-\overline{\nabla}_{e_i} \alpha_l)^{\top} \rangle + \langle e_j, (-\overline{\nabla}_{e_i} \alpha_l)^{\perp} \rangle \\
&= \langle e_j, (-\overline{\nabla}_{e_i} \alpha_l)^{\top} \rangle \\
&= \langle A_l(e_i), e_j \rangle
\end{aligned}$$

avec A_l l'opérateur de la seconde forme fondamentale de l'immersion associée au vecteur α_l, $l \in (1, ..., m)$.

De même on a:

$$\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \eta \rangle = \langle A_\Sigma(e_i), e_j \rangle$$

et pour tout $l \in (1, ..., m)$:

$$\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \zeta_l \rangle = \langle A_{P,l}(e_i), e_j \rangle$$

par conséquent

$$\sum_{l=1}^{m} \langle A_l(e_i), e_j \rangle \alpha_l + \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \nu \rangle \nu = \sum_{l=1}^{m} \langle A_{P,l}(e_i), e_j \rangle \zeta_l + \langle A_\Sigma(e_i), e_j \rangle \eta$$

ce qui donne

$$\langle \sum_{l=1}^{m} \langle A_l(e_i), e_j \rangle \alpha_l, \alpha_k \rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \nu \rangle \langle \nu, \alpha_k \rangle = \langle \sum_{l=1}^{m} \langle A_{P,l}(e_i), e_j \rangle \zeta_l, \alpha_k \rangle + \langle A_\Sigma(e_i), e_j \rangle \langle \eta, \alpha_k \rangle$$

ou encore

$$\sum_{l=1}^{m} \langle A_l(e_i), e_j \rangle \langle \alpha_l, \alpha_k \rangle = \sum_{l=1}^{m} \langle A_{P,l}(e_i), e_j \rangle \langle \zeta_l, \alpha_k \rangle + \langle A_\Sigma(e_i), e_j \rangle \langle \eta, \alpha_k \rangle$$

d'où

$$\langle A_k(e_i), e_j \rangle = \sum_{l=1}^{m} \langle A_{P,l}(e_i), e_j \rangle \langle \zeta_l, \alpha_k \rangle + \langle A_\Sigma(e_i), e_j \rangle \langle \eta, \alpha_k \rangle. \tag{4.1}$$

Supposons maintenant que P^n est totalement embilique, alors il existe une fonction $\lambda_l \in C^\infty(P^n)$ telle que $A_{P,l} = \lambda_l I$ où I est l'identité dans $\varkappa(M)$.

Choisissons maintenant la base$(e_1, ..., e_{n-1})$ de $T_p\Sigma^{n-1}$ formée par les vecteurs propres de A_Σ, on obtient alors que pour tout $i \in (1, ...n-1)$

$$A_\Sigma(e_i) = \tau_i e_i$$

et de la relation (4.1), on tire

$$\langle A_k(e_i), e_j \rangle = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \langle \zeta_l, \alpha_k \rangle \delta_i^j + \tau_i \delta_i^j \langle \eta, \alpha_k \rangle$$

$$= (\sum_{l=1}^{m} \lambda_l \langle \zeta_l, \alpha_k \rangle + \tau_i \langle \eta, \alpha_k \rangle) \delta_i^j$$

Posons pour simplifier

$$\gamma_{i,k} = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \langle \zeta_l, \alpha_k \rangle + \tau_i \langle \eta, \alpha_k \rangle$$

on a alors

$$\langle A_k(e_i), e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \gamma_{i,k} & \text{pour } i = j \end{cases} .$$

La matrice A_k s'écrit donc dans la base $(e_1, ..., e_{n-1}, \nu)$ sous la forme

$$A_k = \begin{pmatrix} \gamma_{1,k} & 0 & ... & ... & \langle A_k \nu, e_1 \rangle \\ 0 & \gamma_{2,k} & 0 & ... & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & ... & \gamma_{n-1,k} & \langle A_k \nu, e_{n-1} \rangle \\ \langle A_k \nu, e_1 \rangle & ... & ... & \langle A_k \nu, e_{n-1} \rangle & \langle A_k \nu, \nu \rangle \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant le polynôme caractéristique de A_k.

