Hakima Bouchekif

Quelques critéres d'oscillation pour les équations différentilles ordinaires fonctionnelles non linéaires de deuxième ordre

Mémoire de Master 2 ,sous la direction de Mekki HOUBED

Juin 2017

Hakima Bouchekif
Département de Mathématiques
Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen 13000
Algérie
bouchekifh@gmail.com

Remerciement :

Avant tout je remercie mon dieu ALLAH qui ma donné la volonté , la chance d'étudier et le courage pour accomplir ce travail.

Sans oublier mes chers parents qui ma donné leur encouragement.

Je tiens à remercier aussi mon encadreur Monsieur MEKKI HOUBED, Maitre de conférences à Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen pour m'avoir proposé le théme de ce mémoire et m'avoir guidé,conseillé pendant toute la période de mon travail.

Je tiens également à remercier les membres du jury d'avoir accepter de juger ce travail.

Et merci

Dédicace :

Je dédie ce mémoire :

A la lumière de mes yeux et le bonheur de mon existence : mes chers parents pour leurs conseils et orientations durant ma vie.

A ma chère soeur : Milouda et son marie Mohamed et leur enfant Mehdi .

A ma chère frére : Fares

A toute ma promotion .

et à toutes mes amies surtout ma chère amie kheira.

et mon fiancé : Amine.

Table des matières

Introduction générale

0.1 Un apercu historique sur les équations différentielles :

En mathématiques, une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.
Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologique.
Les équations différentielles sont apparues historiquement tout au début du développement de l'analyse,
De nombreux travaux furent consacrés à ce sujet, différant généralement par la motivation de l'auteur (Mécanique, Géométrie, Physique,$\cdots$). Par exemple, pour la mécanique non linéaire, on considère qu'elle fut fondée à la fin du dix-neuvième siècle par le mathématicien franccais Henri Poincaré (Sur les courbes définies par des équations différentielles,1881-1886; Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1892-1899). Il y a lieu de citer aussi le mathématicien russe Lyapunov, fondateur de la théorie de la stabilité (Le problème général de la stabilité du mouvement, 1892). Dans les travaux techniques du vingtième siècle, nous allons distinguer schématiquement trois courants :
1. Entre les deux guerres mondiales, les ingénieurs se sont intéressés, dans plusieurs pays, au problème des oscillations. Ainsi, le chercheur russe Andronov trouva en 1929 dans les travaux de Poincaré le fondement de sa Théorie des oscillations(1938).
2. Après la seconde guerre, plusieurs chercheurs soviétiques précisèrent et appliquèrent les travaux de Lyapunov sur la stabilité, notamment Lur'e, Malkin, Ajzerman; puis Wegrzyn en Pologne, reformula le problème de la stabilité à la lumière de l'analyse fonctionnelle.
3. Vers 1950, des chercheurs de tous les pays s'inspirèrent des méthodes d'étude et de synthèse des systèmes linéaires continus (fonction de transfert, techniques graphiques utilisant la réponse unitaire ou la réponse en fréquences) et échantillonnés (transformée en z), méthodes devenues classiques, pour élaborer des techniques applicables aux systèmes non linéaires. On a notamment étendu à ces systèmes la méthode des réponses en fréquences (Gol'dfarb, Dutilh, Kochenburger). On peut encore citer les travaux de : Coddington-Levinson (1955), Hale (1965, 1971),Rouche-Mawhin (1973), Pontriaguine (1975), Reinhart (1975), Siboney-Mardon (1988),Demailly (1991).
Dans ce travail,on propose de donner quatre chapitre :
Dans le premier chapitre nous allons introduire des rappels sur quelques notions fondamentales qui vont nous servir dans l'élaboration de cet mémoire, Ainsi le théorème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires.
Le deuxième chapitre est parles sur la résolution des équations différentielles ordinaires par la méthode de Laplace et Fourier .
Dans le troisième chapitre est consacré à la résolution des équations différentielles ordinaires par la méthode des séries entiere.
Finalement dans le dernier chapitre, nous introduirons une étude sur les oscillations pour les équations différentielles fonctionnelle non linéaire de deuxième ordre .

Chapitre 1

Les équations différentielles ordinaire

1.1 Equation différentielle d'ordre 1 :

Définition 1 (Equation différentielle d'ordre 1)**.** *on appelle équation différentielle d'ordre 1, une équation de la forme*

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{1.1}$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t à valeur dans $\mathbb{R}$ et f une fonction donnée tq $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 2 (Problème de Cauchy)**.** *l'équation différentielle(1.1) avec une condition initiale s'appelle problème de couchy qui s'ecrit sous la forme :*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec $y_0 \in \mathbb{R}$

Définition 3 (Norme)**.** *soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. une norme sur E est une application $\|.\|$ de E dans $\mathbb{R}^+$.*

$$\|.\| : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

pour tout $(x, y) \in \mathbf{E} * \mathbf{E}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on ait :

1. $\|x\| \geq 0.$

2. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$

3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inegalité triangulaire).*

le couple (E,$\|.\|$) s'appelle un espace vectorielle normé sur $\mathbb{R}$ (EVN).

Remarque 1 (un exemple d'une norme sur $\mathbb{R}^n$). pour tout $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}^*}(|x_k|)$$

.

1.2 l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de cauchy formé par une équation différentielle d'ordre un :

Définition 4 (Espace de Banach). *Un espace de Banach est un espace vectorielle normé dans lequel toute suite de cauchy converge on dit aussi qu'il est complet.*

Définition 5. *soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on dit que h est lipschitzienne s'il existe :*

$$k > 0 \quad tq : \forall x, y \in \mathbb{R} \quad on \quad a : |h(x) - h(y)| \leq k|x - y|$$

Définition 6 (Fonction Lipschitzienne). *Soit E un espace de Banach et $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ on dit que f est contractante si il existe $c \in [0, 1[(c < 1)$ tel que pour tous $x, y \in \mathbf{E}$*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|$$

Définition 7. *Soit E un espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'élément de E on dit que (x_n) est une suite de cauchy si pour tout $\epsilon > 0$ il existe N tq pour $m, n \geq N$ on a :*

$$\|x_m - x_n\| \leq \epsilon$$

Théorème 1 (Théoreme de point fixe de Picard). *Si E est un espace Banach et f est contractante,alors f admet un unique point fixe .*

Preuve.
l'unicité :
On pose que f admet deux point fixe p_1 et p_2 tq $f(p_1) = p_1$ et $f(p_2) = p_2$ alors $\|p_1 - p_2\| = \|f(p_1) - f(p_2)\|$ et par hypothése on a :
f contractante donc :
$\exists c \in [0, 1[\quad \text{tq} \quad \|f(p_1) - f(p_2)\| \leq c\|p_1 - p_2\|$
alors $\quad \|p_1 - p_2\| \leq c\|p_1 - p_2\|$, ce qui n'est possible que si $\|p_1 - p_2\| = 0$
donc $p_1 = p_2$.d'où l'unicité de point fixe.
l'existence :
on construit une suite récurrente en espérant que sa limite soit un point fixe :
soient $x_0 \in E$ quelconque et $x_{n+1} = f(x_n)$ par une récurrence immédiate
$\|x_{n+1} - x_n\| \leq c^n\|x_1 - x_0\|$ donc pour $n \geq m$:

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\| &\leq \|x_n - x_{n-1}\| + ... + \|x_{m+1} - x_m\| \\ &\leq (c^m + ... + c^{n-1})\|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{c^m}{(1 - c)}\|x_1 - x_0\|\end{aligned}$$

soit $\epsilon > 0$ pour tout m et n plus grand qu'un certain N, le membre de droite est plus petit que ϵ. donc (x_n) est une suite de cauchy , donc elle converge vers une limite l car E un espace de banach.
$x_n \longrightarrow l$ donc comme $\|f(x_n) - f(l)\| \leq c\|x_n - l\|$
$f(x_n) \longrightarrow f(l)$ ie :$x_{n+1} \longrightarrow f(l)$ mais $x_{n+1} \longrightarrow l$ donc $f(l) = l$ on a bien trouvé un point fixe. □

Théorème 2 (Existence et unicité de Cauchy Lipschitz). *On rappelle que l'équation qui nous itéresse est :*

1.2 l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de cauchy formé par une équation différentielle d'ordre

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

si f est une fonction continue et lipschitziene en y, alors cette le problèmme de Cauchy admet une unique solution sur $[a, b]$ et ceci pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$.

Remarque 2. On note $C([a, b])$ l'espace des fonctions définies et continues sur $[a, b]$.

Preuve.
unicité :
Si le problème de Cauchy admet une solution y cette solution vérifie :

$$\forall x \in [a, b], y(x) = y_0 + \int_a^x f(t, y(t))dt$$

supposons qu'il existe deux solution y_1 et y_2 à ce meme problème de cauchy donc :

$$\forall x \in [a, b], y_1(x) = y_0 + \int_a^x f(t, y_1(t))dt.$$

et

$$\forall x \in [a, b], y_2(x) = y_0 + \int_a^x f(t, y_2(t))dt.$$

nous obtenons facilement :

$$\forall x \in [a, b], y_1(x) - y_2(x) = \int_a^x f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))dt.$$

or f vérifie une condition de lipschitz, d'où :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b], |y_1(x) - y_2(x)| &\leq k \int_a^x |y_1(t) - y_2(t)|dt \\ &\leq k\|y_1 - y_2\|_\infty |x - a| \end{aligned}$$

où $\|y\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]}(|\text{y(x)}|)$
Ainsi,par récurence,
$\forall x \in [a, b], |y_1(x) - y_2(x)| \leq k^n \dfrac{|x - a|^n}{n!} \|y_1 - y_2\|_\infty.$
Pour $n = 1$ c'est évident, on suppose que cette inégalité est vrai pour certain n et on montre qu'elle est vrai pour $n + 1$ ainsi
$\forall x \in [a, b], |y_1(x) - y_2(x)| \leq k \displaystyle\int_a^x k^n \|y_1 - y_2\|_\infty \frac{|x - a|^n}{n!} dt = k^{n+1} \|y_1 - y_2\|_\infty \frac{|x - a|^{n+1}}{(n + 1)!}$
en faisant tendre n vers l'infini, donc

$$k^n \frac{|x - a|^n}{n!} \longrightarrow 0$$

.
on obtient

$$\forall x \in [a, b], |y_1(x) - y_2(x)| = 0$$

.
donc $y_1 = y_2$ d'où l'unicité de solution.

