République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bakr Belkaid- Tlemcen

Faculté des Sciences

Département des Mathématiques

Mémoire de Master

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Equations Différentielles Ordinaires

Thème

Introduction aux calcul quantique

Présenté par : **CHETTI NACER**

Mémoire soutenu devant le jury composé de :

- ✓ Mr.Yebdri Mustapha Pr. U.A.B.B. Tlemcen — Président
- ✓ Mr.Mebkhout Benmiloud Pr. U.A.B.B. Tlemcen — Examinateur
- ✓ Mr.Derhab Mohamed Pr. U.A.B.B. Tlemcen — Encadreur

Année universitaire 2016-2017

Dédicace

Sans ta persévérance, et sans ton soutient morale ce travail n'aurait jamais pu voir le jour.... A toi « **NAIMA**» en premier lieu que je dédie ce mémoire.

Je dédie aussi ce travail à mes deux filles « **SARA** » et «**JIHAD** ».

A la petite **MERIEME**

ma nièce la jeune étudiante en maths qui m'as aidé à saisir en latex.

REMERCIEMENTS

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce aux efforts de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je tiens avant tout à exprimer ma reconnaissance à mes encadreurs durant la période des études de master : **Mr DIB Hacen**, **Mr YEBDRI Mustapha**, **Mr DERHAB Mohamed** et **Mme MERZAGUI Naima**.

J'adresse des remerciements particuliers au chef de département **Mr MEBKHOUT Benmiloud** l'homme à la double mission pédagogique et administrative.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à mes amis « **HAMITOUCHE Hadj Miloud** » et « **CHERF Mohammed** » qui m'ont apporté leurs support moral et intellectuel au long de cette mission, un remerciement infini à «**SAFSAF Abdelhadi** » le jeune étudiant qui m'a accompagné les premiers jours inoubliables à l'université.

Je désire aussi adresser tout ma gratitude au directeur de ce mémoire **Mr DERHAB Mohammed** pour sa collaboration et ses efforts en m'indiquant des articles relatifs au thème a ce mémoire à cause de l'absence totale des livres sur ce sujet.

Table des Matières

Introduction

L'objet de ce mémoire est de donner quelques résultats concernant le q-calcul qui intervient dans plusieurs branches mathématiques et physiques comme l'analyse combinatoire, les fonctions $q-$spéciales, le calcul ombral et la physique théorique.

Ce mémoire comprend quatre chapitres.

Dans le premier chapitre on définit la q-dérivée et la q-intégrale, on donne quelques propriétés de ces deux notions et on donne aussi quelques exemples d'applications. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [1], [3], [6], [7], [10] et [11].

Le deuxième chapitre est consacré à la résolution explicite de quelques équations aux q-différences linéaires d'ordre 1. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [3].

Dans le troisième chapitre on définit la $q-$addition et on donne ses propriétés, on définit aussi la fonction q-logarithme et la fonction q-exponentielle de base a et on donne quelques propriétés des fonctions $q-$trigonométrique. Les résultas de ce chapitre se trouvent dans [6], [7] et [4].

Enfin le dernier chapitre est consacré à la q-transformée de Laplace. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [2] et [5].

Chapitre 1

Sur la $q-$dérivée et la $q-$intégrale.

Dans ce chapitre on définit la q-dérivée et la q-intégrale, on donne quelques propriétés de ces deux notions et on donne aussi quelques exemples d'applications. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [1], [3], [6], [7], [10] et [11].

1.1 Sur la q-dérivée.

Définition 1.1.1 *soit A un ensemble non vide de $\mathbb{R}$, A est dit q-géométrique si $q.t \in A$ pour $t \in A$, avec $0 < q < 1$.*

Définition 1.1.2 *soit f une fonction définie sur un ensemble q-géométrique, la q-dérivée de f notée $D_q f$ est définie par*

$$D_q f(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(qt)}{(1-q)t} & si\ t \neq 0, \\ \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t) - f(qt)}{(1-q)t} & si\ t = 0. \end{cases}$$

Remarque 1.1.3 *Soit f une fonction définie sur un ensemble q géométrique.*

Si $t \neq 0$, on a

$$\lim_{q \to 1} D_q f(t) = \lim_{q \to 1} \frac{f(t) - f(qt)}{(1-q)t}.$$

Maintenant si on pose $(1-q)t = h$, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{q \to 1} D_q f(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\ &= f'(t). \end{aligned}$$

Notation 1 *On note par*

$$D_q^0 f(t) = f(t),$$

et

$$D_q^n f(t) = D_q D_q^{n-1} f(t) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Théorème 2 *(Propriétés de la q-dérivée).*

Soit f et g deux fonctions q-dérivables sur un ensemble q-géométrique A et a et b deux nombres réels, alors on a

(i) $D_q(af + bg)(t) = aD_q f(t) + bD_q g(t)$.

(ii) $D_q(fg)(t) = g(qt)D_q f(t) + f(t)D_q g(t)$.

(iii) $D_q(\frac{f}{g})(t) = \dfrac{g(qt)D_q f(t) - f(qt)D_q g(t)}{g(qt)g(t)}$ *si* $g \neq 0$ *sur* A.

En particulier si $f \equiv 1$, on a

$$D_q(\frac{1}{g})(t) = \frac{-D_q g(t)}{g(qt)g(t)}.$$

(iv) $D_q(\sqrt{f})(t) = \dfrac{D_q f(t)}{\sqrt{f(qt)} + \sqrt{f(t)}}$ *si* $f > 0$ *sur* A.

Démonstration :

(i) On a

$$\begin{aligned} D_q(af + bg)(t) &= \frac{(af + bg)(qt) - (af + bg)(t)}{(q-1)t} \\ &= a\frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t} + b\frac{g(qt) - g(t)}{(q-1)t} \\ &= aD_q f(t) + bD_q g(t). \end{aligned}$$

(ii) On a

$$\begin{aligned} D_q(fg)(t) &= \frac{(f.g)(qt) - (f.g)(t)}{(q-1)t} \\ &= \frac{f(qt).g(qt) - f(t)q(t)}{(q-1)t} \end{aligned}$$

On ajoute et on retranche $f(qt).g(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} D_q(fg)(t) &= \frac{f(qt)g(qt) - f(qt)g(t) + f(qt)g(t) - f(t)g(t)}{(q-1)t} \\ &= f(qt)\frac{g(qt) - g(t)}{(q-1)t} + g(t)\frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t} \\ &= f(qt)D_q g(t) + g(t)D_q f(t). \end{aligned}$$

De même on peut avoir

$$D_q(fg)(t) = g(qt)D_q f(t) + f(t)D_q g(t).$$

(iii) On a

$$\begin{aligned} D_q(\frac{f}{g})(t) &= \frac{\dfrac{f(qt)g(t) - f(t)g(qt)}{g(qt)g(t)}}{(q-1)t} \\ &= \frac{f(qt)g(t) - f(qt)g(qt) + f(qt)g(qt) - f(t)g(qt)}{(q-1)tg(qt)g(t)} \\ &= \frac{\dfrac{g(t) - g(qt)}{(q-1)t}f(qt) + \dfrac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t}g(qt)}{g(qt)g(t)} \\ &= \frac{-f(qt)D_q g(t) + g(qt)D_q f(t)}{g(qt)g(t)}. \end{aligned}$$

En particulier si $f \equiv 1$, on a

$$D_q(\frac{1}{g})(t) = \frac{-D_q g(t)}{g(qt)g(t)}.$$

(iv) On supose que $f > 0$ sur A, alors on a

$$\begin{aligned} D_q(\sqrt{f})(t) &= \frac{\sqrt{f(qt)} - \sqrt{f(t)}}{(q-1)t} \\ &= \frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t(\sqrt{f(qt)} + \sqrt{f(t)})} \\ &= \frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t}.\frac{1}{\sqrt{f(qt)} + \sqrt{f(t)}} \\ &= \frac{D_q f(t)}{\sqrt{f(qt)} + \sqrt{f(t)}} \end{aligned}$$

■

Remarque 1.1.4 *D'aprés le Théorème précédent si on supose que $f > 0$ sur A, on a*

$$\lim_{q\to 1} D_q(\sqrt{f})(t) = \frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}}.$$

Théorème 3 *(Voir la référence [11, Page 97]) La $q-$dérivée de la composée d'une fonction avec un monôme.*

Soit f une fonction q-dérivable sur un ensemble q-géométrique A et et $u(t) = at^{\beta}$ avec $\beta \geq 0$, alors on a

$$D_q(f \circ u)(t) = D_q u(t).D_q f(u(t)).$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}
D_q(f \circ u)(t) &= D_q f(at^{\beta}) \\
&= \frac{f(aqt^{\beta}) - f(at^{\beta})}{(q-1)\,t} \\
&= \frac{f(aqt^{\beta}) - f(at^{\beta})}{aqt^{\beta} - at^{\beta}}.\frac{aqt^{\beta} - at^{\beta}}{(q-1)\,t} \\
&= \frac{aqt^{\beta} - at^{\beta}}{(q-1)\,t}.\frac{f(aqt^{\beta}) - f(at^{\beta})}{aqt^{\beta} - at^{\beta}} \\
&= D_q u(t).D_q f(u(t)).
\end{aligned}$$

■

1.2 Exemples d'applications

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
D_q(x^n) &= \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} \\
&= \frac{q^n - 1}{q-1} x^n \\
&= \frac{1-q^n}{1-q} x^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} q^k x^{n-1} \\
&= [n]_q x^{n-1},
\end{aligned}$$

où

$$[n]_q := \sum_{k=0}^{n-1} q^k.$$

Si $x = 0$, on a

$$\lim_{x\to 0}[n]_q x^{n-1} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1, \\ 0 \text{ si } n \geq 2. \end{cases}$$

En conclusion

$$D_q(x^n) = \begin{cases} [n]_q x^{n-1} \text{ si } x \neq 0, \\ 1 \text{ si } x = 0 \text{ et } n = 1, \\ 0 \text{ si } x = 0 \text{ et } n \geq 2. \end{cases}$$

2) Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} D_q(logx) &= \frac{logqx - logx}{(q-1)x} \\ &= \frac{logq + logx - logx}{(q-1)x} \\ &= \frac{logq}{(q-1)x}. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.1

$$\lim_{q\to 1} D_q(logx) = \lim_{q\to 1} \frac{logq}{q-1}.\frac{1}{x} = 1.\frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} D_q(e^{ax}) &= \frac{e^{aqx} - e^{ax}}{(q-1)x} \\ &= \frac{e^{aqx-ax} - 1}{(q-1)x} e^{ax} \\ &= \frac{e^{a(q-1)x} - 1}{(q-1)x} e^{ax}. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.2

$$\lim_{q\to 1} D_q(e^{\alpha x}) = \lim_{q\to 1} \frac{e^{\alpha(q-1)x} - 1}{(q-1)x} e^{\alpha x} = ae^{ax}.$$

- Maintenant si $x = 0$, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{a(q-1)x} - 1}{(q-1)x} e^{ax} = a \lim_{x\to 0} e^{ax} = a.$$

En conclusion, on a

$$D_q(e^{ax}) = \begin{cases} \dfrac{e^{a(q-1)x} - 1}{(q-1)x} e^{ax} \text{ si } x \neq 0, \\ a \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned} D_q \sin(\alpha x) &= \frac{\sin(\alpha q x) - \sin(\alpha x)}{(q-1)x} \\ &= \frac{2\cos\left(\dfrac{\alpha q x + \alpha x}{2}\right) \sin\left(\dfrac{\alpha q x - \alpha x}{2}\right)}{(q-1)x} \\ &= \frac{2\cos\left(\dfrac{(q+1)\alpha x}{2}\right) \sin\left(\dfrac{(q-1)\alpha x}{2}\right)}{(q-1)x} \\ &= \frac{\alpha\cos\left(\dfrac{(q+1)\alpha x}{2}\right) \sin\left(\dfrac{(q-1)\alpha x}{2}\right)}{\dfrac{(q-1)\alpha x}{2}} \\ &= \alpha \cos\left(\frac{(q+1)\alpha x}{2}\right) \frac{\sin\left(\dfrac{(q-1)\alpha x}{2}\right)}{\dfrac{(q-1)\alpha x}{2}}. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.3 *Comme* $\lim_{q\to 1} \dfrac{\sin\left(\dfrac{(q-1)\alpha x}{2}\right)}{\dfrac{(q-1)\alpha x}{2}} = 1$, *alors on a*

$$\lim_{q\to 1} D_q \sin(\alpha x) = \alpha \cos \alpha x = \frac{d(\sin \alpha x)}{dx}$$