Lemme 4.0.3 *Le polynôme caractéristique de A_k est donné par:*

$$\det(tI_n - A_k) = (t - \langle A_k v, v \rangle) \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i s_i(\gamma_k) t^{n-1-i} - \sum_{i=1}^{n-1} \langle A_k v, e_i \rangle^2 \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^j s_j(\widehat{\gamma_{i,k}}) t^{n-2-j}$$

avec $s_i(\gamma_k)$ (resp $s_r(\widehat{\gamma_{j,k}})$) sont les fonctions élémentaires symmétriques de $\gamma_{1,k} \cdots \gamma_{n-1,k}$ (resp $\gamma_{1,k} \cdots \widehat{\gamma_{j,k}} \cdots \gamma_{n-1,k}$). $s_0(\gamma_k) = s_0(\widehat{\gamma_{j,k}}) = 1$ et $\gamma_k = (\gamma_{1,k} \cdots \gamma_{n-1,k})$.

Démonstration : Nous avons:

$$\det(tI_n - A_k) = (t - \gamma_{n-1,k}) \det(tI_{n-1} - B) - \langle A_k \nu, e_{n-1} \rangle^2 (t - \gamma_{1,k}) ... (t - \gamma_{n-2,k})$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} \gamma_{1,k} & 0 & ... & ... & \langle A_k \nu, e_1 \rangle \\ 0 & \gamma_{2,k} & 0 & ... & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & ... & \gamma_{n-2,k} & \langle A_k \nu, e_{n-2} \rangle \\ \langle A_k \nu, e_1 \rangle & ... & ... & \langle A_k \nu, e_{n-2} \rangle & \langle A_k \nu, \nu \rangle \end{pmatrix}.$$

Faisons maintenant un argument réccurssive sur n. Nous avons

$$\det(tI_n - A_k) = (t-\gamma_{n-1,k})\det(tI_{n-1}-B) - \langle A_k\nu, e_{n-1}\rangle^2 (t-\gamma_{1,k})...(t-\gamma_{n-2,k})$$

$$= (t-\gamma_{n-1,k})\begin{bmatrix} (t-\langle A_k\nu,\nu\rangle)\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i s_i(\widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-2-i} \\ -\sum_{i=1}^{n-2}\langle A_k\nu, e_i\rangle^2 \sum_{j=0}^{n-3}(-1)^j s_j(\widehat{\gamma_{i,k}},\widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-3-j}\end{bmatrix} -$$

$$\langle A_k\nu, e_{n-1}\rangle^2 (t-\gamma_{1,k})...(t-\gamma_{n-2,k})$$

$$= (t-\langle A_k\nu,\nu\rangle)(t-\gamma_{n-1,k})\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i s_i(\widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-2-i} -$$

$$(t-\gamma_{n-1,k})\sum_{i=1}^{n-2}\langle A_k\nu, e_i\rangle^2 \sum_{j=0}^{n-3}(-1)^j s_j(\widehat{\gamma_{i,k}},\widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-3-j} -$$

$$\langle A_k\nu, e_{n-1}\rangle^2 \sum_{j=0}^{n-2}(-1)^j s_j(\gamma_{1,k},...,\gamma_{n-2,k})t^{n-2-j}$$

$$= (t-\langle A_k\nu,\nu\rangle)\left[\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i s_i(\widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-1-i} - \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i\gamma_{n-1,k}s_i(\widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-2-i}\right] -$$

$$\sum_{i=1}^{n-2}\langle A_k\nu, e_i\rangle^2 \sum_{j=0}^{n-3}(-1)^j s_j(\widehat{\gamma_{i,k}},\widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-2-j} + \sum_{i=1}^{n-2}\langle A_k\nu, e_i\rangle^2 \sum_{j=0}^{n-3}(-1)^j\gamma_{n-1,k}s_j(\widehat{\gamma_{i,k}},\widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-3-j}$$

$$-\langle A_k\nu, e_{n-1}\rangle^2 \sum_{j=0}^{n-2}(-1)^j s_j(\widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-2-j}.$$

Posons $l = i+1$ dans la deuxiéme somme et $m = j+1$ dans la sixième somme, nous trouvons donc

$$\det(tI_n - A_k) = (t-\langle A_k\nu,\nu\rangle)\left[\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i s_i(\widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-1-i} + \sum_{l=1}^{n-1}(-1)^l\gamma_{n-1,k}s_{l-1}(\widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-1-l}\right] +$$

$$\sum_{i=1}^{n-2}\langle A_k\nu, e_i\rangle^2 \sum_{j=0}^{n-3}(-1)^{j+1} s_j(\widehat{\gamma_{i,k}},\widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-2-j} +$$

$$\sum_{i=1}^{n-2}\langle A_k\nu, e_i\rangle^2 \sum_{m=1}^{n-2}(-1)^{m+1}\gamma_{n-1,k}s_{m-1}(\widehat{\gamma_{i,k}},\widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-2-m} - \langle A_k\nu, e_{n-1}\rangle^2 \sum_{j=0}^{n-2}(-1)^j s_j(\widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-2-j}$$