existence :
une solution de notre équation différentielle est un point fixe de l'aplication T de $C^0([a,b],\mathbb{R})$ dans lui meme, qui a y associe :

$$T(y) : t \longrightarrow \; y_0 + \int_a^x f(t,y(t))dt$$

. il semble donc naturel de chercher à montrer que T est contractante , notons k tel que f soit k-lipsitzienne en y :

$$\begin{aligned}
|T(y_1)(x) - T(y_2)(x)| &= |y_0 + \int_a^x f(t,y_1(t)) - y_0 - \int_a^x f(t,y_2(t))dt| \\
&\leq \int_a^x |f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))|dt \\
&\leq k\int_a^x |y_1(t) - y_2(t)|dt \\
&\leq k|x-a|\|y_1 - y_2\|_\infty
\end{aligned}$$

on obtient ainsi

$$\|T(y_1) - T(y_2)\|_\infty \leq k|x-a|\|y_1 - y_2\|_\infty$$

Ce n'est pas forcément contractant car peut étre que $k|x-a| \geq 1$ il va donc faloir ruser en itérant T,si on réutilise notre derniére inégalité on trouve :

$$\begin{aligned}
|T^2(y_1)(x) - T^2(y_2)(x)| &= |y_0 + \int_a^x f(t,T(y_1)(t)) - y_0 - \int_a^x f(t,T(y_2)(t))dt| \\
&\leq \int_a^x |f(t,T(y_1)(t) - f(t,T(y_2)(t))|dt \\
&\leq k\int_a^x |T(y_1)(t) - T(y_2)(t)|dt \\
&\leq k\int_a^x k|t-a|\|y_1 - y_2\|_\infty dt \\
&\leq k^2\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}\|y_1 - y_2\|_\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|T^3(y_1)(x) - T^3(y_2)(x)| &\leq k\int_a^x |T^2(y_1)(t) - T^2(y_2)(t)|dt \\
&\leq k\int_a^x \frac{k^2|t-a|^2}{2}\|y_1 - y_2\|_\infty dt \\
&\leq \frac{k^3\|y_1 - y_2\|_\infty}{2}\int_a^x (t-a)^2 dt \\
&\leq \frac{k^3(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\|y_1 - y_2|\|_\infty
\end{aligned}$$

on obtient par récurence :

$$|T^n(y_1)(x) - T^n(y_2)(x)| \leq \frac{k^n}{n!}(x-a)^n\|y_1 - y_2\|_\infty$$

or quand n tend vers $+\infty$

,

$$\frac{(k(x-a))^n}{n!} \longrightarrow 0$$

donc pour n assez grand

$$\frac{(k(x-a))^n}{n!} \leq 1 \quad \forall x \in [a,b]$$

.

donc T^n est contractante on applique le théorème de point fixe alors T^n admet un unique point fixe , qu'on note Z .Il reste à vérifier que Z est un point fixe de$T$:

$$\begin{aligned}\|T(Z)-Z\|_\infty &= \|T(T^n(Z))-T^n(Z)\|_\infty \\ &= \|T^{n+1}(Z)-T^n(Z)\|_\infty \\ &\leq c\|T(Z)-Z\|_\infty\end{aligned}$$

avec $c \leq 1$ car T^n est contractante , cela n'est possible que si $\|T(Z)-Z\| = 0$ donc Zest un point fixe de T, d'ou l'existence de solution. □

1.3 équation différentielle d'ordre n :

Définition 8. *on appelle équation différentielle d'ordre n tout équation de la forme :*

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)) \tag{1.2}$$

où n est l'ordre de l'équation différentielle et $g : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ et la fonction y est une fonction inconnue de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

1.3.1 la réduction d'une équation différentielle d'orde n à une équation différentielle d'ordre 1 :

pour transformée l'équation (1.2) à une équation différentielle d'ordre 1, il suffit pour cela de poser :

$$y_0(t) = y(t), y_1(t) = y'(t), ..., y_{n-1}(t) = y^{(n-1)}(t)$$

avec y est une solution de (1) si et seulement si les fonctions y_i pour $0 \leq i \leq n-1$ sont une solution du système suivant :

$$\begin{cases} y_0'(t) = y_1(t) \\ y_1'(t) = y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-2}(t) = y_{n-1}(t) \\ y_{n-1}' = g(t, y_0(t), y_1(t), ..., y_{n-1}(t)) \end{cases}$$

En d' autre termes , le vecteur $Y(t)$, de coordonnée $y_i(t)$ pour $0 \leq i \leq n-1$ est solution de

$$Y'(t) = (y_0'(t), y_1'(t), ..., y_{n-1}'(t))$$

$$G(t, Y(t)) = (y_1(t), y_2(t), ..., y_{n-1}(t), g(t, y_0(t), ..., y_{n-1}(t)))$$

Exemple 1. Considérons une équation différentielle d'ordre 2 :

$$y''(t) = y'(t) + y(t) + t$$

on pose ;

$$\begin{cases} y_0(t) = y(t) \\ y_1(t) = y'(t) \end{cases}$$

donc,

$$\begin{cases} y_0'(t) = y_1(t) \\ y_1'(t) = y''(t) = y'(t) + y(t) + t \end{cases}$$

on pose

$$Y'(t) = (y_0'(t), y_1'(t))$$

et

$$G(t, Y(t) = (y_1(t), y_1(t) + y_0(t) + t)$$

alors

$$Y'(t) = G(t, Y(t))$$

alors l'équation différentielle d'ordre 2 devient une équation différentielle d'ordre 1.

Définition 9. *Une équation sous la forme (1.2) est dite homogène si son expression ne dépend pas de la premiere variable t.*

$$y^{(n)}(t) = g(y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t))$$

Remarque 3. Pour rendre une équation homogène , il suffit de considèrer le temps comme une inconnue fictive. en posant : $Z(t) = (t, y(t))$ on trouve alors ;

$$\begin{cases} Z'(t) = (1, y'(t)) \\ Z''(t) = (0, y''(t)) \\ \vdots \\ Z^n(t) = (0, y^{(n)}(t)) \end{cases}$$

typiquement un modèle est homogène en temps quand le choix de l'origine n'intervient pas dans les hypothése de modélisation,si $y(t)$ est solution de l'équation homogène en temps, avec $y(t_0) = x$, alors l'application Z qui à t associe $y(t_0 + t)$ est solution de la meme équation différentielle avec $Z(0) = x$ dans le modèle homogène en temps. on peut toujours choisir 0 comme instant initial. donc la condition initiale est donnée en $t = 0$.

Chapitre 2

Résolution des équations différentielles ordinaires par les transformées de Fourier et les transformées de Laplace

2.1 Transformation de Fourier :

Définition 10 (transformée de Fourier)**.** *soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction absolument intégrable sur l'ensemble des réels ,on définit la transformée de fourier de f la fonction notée* $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *par :*

$$\mathcal{F}(f(t))(\alpha) = \widehat{F}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Exemple 2. calculer la transformée de fourier de la fonction définie par :

$$\pi(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [-1/2, 1/2] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ona : \mathcal{F}(\pi(t))(\alpha) = \widehat{F}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(t)e^{-i\alpha t}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i\alpha t}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

2.1.1 Propriétes de la transformée de fourier :

1. F est linéaire :,
   en effet quels que soient f,g fonctions de $l^1(\mathbb{R})$ et λ et μ complexes.

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g)(\alpha) = \lambda \mathcal{F}(f)(\alpha) + \mu \mathcal{F}(f)(\alpha)$$

2. transformée d'une dérivée :
   si f est continue et si $\frac{df}{dt}$appartient à $l^1(\mathbb{R})$ alors on a :

$$\mathcal{F}(\frac{df}{dt})(\alpha) = i\alpha \mathcal{F}(f)(s)$$

2.1.2 Table des transformées de fourier :

Le tableau suivant rassemble quelques propriétés de base de la transformation de Fourier :

La fonction	la transformée de fourier
$f(x)$	$\widehat{f}(\alpha)$
$e^{-at}, a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}(a+i\alpha)}$
$\begin{cases} 1 \text{ si } t \in [-a, a] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$	$\sqrt{(\frac{2}{\pi})}\frac{sin(a\alpha)}{\alpha}$
$\delta(t)(fonctiondedirac)$	1
$\delta(t-a)$	$e^{-ia\alpha}$
$f(-x)$	$\widehat{f}(-\alpha)$
propriétés	
$f(ax)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\widehat{f}(\frac{\alpha}{a})$
$f(x+b)$	$e^{ib\alpha}\widehat{f}(\alpha)$
$e^{ibx}f(x)$	$\widehat{f}(\alpha-b)$
$\frac{d}{dx}f(x)$	$i\alpha\widehat{f}(\alpha)$
$xf(x)$	$i\frac{d}{d\alpha}\widehat{f}(\alpha)$
$(f*g)(x)$	$\widehat{f}(\alpha)\widehat{g}(\alpha)$
$f(x)g(x)$	$\frac{1}{2\pi}(\widehat{f}*\widehat{g})(\alpha)$

2.1.3 La résolution des équations différentielle d'ordre 1 à coefficients constants par la transformée de Fourier :

soit donnée une équation différentielle d'ordre 1

$$a_0 y'(t) + a_1 y(t) = f(t)$$

on demande de trouver la solution de cette équation $y(t)$ pour $t \geq 0$ donc pour cela on cherche la transformée de fourier des deux membre de cette équation :

$$\mathcal{F}(a_0 y'(t) + a_1 y(t))(\alpha) = \mathcal{F}(f(t)(\alpha)$$

en utilisant les propriétes de linéarité :

$$a_0\mathcal{F}(y'(t))(\alpha) + a_1\mathcal{F}(y(t))(\alpha) = \mathcal{F}(f(t)(\alpha)$$

sachant que ;

$$\mathcal{F}(f^{(p)}(x))(\alpha) = (i\alpha)^p\widehat{f}(\alpha)$$

la transformée de fourier permet de convertir une équation différentielle à une équation algébrique, dont la solution est la transformée de la solution $y(t)$ de notre équation différentielle ,pour finir on utilise la transformée inversr de fourier .