Si $x = 0$ on a :

$$\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{(q+1)\alpha x}{2}\right) \frac{\alpha \sin\left(\frac{(q-1)\alpha x}{2}\right)}{\frac{(q-1)\alpha x}{2}} = \alpha.$$

En conclusion, on a

$$D_q \sin(\alpha x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{(q+1)\alpha x}{2}\right) \frac{\alpha \sin\left(\frac{(q-1)\alpha x}{2}\right)}{\frac{(q-1)\alpha x}{2}} \text{ si } x \neq 0, \\ \alpha \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

De même, on a

$$D_q(\cos(\alpha x)) = \begin{cases} -\frac{\alpha \sin\left(\frac{(q-1)\,\alpha x}{2}\right)}{\frac{(q+1)x}{}} \sin\left(\frac{(q+1)\,\alpha x}{2}\right) \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

$$D_q(\tan(\alpha x)) = \begin{cases} \frac{\sin\left((q-1)\,\alpha x\right)}{(q+1)\,x \cos\left(\alpha q x\right) \cos\left(\alpha x\right)} \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

$$D_q(\sinh(\alpha x)) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha(q-1)x} - 1}{2(q-1)x} e^{\alpha x} - \frac{e^{\alpha(1-q)x} - 1}{2(q-1)x} e^{-\alpha x} \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

$$D_q(\cosh(\alpha x)) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha(q-1)x} - 1}{2(q-1)x} e^{\alpha x} + \frac{e^{\alpha(1-q)x} - 1}{2(q-1)x} e^{-\alpha x} \text{ si } x \neq 0, \\ 2\alpha \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

1.3 Sur la q-intégrale

1.3.1 Définitions

Définition 1.3.2 *Pour $t > 0$ on définit l'ensemble J_t par*

$$J_t = \left\{ tq^n / n \in \mathbb{N} \right\} \bigcup \left\{ 0 \right\} \textit{ avec } 0 < q < 1.$$

Définition 1.3.3 *Soit $f : J_t \to \mathbb{R}$ une fonction. La q-integrale de f notée $I_q f$ est définie par*

$$I_q f(t) = \int_0^t f(s) d_q s = \sum_{n=0}^{\infty} t(1-q) q^n f(tq^n).$$

Approchement de la définition (voir la référence [3])

On a $I_q f(t) = \int_0^t f(s) d_q s$ telle que $d_q s = tq^n - tq^{n+1}$ (le pas).

La somme de Darboux est définie par

$$\sum_{n=0}^{\infty} (tq^n - tq^{n+1}) f(tq^x) = \sum_{n=0}^{\infty} t(1-q) q^n f(tq^n).$$

Si la fonction f est bornée sur J_t c'est-à-dire $f(J_t) \in [-M, M]$ $(M > 0)$. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} t(1-q) q^n f(tq^n)$ est convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} t(1-q) q^n f(tq^n) = I_q f(t).$$

Maintenant on définit l'opérateur E_q par

$$E_q(F(t)) = F(qt).$$

Alors

$$E_q^n(F(t)) = E_q(E_q^{n-1} F)(t) = F(q^n t).$$

On a

$$D_q F(t) = \frac{(1 - E_q) F(t)}{(1-q)t}.$$

Comme

$$f(t) = D_q F(t).$$

Alors

$$\begin{aligned} F(t) &= (1 - E_q)^{-1} \left[(1-q) t f(t) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-q) q^n t f(q^n t). \end{aligned}$$

Sachant que

$$D_q F(t) = f(t),$$

on obtient

$$I_q f(t) = F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-q) q^n t f(q^n t).$$

Théorème 4 *Soit f une fonction telle que $f : J_t \longrightarrow R$ et supposons $0 < q < 1$ et la fonction $x \mapsto \mid f(x).x^\alpha \mid$ est bornée sur J_t pour tout $0 < \alpha < 1$ alors $I_q f$ existe.*

Démonstration : Comme la fonction $x \mapsto \mid f(x).x^\alpha \mid$ est bornée sur J_t, alors on a

$$\exists M > 0, \forall x \in J_t, \mid f(x).x^\alpha \mid < M.$$

C'est-à-dire

$$\mid f(q^j x).q^{j\alpha} x^\alpha \mid < M.$$

Ce qui donne,

$$\mid f(q^j x) \mid < M.q^{-j\alpha} x^{-\alpha}.$$

Par suite, on a

$$\mid q^j f(q^j x) \mid < M.q^{j-j\alpha} x^{-\alpha}$$

Ce qui donne,

$$\begin{aligned} \mid \sum_{j=0}^{+\infty} q^j f(q^j x) \mid &< \sum_{j=0}^{+\infty} M.q^{j(1-\alpha)} x^{-\alpha} \\ &= M x^{-\alpha} \sum_{j=0}^{+\infty} q^{(1-\alpha)j} \\ &= \frac{M x^{-\alpha}}{1-q^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Par suite, on a

$$\mid I_q f \mid = \mid (1-q) x \sum_{j=0}^{+\infty} q^j f(q^j x) \mid < M x^{1-\alpha} \frac{1-q}{1-q^{1-\alpha}}$$

C'est-à-dire $I_q f$ converge. ■

Théorème 5 *Soient f et g deux fonctions définies sur J_t et α et β deux nombres réels, alors on a*

$$I_q(\alpha f + \beta g)(t) = \alpha (I_q f)(t) + \beta (I_q f)(t).$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} I_q(\alpha f + \beta g)(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (1-q) q^n t [\alpha f(tq^n) + \beta g(tq^n)] \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} (1-q) q^n t f(tq^n) + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} (1-q) q^n t f(tq^n) \\ &= \alpha I_q f(t) + \beta I_q g(t). \end{aligned}$$

■

Théorème 6 *Soit f une fonction définie sur J_t et continue en 0, alors on a*

1. $D_q I_q f(t) = f(t)$.
2. *Si f est $q-$dérivable, alors on a*
$$I_q f D_q(t) = f(t) - f(0).$$
3. $\forall\ a,\, b \in J_t$, *on a*
$$\int_a^b f(s) d_q s = I_q f(b) - I_q f(a).$$

Démonstration :

1. On a
$$\begin{aligned} D_q I_q(f(t)) &= D_q(I_q f)(t) \\ &= \frac{(I_q f)(qt) - (I_q f)(t)}{(q-1)t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t(1-q)q^{n+1} f(tq^{n+1}) - (1-q)q^n f(tq^n)}{t(q-1)} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} t(1-q)q^{n+1} f(tq^{n+1}) - \sum_{n=0}^{\infty} t(1-q)q^n f(tq^n)}{t(q-1)} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} f(tq^{n+1}) + \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(tq^n) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} f(tq^{n+1}) + f(t) + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} f(tq^{n+1}) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

   Par suite, on a
$$D_q I_q(f(t)) = f(t).$$

2. On a

$$\begin{aligned}
(I_qD_q)f(t) &= I_q(D_qf)(t) \\
&= I_q(\frac{f(qt)-f(t)}{(q-1)t}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t(1-q)q^n[D_qf(tq^n)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t(1-q)q^n[\frac{f(qq^nt)-f(q^nt)}{(q-1)tq^n}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t(1-q)q^n[\frac{f(q^{n+1}t)-f(q^nt)}{(q-1)tq^n}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}[f(q^nt)-f(q^{n+1}t)] \\
&= f(t) - \lim_{n\to+\infty} f(q^{n+1}t).
\end{aligned}$$

Comme f est continue au point 0 et $0 < q < 1$, on obtient

$$(I_qD_q)f(t) = f(t) - f(0).$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(s)d_qs &= \int_a^0 f(s)d_qs + \int_0^b f(s)d_qs \\
&= \int_0^b f(s)d_qs - \int_0^a f(s)d_qs \\
&= I_qf(b) - I_qf(a).
\end{aligned}$$

■

Théorème 7 *La $q-$intégration par parties.*
Soient f et g deux fonctions continues sur J_t, alors on a

$$\int_0^t f(x)D_qg(x)d_qx = f(t)g(t) - f(0)g(0) - \int_0^t g(qx)D_qf(x)d_qx.$$

Démonstration : On a

$$D_q(f.g)(x) = f(x)D_qg(x) + g(qx)D_qf(x).$$

On applique l'opérateur q-intégrale I_q qui est linéaire,on obtient

$$I_q(D_q(f.g)(x)) = I_q[g(x)D_qf(x)] + I_q[g(qx)D_qf(x)],$$

et comme pour une fonction h, on a

$$I_qD_qh(x) = h(x) - h(0),$$

on obtient,

$$f(x).g(x) - f(0).g(0) = \int_0^t f(x)D_qg(x)d_qx + \int_0^t g(qx)D_qf(x)d_qx.$$

C'est-à-dire,

$$\int_0^t f(x)D_qg(x)d_qx = f(t)g(t) - f(0)g(0) - \int_0^t g(qx)D_qf(x)d_qx.$$

■

Théorème 8 *Changemment d'ordre d'intégration.*
Soit f une fonction définie et continue sur J_t, alors on a

$$\int_0^t \int_0^s f(r)d_qrd_qs = \int_0^t \int_{qr}^t f(r)d_qsd_qr.$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^s f(r) d_q r d_q s &= \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} s(1-q) q^n f(q^n s) d_q s \\
&= \int_0^t s(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n s) d_q s \\
&= (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n \int_0^t s f(q^n s) d_q s \\
&= (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sum_{m=0}^{\infty} t(1-q) q^m (t q^m) f(t q^{m+n}) \\
&= t^2 (1-q)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q^{n+2m} f(t q^{n+m}) \\
&= (1-q)^2 t^2 \sum_{n=0}^{\infty} (q^n f(q^n t) + q^{n+2} f(q^{n+1} t) + ... + q^{n+2m} f(q^{n+m} t) + ...) \\
&= (1-q)^2 t^2 [f(t) + (q+q^2) f(qt) + ... + (q^n + q^{n+1} + ... + q^{n+n}) f(q^n t) + ...] \\
&= (1-q)^2 t^2 \sum_{n=0}^{\infty} q^n (\frac{(1-q^{n+1})}{(1-q)}) f(q^n t) \\
&= t(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n (t - q q^n t) f(q^n t). \\
&= \int_0^t (t - qr) f(r) d_q r \\
&= \int_0^t \int_{qr}^t f(r) d_q s d_q r.
\end{aligned}$$

■

Théorème 9 *Changement de variable linéaire dans une $q-$intégrale.(voir la référence [6, Lemma 6.3.5 page 204])*

On a

$$\int_0^t f(s) d_q s = a \int_0^{\frac{t}{a}} f(as) d_q s.$$

1.3.4 Exemples d'applications

1. Pour $f(t) = t$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^t f(s)d_qs &= t(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(tq^n)\\
&= t(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n (tq^n)\\
&= t^2(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}\\
&= t^2(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} (q^2)^n\\
&= t^2(1-q)\frac{1}{1-q^2}\\
&= \frac{t^2}{1+q}.
\end{aligned}$$

2. Pour $f(t)=\sqrt{t}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^t f(s)d_qs &= t(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(tq^n)\\
&= t(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n \sqrt{tq^n}\\
&= t(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n t^{\frac{1}{2}} q^{\frac{n}{2}}\\
&= t\sqrt{t}(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{3n}{2}}\\
&= t^{\frac{3}{2}}(1-q)\frac{1}{1-q^{\frac{3}{2}}}\\
&= t^{\frac{3}{2}}\frac{(1-\sqrt{q})(1+\sqrt{q})}{(1-\sqrt{q})(1+\sqrt{q}+q)}\\
\int_0^t f(s)d_qs &= \frac{(1+\sqrt{q})}{(1+\sqrt{q}+q)}t^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

3. Pour $f(t)=\log t$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^t f(s)d_qs &= \sum_{n=0}^{\infty} t(1-q)q^n \log(tq^n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t(1-q)q^n[\log t + \log q^n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t(1-q)q^n \log t + \sum_{n=0}^{\infty} t(1-q)q^n \log q^n \\
&= (1-q)t\log t \sum_{n=0}^{\infty} q^n + (1-q)t\log q \sum_{n=0}^{\infty} nq^n \\
&= (1-q)t\log t \frac{1}{1-q} + (1-q)tq\log q \sum_{n=0}^{\infty} nq^{n-1} \\
&= t\log t + (1-q)tq\log q (D_q \sum_{n=0}^{\infty} nq^n) \\
&= t\log t + (1-q)tq\log q D_q(\frac{1}{1-q}) \\
&= t\log t + (1-q)tq\log q \frac{1}{(1-q)^2} \\
&= t\log t + \frac{q\log q}{1-q}t.
\end{aligned}$$

Remarque 1.3.5

$$\lim_{q\to 1}(t\log t + \frac{q\log q}{1-q}t) = t\log t - t$$

Définition 1.3.6 *Soit $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction, alors la $q-$intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)d_qx$ est définie par*

$$\int_0^{+\infty} f(x)d_qx = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(q^n)\, q^n.$$

Théorème 10 *La $q-$intégration par parties (voir la référence [6, Theorem 6.3.2 page 203])*

Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, +\infty)$, alors on a

$$\int_0^t f(x)D_qg(x)d_qx = [f(t)g(t)]_0^{+\infty} - \int_0^t g(qx)D_qf(x)d_qx.$$

Chapitre 2

Sur les équations aux q-différences linéaires d'ordre 1.