$$= (t - \langle A_k\nu, \nu\rangle)\left[\sum_{i=1}^{n-2}(-1)^i(s_i(\widehat{\gamma_{n-1,k}}) + \gamma_{n-1,k}s_{i-1}(\widehat{\gamma_{n-1,k}}))t^{n-1-i}\right] +$$

$$(t - \langle A_k\nu, \nu\rangle)\left[s_0(\widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-1} + (-1)^{n-1}\gamma_{n-1,k}s_{n-2}(\widehat{\gamma_{n-1,k}})\right] +$$

$$\sum_{i=1}^{n-2}\langle A_k\nu, e_i\rangle^2\sum_{j=1}^{n-3}(-1)^{j+1}(s_j(\widehat{\gamma_{i,k}}, \widehat{\gamma_{n-1,k}}) + \gamma_{n-1,k}s_{j-1}(\widehat{\gamma_{i,k}}, \widehat{\gamma_{n-1,k}}))t^{n-2-j}+$$

$$\sum_{i=1}^{n-2}\langle A_k\nu, e_i\rangle^2(-s_0(\widehat{\gamma_{i,k}}, \widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-2} + (-1)^{n-1}\gamma_{n-1,k}s_{n-3}(\widehat{\gamma_{i,k}}, \widehat{\gamma_{n-1,k}}))-$$

$$\langle A_k\nu, e_{n-1}\rangle^2\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^js_j(\widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-2-j}$$

$$= (t - \langle A_k\nu, \nu\rangle)\sum_{i=1}^{n-2}(-1)^is_i(\gamma_k)t^{n-1-i} + (t - \langle A_k\nu, \nu\rangle)s_0(\widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-1}+$$

$$(t-\langle A_k\nu, \nu\rangle)(-1)^{n-1}\gamma_{n-1,k}s_{n-2}(\widehat{\gamma_{n-1,k}})+\sum_{i=1}^{n-2}\langle A_k\nu, e_i\rangle^2\sum_{j=1}^{n-3}(-1)^{j+1}s_j(\widehat{\gamma_{i,k}})t^{n-2-j}+$$

$$\sum_{i=1}^{n-2}\langle A_k\nu, e_i\rangle^2(-s_0(\widehat{\gamma_{i,k}}, \widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-2})+\sum_{i=1}^{n-2}\langle A_k\nu, e_i\rangle^2(-1)^{n-1}\gamma_{n-1,k}s_{n-3}(\widehat{\gamma_{i,k}}, \widehat{\gamma_{n-1,k}})-$$

$$\langle A_k\nu, e_{n-1}\rangle^2\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^js_j(\widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-2-j}.$$

Or, par définition des fonctions symétriques s_r, nous avons:

$$s_0(\widehat{\gamma_{n-1}}) = 1 = s_0(\gamma)$$

$$\gamma_{n-1,k}s_{n-2}(\widehat{\gamma_{n-1,k}}) = \gamma_{n-1,k}.(\gamma_{1,k}...\gamma_{n-2,k}) = s_{n-1}(\gamma_k)$$

$$s_0(\widehat{\gamma_{i,k}}, \widehat{\gamma_{n-1,k}}) = 1 = s_0(\widehat{\gamma_{i,k}})$$

$$\gamma_{n-1,k}s_{n-3}(\widehat{\gamma_{i,k}}, \widehat{\gamma_{n-1,k}}) = \gamma_{n-1,k}\prod_{j=1,j\neq i}^{n-2}\gamma_{j,k}$$

$$= \prod_{j=1,j\neq i}^{n-1}\gamma_{j,k}$$

$$= s_{n-2}(\widehat{\gamma_{i,k}}).$$

Par conséquent

$$\det(tI_n - A_k) = (t - \langle A_k\nu,\nu\rangle)\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i s_i(\gamma_k)t^{n-1-i} - \sum_{i=1}^{n-2}\langle A_k\nu, e_i\rangle^2\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^j s_j(\widehat{\gamma_{i,k}})t^{n-2-j} -$$

$$\langle A_k\nu, e_{n-1}\rangle^2\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^j s_j(\widehat{\gamma_{n-1,k}})t^{n-2-j}$$

$$= (t - \langle A_k\nu,\nu\rangle)\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i s_i(\gamma_k)t^{n-1-i} - \sum_{i=1}^{n-1}\langle A_k\nu, e_i\rangle^2\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^j s_j(\widehat{\gamma_{i,k}})t^{n-2-j}.$$