2.1.4 Inversion de la transformation de Fourier :

On démontre que, inversement, on peut en général obtenir f(x) à partir de $F(\alpha)$ par la transformation dite de fourier inverse :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{F}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha \tag{2.1}$$

L'intégrale (2.1)doit ètre considèrée en valeur principale, c'est-à-dire définie comme la limite suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{F}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R} \widehat{F}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha$$

On prend comme notation pour la transformation de Fourier inverse :

$$f(x) = F^{-1}[\widehat{F}(\alpha)]$$

La formule d'inversion (2.1) ne permet pas en fait de remonter à f(x), mais à une fonction presque partout égale à f(x). à ce sujet, nous mentionnerons seulement le théorème suivant : Si f(x) est une fonction intégrable présentant un nombre fini de discontinuités, la formule d'inversion conduit à $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ ou' $f(x^+)$ et $f(x^-)$ sont les limites à droite et à gauche de $f(x)$. En particulier, si f(x) est continue, la formule d'inversion redonne bien $f(x)$. Ici encore, les conditions énoncées sont des conditions suffisantes mais non nécessaires.

2.2 La transformation de laplace :

Définition 11. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux. On appelle transformée de Laplace de la fonction f, la fonction :*

$$\mathcal{L}(f(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

2.2.1 Propriétés :

1. Linéarité :
   soient $f, g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformées de Laplace $F(p)$ et $G(p)$,et soient α et β deux réels ; alors

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(p) = \alpha\mathcal{L}(f)(p) + \beta\mathcal{L}(g)(p)$$

2. Transformée d'une dérivée :
   soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continument dérivable et admettant une transformée de Laplace $F(p)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'(t))(p) &= \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt \\ &= pF(p) - f(0^+)\end{aligned}$$

2.2.2 table de la transformée de Laplace :

$f(t)$	$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}$
1	$\frac{1}{p}$
$t^n, n\in\mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^\alpha, \alpha>-1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
$sin(at)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$cos(at)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$sh(at)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$ch(at)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
propriétés	
$f(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
$e^{-at}f(t)$	$F(p+a)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$
$\int_0^t f(s)ds$	$\frac{F(p)}{p}$
$f'(t)$	$pF(p)-f(0^+)$
$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p)-\sum_{k=1}^n p^{k-1}f^{(n-k)}(0^+)$
$t^nf(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(p)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} F(u)du$
$f de periode T$	$\frac{1}{1-e-pt}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$
$(f*g)(t)=\int_0^t f(s)g(t-s)ds$	

2.2.3 la transformée inverse :

La transformée de Laplace étant un opérateur bijectif, l'application inverse existe. Elle est unique et on l'appelle original de F; on a alors $\mathcal{L}^{-1}(F(p))=f(t)$. La définition mathématique de la transformée de Laplace inverse se base sur une intégrale de contour dans le plan complexe, l'utilisation de cette définition exige une connaissance de l'Analyse complexe.
En pratique :

1. On détermine la transformée inverse de$F(p)$directement de la table.
2. Il faut d'abord exprimer ou décomposer$F(p)$en une somme de termes dont les transformées inverses sont dans la table.
3. Utiliser la table conjointement avec une ou plusieurs propriétés.
4. S'il y a des retards, les traiter en premier,séparément.
5. Pour des fractions rationnelles, on décompose dans l'ensemble des réels en éléments simples. Pour les éléments simples de première espèce se traitent facilement. Pour ceux de seconde espèce, on doit mettre leur dénominateur sous forme canonique, pour retrouver des originaux en sinus ou en cosinus.

Exemple 3.

$$F(p)=\frac{3p+7}{p^2-2p-3}=\frac{4}{p-3}-\frac{1}{p+1}$$

donc : $f(t)=(4e^{3t}-e-t)u(t)$

$$F(p)=\frac{e^{-2p}}{p+1}$$

donc : $f(t) = e^{t-2}u(t-2)$

$$F(p) = \frac{3p+1}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{2}{p-1} + \frac{-2p+1}{p^2+1}$$

et finalement

$$f(t) = 2e^t - 2\cos(t) + \sin(t)$$

2.2.4 La résolution des équations différentielles d'ordre n par la méthode de transformée de Laplace :

Soit donnée une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants :

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t)$$

On demande de trouver la solution de cette équation $y = y(t)$ pour $t \geq 0$ et vérifiant les conditions initiales :
$y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, \cdots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$,
On cherche la transformée de Laplace des deux membres de l'équation :

$$\mathcal{L}(a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y) = \mathcal{L}(f(t))$$

En utilisant les propriétés de linéarité :

$$a_0 \mathcal{L}(y^{(n)})(p) + a_1 \mathcal{L}(y^{(n-1)})(p) + \cdots + a_{n-1} \mathcal{L}(y')(p) + a_n \mathcal{L}(y)(p) = \mathcal{L}(f(t))(p)$$

Sachant que;

$$\mathcal{L}(f^{(k)}(t))(p) = p^k F(p) - \sum_{i=1}^{k} p^{i-1} f^{(k-i)}(0^+)$$

La transformée de Laplace permet de convertir une équation différentielle en une équation algébrique, dont la solution est la transformée de la solution $y(t)$de notre équation différentielle . Pour finir, on utilise la transformée de Laplace inverse pour déterminer la solution

Exemple 4. résoudre :

$$\begin{cases} x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 4e^{3t} \\ x(0) = 4 \\ x'(0) = 9 \end{cases}$$

ona :
$\mathcal{L}(x) = X$

$\mathcal{L}(x')(p) = pX - x(0)$

$\mathcal{L}(x'')(p) = p^2 X - px(0) - x'(0)$

l'équation devient :

$$(p^2 - 3p + 2)X = \frac{4}{p-3} + 4p - 3$$

d'ou

$$X(p) = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2} + \frac{2}{p-3}$$

donc :

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(p)) = e^{t} + e^{2t} + 2e^{3t}$$

Chapitre 3

la résolution des équations différentielles ordinaires par la méthode des séries entières

Définition 12. *On appelle série entière de centre x_0 et de terme générale a_n toute séries de fonction de la forme :*

$$\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n \tag{3.1}$$

où x est un réel ou comlexe et les a_n sont les coefficients de la série.

3.1 Le rayon de convergence d'une sérier entière :

Définition 13. *le rayon de convergence d'une série entière est donné par :*

$$R = sup\{(x-x_0) \quad : \sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n \quad converge\}$$

Remarque 4. 1. Toute série entière possède un rayon de convergence.

2. Dire que $R = 0$ signifie que la série entière converge uniquement pour $x = 0$.
3. Si la série converge pour tout complexe z, on dit que le rayon de convergence est infini.
4. On ne peut rien conclure sur la nature de la série entière lorsque $|x - x_0| = R$.
5. dans $\mathbb{R}$ on parle de l'intervalle de convergence $]x_0 - R, x_0 + R[$.
6. dans $\mathbb{C}$,on parle de disque de convergence $D(x_0, R)$.

Théorème 3 (théorème de comparaison). *soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ à terme positive*

si $u_n \leq v_n$ alors on a :

i) si la $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors la $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge aussi.
ii) si la $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge alors la $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge aussi.

Lemme 1 (d'ABEL). *Soit $(\sum_{n\geq 0} a_n x^n)$ une série entière de centre $x_0 = 0$. On suppose qu'il existe $x'_0 \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(a_n {x'_0}^n)_n$ soit bornée. Alors :*

1. *La série $(\sum_{n\geq 0} a_n x^n)$ est absolument convergente pour $|x| < |x'_0|$.*
2. *La série $(\sum_{n\geq 0} a_n x^n)$ est normalement convergente pour $|x| < r$ pour tout $0 < r < |x'_0|$.*

Preuve. La suite $(a_n {x'_0}^n)_n$ est bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} ona : |a_n {x'_0}^n| \leq M$.

1. pour $|x| < |x'_0|$:
   $|a_n x^n| = |\frac{a_n x^n {x'_0}^n}{{x'_0}^n}| = |a_n {x'_0}^n| \left|\frac{x}{x'_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x'_0}\right|^n$. la sérier $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{x}{x'_0}\right|^n$ est une série géométrique de raison $\left|\frac{x}{x'_0}\right| < 1$,donc convergente.alors d'apris le théorème de comparaison, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$ est convegente et par conséquent la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolument pour $|x| < |x'_0|$.
2. soit $0 < r < |x'_0|$ et soit $|x| < r$:
   $|a_n x^n| = |\frac{a_n x^n {x'_0}^n}{{x'_0}^n}| = |a_n {x'_0}^n| \left|\frac{x}{x'_0}\right|^n \leq M|\frac{r}{x'_0}|^n$. comme $\sum_{n=0}^{+\infty} M(\frac{r}{x'_0})^n$ est une série numérique convergente, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est normalement convergente pour tout x tel que $|x| < r$ et tout r tel que $0 < r < |x'_0|$.

□

3.2 Méthodes de détermination du rayon de convergence :

3.2.1 Critère de Cauchy :

on note $u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ le critère de cauchy consiste à calculer :

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x| \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x - x_0| l$$

avec

$$l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

la série (3.1) est converge si

$$|x - x_0| l < 1$$

$$\Rightarrow |x - x_0| < \frac{1}{l} = R$$

le rayon de convergence.
et la série (3.1) est diverge si

$$|x - x_0| l > 1$$

$$\Rightarrow |x - x_0| > \frac{1}{l} = R$$

donc le rayon de convergence de la série (3.1) est

$$R = \frac{1}{l}$$

avec

$$l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

.