L'objet de ce chapitre est de donner les solutions explicites de quelque équations aux q-différences linéaires d'ordre 1. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [3].

2.1 Les équations aux $q-$différences de type $D_q y(x) = ay(x) + b(x)$.

Définition 2.1.1 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $0 < q < 1$,on définit la fonction q-exponentielle de type 2 et on la note $e_q(x)$ par la série entiere suivante*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!},$$

où

$$[n]_q! = \prod_{j=0}^{n} [j]_q.$$

2.1.2 Les équations aux $q-$différences de type $D_q y(x) = ay(x)$.

On considere l'équation aux q-différences linéaire d'ordre 1 suivante

$$D_q y(x) = ay(x), \tag{2.1}$$

où $0 < q < 1$, a est un nombre réel et x un nombre réel strictement positif.

D'aprés l'équation (2.1), on a

$$\frac{y\left(qx\right)-y\left(x\right)}{\left(q-1\right)x}=ay(x).$$

C'est à-dire

$$y\left(qx\right)=\left[1+\left(q-1\right)xa\right]y\left(x\right).$$

C'est-à-dire

$$y\left(x\right)=\frac{y\left(qx\right)}{\left[1+\left(q-1\right)xa\right]}.$$

D'aprés l'égalité précédente, on a

$$y\left(x\right)=\frac{y\left(q^{2}x\right)}{\prod_{j=1}^{2}\left[1+\left(q^{j}-1\right)xa\right]},$$

et par suite par réccurence, on a

$$y\left(x\right)=\frac{y\left(q^{n}x\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left[1+\left(q^{j}-1\right)xa\right]}.$$

Comme $0<q<1$ et si on suppose que y est continue au point $x=0$, on obtient

$$y\left(x\right)=\frac{y\left(0\right)}{\prod_{j=1}^{+\infty}\left[1+\left(q^{j}-1\right)xa\right]}. \tag{2.2}$$

Maintenant cherchons les solutions de l'équation (2.1) sous la forme

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}x^{n}, \tag{2.3}$$

où c_n est un nombre réel pour tout entier naturel n.
D'aprés (2.1) et (2.3), on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}D_{q}x^{n}=a\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}x^{n}.$$

Comme $D_qx^n=[n]_qx^{n-1}$ pour tout n entier naturel non nul, on obtient

$$\forall n\in\mathbb{N},\ c_{n+1}=\frac{a}{[n+1]_{q}}c_{n}.$$

Par suite, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\, c_n = a^n c_0 \prod_{j=0}^{n} \frac{1}{[j]_q}.$$

C'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N},\, c_n = \frac{a^n c_0}{[n]_q!}, \tag{2.4}$$

D'aprés (2.3) et (2.4), on obtient

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{[n]_q!}. \tag{2.5}$$

C'est-à-dire

$$y(x) = c_0 e_q\,(ax)\,. \tag{2.6}$$

Remarque 2.1.3 *Sachant que l'équation aux différences (2.1) avec la condition initiale $y\,(0) = y_0$ admet une unique solution alors d'aprés (2.2) et (2.5) on obtient l'identité d'Euler (voir la référence [6, Chapitre 6 page 226])*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{[n]_q!} = \frac{1}{\prod_{j=1}^{+\infty} \left[1 + (q^j - 1)\, xa\right]}.$$

2.1.4 Les équations aux $q-$différences de type $D_q y(x) = ay(x) + b\,(x)\,.$

Maintenant on considere l'équation aux q-différences linéaire d'ordre 1 avec second membre siuvante

$$D_q y(x) = ay(x) + b\,(x)\,, \tag{2.7}$$

où b: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Pour la résolution de l'équation (2.7) on applique la méthode de la variation de la constante pour cela on pose

$$y(x) = c(x) e_q\,(ax)\,. \tag{2.8}$$

En appliquant l'opérateur aux q-différences aux deux membres de (2.8) on obtient

$$D_q y(x) = D_q\,(c(x) e_q\,(ax))\,.$$

C'est-à-dire

$$ay(x) + b(x) = e_q(aqx) D_q c(x) + c(x) a e_q(ax).$$

C'est-à-dire

$$b(x) = e_q(aqx) D_q c(x).$$

C'est-à-dire

$$D_q c(x) = (e_q(aqx))^{-1} b(x).$$

Par suite, on a

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} (e_q(aqt))^{-1} b(t) d_q t + c(0),$$

et par conséquent la solution générale de (2.7) est

$$y(x) = c(0) e_q(ax) + e_q(ax) \int_{x_0}^{x} (e_q(aqt))^{-1} b(t) d_q t.$$

2.2 Les équations aux $q-$différences de type $D_q y(x) = ay(qx) + b(x)$.

Définition 2.2.1 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $0 < q < 1$, on définit la fonction q-exponentielle de type 1 et on la note $E_q(x)$ par la série entiere suivante*

$$\sum_{j=0}^{+\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^j}{[j]_q!}.$$

2.2.2 Les équations aux $q-$différences de type $D_q y(x) = ay(qx)$.

On considere l'équation aux q-différences linéaire d'ordre 1 suivante

$$D_q y(x) = ay(qx), \tag{2.9}$$

où $0 < q < 1$, a est un nombre réel et x un nombre réel strictement positif.

D'aprés l'équation (2.9), on a

$$\frac{y(qx) - y(x)}{(q-1)x} = ay(qx).$$

C'est à-dire
$$y\left(x\right)=\left[1+\left(1-q\right)xa\right]y\left(qx\right).$$
D'aprés l'égalité précédente, on a
$$y\left(x\right)=\prod_{j=1}^{2}\left[1+\left(1-q^{j}\right)xa\right]y\left(q^{2}x\right),$$
et par suite par réccurence, on a
$$y\left(x\right)=\prod_{j=1}^{n}\left[1+\left(1-q^{j}\right)xa\right]y\left(q^{n}x\right).$$
Comme $0<q<1$ et si on suppose que y est continue au point $x=0$, on obtient
$$y\left(x\right)=y\left(0\right)\prod_{j=1}^{+\infty}\left[1+\left(1-q^{j}\right)xa\right] \tag{2.10}$$
Maintenant cherchons les solutions de l'équation (2.9) sous la forme
$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}d_{n}x^{n}, \tag{2.11}$$
où d_n est un nombre réel pour tout entier naturel n.
D'aprés (2.9) et (2.11), on a
$$\sum_{n=0}^{\infty}d_{n}D_{q}x^{n}=a\sum_{n=0}^{\infty}d_{n}\left(qx\right)^{n}.$$
Comme $D_qx^n=[n]_qx^{n-1}$ pour tout n entier naturel non nul, on obtient
$$\forall n\in\mathbb{N},\ d_{n+1}=\frac{aq^{n}}{[n+1]_{q}}d_{n}.$$
Par suite, on a
$$\forall n\in\mathbb{N}^{*},\ d_{n}=a^{n}d_{0}\prod_{j=1}^{n}\frac{q^{j-1}}{[j]_{q}}.$$
C'est-à-dire
$$\forall n\in\mathbb{N},\ d_{n}=\frac{a^{n}q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[n]_{q}!}d_{0}, \tag{2.12}$$

D'aprés (2.11) et (2.12), on obtient

$$y(x) = d_0 \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(ax)^n}{[n]_q!}. \tag{2.13}$$

C'est-à-dire

$$y(x) = d_0 E_q (ax). \tag{2.14}$$

Remarque 2.2.3 *Sachant que l'équation aux différences (2.9) avec la condition initiale $y(0) = y_0$ admet une unique solution, alors d'aprés (2.10) et (2.13) on obtient l'identité d'Euler (voir la référence [6, Chapitre 6 page 226])*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(ax)^n}{[n]_q!} = \prod_{j=1}^{+\infty} \left[1 + \left(1 - q^j\right) xa\right].$$

2.2.4 Les équations aux $q-$différences de type $D_q y(x) = ay(qx) + b(x)$.

Maintenant on considere l'équation aux q-différences linéaire d'ordre 1 avec second membre siuvante

$$D_q y(x) = ay(qx) + b(x), \tag{2.15}$$

où b: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Pour la résolution de l'équation (2.15) on applique la méthode de la variation de la constante pour cela on pose

$$y(x) = c(x) E_q (ax). \tag{2.16}$$

En appliquant l'opérateur aux q-différences aux deux membres de (2.16) on obtient

$$D_q y(x) = D_q \left(c(x) E_q (ax)\right).$$

C'est-à-dire

$$ay(qx) + b(x) = E_q (aqx) D_q c(x) + c(x) a E_q (ax).$$

C'est-à-dire

$$b(x) = E_q (aqx) D_q c(x).$$

C'est-à-dire

$$D_q c(x) = \left(E_q (aqx)\right)^{-1} b(x).$$

Par suite, on a

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} \left(E_q\left(aqt\right)\right)^{-1} b(t) d_q t + c\left(0\right),$$

et par conséquent la solution générale de (2.15) est

$$y(x) = c\left(0\right) E_q\left(ax\right) + E_q\left(ax\right) \int_{x_0}^{x} \left(E_q\left(aqt\right)\right)^{-1} b(t) d_q t.$$

Chapitre 3

Sur la q-addition et quelques q-fonctions.

Le but de ce chapitre est de définir la $q-$addition et étudier ses propriétés, on définit aussi la fonction q-logarithme et la fonction q-exponentielle de base a et on donne quelques propriétés des fonctions $q-$trigonométrique. Les résultas de ce chapitre se trouvent dans [6], [7] et [4].

3.1 Sur la q-addition.

Définition 3.1.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, la q-addition notée $\oplus_q$est définie par*

$$\begin{array}{rcl} \oplus_q & : & \mathbb{N} * \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \\ (n, y, a) & \mapsto & x \oplus_q y \end{array}$$

avec

$$(x \oplus_q y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k}$$

Exemple 3.1.2 *On a*

1. $(2 \oplus_q 1) = 15 + 6(q + q^2)$.
2. $(2 \oplus_{\frac{1}{2}} 1)^3 = \frac{39}{2}$.
3. $(a \oplus_q b)^1 = a + b$.
4. $(a \oplus_q b)^2 = a^2 + [2]_q! ab + b^2$.

5. $(a \oplus_q b)^4 = a^4 + [4]_q\, a^3 b + \dfrac{[4]_q!\,[3]_q!}{[2]_q!} a^2 b^2 + [4]_q! a b^3 + b^4.$

Remarque 3.1.3 *1.* $x \oplus_q y$ *est un couple mais* $(x \oplus_q y)^1$ *est un nombre.*

2. $(x \oplus_q y)^0 = 1.$

3.1.4 Proprietés de la q-addition.

Proposition 3.1.5 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* a, b, c *et* $\lambda \in \mathbb{C}$, *on a*

1. $(a \oplus_q b)^n = (b \oplus_q a)^n$.