D'où le résultat. ■

Or nous avons

$$\det(tI - A_k) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r S_{r,k}t^{n-r}$$

En comparant les termes du polynôme caractéristique on trouvre que les fonctions élémentaire symétriques $S_{r,k}$ sont données en un point du bord $p \in \partial M^n$ par:

$$S_{1,k} = s_1(\gamma_k) + \langle A_k\nu,\nu\rangle \tag{4.2}$$

$$S_{r,k} = s_r(\gamma_k) + s_{r-1}(\gamma_k)\langle A_k\nu,\nu\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} s_{r-2}(\widehat{\gamma_{i,k}})\langle A_k\nu, e_i\rangle^2 \tag{4.3}$$

pour $2 \le r \le n$.

Chapitre 5

Les transformations de Newton sur le bord

Observons que les expressions (4.2) et (4.3) donnent une réponse partielle à notre question, car elles relient la géométrie de M^n le long du bord ∂M^n, exprimée par $S_{r,k}$ et la géométrie des inclusions $\Sigma^{n-1} \subset P^n$ et $P^n \subset \overline{M}^{n+m}$, exprimées par $s_r(\gamma_k)$ et A_k respctivement. De plus on a le résultat suivant

Proposition 5.0.4 *Soit $P^n \subset \overline{M}^{n+m}$ une sous-variété totalemnent embilique de dimension n et soit $\Sigma^{n-1} \subset P^n$ une hypersurface compacte et orientable de P^n de dimension $n-1$. Soient $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ une sous-variété connexe,orientable de bord $\Sigma^{n-1} = \psi(\partial M^n)$, et ν le champ de vecteurs sortant unitaire le long de ∂M^n. Alors, le long du bord ∂M^n on a, pour tout $1 \leq r \leq n-1$*

$$\langle T_{r,k}\nu, \nu\rangle = s_r(\gamma_k) = s_r(\gamma_{1,k}, ..., \gamma_{n-1,k}) \tag{5.1}$$

où:

$$\gamma_{i,k} = \langle \tau_i \eta + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \zeta_l, \alpha_k\rangle$$

et $\tau_1, ..., \tau_{n-1}$ sont les courbures principales de l'inclusion $\Sigma^{n-1} \subset P^n$.

Démonstration : Faisons une démonstration par réccurence sur r.

Pour $r = 1$, et pour $k \in (1, ..., m)$ on a

$$T_{1,k} = S_{1,k}I - A_k T_{0,k}$$
$$= S_{1,k}I - A_k I$$

et en tenant compte de la relation (4.2), on obtient que

$$T_{1,k} = (s_1(\gamma_k) + \langle A_k\nu, \nu\rangle)I - A_k I$$

Alors:

$$\langle T_{1,k}\nu,\nu\rangle = s_1(\gamma_k)\,\langle\nu,\nu\rangle + \langle A_k\nu,\nu\rangle\langle\nu,\nu\rangle - \langle A_k\nu,\nu\rangle$$

$$= s_1(\gamma_k)\langle\nu,\nu\rangle$$

d'où:

$$\langle T_{1,k}\nu,\nu\rangle = s_1(\gamma_k)$$

et l'égalité est bien vérifiée pour $r = 1$.

Supposons que pour tout $1 \leq j \leq r-1$, on ait

$$\langle T_{j,k}\nu,\nu\rangle = s_j(\gamma_k) \tag{5.2}$$

et observons que

$$A_k\nu = \sum_{i=1}^{n-1}\langle A_k\nu, e_i\rangle e_i + \langle A_k\nu,\nu\rangle\nu$$

et

$$T_{r,k} = S_{r,k}I - A_kT_{r-1,k}$$

puisque A_k est autoadjoint

$$\langle T_{r,k}\nu,\nu\rangle = S_{r,k} - \langle T_{r-1,k}\nu, A_k\nu\rangle$$

$$= S_{r,k} - \langle T_{r-1,k}\nu, \sum_{i=1}^{n-1}\langle A_k\nu, e_i\rangle e_i + \langle A_k\nu,\nu\rangle\nu\rangle$$

$$= S_{r,k} - \langle T_{r-1,k}\nu,\nu\rangle\langle A_k\nu,\nu\rangle - \sum_{i=1}^{n-1}\langle A_k\nu, e_i\rangle\langle T_{r-1,k}\nu, e_i\rangle \tag{5.3}$$