3.2.2 Critère de d'Alembert :

le critère d'alembert consiste à calculer :

$$\lim_{n\to+\infty}|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}| = \lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}||x-x_0| = |x-x_0|\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |x-x_0|l$$

.
avec

$$l = \lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$$

la série(3.1)converge si

$$|x-x_0|l < 1 \Rightarrow |x-x_0| < \frac{1}{l}$$

.
la série(3.1) diverge si

$$|x-x_0|l > 1 \Rightarrow |x-x_0| > \frac{1}{l}$$

.
le rayon de convergence

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{|\frac{a_n}{a_{n+1}}|} = \lim_{n\to+\infty}|\frac{a_n}{an+1}|$$

3.3 Développement d'une fonction en série entiere :

3.3.1 Propriétés :

1. Continuité d'une série entière : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ une série entière de rayon de convergence R et de centre x_0 soit f :$]-R,R[\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, f est alors continue.

   Preuve. Soit $0<r<R$ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, les fonctions $f_n(x)=a_n(x-x_0)^n$ sont continues dans $[-R,R]$et puisque la convergence est normale donc uniforme dans $[-r,r]$, f est alors continue dans $[-r,r]$ pour tout r,$0<r<R$ donc continue dans $]-R,R[$. □

2. Dérivée d'une série entière :

   Définition 14. *Une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est dite dérivable en $x_0\in\mathbb{R}$ si $lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe. On la note $f'(x_0)$.*

   Définition 15. *Une fonction f est dite de classe c^n sur un intervalle I de$\mathbb{R}$, si sa dérivée d'ordre n est une fonction continue sur I. On notera alors que $f\in c^n(I)$. Si elle est indéfiniment (ou infiniment) dérivable, on dira alors qu'elle est de classe c^∞et on écrira que$f\in c^\infty(I)$. Par contre $f\in c^0(I)$, signifie que f est seulement continue sur I.*

3.3.2 Proposition :

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ une serie entiere de rayon de convergence R, et soit $f:]-R,R[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$. Alors f est derivable et on a $f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$.

Corollaire 1. *Soit la série* $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ *de rayon de convergence R ; f est indefiniment derivable* $(f \in c^{\infty}(]-R,R[))$ *; et l'on a :*

$$\forall x \in]-R,R[, f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Définition 16. $f(x)=\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$*.c'est le développement en série entière au voisinage de* x_0*.*
et le le développement en série entière au voisinage de 0 *est :* $f(x)=\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

Remarque 5. si f une fonction paire le développement en série entière ne contient que les puissance paire .
et si f une fonction impaire le développement en série entière ne contient que les puissance impaire.

1) f est paire alors $f(x)=f(-x)$
or $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$
et $f(-x)=a_0-a_1x+a_2x^2+\cdots+a_n(-x)^n+\cdots$
$f(x)=f(-x) \Rightarrow a_1=-a_1, a_3=-a_3, a_5=-a_5\cdots$
donc $a_1=a_3=a_5=\cdots=a_{2p+1}=0$.
alors le développement en série entière contiet que les puissance paire.
2)f est impaire alors $f(-x)=-f(x)$
or $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$.
et $f(-x)=a_0-a_1x+a_2x^2+\cdots+a_n(-x)^n+\cdots$.
$f(-x)=-f(x) \Rightarrow a_0=-a_0, a_2=-a_2, a_4=-a_4,\cdots, a_{2p}=-a_{2p}$.
donc $a_0=a_2=a_4=\cdots=a_{2p}=0$.
alors le développement en série entière contient que les puissance impaire.

3.3.3 Le développement en série entière de quelque fonctions élémentaire :

le rayon de convergence	l'intervalle de convergence	le dévleppement des séries au voisinage de 0
$R = +\infty$	$\mathbb{R}$	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
$R = +\infty$	$\mathbb{R}$	$ch(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$R = +\infty$	$\mathbb{R}$	$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
$R = +\infty$	$\mathbb{R}$	$sh(x)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$R = +\infty$	$\mathbb{R}$	$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$R = 1$	$]-1,1[$	$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$
$R = 1$	$]-1,1[$	$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
$R = 1$	$]-1,1[$	$ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$
$R = +\infty$	$\mathbb{C}$	$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

3.4 Les séries entières et les équations différentielles :

soit une équation différentiable linéaire à coefficients non constants :

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$

Supposons qu'il existe une solution y de cette équation qui soit non identiquement nulle et développable en série entière au $v(x_0)$ Notons, pour tout $x \in]x_0 - R; x_0 + R[$,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Exemple 5. Déterminer une solution développable en série entière de l'équation différentielle :

$$2x(1 + x)y'' + (5x + 3)y' + y = 0$$

on pose :$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$

$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n$

$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} (x - x_0)^{n-1}.$

$xy'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x - x_0)^n$

$xy''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n$

$x^2 y''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^n$

et :

$a_0 + 3a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (2n(n+1)a_{n+1} + 2n(n-1)a_n + 5na_n + 3(n+1)a_{n+1+a_n}(x - x_0)^n = 0$

soit;

$$a_0 + 3a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}((n+1)(2n+3)a_{n+1} + (n+1)(2n+1)a_n)(x-x_0)^n = 0$$

encore équivalent à dire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de l'équation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_0 + 3a_1 = 0 \\ \forall n \geq 1, (2n+3)a_{n+1} + (2_n+1)a_n = 0 \end{cases}$$

Par récurrence, on en déduit que :

$$\forall n \geq 0, a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}a_0$$

donc;

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(x-x_0)^n$$

Chapitre 4

Qualques critéres d'oscillation pour les équations différentilles ordinaires fonctionnelles non linéaires de deuxiéme ordre

4.1 Introduction :

Pendant les trente ans passés , beaucoup d'études se sont occupées des proprietés oscillatoires des équations différentiables fonctionelle non linéaire , dans la plupart de ces articles il est supposé que l'équation dans la considération a des solutions nécessaires ,et les condition suffisantes dans les quelles ces solutions sont oscillatoire .
Ici , le but de cet article est d'étudier la nature oscillatoire des solutions d'équations différentielles fonctionnelles non linéaire de la deuxième ordre de la forme suivante :

$$(a(t)x'(t))' + \delta_1 p(t)x'(t) + \delta_2 q(t)f(x(g(t))) = 0 \tag{4.1}$$

pour $0 \leq t_0 \leq t$ où $\delta_1 = \pm 1$ et $\delta_2 = \pm 1$,

les fonctions $p, q, g : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continus,

$a(t) > 0$, $p(t) \geq 0$, $q(t) > 0$ pour $t \geq t_0$

et $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \infty$ et de plus les fonctions $q(t)$,$g(t)$ et $a(t)$ sont continument différentaible.
on peut consideré la solution de l'équation (4.1) qui existe sur un intervalle $[T, \infty)$, où $T \geq t_0$

Définition 17 (Solution oscillatiore)**.** *on appelle une telle solution oscillatiore s'il existe* $T \geq t_0$ *telle que* $x(T) = 0$

. De plus l'équation (4.1) est dite oscillatiore si toutes les solutions sont oscillatiores.

4.1.1 Les résultats principaux :

dans cette section ,nous établissons quelques théorèmes d'oscillation pour l'équation (4.1) nous présentans quelques notations et lemmes, qui sont nécessaire dans cette section,

$$\tau(t) = \max\{\min(s, g(s)) : 0 \leq s \leq t\} \tag{4.2}$$
$$\rho(t) = \min\{\max(s, g(s)); s \geq t\} \tag{4.3}$$

pour $T \geq t_0$, on a

$$A[\rho(t), s] = exp\left\{\int_s^{\rho(t)} \frac{p(\tau)}{a(\tau)} d\tau\right\}, \qquad \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2 : \quad T \leq s \leq \rho(t)$$

et l'adjoint de A est donné par l'expression suivante

$$A^*[\rho(t), u] = \int_u^{\rho(t)} \frac{1}{a(s)} \frac{ds}{A[\rho(t), s]}, \qquad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^2 : \quad T \leq u \leq \rho(t)$$

on utilise (4.2) et (4.3) on en déduit que

$$\begin{aligned} g(s) &\leq \tau(t), & \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 : \quad & \tau(t) < s < t, \\ g(s) &\geq \rho(t), & \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 : \quad & t < s < \rho(t). \end{aligned}$$

Lemme 2. *considerons l'inégalité différentielle :*

$$x'(t) + b(t)x(\delta(t)) \leq 0 \tag{4.4}$$

où $b, \delta \in C([t_0, \infty))$ sont deux fonctions vérifiants

$$\begin{aligned} &\forall t_0 \in [0,t] : \quad b(t) \geq 0, \quad \delta(t) \leq t, \quad \delta'(t) \geq 0, \\ &\lim_{t\to\infty} \delta(t) = \infty \end{aligned}$$

si

$$\lim_{t\to\infty} \mathit{inf} \int_{\delta(t)}^{t} b(s)ds > \frac{1}{e}.$$

Alors l'inégalité (4.4) n'a pas de solution positives.

Lemme 3. *considerons l'inégalité différentielle :*

$$x'(t) - b(t)x(\delta(t)) \geq 0 \tag{4.5}$$

où $b, \delta \in C([t_0, \infty))$ sont deux fonction vérifiants :

$$\begin{aligned} &\forall t_0 \in [0,t] : \quad b(t) \geq 0 \quad \delta(t) \geq t, \quad \delta'(t) \geq 0 \\ &\lim_{t\to\infty} \delta(t) = \infty \end{aligned}$$

si

$$\lim_{t\to\infty} inf \int_{t}^{\delta(t)} b(s)ds > \frac{1}{e}$$

alors l'inégalité (4.5) n'a pas de solution positives.

Théorème 4. *soit $\delta_1 = \delta_2 = 1$ et supposons que :*

1. *$g(t) \leq t$, $g'(t) \geq 0$, et $p'(t) \leq 0$ pour $t \geq t_0$*
2. *L'équation différentielle suivante :*

$$(a(t)x'(t))' + kq(t)x(g(t)) = 0 \qquad t \geq t_0 \tag{4.6}$$

   est oscillatoire.