2. $(\lambda a \oplus_q \lambda b)^n = \lambda^n (b \oplus_q a)^n$.

3. $((a \oplus_q b) \oplus_q c)^n = (a \oplus_q (b \oplus_q c))^n$.

Démonstration :

1. On a

$$
\begin{aligned}
(a \oplus_q b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q a^{n-k} b^k \\
&= (b \oplus_q a)^n .
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
(\lambda a \oplus_q \lambda b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q (\lambda a)^k (\lambda b)^{n-k} \\
&= \lambda^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q a^k b^{n-k} \\
&= \lambda^n (a \oplus_q b)^n .
\end{aligned}
$$

3.

$$\begin{aligned}((a \oplus_q b) \oplus_q c)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q (a \oplus_q b)^k \, c^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}_q a^j b^{k-j} c^{n-k}.\end{aligned}$$

Si on pose $j = k'$ et $k - j = l'$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}_q a^j b^{k-j} c^{n-k} &= \sum_{k'=0}^{n} \binom{n}{k'}_q a^{k'} \sum_{l'=0}^{n-k'} \binom{n-k'}{l'}_q b^{l'} c^{n-k'-l'} \\ &= (a \oplus_q (b \oplus_q c))^n .\end{aligned}$$

Par suite, on a

$$((a \oplus_q b) \oplus_q c)^n = (a \oplus_q (b \oplus_q c))^n .$$

■

Remarque 3.1.6 *D'aprés la Proposition précédente, il résulte que la q-addition est une opération commutative, associative, admet un élément neutre qui est 0 et la multiplication ordinaire est distributive sur la q-addition.*

3.1.7 La q-soustraction.

la q-soustraction notée $\ominus_q$ est définie par

$$a \ominus_q b = a \oplus_q (-b),$$

avec a et b deux nombres complexes.

Remarque 3.1.8 *Pour a et b deux nombres complexes, on a*

$$\begin{aligned}a \ominus_q b &= a \oplus_q (-b) \\ &= -(-a) \oplus_q (-b) \\ &= -1((-a) \oplus_q (b)) \\ &= -1(b \oplus_q (-a)) \\ &= -1(b \ominus_q a) \\ &= -(b \ominus_q a).\end{aligned}$$

3.1.9 La généralisation de l'addition pour n variables.

On a le résultat suivant

proposition:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, x_2....x_m) \in \mathbb{C}^m$, on a:

$$(x_1 \oplus_q x_2 + ... \oplus_q x_m)^n = \sum_{k_2=0}^{n} \sum_{k_3=0}^{n-k_2} ... \sum_{k_m=0}^{n-\sum_{i=2}^{m-1} k_i} \frac{[n]_q!}{[k_2]_q!\,[k_3]_q!...\left[n-\sum_{i=2}^{m-1} k_i\right]_q!} x_m^{k_2} x_{m-1}^{k_3} ... x_2^{k_{m-1}} x_1^{n-\sum_{i=2}^{m-1} k_i}.$$

Démonstration : On a

$(x_1 \oplus_q x_2 + ... \oplus_q x_m)^n =$

$= (P_{m-1} \oplus_q x_m)$ avec $P_{m-1} = x_1 \oplus_q x_2 + ... \oplus_q x_{m-1}$

$$= \sum_{k_2=0}^{n} \binom{n}{k_2}_q x_m^{k_2} p_{m-1}^{n-k_2}$$

$$= \sum_{k_2=0}^{n} \binom{n}{k_2}_q x_m^{k_1} \sum_{k_3=0}^{n-k_2} \binom{n-k_2}{k_3}_q x_{m-1}^{k_3} p_{m-2}^{n-k_2-k_3}$$

$$= \sum_{k_2=0}^{n} \sum_{k_3=0}^{n-k_2} ... \sum_{k_m=0}^{n-\sum_{i=2}^{m-1} k_i} \binom{n}{k_2}_q \binom{n-k_2}{k_3}_q ... \binom{n-\sum_{i=2}^{m-1} k_i}{k_m}_q x_m^{k_1} x_{m-1}^{k_2} ... x_2^{k_{m-1}} x_1^{n-\sum_{i=2}^{m-1} k_i}$$

$$= \sum_{k_2=0}^{n} \sum_{k_3=0}^{n-k_2} ... \sum_{k_m=0}^{n-\sum_{i=2}^{m-1} k_i} \frac{[n]_q!}{[k_2]_q![k_3]_q!...\left[n-\sum_{i=2}^{m-1} k_i\right]_q!} x_m^{k_2} x_{m-1}^{k_3} ... x_2^{k_{m-1}} x_1^{n-\sum_{i=2}^{m-1} k_i}. \blacksquare$$

Définition 3.1.10 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, la q-coaddition notée $\oplus^q$ est définie par*

$$\begin{array}{rcl} \oplus^q & : & \mathbb{N} * \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \\ (n, y, a) & \mapsto & x \oplus^q y, \end{array}$$

avec

$$(x \oplus^q y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q q^{k(k-n)} x^k y^{n-k}.$$

Définition 3.1.11 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x, y) \ \in \mathbb{C}^2$, la q-cosoustraction notée $\ominus^q$est définie par*

$$\begin{array}{rcl} \ominus^q & : & \mathbb{N} * \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \\ (n, y, a) & \mapsto & x \ominus^q y \equiv x \ominus^q -y, \end{array}$$

avec

$$(x \oplus^q -y)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}_q q^{k(k-n)} x^k y^{n-k}.$$

On a le résultat suivant

Proposition 3.1.12 *Soient x_1 et x_2 deux nombres complexes, alors on a*

1. $e_q(x_1 \oplus_q x_2) = e_q(x_1).e_q(x_2)$.
2. $E_q(x_1 \oplus^q x_2) = E_q(x_1).E_q(x_2)$.

Démonstration :

1. On a

$$\begin{aligned}
e_q(x_1 \oplus_q x_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[n]_q!} (x_1 \oplus_q x_2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[n]_q!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q x_1^k x_2^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{[n]_q!} \binom{n}{k}_q x_1^k x_2^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{[n]_q!} \frac{[n]_q!}{[k]_q! \, [n-k]_q!} x_1^k x_2^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{[k]_q! \, [n-k]_q!} x_1^k x_2^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^n}{[n]_q!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_2^n}{[n]_q!} \ \left(\text{car } \sum_{n=0}^{\infty} u_k \sum_{n=0}^{\infty} v_k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) \\
&= e_q(x_1).e_q(x_2).
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
E_q(x_1 \oplus_q x_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[n]_q!}(x_1 \oplus^q x_2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[n]_q!} \sum_{k=0}^{n} q^{k(k-n)} \binom{n}{k}_q x_1^k x_2^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[n]_q!} q^{k(k-n)} \binom{n}{k}_q x_1^k x_2^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}+k(k-n)}}{[n]_q!} \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!} x_1^k x_2^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}+k(k-n)}}{[k]_q!\,[n-k]_q!} x_1^k x_2^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} x_1^n}{[n]_q!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} x_2^n}{[n]_q!} \ (\text{car } \sum_{n=0}^{\infty} u_k \sum_{n=0}^{\infty} v_k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}) \\
&= E_q(x_1).E_q(x_2).
\end{aligned}$$

■

3.1.13 Sur les fonctions $q-$trigonométriques.

On définit les fonctions $q-$trigonométriques comme suit

$$\begin{aligned}
\sin_q(x) &= \frac{e_q(ix) - e_q(-ix)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{[2n+1]_q!} \text{ pour tout } x \in \mathbb{C} \text{ avec } |x| < 1, \\
\cos_q(x) &= \frac{e_q(ix) + e_q(-ix)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{[2n]_q!} \text{ pour tout } x \in \mathbb{C} \text{ avec } |x| < 1, \\
\mathrm{Si}\, n_q(x) &= \frac{E_q(ix) - E_q(-ix)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(2n+1)} x^{2n+1}}{[2n+1]_q!} \text{ pour tout } x \in \mathbb{C}, \\
Cos_q(x) &= \frac{E_q(ix) + E_q(-ix)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(2n-1)} x^{2n}}{[2n]_q!} \text{ pour tout } x \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

D'aprés la proposition précédente, on a le résultat suivant

Proposition 3.1.14 *On a*

1. $\cos_q(x)\cos_q(y) + \sin_q(x)\sin_q(y) = \cos_q(x \ominus_q y)$.

2. $\cos_q(x)\cos_q(y) - \sin_q(x)\sin_q(y) = \cos_q(x \oplus_q y)$.
3. $\sin_q(x)\cos_q(y) + \sin_q(y)\cos_q(x) = \sin_q(x \oplus_q y)$.
4. $\sin_q(x)\cos_q(y) - \sin_q(y)\cos_q(x) = \sin_q(x \ominus_q y)$.
5. $Cos_q(x)Cos_q(y) + \mathrm{Si}\,n_q(x)\,\mathrm{Si}\,n_q(y) = Cos_q(x \ominus^q y)$.
6. $Cos_q(x)Cos_q(y) - \mathrm{Si}\,n_q(x)\,\mathrm{Si}\,n_q(y) = Cos_q(x \oplus^q y)$.
7. $\mathrm{Si}\,n_q(x)Cos_q(y) + \mathrm{Si}\,n_q(y)Cos_q(x) = \mathrm{Si}\,n_q(x \oplus^q y)$.
8. $\mathrm{Si}\,n_q(x)Cos_q(y) - \mathrm{Si}\,n_q(y)Cos_q(x) = \mathrm{Si}\,n_q(x \ominus^q y)$.

3.2 Sur la q-dérivée $D_\oplus$.

Définition 3.2.1 *La q-dérivée $D_\oplus$ d'une fonction f est définie par*

$$D_\oplus f(x) = \lim_{\delta\to 0} \frac{f(x \oplus_q \delta x) - f(x)}{\delta x}.$$

Proposition 3.2.2 *Pour tout entier naturel non nul n et a un nombre réel, la q-dérivée $D_\oplus$ satisfait les propriétés suivantes*

1. $D_\oplus(x^n) = [n]_q\, x^{n-1}$.
2. $D_\oplus(x \oplus_q a)^n = [n]_q\,(n \oplus_q a)^{n-1}$.
3. $D_\oplus(\frac{1}{x^n}) = \frac{-[n]_q}{x^{n+1}}$.
4. $D_\oplus(\frac{1}{(x \oplus_q a)^n}) = \frac{-[n]_q}{(x \oplus_q a)^{n+1}}$.
5. $D_\oplus(e_q(ax)) = ae_q(ax)$.
6. $D_\oplus(E_q(ax)) = aE_q(ax)$.