De plus nous avons

$$A_ke_i = \gamma_{i,k}e_i + \langle A_k\nu, e_i\rangle\nu$$

et donc

$$\langle T_{j,k}\nu, e_i\rangle = \langle S_{j,k}\nu - A_kT_{j-1,k}\nu, e_i\rangle$$

$$= S_{j,k}\langle\nu, e_i\rangle - \langle A_kT_{j-1,k}\nu, e_i\rangle$$

$$= -\langle T_{j-1,k}\nu, A_ke_i\rangle$$

Ceci nous donne par un argument réccursive que pour tous $1 \leq r \leq n-1$

$$\langle T_{r-1,k}\nu, e_i\rangle = -\langle A_k\nu, e_i\rangle \sum_{j=0}^{r-2}(-1)^j s_{r-2-j}(\gamma_k)\gamma_{i,k}^j.$$

En effet faisons une démonstration par réccurence sur r
Pour $r = 2$ on a:

$$\langle T_{1,k}\nu, e_i\rangle = S_{1,k}\langle \nu, e_i\rangle - \langle A_k\nu, e_i\rangle = -\langle A_k\nu, e_i\rangle$$

Donc l'égalité est vraie pour $r = 2$.
Supposons que l'égalité est vraie jusqu'a l'ordre $r-2$

$$\langle T_{r-1,k}\nu, e_i\rangle = S_{r-1,k}\langle \nu, e_i\rangle - \langle A_kT_{r-2,k}\nu, e_i\rangle$$

$$= -\langle A_kT_{r-2,k}\nu, e_i\rangle$$

$$= -\langle T_{r-2,k}\nu, A_ke_i\rangle$$

$$= -\gamma_{i,k}\langle T_{r-2,k}\nu, e_i\rangle - \langle A_k\nu, e_i\rangle\langle T_{r-2,k}\nu, \nu\rangle$$

$$= -\gamma_{i,k}(-\langle A_k\nu, e_i\rangle \sum_{j=0}^{r-3}(-1)^j s_{r-3-j}(\gamma_k)\gamma_{i,k}^j) - \langle A_k\nu, e_i\rangle s_{r-2}(\gamma_k)$$

$$= -\langle A_k\nu, e_i\rangle (\sum_{j=0}^{r-3}(-1)^{j+1} s_{r-3-j,k}(\gamma_k)\gamma_{i,k}^{j+1} - s_{r-2}(\gamma_k))$$

Posons $l = j+1$:

$$\langle T_{r-1,k}\nu, e_i\rangle = -\langle A_k\nu, e_i\rangle (\sum_{l=1}^{r-2}(-1)^l s_{r-2-l}(\gamma_k)\gamma_{i,k}^l - s_{r-2}(\gamma_k))$$

$$= -\langle A_k\nu, e_i\rangle \sum_{l=0}^{r-2}(-1)^l s_{r-2-l}(\gamma_k)\gamma_{i,k}^l$$

D'où le résultat.

Et d'aprés (2.4) nous avons donc:

$$\langle T_{r-1,k}\nu, e_i\rangle = -\langle A_k\nu, e_i\rangle \sum_{l=0}^{r-2}(-1)^l s_{r-2-l}(\gamma_k)\gamma_{i,k}^l = -\langle A_k\nu, e_i\rangle s_{r-2}(\widehat{\gamma_{i,k}}) \tag{5.4}$$

Remplaçons maintenant (5.4) dans (5.3) on trouve

$$\langle T_{r,k}\nu, \nu\rangle = S_{r,k} - \langle T_{r-1,k}\nu, \nu\rangle\langle A_k\nu, \nu\rangle - \sum_{i=1}^{n-1}\langle T_{r-1,k}\nu, e_i\rangle\langle A_k\nu, e_i\rangle$$

$$= S_{r,k} - \langle T_{r-1,k}\nu, \nu\rangle\langle A_k\nu, \nu\rangle + \sum_{i=1}^{n-1}\langle A_k\nu, e_i\rangle^2 s_{r-2}(\widehat{\gamma_{i,k}})$$

$$= s_r(\gamma_k) + s_{r-1}(\gamma_k)\langle A_k\nu, \nu\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} s_{r-2}(\widehat{\gamma_{i,k}})\langle A_k\nu, e_i\rangle^2 - s_{r-1}(\gamma_k)\langle A_k\nu, \nu\rangle +$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} s_{r-2}(\widehat{\gamma_{i,k}})\langle A_k\nu, e_i\rangle^2$$

et par conséquent

$$\langle T_{r,k}\nu, \nu\rangle = s_r(\gamma_k).$$

D'où le résultat. ■

Maintenant on va voir comment les fonctions élémentaires symmétriques $s_r(\gamma_k)$ peuvent s'éxprimer en termes de courbures principales $\tau_1, ..., \tau_{n-1}$ de l'inclusion $\Sigma^{n-1} \subset P^n$ et les facteurs d'embilicité λ_k de $P^n \subset \overline{M}^{n+m}$.