3. *Les fonction a, p, g et q vérifiants la condition suivante*

$$\lim_{t\to\infty} inf \left\{ \int_{g(t)}^{t} \left(\frac{k}{a(u)} \int_{g(u)}^{u} q(s)ds - \frac{p(g(u))}{a(u)} \right) du \right\} > \frac{1}{e} \tag{4.7}$$

4. *La fonction f satisfait la condition*

$$\frac{f(x)}{x} \geq k > 0 \qquad , x \neq 0 \tag{4.8}$$

Avec k au niveau de l'équation (4.6) et de la condition (4.8) est une constante positive. Alors l'équation (4.1) est oscillatoire .

Preuve. soit $x(t)$ une solution positive non oscillatiore de l'équation (4.1) où $\delta_1 = \delta_2 = 1$ dans l'intervalle $[t_1, \infty)$, $0 \leq t_0 \leq t_1$
soit $t_2 \geq t_1$ tel que $x(g(t)) > 0$ pour $t \geq t_2$.
on suppose que $x'(t)$ est oscillatiore, alors il existe $T_0 \geq t_2$ tel que $x'(T_0) = 0$ alors l'équation (4.1) devient :

$$(a(t)x'(t))' + p(t)x'(t) + q(t)f(x(g(t)))|_{t=T_0} = 0$$

or $x'(T_0) = 0$ donc on obtient

$$(a(t)x'(t))' + q(t)f(x(g(t)))|_{t=T_0} = 0$$

de plus $q(t) > 0$ et $x(g(T_0)) > 0$ pour $T_0 \geq t_2$ donc

$$(a(t)x'(t))'|_{t=T_0} = -q(T_0)f(x(g(T_0))) \leq -kq(T_0)x(g(T_0)) < 0$$

$$a'(T_0)x'(T_0) + a(T_0)x''(T_0) < 0$$

$$\Rightarrow x''(T_0) < 0$$

$\Rightarrow \exists \epsilon > 0 ; \forall t \in]T_0 - \epsilon, T_0 + \epsilon[$ tq $x''(t) < 0$
$\forall t \in]T_0 - \epsilon, T_0 + \epsilon[$; $x'(t)$est strictement décroissante, contradiction
Alors $x'(t)$ est non oscillatoire Ainsi $x'(t)$ est de signe constant.
Maintenant nous étudions les deux cas suivants :

1. $x'(t) > 0$
2. $x'(t) < 0$

1. si $x'(t) > 0$ et la condition (4.8) est satisfaite , alors l'equation (4.1) devient ;
   $0 = (a(t)x'(t))' + p(t)x'(t) + q(t)f(x(g(t))) \geq (a(t)x'(t))' + p(t)x'(t) + kq(t)x(g(t))$

   $(a(t)x'(t))' + p(t)x'(t) + kq(t)x(g(t)) \leq 0$

   $\Rightarrow (a(t)x'(t))' + kq(t)x(g(t)) \leq -p(t)x'(t)$

   $\Rightarrow (a(t)x'(t))' + kq(t)x(g(t)) \leq -p(t)x'(t) \leq 0$ car $x'(t) > 0$ et $p(t) \geq 0$ pour $t \geq t_0$

   alors ;

   $$(a(t)x'(t))' + kq(t)x(g(t)) \leq 0$$

   donc , comme montré dans le théorème 1 de [27] pour $l = 1$ et $n = 2$que l'équation :

   $$(a(t)x'(t))' + kq(t)x(g(t)) = 0$$

   a une solution positive ,cela contre dit la condition donnée dans (4.6).

2. si $x'(t) < 0$ et la condition (4.8) satisfie alors l'équation (4.1) devient :
   $0 = (a(t)x'(t))' + p(t)x'(t) + q(t)f(x(g(t))) \geq (a(t)x'(t))' + p(t)x'(t) + kq(t)x(g(t))$

alors;

$$(a(t)x'(t))' + p(t)x'(t) + kq(t)x(g(t)) \leq 0 \qquad t \geq t_2 \tag{4.9}$$

on integre l'inegalité (4.9) de $g(t)$ à t, on a $g(s) \leq g(t)$ pour $s < t$ alors $g(t) < s < t_2 \leq t$ nous obtenons :

$$\int_{g(t)}^{t} (a(s)x'(s))'ds + \int_{g(t)}^{t} p(s)x'(s)ds + k\int_{g(t)}^{t} q(s)x(g(s))ds \leq 0$$

et alors, nous obtenons

$$a(t)x'(t) - a(g(t))x'(g(t)) + p(t)x(t) - p(g(t))x(g(t)) - \int_{g(t)}^{t} p'(s)x(s)ds$$

$$+ kx(g(t))\int_{0}^{t} q(v)dv - kx(g(g(t)))\int_{0}^{g(t)} q(v)dv$$

$$- k\int_{g(t)}^{t} g'(s)x'(g(s))\int_{0}^{s} q(v)dvds + kx(g(t))\int_{g(t)}^{0} q(v)dv - kx(g(t))\int_{g(t)}^{0} q(v)dv \leq 0$$

Alors

$$a(t)x'(t) - p(g(t))x(g(t)) + kx(g(t))\int_{g(t)}^{t} q(s)ds \leq a(g(t))x'(g(t)) - p(t)x(t) + \int_{g(t)}^{t} p'(s)x(s)ds$$

$$+ kx(g(g(t)))\int_{0}^{g(t)} q(s)ds + k\int_{g(t)}^{t} g'(s)x'(g(s))\int_{0}^{s} q(v)dvds - kx(g(t))\int_{0}^{g(t)} q(s)ds \leq 0$$

Alors

$$a(t)x'(t) - p(g(t))x(g(t)) + kx(g(t))\int_{g(t)}^{t} q(s)ds \leq 0$$

comme $a(t) \neq 0$ et comme $g(s) < g(t)$ et $x(g(t)) < x(g(s))$ pour $g(t) < s < t$ alors nous obtenons :

$$x'(t) - \frac{p(g(t))}{a(t)}x(g(t)) + \left[\frac{k}{a(t)}\int_{g(t)}^{t} q(s)ds\right]x(g(t)) \leq 0$$

$$x'(t) + \left[\frac{k}{a(t)}\int_{g(t)}^{t} q(s)ds - \frac{p(g(t))}{a(t)}\right]x(g(t)) \leq 0 \tag{4.10}$$

donc on applique le lemme 2;

pour $b(t) = \dfrac{k}{a(t)}\displaystyle\int_{g(t)}^{t} q(s)ds - \dfrac{p(g(t))}{a(t)}$

$b(t) \in C([t_0, \infty))$

d'aprés la condition (4.7) nous btenons; $\displaystyle\int_{g(t)}^{t} b(u)du > \frac{1}{e}$ et on applique le Théorème des valeurs intermèdiaires

alors $\displaystyle\int_{g(t)}^{t} b(u)du = b(c)(t - g(t)) > \frac{1}{e}$ pour $c \in [g(t), t]$,alors $b(c) > 0 \quad \forall c \in [g(t), t]$

et $\delta(t) = g(t) \leq t$ et $\delta'(t) = g'(t) \geq 0$ pour $t \geq t_0 \geq 0$ d'aprés les hypothèses du theorème 5 .

et on a $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \infty$.

et on a la condition;

$$\lim_{t\to\infty} inf\left[\int_{g(t)}^{t}\left(\frac{k}{a(u)}\int_{g(u)}^{u} q(s)ds - \frac{p(g(u))}{a(u)}\right)du\right] > \frac{1}{e}$$

Alors l'inégalité (4.10) est n'admet pas de solution positive , contradiction

Alors l'équation (4.1) admet $x(t)$ comme solution oscillatoire. Donc, l'équation (4.1) est oscillatoire pour $\delta_1 = \delta_2 = 1$ □

Théorème 5. *soit $\delta_1 = 1$ et $\delta_2 = -1$ et supposons que :*

1. *$g(t)$ est de type mixte , $g'(t) \geq 0$, $p'(t) \geq 0$, et $t \geq t_0$*

2. *La condition (4.9) est satisfaite ainsi que l'inégalité :*

$$\lim_{t\to\infty} sup \left\{ k \int_T^{\rho(t)} A^*[\rho(t), u]q(u)du \right\} > 1 \tag{4.11}$$

3. *Les fonctions a,q etg vérifiants la condition suivante :*

$$\lim_{t\to\infty} sup \left\{ \frac{k}{a(\tau(t))} \int_{\tau(t)}^{t} [g(u) - \tau(t)]q(u)du \right\} > 1 \tag{4.12}$$

et k au niveau de l'inégalité (4.11) et la condition (4.12) est une constante positive. Alors, l'équation (4.1) est oscillatoire .