Démonstration :

1. On a

$$
\begin{aligned}
D_{\oplus}(x^n) &= \lim_{\delta x \to 0} \frac{(x \oplus_q \delta x)^n - x^n}{\delta x} \\
&= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q x^{n-k} (\delta x)^k - x^n}{\delta x} \\
&= \lim_{\delta x \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}_q x^{n-1} \delta x + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}_q x^{n-k} (\delta x)^k - x^n}{\delta x} \\
&= \binom{n}{1}_q x^{n-1} \\
&= [n]_q \, x^{n-1}.
\end{aligned}
$$

2. On a

$$
\begin{aligned}
D_{\oplus}(x \oplus_q a)^n &= \lim_{\delta x \to 0} \frac{((x \oplus_q \delta x) \oplus_q a)^n - (x \oplus_q a)^n}{\delta x} \\
&= \lim_{\delta x \to 0} \frac{[(x \oplus_q a) \oplus_q \delta x]^n - (x \oplus_q a)^n}{\delta x} \\
&= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q (x \oplus_q a)^{n-k} (\delta x)^k - (x \oplus_q a)^n}{\delta x} \\
&= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\binom{n}{1}_q (x \oplus_q a)^{n-1} \delta x + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}_q (x \oplus_q a)^{n-k} (\delta x)^k}{\delta x} \\
&= \binom{n}{1}_q (x \oplus_q a)^{n-1} \\
&= [n]_q \, (x \oplus_q a)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

3. On a

$$\begin{aligned}
D_{\oplus}(\frac{1}{x^n}) &= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\frac{1}{(x \oplus_q \delta x)^n} - \frac{1}{x^n}}{\delta x} \\
&= \lim_{\delta x \to 0} \frac{x^n - (x \oplus_q \delta x)^n}{(x \oplus_q \delta x)^n x^n \delta x} \\
&= \lim_{\delta x \to 0} \frac{x^n - x^n - \binom{n}{1}_q x^{n-1}\delta x - \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}_q x^{n-k}(\delta x)^k}{(x \oplus_q \delta x)^n x^n \delta x} \\
&= \lim_{\delta x \to 0} \frac{-\binom{n}{1}_q x^{n-1} - \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}_q x^{n-k}(\delta x)^{k-1}}{(x \oplus_q \delta x)^n x^n} \\
&= -\frac{-[n]_q}{x^{n+1}}.
\end{aligned}$$

4. On a

$$\begin{aligned}
D_{\oplus}(\frac{1}{(x \oplus_q a)^n}) &= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\frac{1}{((x \oplus_q \delta x) \oplus_q a)^n} - \frac{1}{(x \oplus_q a)^n}}{\delta x} \\
&= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\frac{1}{((x \oplus_q a) \oplus_q \delta x)^n} - \frac{1}{(x \oplus_q a)^n}}{\delta x} \\
&= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\frac{1}{((x \oplus_q a) \oplus_q \delta x)^n} - \frac{1}{(x \oplus_q a)^n}}{\delta x} \\
&= \lim_{\delta x \to 0} \frac{(x \oplus_q a)^n - ((x \oplus_q a) \oplus_q \delta x)^n}{((x \oplus_q a) \oplus_q \delta x)^n (x \oplus_q a)^n \delta x} \\
&= \lim_{\delta x \to 0} \frac{-\binom{n}{1}_q (x \oplus_q a)^{n-1} - \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}_q (x \oplus_q a)^{n-k}(\delta x)^{k-1}}{((x \oplus_q a) \oplus_q \delta x)^n (x \oplus_q a)^n} \\
&= \frac{-[n]_q}{(x \oplus_q a)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

5. On a

$$\begin{aligned}
D_{\oplus}e_q(ax) &= \lim_{\delta x\to 0}\frac{e_q(a(x\oplus_q \delta x))-e_q(ax)}{\delta x}\\
&= \lim_{\delta x\to 0}\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n\binom{n}{1}_q x^{n-1}\delta x+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}_q a^{n-k}x^{n-k}(\delta x)^k}{[n]_q!}}{\delta x}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n\,[n]_q\,x^{n-1}}{[n]_q!}\\
&= a\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n x^n}{[n]_q!}\\
&= ae_q(ax).
\end{aligned}$$

6. La preuve est similaire à celle de 5, alors on omettre la preuve.

■

3.2.3 La régle de q-Leibniz.

On a le résultat suivant

Proposition 3.2.4 *Si* $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ *et* $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$, *alors on a*

$$D_{\oplus}(fg)(x)=g(x)D_{\oplus}f(x)+f(qx)D_{\oplus}g(x).$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)x^n.
\end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
D_{\oplus}(fg)(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k}\right)[n]_q\,x^n\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k}\right)[k+n-k]_q\,x^n.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$D_{\oplus}(fg)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)[k+n-k]_q\,x^n. \tag{3.1}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
[k+n-k]_q &= \frac{1-q^{k+n-k}}{1-q}\\
&= \frac{1-q^k+q^k\left(1-q^n\right)}{1-q}\\
&= \frac{1-q^k}{1-q}+q^k\frac{\left(1-q^{n-k}\right)}{1-q}\\
&= [k]_q+q^k\,[n-k]_q\,.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$[k+n-k]_q=[k]_q+q^k\,[n-k]_q\,. \tag{3.2}$$

Par suite d'aprés (3.1) et (3.2), on obtient

$$\begin{aligned}
D_{\oplus}(fg)(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k}\right)\left([k]_q+q^k\,[n-k]_q\right)x^n\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k}\right)[k]_q\,x^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k}\right)q^k\,[n-k]_q\,x^n\\
&= g(x)D_{\oplus}f(x)+f(qx)D_{\oplus}g(x).
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$D_{\oplus}(fg)(x)=g(x)D_{\oplus}f(x)+f(qx)D_{\oplus}g(x).$$

■

3.2.5 Sur la q-logarithme.

Considérons l'équation

$$x=e_q(y).$$

Cette équation admet une solution L_q et appelée le q-logarithme.
Comme $e_q(0)=1$, alors on a $L_q\,(1)=0$.

Proposition 3.2.6 *On a*

1. $L_q(ab) = L_q(a) \oplus L_q(b)$.

2. $L_q(\frac{a}{b}) = L_q(a) \ominus L_q(b)$.

3. $L_q(a^r) = rL_q(a)$.

Démonstration : On a

1. Comme
$$e_q(x)e_q(y) = e_q(x \oplus_q y).$$
Alors, on a
$$L_q(e_q(x)e_q(y)) = L_q\left(e_q(x \oplus_q y)\right).$$
Si on pose par définition
$$a = e_q(x) \text{ et } b = e_q(y),$$
on obtient
$$L_q(ab) = L_q(a) \oplus_q L_q(b). \tag{3.3}$$
2. On a
$$L_q(\frac{a}{b}) = L_q(a) \oplus_q L_q(\frac{1}{b})$$
Comme
$$L_q(\frac{b}{b}) = L_q(b) \oplus_q L_q(\frac{1}{b}) \text{ et } L_q(1) = 0,$$
on obtient
$$L_q(\frac{1}{b}) = -L_q(b).$$
Par suite d'aprés (3.3), on obtient
$$L_q(ab) = L_q(a) \oplus_q L_q(-b).$$
Maintenant comme
$$x \oplus_q (-y) = x \ominus_q y,$$
il résulte que
$$L_q(ab) = L_q(a) \ominus_q L_q(b).$$
3. La preuve est une conséquence des deux propriétés précédentes.

■

3.2.7 Sur la fonction q-exponentielle de base a.

La fonction q-exponentielle de base a notée a_q est définie par

$$a(x) = e_q^{xL_q(a)}.$$

Remarque 3.2.8 *Quand $q \to 1$, on a*

$$\begin{aligned} a_q(x) &= e_q^{xL_q(a)} \\ &= e^{x\ln(a)} \\ &= a^x. \end{aligned}$$

Proposition 3.2.9 *Pour tout x et y deux nombres réels, on a*

1. $a_q(x \oplus_q y) = a_q(x).a_q(y)$.
2. $a_q(x \ominus_q y) = \dfrac{a_q(x)}{a_q(y)}$.
3. $(ab)_q(x) = a_q(x)b_q(x)$.
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)_q(x) = \dfrac{a_q(x)}{b_q(x)}$.

Démonstration :

1. On a

$$\begin{aligned} a_q(x \oplus_q y) &= e_q((x \oplus_q y)L_q(a)) \\ &= e_q(xL_q(a) \oplus_q yL_q(a)) \\ &= e_q(xL_q(a)).e_q(yL_q(a)) \\ &= a_q(x).a_q(y). \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} a_q(x \ominus_q y) &= e_q((x \ominus_q y)L_q(a)) \\ &= e_q(xL_q(a) \ominus_q yL_q(a)) \\ &= \frac{e_q(xL_q(a))}{e_q(yL_q(a))} \\ &= \frac{a_q(x)}{a_q(y)}. \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned} (ab)_q(x) &= e_q((xL_q(ab)) \\ &= e_q(x(L_q(a) \oplus_q L_q(b))) \\ &= e_q(xL_q(a) \oplus_q xL_q(b)) \\ &= e_q(xL_q(a)).e_q(xL_q(b)) \\ &= a_q(x)b_q(x). \end{aligned}$$

4. On a

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)_q(x) &= e_q((xL_q(\frac{a}{b})) \\ &= e_q(x(L_q(a) \ominus_q L_q(b))) \\ &= e_q(xL_q(a) \ominus_q xL_q(b)) \\ &= \frac{e_q(xL_q(a))}{e_q(xL_q(b))} \\ &= \frac{a_q(x)}{b_q(x)}. \end{aligned}$$

■

Chapitre 4

La q-transformée de Laplace

L'objet de ce chapitre est de définir les deux types de la q-transormée de Laplace et de donner leurs propriétés. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [2] et [5].

4.1 La fonction q-gamma de type 1.

Définition 4.1.1 *Pour $0 < q < 1$, la fonction q-gamma de type 1 notée Γ_q est définie par*

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x},$$

où $(a;q)_\infty = \prod_{n=0}^{+\infty}(1-aq^n)$ *et x un nombre complexe avec* $\mathrm{Re}(x) > 0$.

Proposition 4.1.2 *La fonction Γ_q satisfait l'équation fonctionnelle*

$$\Gamma_q(x+1) = [x]_q \Gamma_q(x),$$

où

$$[x]_q = \frac{1-q^x}{1-q}.$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}
\Gamma_q(x+1) &= \frac{(q;q)_\infty}{(q^{x+1};q)_\infty}(1-q)^{-x} \\
&= \frac{(q;q)_\infty}{\prod\limits_{n=0}^{+\infty}(1-q^{n+x+1})}(1-q)^{-x} \\
&= \frac{(q;q)_\infty}{\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1-q^{n+x})}(1-q)^{-x} \\
&= \frac{(1-q^x)(q;q)_\infty}{\prod\limits_{n=0}^{+\infty}(1-q^{n+x})}(1-q)^{-x} \\
&= \frac{(1-q^x)}{(1-q)}\frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x} \\
&= [x]_q\,\Gamma_q(x).
\end{aligned}$$

■

Remarque 4.1.3 *D'aprés la proposition précédente pour tout entier naturel non nul n, on a*

$$\begin{aligned}
\Gamma_q(n+1) &= [n]_q\,\Gamma_q(n) \\
&= [n]_q\,[n-1]_q\,\Gamma_q(n-1) \\
&= [n]_q\,[n-1]_q\ldots[1]_q\,\Gamma_q(1) \\
&= [n]_q!\Gamma_q(1) \\
&= [n]_q! \;\textit{car}\; \Gamma_q(1)=1.
\end{aligned}$$

Remarque 4.1.4 *La fonction Γ_q admet la représentation intégrale suivante*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}E_q(-qt)d_qt \;\textit{pour tout}\; x\in\mathbb{C} \;\textit{avec}\; \operatorname{Re}(x)>0.$$

Définition 4.1.5 *la fonction q-Béta de type 1 notée B_q est définie par*

$$B_q(z,w) = \int_0^1 x^{z-1}(1-qx)_q^{w-1}d_qx,$$

où z et w sont deux nombres complexes avec $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ *et* $\mathrm{Re}\,(w) > 0$ *et*

$$(1-qx)_q^{w-1} = \frac{\prod_{n=0}^{+\infty}(1+q^{n+x})}{\prod_{n=0}^{+\infty}(1+q^{w-1+n+x})}.$$

Remarque 4.1.6 *On a*

$$B_q(z,w) = \frac{\Gamma_q(z)\Gamma_q(w)}{\Gamma_q(z+w)}.$$

4.2 La q transformé de Laplace de type 1.

Définition 4.2.1 *La q-transformée de Laplace de type 1 notée L_q d'une fonction f est définie par*

$$L_q\,(f(t))\,(p) = \int_0^\infty E_q(-qpt)f(t)d_qt,\ p \in \mathbb{C}\ \textit{avec}\ \mathrm{Re}\,(x) > 0.$$

4.2.2 La q-transformée de Laplace de type 1 de quelques fonctions usuelles.

1. $f\,(t) = t^\alpha$ avec $\alpha > -1$.

   On a

$$\begin{aligned} L_q\,(f(t))\,(p) &= \int_0^\infty E_q(-qpt)t^\alpha d_qt \\ &= \int_0^\infty E_q(-qy)\left(\frac{y}{p}\right)^\alpha \frac{d_qy}{p} \\ &= \frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_0^\infty E_q(-qy)y^{(\alpha+1)-1}d_qy \\ &= \frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

2. $f\,(t) = e_q\,(at)$ avec $a \in \mathbb{C}$.