On écrit

$$\gamma_{i,k} = \mu_{i,k} + \beta_k$$

avec

$$\gamma_k = (\gamma_{1,k}, ..., \gamma_{n-1,k})$$

$$\mu_k = (\mu_{1,k}, ..., \mu_{n-1,k})$$

$$\mu_{i,k} = \tau_i\langle \eta, \alpha_k\rangle$$

$$\beta_k = \langle \sum_{l=1}^{m} \lambda_l\zeta_l, \alpha_k\rangle$$

Lemme 5.0.5 *Pour tout* $1 \leq r \leq n-1$*:*

$$s_{r,k}(\gamma_k) = \sum_{j=0}^{r} \binom{n-1-j}{r-j} \beta_k^{r-j} s_j(\mu_k)$$

Démonstration : Rappelons que $s_r(\gamma_k)$ peut définie par

$$\sum_{r=0}^{n-1} s_r(\gamma_k) t^{n-1-r} = (t-\gamma_{1,k})...(t-\gamma_{n-1,k}) \tag{5.5}$$

nous avons

$$\gamma_{i,k} = \mu_{i,k} + \beta_k$$

et donc

$$(t-\gamma_{1,k})...(t-\gamma_{n-1,k}) = ((t-\beta_k)-\mu_{1,k})...((t-\beta_k)-\mu_{n-1,k})$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j s_j(\mu_k)(t-\beta_k)^{n-1-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j s_j(\mu_k) \sum_{l=0}^{n-1-j} \binom{n-1-j}{l} (-1)^l \beta_k^l t^{n-1-j-l}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1-j} (-1)^{j+l} \binom{n-1-j}{l} s_j(\mu_k) \beta_k^l t^{n-1-j-l}$$

Posons $r = j + l$

$$(t-\gamma_{1,k})...(t-\gamma_{n-1,k}) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{r=j}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1-j}{r-j} s_j(\mu_k) \beta_k^{r-j} t^{n-1-r}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{r=j}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1-j}{r-j} \beta_k^{r-j} t^{n-1-r} s_j(\mu_k)$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} (\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1-j}{r-j} \beta_k^{r-j} s_j(\mu_k)) t^{n-1-r}$$

Ce qui donne en comparant avec (5.5)

$$s_r(\gamma_k) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1-j}{r-j} \beta_k^{r-j} s_j(\mu_k)$$

D'où le résultat. ■

Lemme 5.0.6 *Soit $P^n \subset \overline{M}^{n+m}$ une sous-variété orientable, totalement embilique, de dimension n, et soit $\Sigma^{n-1} \subset P^n$ une sous-varieté de P^n compacte et orientable de dimension $n-1$.Soit: $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ une sous-variété orientable, de bord $\Sigma^{n-1} = \psi(\partial M^n)$, et soit ν le vecteur sortant unité le long de ∂M^n. Alors, le long du bord ∂M^n et pour tout $1 \leq r \leq n-1$, on a*

$$\langle T_{r,k}\nu, \nu\rangle = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j \binom{n-1-j}{r-j} \langle \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \zeta_l, \alpha_k\rangle^{r-j} \langle \eta, \alpha_k\rangle^j s_j(\tau_1, ..., \tau_{n-1}) \tag{5.6}$$

avec $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$, (resp. $(\zeta_1, ..., \zeta_m)$) la base de l'espace $(T_pM^n)^{\perp}$,(resp$(T_pP^n)^{\perp}$), et $\tau_1, ..., \tau_{n-1}$ sont les courbures principales de l'inclusion $\Sigma^{n-1} \subset P^n$.