Preuve. Soit $x(t)$ une solution non oscillatoire de l'équation (4.1) où $\delta_1 = 1$ et $\delta_2 = -1$ pour $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t$ et soit $t_2 > t_1$ tel que $x(g(t)) > 0$ pour $t \geq t_2$.
D'abord , supposons que $x'(t)$ est oscillatoire .
Ainsi il existe $T_0 \geq t_2$ tel que $x'(T_0) = 0$
Alors de l'équation (4.1) devient :

$$(a(t)x'(t))' + p(t)x'(t) - q(t)f(x(g(t)))|_{t=T_0} = 0$$
$$(a(t)x'(t))'|_{t=T_0} + p(T_0)x'(T_0) - q(T_0)f(x(g(T_0))) = 0$$

Or $x'(T_0) = 0$

$$(a(t)x'(t))'|_{t=T_0} = q(T_0)f(x(g(T_0))) > kq(T_0)x(g(T_0)) > 0$$
$$a'(T_0)x'(T_0) + a(T_0)x''(T_0) > 0$$

Alors ;

$$a(T_0)x''(T_0) > 0$$
$$\Rightarrow x''(T_0) > 0$$

Alors ;

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall t \in]T_0 - \epsilon, T_0 + \epsilon[: \quad x''(t) > 0$$

et donc sur $]T_0 - \epsilon, T_0 + \epsilon[$;$x'(t)$est strictement criossante,ce qui est contradictoire avec $x'(t)$ est oscillatoire ,alors $x'(t)$ est non oscillatoire . On conclut que $x'(t)$ est de signe constant.
Maintenant nous étudions les deux cas suivants ;

1. $x'(t) > 0$
2. $x'(t) < 0$

1. si $x'(t) > 0$ on remplace la condition (4.8) dans l'équation (4.1) nous obtenons :

$$0 = (a(t)x'(t))' + p(t)x'(t) - q(t)f(x(g(t))) \leq (a(t)x'(t))' + p(t)x'(t) - kq(t)x(g(t))$$

alors ;

$$(a(t)x'(t))' + p(t)x'(t) - kq(t)x(g(t)) \geq 0, \quad \forall\, t \geq t_2 \tag{4.13}$$

et en intégrant (4.13) de T à s par rapport à u car on a $t_2 \leq T \leq u \leq s \leq t$ nous trouvons :

$$\int_T^s (a(u)x'(u))'du + \int_T^s p(u)x'(u)du - k\int_T^s q(u)x(g(u))du \geq 0$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} a(s)x'(s) - a(T)x'(T) + p(s)x(s) - p(T)x(T) - \int_T^s p'(u)x(u)du \\ -kx(g(s))\int_0^s q(v)dv + kx(g(T))\int_0^T q(v)dv + k\int_T^s \left[g'(u)x'(g(u))\int_0^u q(v)dv\right]du \\ +kx(g(s))\int_T^0 q(v)dv - kx(g(s))\int_T^0 q(v)dv \geq 0 \end{aligned}$$

où encore

$$\begin{aligned} a(s)x'(s) + p(s)x(s) - kx(g(s))\int_T^s q(u)du \geq a(T)x'(T) + p(T)x(T) + \int_T^s p'(u)x(u)du \\ -kx(g(T))\int_0^T q(v)dv - k\int_T^s \left[g'(u)x'(g(u))\int_0^u q(v)dv\right]du - kx(g(s))\int_T^0 q(v)dv \end{aligned}$$

Donc ;

$$\begin{aligned} a(s)x'(s) + p(s)x(s) - kx(g(s))\int_T^s q(u)du \geq a(T)x'(T) + p(T)x(T) + \int_T^s p'(u)x(u)du \\ -kx(g(T))\int_0^T q(v)dv + k\int_T^s \left[g'(u)x'(g(u))\int_u^0 q(v)dv\right]du + kx(g(s))\int_0^T q(v)dv \end{aligned}$$

Alors on obtient ;

$$\begin{aligned} a(s)x'(s) + p(s)x(s) - kx(g(s))\int_T^s q(u)du \geq a(T)x'(T) + p(T)x(T) + \int_T^s p'(u)x(u)du \\ k[x(g(s)) - x(g(T))]\int_0^T q(v)dv + k\int_T^s \left[g'(u)x'(g(u))\int_u^0 q(v)dv\right]du \geq 0 \end{aligned}$$

Alors ;

$$a(s)x'(s) + p(s)x(s) - kx(g(s))\int_T^s q(u)du \geq 0$$

comme $g(u) < g(s)$ donc $x(g(u)) \geq x(\rho(t))$ pour $u < \rho(t) < g(u)$,alors $x(\rho(t)) \leq x(g(u)) \leq x(g(s))$ nous obtenons

$$0 \leq x'(s) + \frac{p(s)}{a(s)}x(s) - \frac{k}{a(s)}x(g(s))\int_T^s q(u)du \leq x'(s) + \frac{p(s)}{a(s)}x(s) - \frac{k}{a(s)}x(\rho(t))\int_T^s q(u)du$$

Alors ;

$$x'(s) + \frac{p(s)}{a(s)}x(s) - \frac{k}{a(s)}x(\rho(t)) \int_T^s q(u)du \geq 0 \tag{4.14}$$

On multiple cette inégalité par $A[s,T]$

$$A[s,T]\frac{d}{ds}x(s) + A[s,T]\frac{p(s)}{a(s)}x(s) - \frac{k}{a(s)}A[s,T]x(\rho(t)) \int_T^s q(u)du \geq 0$$

on a :

$$A[s,T] = exp\left\{\int_T^s \frac{p(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right\}$$

Alors ;

$$A'[s,T] = \frac{d}{ds}\left\{\int_T^s \frac{p(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right\} exp\left\{\int_T^s \frac{p(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right\} \Rightarrow A'[s,T] = \frac{p(s)}{a(s)}A[s,T]$$

donc ;

$$x'(s)A[s,T] + \frac{p(s)}{a(s)}A[s,T]x(s) = \frac{d}{ds}\big(A[s,T]x(s)\big)$$

Alors ;

$$\frac{d}{ds}\left\{A[s,T]x(s)\right\} - \frac{k}{a(s)}x(\rho(t)) \int_T^s A[s,T]q(u)du \geq 0 \tag{4.15}$$

pour $T \leq s \leq \rho(t)$, on a $g(s) \geq \rho(t)$ par l'intégration de l'inegalité (4.15) de T à $\rho(t)$ nous obtenons ;

$$\int_T^{\rho(t)} \frac{d}{ds}\left[A[s,T]x(s)\right] - \int_T^{\rho(t)} \left[\frac{k}{a(s)}x(\rho(t)) \int_T^s A[s,T]q(u)du\right] ds \geq 0$$

$$\int_T^{\rho(t)} \frac{d}{ds}\left[A[s,T]x(s)\right] \geq \int_T^{\rho(t)} \left[\frac{k}{a(s)}x(\rho(t)) \int_T^s A[s,T]q(u)du\right] ds$$

$$A[\rho(t),T]x(\rho(t)) - A[T,T]x(T) \geq \int_T^{\rho(t)} \left[\frac{k}{a(s)}x(\rho(t)) \int_T^s A[s,T]q(u)du\right] ds$$

or $x(T) = 0$

$$A[\rho(t),T]x(\rho(t)) \geq \int_T^{\rho(t)} \left[\frac{k}{a(s)}x(\rho(t)) \int_T^s A[s,T]q(u)du\right] ds$$

pour $T \leq s \leq \rho(t)$

$$A[\rho(t),T] \geq \int_T^{\rho(t)} \left[\frac{k}{a(s)} \int_T^s A[s,T]q(u)du\right] ds \tag{4.16}$$

or $A[\rho(t),T] = A[s,T]A[\rho(t),s]$ pour $T \leq s \leq \rho(t)$ donc ;

$$A[s,T]A[\rho(t),s] \geq \int_T^{\rho(t)} \left[\frac{k}{a(s)} \int_T^s A[s,T]q(u)du\right] ds$$

$$A[\rho(t),s] \geq \int_T^{\rho(t)} \left[\frac{k}{a(s)} \int_T^s q(u)du\right] ds$$

$$\frac{1}{A[\rho(t),s]}\int_T^{\rho(t)}\left[\frac{k}{a(s)}\int_T^s q(u)du\right]ds \leq 1.$$

Alors l'inégalité (4.16) devient;

$$\int_T^{\rho(t)}\frac{k}{a(s)}\int_T^s \frac{1}{A[\rho(t),s]}q(u)duds \leq 1 \tag{4.17}$$

l'inégalité (4.17) devient pour $T \leq u \leq s \leq \rho(t)$ sous la forme suivante;

$$\int_T^{\rho(t)}\left[\int_u^{\rho(t)}\frac{k}{a(s)}\frac{ds}{A[\rho(t),s]}\right]q(u)du \leq 1$$

et on a $A^*[\rho(t),u] = \displaystyle\int_u^{\rho(t)}\frac{1}{a(s)}\frac{ds}{A[\rho(t),s]}$ pour $T \leq u \leq s \leq \rho(t)$. Alors par consiquence , nous obtenons;

$$k\int_T^{\rho(t)} A^*[\rho(t),u]q(u)du \leq 1 \tag{4.18}$$

par passage a la limte sup lorsque $t \to \infty$ nous obtenons;

$$\lim_{t\to\infty} sup\left[k\int_T^{\rho(t)} A^*[\rho(t),u]q(u)du\right] \leq 1$$

contradiction avec la condition(4.11) de Théorème 5.

2. si $x'(t) < 0$ on remplace la condition (4.8) dans l'équation (4.1) nous obtenons;

$$(a(t)x'(t))' - q(t)f(x(g(t))) = -p(t)x'(t)$$

et comme $p(t) \geq 0$ et $x'(t) \leq 0$ Alors

$$(a(t)x'(t))' - q(t)f(x(g(t))) \geq 0$$

et d'aprés la condition (4.8) cette équation devient;

$$(a(t)x'(t))' \geq q(t)f(x(g(t))) \geq kq(t)x(g(t)) \tag{4.19}$$

comme $g(t) > g(s)$ et $x(g(s)) \geq x(g(t))$ pour $t_2 \leq g(s) \leq \tau(t) \leq s \leq t$.