On a

$$\begin{aligned}
L_q\left(f(t)\right)(p) &= \int_0^{\infty} E_q(-qpt)e_q\left(at\right)d_qt \\
&= \frac{1}{p}\int_0^{\infty} E_q(-qt)e_q\left(\frac{at}{p}\right)d_qt \\
&= \frac{1}{p}\int_0^{\infty} E_q(-qt)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^nt^n}{[n]_q!p^n}d_qt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{[n]_q!p^{n+1}}\int_0^{\infty} E_q(-qt)t^nd_qt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n\Gamma_q(n+1)}{[n]_q!p^{n+1}} \\
&= \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{p}\right)^n \\
&= \frac{1}{p}.\frac{1}{1-\frac{a}{p}} \text{ si } \operatorname{Re}(p) > \operatorname{Re}(a) \\
&= \frac{1}{p-a}.
\end{aligned}$$

3. $f(t) = E_q(at)$ avec $a \in \mathbb{C}$.

   On a

$$\begin{aligned}
L_q\left(f(t)\right)(p) &= \int_0^{\infty} E_q(-qpt)E_q\left(at\right)d_qt \\
&= \frac{1}{p}\int_0^{\infty} E_q(-qt)E_q\left(\frac{at}{p}\right)d_qt \\
&= \frac{1}{p}\int_0^{\infty} E_q(-qt)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}a^nt^n}{[n]_q!p^n}d_qt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}a^n}{[n]_q!p^{n+1}}\int_0^{\infty} E_q(-qt)t^nd_qt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n\Gamma_q(n+1)}{[n]_q!p^{n+1}} \\
&= \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{p}\right)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}
\end{aligned}$$

4. $f(t) = \cos_q(at)$, avec $a \in \mathbb{C}$.

   On a

$$
\begin{aligned}
L_q\left(f(t)\right)(p) &= L_q\left(\cos_q(at)\right)(p) \\
&= L_q\left(\frac{e_q\left(iat\right) + e_q\left(-iat\right)}{2}\right)(p) \\
&= \frac{1}{2}\left(L_q\left(e_q\left(iat\right)\right)(p) + L_q\left(e_q\left(-iat\right)\right)(p)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-ia} + \frac{1}{p+ia}\right) \text{ si } \operatorname{Re}(p) > \operatorname{Re}(a) \\
&= \frac{p}{p^2+a^2}.
\end{aligned}
$$

5. $f(t) = \sin_q(at)$, avec $a \in \mathbb{C}$.

   On a

$$
\begin{aligned}
L_q\left(f(t)\right)(p) &= L_q\left(\sin_q(at)\right)(p) \\
&= L_q\left(\frac{e_q\left(iat\right) - e_q\left(-iat\right)}{2i}\right)(p) \\
&= \frac{1}{2i}\left(L_q\left(e_q\left(iat\right)\right)(p) - L_q\left(e_q\left(-iat\right)\right)(p)\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-ia} - \frac{1}{p+ia}\right) \text{ si } \operatorname{Re}(p) > \operatorname{Re}(a) \\
&= \frac{a}{p^2+a^2}.
\end{aligned}
$$

6. $f(t) = ch_q(at)$, avec $a \in \mathbb{C}$.

   On a

$$
\begin{aligned}
L_q\left(f(t)\right)(p) &= L_q\left(ch_q(at)\right)(p) \\
&= L_q\left(\frac{e_q\left(at\right) + e_q\left(-at\right)}{2}\right)(p) \\
&= \frac{1}{2}\left(L_q\left(e_q\left(at\right)\right)(p) + L_q\left(e_q\left(-at\right)\right)(p)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p+a}\right) \text{ si } \operatorname{Re}(p) > \operatorname{Re}(a) \\
&= \frac{p}{p^2-a^2}.
\end{aligned}
$$

7. $f(t) = sh_q(at)$, avec $a \in \mathbb{C}$.

   On a

$$\begin{aligned}
L_q\left(f(t)\right)(p) &= L_q\left(sh_q(at)\right)(p) \\
&= L_q\left(\frac{e_q\left(at\right) - e_q\left(-at\right)}{2}\right)(p) \\
&= \frac{1}{2}\left(L_q\left(e_q\left(at\right)\right)(p) - L_q\left(e_q\left(-at\right)\right)(p)\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a}\right) \text{ si } \operatorname{Re}(p) > \operatorname{Re}(a) \\
&= \frac{a}{p^2 - a^2}.
\end{aligned}$$

8. $f\left(t\right) = H\left(t-a\right)$, où H est la fonction de Heaviside définie par

$$H\left(t-a\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \geq a; \\ 0 \text{ si } t < a. \end{cases}$$

   On suppose que a est un nombre réel strictement positif.

   On a

$$\begin{aligned}
L_q(H(t-a))(p) &= \int_0^\infty E_q(-qpt)H(t-a)d_qt \\
&= \int_0^\infty E_q(-qpt)d_qt - \int_0^a E_q(-qpt)d_qt \\
&= L_q(1) - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[n]_q!}(pq)^n \int_0^a t^n d_qt \\
&= \frac{1}{p} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[n]_q!}(pq)^n \frac{a^{n+1}}{[n+1]_q} \\
&= \frac{1}{p}\left[1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n+1]_q!}(pa)^{n+1}\right] \\
&= \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[n]_q!}(-pa)^n \\
&= \frac{1}{p}E_q(-ap).
\end{aligned}$$

4.2.3 La q-transormée de Laplace de type 1 de la q-dérivée.

On a le résultat suivant

Proposition 4.2.4 *Soit* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ *une fonction et supposons que la* q*-transormée de Laplace de type* 1 *de* $D_q f$ *existe, alors on a*

$$L_q\left(D_q f(t)\right)(p) = -f(0) + pL_q\left(f(t)\right)(p).$$

Démonstration : On a

$$L_q\left(D_q f(t)\right)(p) = \int_0^{\infty} (D_q f(t)) E_q(-qpt) d_q t.$$

En appliquant la $q-$intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} L_q\left(D_q f(t)\right)(p) &= -f\left(0\right) - \int_0^{\infty} f\left(qt\right) D_q E_q(-qpt) d_q t \\ &= -f\left(0\right) + qp \int_0^{\infty} f\left(qt\right) E_q(-qpt) d_q t \\ &= -f\left(0\right) + pL_q\left(f(t)\right)(p) \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$L_q\left(D_q f(t)\right)(p) = -f\left(0\right) + pL_q\left(f(t)\right)(p).$$

■

La proposition précédente admet la généralisation suivante

Proposition 4.2.5 *Soit* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ *une fonction et supposons que la* q*-transormée de Laplace de type* 1 *de* $D_q^n f$ *existent, alors on a*

$$L_q\left(D_q^n f(t)\right)(p) = p^n L_q\left(f(t)\right)(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1} D_q^i f(0).$$

Démonstration : La preuve se fait par récurrence.

Pour $n = 1$, on a

$$L_q\left(D_q f(t)\right)(p) = pL_q\left(f(t)\right)(p) - f\left(0\right).$$

Supposons pour n fixé, on a

$$L_q\left(D_q^n f(t)\right)(p) = p^n L_q\left(f(t)\right)(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1} D_q^i f(0),$$

et montrons que

$$L_q\left(D_q^{n+1}f(t)\right)(p) = p^{n+1}L_q\left(f(t)\right)(p) - \sum_{i=0}^{n} p^{n-i}D_q^i f(0).$$

D'aprés la proposition précédente, on a

$$L_q\left(D_q^{n+1}f(t)\right)(p) = pL_q\left(D_q^n f(t)\right)(p) - D_q^n f\left(0\right).$$

Maintenant en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} L_q\left(D_q^{n+1}f(t)\right)(p) &= p\left[p^n L_q\left(f(t)\right)(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1}D_q^i f(0)\right] - D_q^n f\left(0\right) \\ &= p^{n+1}L_q\left(f(t)\right)(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i}D_q^i f(0) - D_q^n f\left(0\right) \\ &= p^{n+1}L_q\left(f(t)\right)(p) - \sum_{i=0}^{n} p^{n-i}D_q^i f(0). \end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ L_q\left(D_q^n f(t)\right)(p) = p^n L_q\left(f(t)\right)(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1}D_q^i f(0).$$

■

La n-ième q-dérivée d'une q-transformée de Laplace de type 1.

Proposition 4.2.6 *Soit F la q-transformée de Laplace de type 1 d'une fonction f, alors on a*

$$L_q\left(t^n f(t)\right)(p) = (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} D_q^n \widetilde{F}_q(p),$$

où

$$\widetilde{F}_{q^n}(p) = F\left(q^{-n}p\right).$$

Démonstration : La preuve se fait par réccurence.

Pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_q(p) &= \int_0^\infty E_q\left(-\frac{qpt}{q}\right) f(t)d_qt \\ &= \int_0^\infty E_q(-pt)f(t)d_qt. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} D_q\widetilde{F}_q(p) &= \int_0^\infty -tE_q(-qpt)f(t)d_qt \text{ car } D_qE_q(\alpha x) = \alpha E_q(q\alpha x) \\ &= -L_q\left(tf(t)\right)(p). \end{aligned}$$

Supposons pour n fixé, on a

$$L_q\left(t^n f(t)\right)(p) = (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} D_q^n \widetilde{F}_{q^n}(p),$$

et montrons que

$$L_q\left(t^{n+1} f(t)\right)(p) = (-1)^{n+1} q^{\frac{n(n+1)}{2}} D_q^{n+1} \widetilde{F}_{q^{n+1}}(p).$$

On a

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_{q^{n+1}}(p) &= \int_0^\infty E_q\left(-\frac{qpt}{q^{n+1}}\right) f(t)d_qt \\ &= \int_0^\infty E_q\left(-q^{-n}pt\right) f(t)d_qt. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} D_q^{n+1}\widetilde{F}_{q^{n+1}}(p) &= (-1)^{n+1} q^{-\sum_{k=0}^{n}(n-k)} \int_0^\infty E_q\left(-qpt\right) t^{n+1} f(t)d_qt \\ &= (-1)^{n+1} q^{-\frac{n(n+1)}{2}} L_q\left(t^{n+1} f(t)\right)(p). \end{aligned}$$

Par suite

$$L_q\left(t^{n+1} f(t)\right)(p) = (-1)^{n+1} q^{\frac{n(n+1)}{2}} D_q^{n+1} \widetilde{F}_{q^{n+1}}(p).$$

■

Exemple.
Calculons $L_q\left(t^n e_q(at)\right)$ avec $a \in \mathbb{C}$.

On a

$$
\begin{aligned}
L_q\left(t^n e_q(at)\right)(p) &= (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} D_q^n\left(\frac{1}{q^{-n}p-a}\right) \text{ avec } \operatorname{Re}(p) > \operatorname{Re}(a) \\
&= (-1)^{n+1} q^{\frac{n(n+1)}{2}} D_q^n\left(\frac{1}{aq^n-p}\right) \\
&= (-1)^{n+1} q^{\frac{n(n-1)}{2}} a^{-n} D_q^n \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{p^j}{a^j q^{nj}} \\
&= (-1)^{n+1} q^{\frac{n(n-1)}{2}} a^{-n} \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{[j]_q \times [j-1]_q \times \ldots \times [j-n+1]_q}{a^j q^{nj}} p^{j-n} \\
&= (-1)^{n+1} q^{\frac{n(n-1)}{2}} a^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[k+n]_q \times [k+n-1]_q \times \ldots \times [k+1]_q}{a^{n+k} q^{n(n+k)}} p^k \\
&= \frac{(-1)^{n+1} q^{\frac{n(n-1)}{2}} a^{-n}}{a^n q^{n^2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[k+n]_q!}{[k]_q!}\left(\frac{p}{aq^n}\right)^k \\
&= \frac{(-1)^{n+1} q^{\frac{-n(n+1)}{2}}}{a^{2n}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[k+n]_q!}{[k]_q!}\left(\frac{p}{aq^n}\right)^k .
\end{aligned}
$$

Le produit de q-convolution.

Définition 4.2.7 *Soient f et g deux fonctions avec*

$$g(t) = t^{\beta-1},\ \beta \in \mathbb{C},$$

où $\beta \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(\beta) > 0$.