Démonstration : Remarquons d'abord que pour α un nombre réel,on a

$$\begin{aligned} s_r(\alpha x_1, ..., \alpha x_{n-1}) &= \sum_{i_1 \langle ... \langle i_r} (\alpha x_{i_1})...(\alpha x_{i_r}) \\ &= \alpha^r \sum_{i_1 \langle ... \langle i_r} x_{i_1}...x_{i_r} \\ &= \alpha^r s_r(x_1, ..., x_{n-1}) \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \langle T_{r,k}\nu, \nu\rangle &= s_r(\gamma_k) \\ &= \sum_{j=0}^{r}(-1)^r \binom{n-1-j}{r-j} \beta_k^{r-j} s_j(\mu_k) \\ &= \sum_{j=0}^{r}(-1)^r \binom{n-1-j}{r-j} \langle \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \zeta_l, \alpha_k\rangle^{r-j} s_{j,k}(\mu_{1.k}, ..., \mu_{n-1.k}) \\ &= \sum_{j=0}^{r}(-1)^r \binom{n-1-j}{r-j} \langle \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \zeta_l, \alpha_k\rangle^{r-j} s_j(\tau_1\langle \eta, \alpha_k\rangle, ..., \tau_{n-1}\langle \eta, \alpha_k\rangle) \\ &= \sum_{j=0}^{r}(-1)^r \binom{n-1-j}{r-j} \langle \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \zeta_l, \alpha_k\rangle^{r-j} \langle \eta, \alpha_k\rangle^j s_j(\tau_1, .., \tau_{n-1}) \end{aligned}$$

Donc

$$\langle T_{r,k}\nu, \nu\rangle = \sum_{j=0}^{r}(-1)^r \binom{n-1-j}{r-j} \langle \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \zeta_l, \alpha_k\rangle^{r-j} \langle \eta, \alpha_k\rangle^j s_j(\tau_1, .., \tau_{n-1}).$$

■

Chapitre 6

Transversalité et ellipticité

Dans ce chapitre on va établir une relation entre la transversalité de M^n et P^n le long du bord Σ^{n-1}, et l'elliptcité de la r^{ième} transformation de Newton $T_{r,k}$, pour $r \geq 1$. (rappelons que $T_0 = I$).

Les relations entre $S_{r,k}$ et $s_r(\gamma_k)$ données par les expressions (4.2) et (4.3), ainsi que l'expression de $\langle T_{r,k}\nu, \nu\rangle$ donnée par (5.1) deviennent simples si on considére que l'inclusion $P^n \subset \overline{M}^{n+m}$ est totalement géodésique, cela veut dire que $\lambda_l = 0$ pour tout $l = 1, ..., m$. Dans ce dernier cas nous avons le résultat suivant

Corollaire 6.0.7 ***Proposition 6.0.8*** *Soit Σ^{n-1} une sous-variété compacte et orientable de dimension $n-1$ dans une deuxième sous-variété $P^n \subset \overline{M}^{n+m}$ orientable et totalement géodésique de dimension n. Soit $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ uns sous-variété orientable de dimension n et du bord ∂M^n. Alors sur le bord ∂M^n et pour $1 \leq r \leq n$ nous avons*

$$S_{1,k} = \langle \eta, \alpha_k\rangle s_1(\tau_1, ..., \tau_{n-1}) + \langle A_k\nu, \nu\rangle \tag{6.1}$$

$$S_{r,k} = \langle \eta, \alpha_k\rangle^r\ s_r(\tau_1, ..., \tau_{n-1}) + \langle \eta, \alpha_k\rangle^{r-1} s_{r-1}(\tau_1, ..., \tau_{n-1})\langle A_k\nu, \nu\rangle$$

$$-\sum_{i=1}^{n-1}\langle \eta, \alpha_k\rangle^{r-2} s_{r-2}(\widehat{\tau}_i)\langle A_k\nu, e_i\rangle^2 \tag{6.2}$$

$$\langle T_{r,k}\nu, \nu\rangle = \langle \eta, \alpha_k\rangle^r s_r(\tau_1, ..., \tau_{n-1}). \tag{6.3}$$

Dire que M^n n'est pas traverse à P^n le long du son bord ∂M^n signifie qu'il existe un point $p \in \partial M^n$ tel que

$$\langle \eta, \xi \rangle (p) = 0$$

pour tout $\xi \in (T_p P^n)^{\perp}$.Ce qui signifie qu'il existe un point $p \in \partial M^n$ tel que:

$$\langle \eta, \alpha_k \rangle (p) = 0$$

pour tout $k \in (1, ..., m)$.

Théorème 5 *Si pour tout $k \in (1, ..., m)$ les transformations de Newton $T_{r,k}$ sont définies positives pour un certain $r \in (1, ..., n-1)$ alors la sous-variété M^n est traverse à la sous-variété P^n le long de son bord ∂M^n.*