$$kq(t)x(g(t)) \leq kq(t)x(g(s))$$

le développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction $x(g(s))$ donne

$$x(g(s)) \simeq x(\tau(t)) + x'(\tau(t))(g(s) - \tau(t))$$

Alors on a $g(s) \leq \tau(t)$ donc $g(s) - \tau(t) \leq 0$ et $x'(\tau(t)) < 0$ et on a; $x(g(t)) > 0$ pour $t \geq t_2$ alors $x(\tau(t)) \geq 0$ pour $t_2 \leq g(s) \leq \tau(t) \leq s \leq t$ Alors

$$x(g(s)) \geq x'(\tau(t))[g(s) - \tau(t)] \tag{4.20}$$

par l'intégration de (4.19) de $\tau(t)$ à t et utilisons (4.20) nous obtenons;

$$\int_{\tau(t)}^{t}(a(u)x'(u))'du \geq k\int_{\tau(t)}^{t} q(u)x(g(u))du$$
$$\geq k\int_{\tau(t)}^{t} q(u)[g(u)-\tau(t)]x'(\tau(t))du$$

ce qui donne

$$a(t)x'(t)-a(\tau(t))x'(\tau(t)) \geq kx'(\tau(t))\int_{\tau(t)}^{t} q(u)[g(u)-\tau(t)]du$$

$$a(t)\frac{x'(t)}{x'(\tau(t))}-a(\tau(t)) \leq k\int_{\tau(t)}^{t} q(u)[g(u)-\tau(t)]du$$
$$\frac{a(t)}{a(\tau(t))}\frac{x'(t)}{x'(\tau(t))}-1 \leq \frac{k}{a(\tau(t))}\int_{\tau(t)}^{t} q(u)[g(u)-\tau(t)]du < 0$$

car $u \in [\tau(t), t]$ et donc $g(u) \leq \tau(t)$ alors ;

$$\frac{k}{a(\tau(t)}\int_{\tau(t)}^{t}[g(u)-\tau(u)]q(u)du < 1 \tag{4.21}$$

par passage à la limte sup lorsque $t \to \infty$ nous obtenons

$$\lim_{t\to\infty} sup\left[\frac{k}{a(\tau(t)}\int_{\tau(t)}^{t}[g(u)-\tau(u)]q(u)du\right] < 1$$

contradiction avec la condition (4.12) du Théorème 5. alors $x'(t)$ n'est pas de signe constant. Donc ;$x(t)$ est une solution oscillatoire de l'équation (4.1) ce qui implique que l'équation (4.1) est oscillatiore pour $\delta_1 = 1$ et $\delta_2 = -1$.

□

Théorème 6. *Soient $\delta_1 = -1$ et $\delta_2 = 1$ et supossons que :*

1. *La condition (4.8) est vérifie et $\forall t \geq t_0 \quad g(t) \geq t$, $g'(t) \geq 0$ et $p'(t) \geq 0$*
2. *L'équation différantielle suivante :*

$$(a(t)x'(t))' + kq(t)x(g(t)) = 0 \qquad t \geq t_0 \tag{4.22}$$

   est oscillatoire.

3. *Les fonctions a,p,q et g vérifiants la condition suivante :*

$$\lim_{t\to\infty} inf\left[\int_{u}^{g(u)}\left(\frac{k}{a(t)}\int_{t}^{g(t)} q(s)ds-\frac{p(g(t))}{a(t)}\right)dt\right] > \frac{1}{e} \tag{4.23}$$

Avec k au niveau de l'équation (4.22) et la condition (4.23) est une constante positive.

Alors, l'équation (4.1) est oscillatiore .

Preuve. soit $x(t)$ une solution positive non oscillatoire de l'équation (4.1) où $\delta_1 = -1$ et $\delta_2 = 1$ dans l'intervalle $[t_1, \infty)$ $0 \leq t_0 \leq t_1$
et soit $t_2 \geq t_1$ tel que $x(g(t)) > 0$ pour $t \geq t_2$
D'abord ; comme nous avons fait dans la preuve de théorème 5, nous voyons que $x'(t)$ de signe constant
Maintenant ,nous étudions les deux cas suivants ;

1. $x'(t) < 0$
2. $x'(t) > 0$

1. si $x'(t) < 0$ est vérifie en remplace la condition (4.8) dans l'équation (4.1) nous obtenons ;

$$0 = (a(t)x'(t))' - p(t)x'(t) + q(t)f(x(g(t))) \geq (a(t)x'(t))' - p(t)x'(t) + kq(t)x(g(t))$$

Alors ;

$$(a(t)x'(t))' - p(t)x'(t) + kq(t)x(g(t)) \leq 0$$

or $x'(t) < 0$ et $p(t) \geq 0$ donc

$$(a(t)x'(t))' + kq(t)x(g(t)) \leq p(t)x'(t) \leq 0$$

donc

$$(a(t)x'(t))' + kq(t)x(g(t)) \leq 0 \tag{4.24}$$

Donc, on utilise le théorme 1 donnée de [27] que l'équation ;

$$(a(t)x'(t))' + kq(t)x(g(t)) = 0$$

a une solution positive , cela contredit la condition donnée (4.22) car cette équation est oscillatoire.

2. si $x'(t) > 0$ et la condition (4.8) vérifie alors l'équation (4.1) devient ;

$$0 = (a(t)x'(t))' - p(t)x'(t) + q(t)f(x(g(t))) \geq (a(t)x'(t))' - p(t)x'(t) + kq(t)x(g(t))$$

Alors ;

$$(a(t)x'(t))' - p(t)x'(t) + kq(t)x(g(t)) \leq 0 \qquad t \geq t_2 \tag{4.25}$$

on intégrant (4.25) de t à $g(t)$ par rapport à u car on a $t \leq u \leq g(t)$, nous obtenons ;

$$\int_t^{g(t)} (a(u)x'(u))'du - \int_t^{g(t)} p(u)x'(u)du + k\int_t^{g(t)} q(u)x(g(u))du \leq 0$$

ce qui donne

$$a(g(t))x'(g(t)) - a(t)x'(t) - p(g(t))x(g(t)) + p(t)x(t) + \int_t^{g(t)} p'(u)x(u)du$$
$$+kx(g(g(t)))\int_0^{g(t)} q(u)du - kx(g(t))\int_0^{t} q(u)du - k\int_t^{g(t)} g'(u)x'(g(u))\int_0^{u} q(v)dvdu$$
$$+kx(g(t))\int_0^{g(t)} q(u)du - kx(g(t))\int_0^{g(t)} q(u)du \leq 0$$

$$a(t)x'(t)+p(g(t)x(g(t))-kx(g(t))\int_t^{g(t)}q(u)du \geq a(g(t))x'(g(t))+p(t)x(t)$$
$$+kx(g(g(t)))\int_0^{g(t)}q(u)du+\int_t^{g(t)}p'(u)x(u)du$$
$$-k\int_t^{g(t)}g'(u)x'(g(u))\int_0^u q(v)dvdu-kx(g(t))\int_0^{g(t)}q(u)du \geq 0$$

Alors ;

$$a(t)x'(t)+p(g(t))x(g(t))+kx(g(t))\int_t^{g(t)}q(u)du \geq 0$$

ce qui donne

$$x'(t)-\left\{\frac{k}{a(t)}\int_t^{g(t)}q(u)du-\frac{p(g(t))}{a(t)}\right\}x(g(t)) \geq 0 \tag{4.26}$$

Alors d'aprés le lemme 3 pour $b(t)=\dfrac{k}{a(t)}\displaystyle\int_t^{g(t)}q(u)du-\dfrac{p(g(t))}{a(t)}$
d'aprés la condition (4.23) nous obtenons ;

$$\int_{g(t)}^t b(u)du > \frac{1}{e}$$

et on applique le théorème des valeurs intermèdiaires alors

$$\int_{g(t)}^t b(u)du = b(c)(t-g(t)) > \frac{1}{e} \quad c \in [g(t),t]$$

donc

$$b(c)>0 \quad \forall c \in [g(t),t]$$

or $\delta(t)=g(t)\geq t$ donc $\delta'(t)=g'(t)\geq 0$ et on a $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=\infty$ ainsi que la condition

$$\lim_{t\to\infty} inf\left\{\int_u^{g(u)}\left(\frac{k}{a(t)}\int_t^{g(t)}q(s)ds-\frac{p(g(t))}{a(t)}\right)dt\right\} > \frac{1}{e}$$

Alors l'inégalité (4.26) est n'a pas de solution positive ,contradiction avec la résultat du lemme 3

Donc ,$x(t)$ est une solution oscillatiore de l'équation (4.1) pour $\delta_1=-1$ et $\delta_2=1$

□

Théorème 7. *soit $\delta_1=\delta_2=-1$ et supposons que :*

1. $g(t)\leq t$,$g'(t)\leq 0$,$\tau'(t)\geq 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=\infty$ *et* $p'(t)\leq 0$ *pour* $t\geq t_0$.
2. *La condition (4.8) est satisfiait ainsi l'inégalité*

$$\lim_{t\to\infty} sup\left\{\frac{k}{a(t)}\int_{\tau(t)}^t [g(u)-\tau(t)]q(u)du\right\} > 1 \tag{4.27}$$

3. *Les fonctions a,pet q vérifient la condition :*

$$\lim_{t\to\infty} inf\left\{\int_{\tau(t)}^{t}\left(\frac{k}{a(\tau(u))}\int_{\tau(u)}^{u} q(s)ds-\frac{p(\tau(u))}{a(\tau(u))}\right)du\right\}>\frac{1}{e} \tag{4.28}$$

Avec k au niveau de l'inégalités (4.27) et (4.28) est une constante positive.
Alors ,l'équation (4.1) est oscillatiore .