Le produit de q-convolution des deux fonctions f et g notée $f *_q g$ est définie par

$$(f *_q g)(t) = \int_0^t f(\tau) g_q(t-q\tau) d_q\tau,$$

où

$$g_q(t-q\tau) = (t-q\tau)_q^{\beta-1}.$$

On a le résultat suivant

Proposition 4.2.8 *Si* $f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{\alpha_i}$ *et* $g(t) = t^{\beta-1}$,

où $a_i \in \mathbb{C}$ et $\alpha_i \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(\alpha_i) > -1$ *pour tout $i = 1, \ldots, n$ et $\beta \in \mathbb{C}$ avec* $\operatorname{Re}(\beta) > 0$, *alors on a*

$$L_q\left((f *_q g)(t)\right)(p) = L_q\left(f(t)\right)(p) . L_q\left(g(t)\right)(p) .$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}
(f *_q g)(t) &= \int_0^t f(\tau) g_q(t-q\tau) d_q\tau \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i \int_0^t \tau^{\alpha_i}(t-q\tau)_q^{\beta-1} d_q\tau \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i t^{\alpha_i+\beta} \int_0^t y^{\alpha_i}(1-qy)_q^{\beta-1} d_q y \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i t^{\alpha_i+\beta} B_q(\alpha_i+1,\beta).
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
L_q\left((f *_q g)(t)\right)(p) &= \sum_{i=0}^{n} a_i B_q(\alpha_i+1,\beta) \int_0^\infty E_q(-qpt) t^{\alpha_i+\beta} d_q t \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i B_q(\alpha_i+1,\beta) \frac{\Gamma_q(\alpha_i+\beta+1)}{p^{\alpha_i+\beta+1}} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i \Gamma_q(\alpha_i+1)\Gamma_q(\beta)}{p^{\alpha_i+\beta+1}} \\
&= \frac{\Gamma_q(\beta)}{p^\beta} \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i \Gamma_q(\alpha_i+1)}{p^{\alpha_i+1}} \\
&= L_q\left(g(t)\right)(p) . L_q\left(f(t)\right)(p) \\
&= L_q\left(f(t)\right)(p) . L_q\left(g(t)\right)(p) .
\end{aligned}$$

■

Exemples

1. Calculons $L_q\left(\int_0^t \sin_q s \ d_q s\right)(p)$.

   On a

$$\begin{aligned}
L_q\left(\int_0^t \sin_q s \ d_q s\right)(p) &= L_q\left(\sin_q t * 1\right)(p) \\
&= L_q\left(\sin_q t\right)(p) . L_q\left(1\right)(p) \\
&= \frac{1}{p^2+1} . \frac{1}{p} \\
&= \frac{1}{p(p^2+1)}.
\end{aligned}$$

2. Calculons $L_q\left(\int_0^t (t-\cos_q \tau) d_q\tau\right)(p)$.

   On a

$$
\begin{aligned}
L_q\left(\int_0^t (t-\cos_q \tau) d_q\tau\right)(p) &= L_q\left(\frac{t^2}{1+q}\right)(p) - L_q\left(\int_0^t \cos_q s \ d_q s\right)(p) \\
&= L_q\left(\frac{t^2}{1+q}\right)(p) - L_q\left(\cos_q t * 1\right)(p) \\
&= \frac{\Gamma_q(3)}{(1+q)\,p^3} - \frac{1}{p^2+1} \\
&= \frac{[2]_q}{(1+q)\,p^3} - \frac{1}{p^2+1} \\
&= \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^2+1} \\
&= \frac{p^2+1-p^3}{p^3\,(p^2+1)}.
\end{aligned}
$$

4.2.9 Application de la $q-$transformée de type 1 à la résolution des équations aux $q-$différences linéaires.

Exemple 1

On considère le problème suivant

$$
\left\{
\begin{array}{l}
D_q y(t) = a y(t) + t, \ \ t > 0, \\
y(0) = 0,
\end{array}
\right.
\tag{4.1}
$$

où a est un nombre réel.

En appliquant la $q-$transformée de type 1 à l'équation aux q-différences dans (4.1), on obtient

$$L_q(D_q y(t))(p) = L_q(ay(t)+t)(p).$$

C'est-à-dire

$$pY_q(p) - y(0) = aY_q(p) + \frac{1}{p^2},$$

où

$$Y_q(p) := L_q(y(t))(p).$$

C'est-à-dire

$$Y_q(p) = \frac{1}{(p-a)p^2}.$$

En utilisant la décomposition en éléments simples, on obtient

$$Y_q(p) = \frac{1}{a^2(p-a)} - \frac{1}{a^2 p} - \frac{1}{ap^2}.$$

Par suite

$$y(t) = \frac{e_q(at)}{a^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{t}{a}.$$

Exemple 2

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} D_q^2 y(t) - 2D_q y(t) - 3y(t) = 0, \ t > 0, \\ y(0) = b, \ D_q y(0) = a_q, \end{cases} \tag{4.2}$$

où b et a_q sont deux nombres réels.

En appliquant la $q-$transformée de type 1 à l'équation aux q-différences dans (4.2), on obtient

$$L_q(D_q^2 y(t) - 2D_q y(t) - 3y(t))(p) = 0.$$

C'est-à-dire

$$p^2 Y_q(p) - py(0) - D_q y(0) - 2pY_q(p) + 2y(0) - 3Y_q(p) = 0,$$

où

$$Y_q(p) := L_q(y(t))(p).$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} Y_q(p) &= \frac{(p-2)b + a_q}{(p+1)(p-3)} \\ &= .\left(\frac{3b + a_q}{4}\right)\frac{1}{p+1} + \left(\frac{b + a_q}{4}\right)\frac{1}{p-3} \end{aligned}$$

Par suite

$$y(t) = \frac{3b + a_q}{4} e_q(-t) + \frac{b + a_q}{4} e_q(3t).$$

4.3 La fonction q-gamma de type 2.

Définition 4.3.1 *La fonction q-gamma de type 2 notée γ_q est définie par*

$$\gamma_q(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e_q(-t) d_q t,$$

où $x \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(x) > 0$.

On a le résultat suivant

Proposition 4.3.2 *Pour tout $x \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(x) > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

1. $\gamma_q(1) = 1.$
2. $\gamma_q(x+1) = q^{-x}\,[x]_q\,\gamma(x).$
3. $\gamma_q(n) = q^{\frac{-n(n+1)}{2}}\Gamma_q(n).$

Démonstration :

1. On a
$$\begin{aligned}\gamma_q(x) &= \int_0^{\infty} e_q(-t)d_qt \\ &= 1.\end{aligned}$$

2. On a
$$\gamma_q(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e_q(-t)d_qt.$$

En utilisant la $q-$intégration par parties qui est valable pour la $q-$intégrale dans $\mathbb{R}^+$. Pour cela, on pose
$$u = t^x \text{ et } D_qv\,(t) = e_q(-t)d_qt,$$
on obtient
$$\begin{aligned}\gamma_q(x+1) &= -\int_0^{\infty} [x]_q\, t^{x-1}\left(-e_q(-qt)\right)d_qt \\ &= [x]_q \int_0^{\infty} t^{x-1}e_q(-qt)d_qt.\end{aligned}$$

Maintenant on pose le changement de variable
$$\tau = qt,$$
on obtient
$$\begin{aligned}\gamma_q(x+1) &= \frac{[x]_q}{q^x}\int_0^{\infty} \tau^{x-1}e_q(-\tau)d_q\tau \\ &= \frac{[x]_q}{q^x}\gamma_q(x).\end{aligned}$$

C'est-à-dire
$$\gamma_q(x+1) = \frac{[x]_q}{q^x}\gamma_q(x).$$

3. D'aprés l'égalité précédente pour n entier naturel non nul, on a

$$\gamma_q(n) = \frac{[n-1]_q}{q^{n-1}}\gamma_q(n-1).$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
\gamma_q(n) &= \frac{[n-1]_q}{q^{n-1}}\frac{[n-2]_q}{q^{n-2}}\gamma_q(n-2) \\
&= \gamma(1)\frac{\prod_{i=1}^{n-1}[i]_q}{q^{1+2+\ldots+n-1}} \\
&= \frac{[n-1]_q!}{q^{\frac{n(n-1)}{2}}} \\
&= q^{\frac{-n(n-1)}{2}}\Gamma_q(n) \text{ car } \Gamma_q(n) = [n-1]_q!.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\gamma_q(n) = q^{\frac{-n(n-1)}{2}}\Gamma_q(n).$$

■

4.3.3 La q-transformée de Laplace de type 2 de quelques fonctions usuelles.

1. $f(t) = t^{\alpha}$ avec $\alpha > -1$.

   On a

$$\begin{aligned}
\overline{L_q}\left(t^{\alpha}\right)(p) &= \int_0^{\infty} e_q(-pt)t^{\alpha}d_qt \\
&= \frac{\int_0^{\infty} e_q(-t)t^{\alpha}d_qt}{p^{\alpha+1}} \\
&= \frac{\gamma_q(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

   Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\overline{L_q}\left(t^{\alpha}\right)(p) &= \frac{\gamma_q(n+1)}{p^{n+1}} \\
&= \frac{q^{\frac{-n(n+1)}{2}}[n]_q!}{p^{n+1}}.
\end{aligned}$$

2. $f(t) = e_q(at)$ avec a un nombre complexe.

   On a

$$\begin{aligned}
\overline{L_q}\left(e_q(at)\right)(p) &= \int_0^{\infty} e_q(-pt) e_q(at) d_q t \\
&= \int_0^{\infty} e_q(-pt) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(at)^n}{[n]_q!} d_q t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{[n]_q!} \int_0^{\infty} e_q(-pt) t^n d_q t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{[n]_q!} \frac{q^{\frac{-n(n+1)}{2}} [n]_q!}{p^{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} q^{\frac{-n(n+1)}{2}} \frac{a^n}{p^{n+1}}.
\end{aligned}$$

3. $f(t) = E_q(at)$ avec a un nombre complexe.

   On a

$$\begin{aligned}
\overline{L_q}\left(E_q(at)\right)(p) &= \int_0^{\infty} e_q(-pt) E_q(at) d_q t \\
&= \int_0^{\infty} e_q(-pt) \sum_{n=0}^{+\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(at)^n}{[n]_q!} d_q t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} a^n}{[n]_q!} \int_0^{\infty} e_q(-pt) t^n d_q t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} a^n}{[n]_q!} \frac{q^{\frac{-n(n+1)}{2}} [n]_q!}{p^{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} q^{-n} \frac{a^n}{p^{n+1}} \\
&= \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{qp}\right)^n \\
&= \frac{1}{p} . \frac{1}{1 - \frac{a}{qp}} \text{ si } \operatorname{Re}(p) > \operatorname{Re}(a) \\
&= \frac{q}{qp - a}.
\end{aligned}$$

4. $f(t) = Cos_q(at)$ avec a un nombre réel.

   On a

$$\begin{aligned}
\overline{L_q}\left(Cos_q(at)\right)(p) &= \overline{L_q}\left(\frac{E_q(iat)+E_q(-iat)}{2}\right)(p) \\
&= \frac{1}{2}\left[\overline{L_q}\left(E_q(iat)\right)(p)+\overline{L_q}\left(E_q(-iat)\right)(p)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{q}{qp-ia}+\frac{q}{qp+ia}\right] \\
&= \frac{q^2p}{q^2p^2+a^2}.
\end{aligned}$$

5. $f(t) = \mathrm{Si}\,n_q(at)$ avec a un nombre réel.

   On a

$$\begin{aligned}
\overline{L_q}\left(\mathrm{Si}\,n_q(at)\right)(p) &= \overline{L_q}\left(\frac{E_q(iat)-E_q(-iat)}{2i}\right)(p) \\
&= \frac{1}{2i}\left[\overline{L_q}\left(E_q(iat)\right)(p)-\overline{L_q}\left(E_q(-iat)\right)(p)\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{q}{qp-ia}-\frac{q}{qp+ia}\right] \\
&= \frac{a}{q^2p^2+a^2}.
\end{aligned}$$

6. $f(t) = \cos_q(at)$ avec a un nombre réel.

   On a

$$\begin{aligned}
\overline{L_q}\left(\cos_q(at)\right)(p) &= \overline{L_q}\left(\frac{e_q(iat)+e_q(-iat)}{2}\right)(p) \\
&= \frac{1}{2}\left[\overline{L_q}\left(e_q(iat)\right)(p)+\overline{L_q}\left(e_q(-iat)\right)(p)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} q^{\frac{-n(n+1)}{2}}\frac{(ia)^n}{p^{n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty} q^{\frac{-n(n+1)}{2}}\frac{(-ia)^n}{p^{n+1}}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n q^{-n(2n+1)}\frac{a^{2n}}{p^{2n+1}}.
\end{aligned}$$

7. $f(t) = \sin_q(at)$ avec a un nombre réel.