6.1 Cas des hypersurfaces

Si nous considérons le cas des hypersurfaces,alors nous pouvons définir sur $(T_p M^n)^{\perp}$ un vecteur normal global α, et sur $(T_p P^n)^{\perp}$ un vecteur global η. Les relations (6.1), (6.2)et (6.3) deviennent alors

$$S_1 = \langle \eta, \alpha \rangle s_1(\tau_1, ..., \tau_{n-1}) + \langle A\nu, \nu \rangle \tag{6.4}$$

$$S_r = \langle \eta, \alpha \rangle^r \; s_r(\tau_1, ..., \tau_{n-1}) + \langle \eta, \alpha \rangle^{r-1} s_{r-1}(\tau_1, ..., \tau_{n-1}) \langle A\nu, \nu \rangle$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} \langle \eta, \alpha \rangle^{r-2} s_{r-2}(\widehat{\tau}_i) \langle A\nu, e_i \rangle^2 \tag{6.5}$$

$$\langle T_r \nu, \nu \rangle = \langle \eta, \alpha \rangle^r s_r(\tau_1, ..., \tau_{n-1}) \tag{6.6}$$

Dans ce cas particulier dire que M^n n'est pas traverse à P^n signifie tout simplement qu'il existe un point $p \in \partial M^n$ tel que: $\langle \eta, \alpha \rangle (p) = 0$. Et par conséquent on retrouve le résultat dans [2].

Corollaire 6.1.1 *Si la transformation de Newton T_r est définie positive pour un certain $1 \leq r \leq n-1$ alors l'hypersurface M^n est transverse à P^n le long de ∂M^n.*

Bibliographie

[1] A.D. Alexandrov, Uniqueness theorems for surfaces in the large V, Vestnik Leningrad Univ.Math. 13 (1958), 5–8; English translation: AMS Transl. 21 (1962) 412–416.

[2] L. J. Alias, J. H.S. De Lira, J. M. Malacarne. Constant higher order mean curvature hypersurfaces in Riemannian spaces, J. INST. MATH. JUSSIEU 5 (2006), NO. 4, 527–562.

[3] L.J. Alias, R, Lopez and B. Palmer, Stable constant mean curvature surfaces with circular boundary, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999) 1195–1200.

[4] L.J. Alias and J.M. Malacarne, Constant scalar curvature hypersurfaces with spherical boundary in Euclidean space, Rev. Mat. Iberoamericana 18 (2002) 431–442.

[5] J.L. Barbosa, Constant mean curvature surfaces bounded by a a planar curve, Mat. Contemp.1 (1991) 3–15.

[6] J.L. Barbosa, Hypersurfaces of constant mean curvature on $\mathbb{R}^{n+1}$ bounded by an Euclidean Sphere, Geometry and topology of submanifolds II, (Avignon, 1988), 1–9, World Sci. Publishing,NJ, 1990.

[7] J.L. Barbosa and A.G. Colares, Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature,Ann. Global Anal. Geom. 15 (1997) 277–297.

[8] F. Brito, R. S´a Earp, W. Meeks and H. Rosenberg, Structure theorems for constant mean curvature surfaces bounded by a planar curve, Indiana Univ. Math. J. 40 (1991) 333–343.

[9] J. Brothers (Editor), Some open problems in geometric measure theory and its applications.Proceedings of Symposia in Pure Math. Vol. 44, AMS 1985.

[10] M.P. do Carmo, Riemannian geometry, Birkhäuser, second edition. 1992.

[11] B.Y. Chen and K. Yano, integral formulas for submanifolds and their applications, J. Differential geometry, 5(1971)467-477.

[12] W.H. Hsiang, Z.H. TENG and W.C. Yu, New examples of contant mean curvature (2k-1)-spheres into Euclidian 2k-space, Ann. of Math. 117(1983) 609-625.

[13] N. Kapouleas, Compact constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space, J. Differential Geom., 33 (1991) 683–715.

[14] M. Koiso, Symmetry of hypersurfaces of constant mean curvature with symmetric boundary,Math. Z. 191 (1986) 567–574.

[15] N.J. Korevaar, Sphere theorems via Alexandrov for constant Weingarten curvature hypersurfaces:Appendix to a note of A. Ros, J. Differential Geom. 27 (1988) 221–223.

[16] R. Kusner, Global geometry of extremal surfaces in three-space. Doctoral Thesis, University of California (1985).

[17] B. O'Neill, Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Academic Press, New York, 1983.

[18] R.C. Reilly, Variational properties of functions of the mean curvature for hypersurfaces in space forms, J. Differential Geom. 8 (1973), 465–477.

[19] A. Ros, Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem, J.Differential Geom. 27 (1988), 215–220.

[20] A. Ros, Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures, Rev. Mat.Iberoamericana 3 (1987), 447–453.

[21] H. Rosenberg, Hypersurfaces of constant curvature in space forms, Bull. Sc. Math. 117(1993), 211–239.

[22] H.C.Wente, countre example to a conjecture of H.Hopf, Pacific J. Math. 121(1986), 193-242