On a

$$\begin{aligned}
\overline{L_q}\left(\sin_q(at)\right)(p) &= \overline{L_q}\left(\frac{e_q\left(iat\right)-e_q\left(-iat\right)}{2i}\right)(p) \\
&= \frac{1}{2i}\left[\overline{L_q}\left(e_q\left(iat\right)\right)(p)-\overline{L_q}\left(e_q\left(-iat\right)\right)(p)\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} q^{\frac{-n(n+1)}{2}}\frac{(ia)^n}{p^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty} q^{\frac{-n(n+1)}{2}}\frac{(-ia)^n}{p^{n+1}}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n q^{-(2n+1)(n+1)}\frac{a^{2n+1}}{p^{2n+2}}.
\end{aligned}$$

4.3.4 La q-transormée de Laplace de type 2 de la q-dérivée.

On a le résultat suivant

Proposition 4.3.5 *Soit* $f:[0,+\infty[\,\rightarrow\mathbb{C}$ *une fonction et supposons que la* q*-transormée de Laplace de type* 1 *de* D_qf *existe, alors on a*

$$\overline{L}_q\left(D_qf(t)\right)(p)=-f(0)+\frac{p}{q}\overline{L}_q\left(f(t)\right)\left(\frac{p}{q}\right).$$

Démonstration : On a

$$\overline{L}_q\left(D_qf(t)\right)(p)=\int_0^\infty (D_qf(t))e_q(-pt)d_qt.$$

En appliquant la $q-$intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{L}_q\left(D_qf(t)\right)(p) &= -f\left(0\right)-\int_0^\infty f\left(qt\right)D_qe_q(-pt)d_qt \\
&= -f\left(0\right)+p\int_0^\infty f\left(qt\right)e_q(-pt)d_qt \\
&= -f(0)+\frac{p}{q}\int_0^\infty f\left(u\right)e_q(-\frac{p}{q}u)d_qt \\
&= -f(0)+\frac{p}{q}\overline{L}_q\left(f(t)\right)\left(\frac{p}{q}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\overline{L}_q\left(D_qf(t)\right)(p)=-f(0)+\frac{p}{q}\overline{L}_q\left(f(t)\right)\left(\frac{p}{q}\right).$$

■

La proposition précédente admet la généralisation suivante

Proposition 4.3.6 *Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction et supposons que la q-transormée de Laplace de type 1 de $D_q^n f$ existent, alors on a*

$$\overline{L}_q\left(D_q^n f(t)\right)(p) = p^n q^{\frac{-n(n+1)}{2}} \overline{L}_q\left(f(t)\right)\left(\frac{p}{q^n}\right) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1}.q^{-\frac{(n-i)(n-i-1)}{2}} D_q^i f(0).$$

Démonstration : La preuve se fait par récurrence.

Pour $n = 1$, on a

$$\overline{L}_q\left(D_q f(t)\right)(p) = \frac{p}{q}\overline{L}_q\left(f(t)\right)\left(\frac{p}{q}\right) - f(0).$$

Supposons pour n fixé, on a

$$\overline{L}_q\left(D_q^n f(t)\right)(p) = p^n q^{\frac{-n(n+1)}{2}} \overline{L}_q\left(f(t)\right)\left(\frac{p}{q^n}\right) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1}.q^{-\frac{(n-i)(n-i-1)}{2}} D_q^i f(0),$$

et montrons que

$$\overline{L}_q\left(D_q^{n+1} f(t)\right)(p) = p^{n+1} q^{\frac{-(n+1)(n+2)}{2}} \overline{L}_q\left(f(t)\right)\left(\frac{p}{q^{n+1}}\right) - \sum_{i=0}^{n} p^{n-i}.q^{-\frac{(n+1-i)(n-i)}{2}} D_q^i f(0).$$

D'aprés l'hypothèse de récurrence, on a

$$\overline{L}_q\left(D_q^{n+1} f(t)\right)(p) = p^n q^{\frac{-n(n+1)}{2}} \overline{L}_q\left(D_q f(t)\right)\left(\frac{p}{q^n}\right) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1}.q^{-\frac{(n-i)(n-i-1)}{2}} D_q^{i+1} f(0).$$

Maintenant en utilisant la proposition précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
&\overline{L}_q\left(D_q^{n+1} f(t)\right)(p) \\
= \; & \frac{p^{n+1} q^{\frac{-n(n+1)}{2}}}{q^n} \overline{L}_q\left(f(t)\right)\left(\frac{p}{q^{n+1}}\right) - p^n q^{\frac{-n(n+1)}{2}} f(0) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1}.q^{-\frac{(n-i)(n-i-1)}{2}} D_q^{i+1} f(0) \\
= \; & p^{n+1} q^{\frac{-(n+1)(n+2)}{2}} \overline{L}_q\left(f(t)\right)\left(\frac{p}{q^{n+1}}\right) - p^n q^{\frac{-n(n+1)}{2}} f(0) - \sum_{i=1}^{n} p^{n-i}.q^{-\frac{(n-i)(n+1-i)}{2}} D_q^i f(0) \\
= \; & p^{n+1} q^{\frac{-(n+1)(n+2)}{2}} \overline{L}_q\left(f(t)\right)\left(\frac{p}{q^{n+1}}\right) - \sum_{i=0}^{n} p^{n-i}.q^{-\frac{(n-i)(n+1-i)}{2}} D_q^i f(0).
\end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \overline{L}_q\left(D_q^n f(t)\right)(p) = p^n q^{\frac{-n(n+1)}{2}} \overline{L}_q\left(f(t)\right)\left(\frac{p}{q^n}\right) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1}.q^{-\frac{(n-i)(n-i-1)}{2}} D_q^i f(0).$$

■

La n-ième q-dérivée de la q-transformée de Laplace de type 2.

Proposition 4.3.7 *Soit $\overline{F_q}$ la q-transformée de Laplace de type* 2 *d'une fonction f, alors on a*

$$L_q\left(t^n f(t)\right)(p) = (-1)^n D_q^n \overline{F_q}(p).$$

Démonstration : La preuve se fait par réccurence.

Pour $n = 1$, on a:

$$\begin{aligned}
D_q\overline{F_q}(p) &= D_q \int_0^\infty e_q\left(-pt\right) f(t) d_q t \\
&= -\int_0^\infty e_q(-pt) t f(t) d_q t \text{ car } D_q e_q(\alpha x) = \alpha e_q(\alpha x) \\
&= -L_q\left(t f(t)\right)(p)
\end{aligned}$$

Supposons pour n fixé, on a

$$L_q\left(t^n f(t)\right)(p) = (-1)^n D_q^n \overline{F_q}(p),$$

et montrons que

$$L_q\left(t^{n+1} f(t)\right)(p) = (-1)^{n+1} D_q^{n+1} \overline{F_q}(p).$$

On a

$$\begin{aligned}
D_q^{n+1}\overline{F_q}(p) &= D_q D_q^n \overline{F_q}(p) \\
&= D_q (-1)^n L_q\left(t^n f(t)\right)(p) \\
&= (-1)^n D_q \int_0^\infty e_q\left(-pt\right) t^n f(t) d_q t \\
&= (-1)^{n+1} \int_0^\infty e_q\left(-pt\right) t^{n+1} f(t) d_q t \\
&= (-1)^{n+1} L_q\left(t^{n+1} f(t)\right)(p).
\end{aligned}$$

Alors, on a

$$L_q\left(t^{n+1} f(t)\right)(p) = (-1)^{n+1} D_q^{n+1} \overline{F_q}(p).$$

■

Exemples

1. Calculons de la q-transformée de Laplace de type 2 pour la fonction g définie par
$$g\,(t) = t^n e_q(at),$$
où n est un entier naturel non nul et a un nombre complexe.

   On a
$$\begin{aligned}
\overline{L_q}\,(t^n e_q(at))\,(p) &= (-1)^n D_q^n \overline{L_q}\,(e_q(at))\,(p) \\
&= (-1)^n D_q^n \sum_{k=0}^{+\infty} q^{\frac{-k(k+1)}{2}} \frac{a^k}{p^{k+1}} \\
&= (-1)^n D_q^{n-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)\,[k+1]_q\, q^{\frac{-k(k+1)}{2}-(k+1)} \frac{a^k}{p^{2k+1}} \\
&= (-1)^n D_q^{n-2} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^2\,[k+1]_q\,[k+2]_q\, q^{\frac{-k(k+1)}{2}-(k+1)-(k+2)} \frac{a^k}{p^{k+3}} \\
&= (-1)^n \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^n\, q^{-\frac{k(k+1)}{2}-\frac{n(n+2k+1)}{2}} \frac{[k+n]_q!}{[k]_q!} \frac{a^k}{p^{k+n+1}}.
\end{aligned}$$

2. Calculons de la q-transformée de Laplace de type 2 pour la fonction h définie par
$$h\,(t) = t^n E_q(at),$$
où n est un entier naturel non nul et a un nombre complexe.

   On a
$$\begin{aligned}
\overline{L_q}\,(t^n E_q(at))\,(p) &= (-1)^n D_q^n \overline{L_q}\,(E_q(at))\,(p) \\
&= (-1)^n D_q^n \frac{q}{qp-a} \\
&= (-1)^n D_q^{n-1}\,(-1)\,\frac{q^2}{(qp-a)\,(q^2p-a)} \\
&= (-1)^n D_q^{n-2}\,(-1)^2\,\frac{q^3\,[k]_q!}{(qp-a)\,(q^2p-a)\,(q^3p-a)} \\
&= \frac{q^{n+1}\,[n]_q!}{\prod_{j=1}^{n+1}(q^j p - a)}.
\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] B. Ahmad, S. Ntouyas and J. Tariboon, Quantum Calculus: New Concepts, World Scientific Publishing Company, Singapore, 2016.

[2] R. Askey, The q-gamma and q-beta functions, Applicable Anal. 8(1978), 125-141.

[3] G. Bangerezako, An introduction to $q-$difference equations, preprint 2008. (voir le site https://cdn.uclouvain.be/public/Exports%20reddot /math/documents/RAPSEM354.pdf).

[4] K. S. Chung, K.S., W. S. Chung, S.T. Nam and H. J. Kang, New q-derivative and q-logarithm, Int. J. Theor. Phys.33(1994), 2019–2029.

[5] W. S. Chung, T. Kim and H. I. Kwon, On the q-analog of the Laplace transform, Russ. J. Math. Phys. 21(2014), 156–168.

[6] T. Ernst, A Comprehensive Treatment of q-Calculus, Springer Basel Heidelberg New York Dordrecht, 2012.

[7] T. Ernst, A method for q-calculus, J. Nonlinear Math. Phys.10 (2003), 487–525.

[8] F. H. Jackson, A generalization of the functions $\Gamma(n)$ and x^n, Proc. Roy. Soc.London, 74 (1904), 64-72.

[9] F. H. Jackson, q-Difference equations, Am. J. Math. 32 (1910), 305-314.

[10] V. Kac and P. Cheung, Quantum Calculus, Uiversitext, Springer-Verlag, New York, 2002.

[11] D. Larsson and S. Silvestrov, Burchnall-Chaundy theory for q-difference operators and q-deformed Heisenberg algebras, J. Nonlinear Math. Phys.10 (suppl. 2) (2003), 95–106.

ملخص

انطلاقا من مفهوم المشتقة المعممة و التي يطلق عليها "ك – مشتقة"، يعرف "ك-تكامل" و عليه يمكن حل معادلات ك -تفاضلية خطية من الرتبة الأولى , و باستعمال " ك – تحول لابلا س" يمكن حل المعادلات المذكورة أعلاه .

Résumé

A partir de la notion de la q-dérivée, on définit le q-intégrale et par conséquent on peut résoudre des équations aux q-différences linéaire d'ordre 1 analytiquement, et par q-transformée de Laplace on résoudre les équations indiquées ci-dessous.

abstract

From the concept of the q-derivative we define the q-intégral and as conséquence we can solve some q-diffenrence lineaire equations of order 1 , and with the q-Laplace transform we can solve some q-difference equations.