Preuve. Soit $x(t)$ une solution non oscillatiore positive d'équation (4.1) quand $\delta_1=\delta_2=-1$ dans un intervalle $[t_1,\infty)$, $0\le t_0\le t_1$
soit $t\ge t_2$ tel que $x(g(t))>0$ pour $t\ge t_2$.
supposons que $x'(t)$ est oscillatoire. Ainsi ,il existe $T_0\ge t_2$ tel que $x'(T_0)=0$,
Donc l'équation (4.1) devient ;

$$(a(t)x'(t))'-p(t)x'(t)-q(t)f(x(g(t)))|_{t=T_0}=0$$

or $x'(T_0)=0$ donc on obtient que

$$(a(t)x'(t))'|_{t=T_0}-q(T_0)f(x(g(T_0)))=0$$

de plus $q(t)>0$ et $x(g(T_0))>0$ pour $T_0\ge t_2$ donc

$$(a(t)x'(t))'|_{t=T_0}=q(T_0)f(x(g(T_0)))>kq(T_0)x(g(T_0)>0$$

$$a'(T_0)x'(T_0)+a(T_0)x''(T_0)>0$$

$$\Rightarrow x''(T_0)>0$$

Alors ;$\exists\epsilon>0$; $\forall t\in]T_0-\epsilon,T_0+\epsilon[$ tq $x''(t)>0$.
Ainsi,$x'(t)$ est strictement croissante pour tout $t\in]T_0-\epsilon,T_0+\epsilon[$ contradiction avec $x'(t)$ est oscillatoire alors $x'(t)$ est non oscillatoire ,donc $x'(t)$ est de signe constant.
Maintenant nous étudiant les deux cas suivants :

1. $x'(t)>0$
2. $x'(t)<0$

1. si $x'(t)>0$ est vérifie,et d'aprés l'hypothèse de théorème la condition (4.8) est vérifie alors l'équation (4.1) devient ;

$$0=(a(t)x'(t))'-p(t)x'(t)-q(t)f(x(g(t)))\le(a(t)x'(t))'-p(t)x'(t)-kq(t)x(g(t))$$

ou encore

$$(a(t)x'(t))'-p(t)x'(t)-kq(t)x(g(t))\ge 0$$

or $p(t)\ge 0$ et $x'(t)>0$ alors on obtient :

$$(a(t)x'(t))'-kq(t)x(g(t))\ge p(t)x'(t)\ge 0$$

alors ;

$$(a(t)x'(t))'-kq(t)x(g(t))\ge 0 \tag{4.29}$$

on applique la formule de Taylor de la fonction $x(g(s))$ nous obtenons ;

$$x(g(s)) \simeq x(\tau(t)) + x'(\tau(t))[g(s) - \tau(t)]$$

on a ;$g(s) \leq \tau(t)$ alors $g(s) - \tau(t) \leq 0$ et $x(\tau(t)) \geq 0$ pout $\tau(t) \geq t_2$ ce qui donne

$$x(g(s)) \geq x'(\tau(t))[g(s) - \tau(t)]$$

et donc

$$x(g(s)) \geq -x'(\tau(t))[\tau(t) - g(s)] \tag{4.30}$$

on intégrant (4.29) de $\tau(t)$ à t car $g(s) \leq \tau(t) \leq s \leq t$ et on utilise (4.30) nous obtenons ;

$$\int_{\tau(t)}^{t} (a(s)x'(s))'ds - k\int_{\tau(t)}^{t} q(s)x(g(s))ds \geq 0$$

or $x(g(s)) \geq [\tau(t) - g(s)][-x'(\tau(t)]$ donc

$$\int_{\tau(t)}^{t} (a(s)x'(s))'ds - k\int_{\tau(t)}^{t} q(s)x(g(s))ds$$
$$\geq$$
$$\int_{\tau(t)}^{t} (a(s)x'(s))'ds - k\int_{\tau(t)}^{t} q(s)[\tau(t) - g(s)][-x'(\tau(t))]ds$$
$$\geq 0$$

donc

$$\int_{\tau(t)}^{t} (a(s)x'(s))'ds + k\int_{\tau(t)}^{t} q(s)[\tau(t) - g(s)]x'(\tau(t))ds \geq 0$$

ainsi

$$a(t)x'(t) - a(\tau(t))x'(\tau(t)) + kx'(\tau(t))\int_{\tau(t)}^{t} q(s)[\tau(t) - g(s)]ds \geq 0$$

donc

$$a(t)x'(t) \geq kx'(\tau(t))\int_{\tau(t)}^{t} q(s)[g(s) - \tau(t)]ds$$

or $x'(\tau(t)) \geq x'(t)$ alors

$$a(t)x'(t) \geq kx'(\tau(t))\int_{\tau(t)}^{t} q(s)[g(s) - \tau(t)]ds \geq kx'(t)\int_{\tau(t)}^{t} q(s)[g(s) - \tau(t)]ds$$

ce qui donne

$$\frac{k}{a(t)}\int_{\tau(t)}^{t} [g(s) - \tau(t)]q(s)ds \leq 1 \tag{4.31}$$

par passage à la limte sup lorsque $t \to \infty$ nous obtenons ;

$$\lim_{t\to\infty} sup\left\{\frac{k}{a(t)}\int_{\tau(t)}^{t} [g(s) - \tau(t)]q(s)ds\right\} \leq 1 \tag{4.32}$$

contradiction avec la condition (4.27) .

2. si $x'(t) < 0$,en prende la condition (4.8) l'équation (4.1) devient ;

$$(a(t)x'(t))' - p(t)x'(t) - kq(t)x(g(t)) \geq 0 \qquad t \geq t_2 \tag{4.33}$$

en integre (4.33) de $\tau(t)$ à t pour $\tau(t) \leq s \leq t$ nous obtenons ;

$$\int_{\tau(t)}^{t} (a(s)x'(s))'ds - \int_{\tau(t)}^{t} p(s)x'(s)ds - k\int_{\tau(t)}^{t} q(s)x(g(s))ds \geq 0 \tag{4.34}$$

ce qui donne

$$-a(\tau(t))x'(\tau(t)) \geq -p(\tau(t))x(\tau(t)) + k\int_{\tau(t)}^{t} q(s)x(g(s))ds \tag{4.35}$$

et d'aprés la formule de Taylor pour la fonction $x(g(s))$ nous obtenons l'inégalité suivante ;

$$x(g(s)) \simeq x(\tau(t)) + x'(\tau(t))[g(s) - \tau(t)]$$

donc

$$x(g(s)) - x(\tau(t)) \simeq x'(\tau(t))[g(s) - \tau(t)]$$

on a $g(s) \leq \tau(t)$ et $x'(\tau(t)) < 0$ pour $g(s) \leq \tau(t) \leq s \leq t$ alors

$$x(g(s)) - x(\tau(t)) \geq 0$$

$$x(g(s)) \geq x(\tau(t)) \qquad pour \qquad g(s) \leq \tau(t) \leq s \leq t \tag{4.36}$$

on utilise (4.35) et (4.36) nous obtenons ;

$$x'(\tau(t)) + \left\{\frac{k}{a(\tau(t))}\int_{\tau(t)}^{t} q(s) - \frac{p(\tau(t))}{a(\tau(t))}\right\} x(\tau(t)) \leq 0$$

Notons que $x(t) \leq x(\tau(t))$ et $x'(t) \leq x'(\tau(t))$ pour $\tau(t) \leq t$ alors nous avons ;

$$x'(t) + \left\{\frac{k}{a(\tau(t))}\int_{\tau(t)}^{t} q(s) - \frac{p(\tau(t))}{a(\tau(t))}\right\} x(\tau(t)) \leq 0 \tag{4.37}$$

le lemme 2 et la condition (4.28) implique que l'inégalité (4.37) n'a pas de solution positive , alors contradiction ,ainsi , $x(t)$ est une solution oscillatoire pour l'équation (4.1) .

Donc l'équation (4.1) est oscillatoire , quand $\delta_1 = \delta_2 = -1$

□

Exemple 6. considérons l'équation différentielle :

$$x''(t) + px'(t) + t\sqrt{t}x(\sqrt{t}) = 0 \qquad t \geq 1 \tag{4.38}$$

Quand p est une constante positive ,il est facile de vérifier que l'équation (4.38) est oscillatoire pour tout $p > 0$ et on a

$$a(t) = 1 \ ,q(t) = t\sqrt{t} \ ,g(t) = \sqrt{t} \ , p(t) = p \ , f(x) = x, k = 1, \delta_1 = \delta_2 = 1$$

comme $\delta_1 = \delta_2 = 1$,on applique le Théorème 5, donc soit l'hypothèse :
(i) $g(t) = \sqrt{t} \leq t$, $g'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \geq 0$,$p'(t) = 0 \leq 0 \quad \forall t \geq 1$
(ii) et l'équation

$$x''(t) + t\sqrt{t}x(\sqrt{t}) = 0 \qquad t \geq 1 \tag{4.39}$$

si on suppose que $x(\sqrt{t}) \leq 0 \quad \forall t \in [1, \infty[$, alors $x''(t) \geq 0$, donc l'équation (4.38) devient ;

$$x''(t) = -px'(t) - t\sqrt{t}x(\sqrt{t}) \geq 0$$

ce qui donne

$$x'(t) + \frac{1}{p}t\sqrt{t}x(\sqrt{t}) \leq 0$$

Alors on applique le lemme 2 pour

$$b(t) = \frac{1}{p}t\sqrt{t} \quad \delta(t) = \sqrt{t}$$

on a alors

$$b, \delta \in C([1, \infty)) \quad b(t) = \frac{1}{p}t\sqrt{t} \geq 0 \quad \delta(t) = \sqrt{t} \leq t$$

$$\delta'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \geq 0 \quad t \geq 1, \lim_{t\to\infty} \delta(t) = \lim_{t\to\infty} \sqrt{t} = \infty$$

et

$$\lim_{t\to\infty} inf \int_{\sqrt{t}}^{t} b(s)ds = \lim_{t\to\infty} inf \int_{\sqrt{t}}^{t} \frac{1}{p}s\sqrt{s} = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{5p}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5p}t^{\frac{5}{4}} = +\infty > \frac{1}{e}$$

Alors l'équation (4.39) n'admet pas de solution positive alors l'équation (4.39) est oscillatoire.
(iii)la valeur
I=$\displaystyle\int_{\sqrt{t}}^{t} \left(\int_{\sqrt{u}}^{u} s\sqrt{s} - p \right) du = \int_{\sqrt{t}}^{t} \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{4}} - pdu = \frac{4}{35}t^{\frac{7}{2}} - \frac{8}{45}t^{\frac{9}{4}} - pt - \frac{4}{35}t^{\frac{7}{4}} + \frac{8}{45}t^{\frac{9}{8}} + pt^{\frac{1}{2}}$
on pose ; $y = t^{\frac{1}{8}}$ donc

$$I = \frac{4}{35}x^{28} - \frac{8}{45}x^{18} - px^{8} - \frac{4}{35}x^{14} + \frac{8}{45}x^{9} + px^{4}$$

et donc

$$\lim_{t\to\infty} infI = +\infty > \frac{1}{e}$$

(iv) la fonction $\dfrac{f(x)}{x} = 1 > 0$,$x \neq 0$
Donc l'équation (4.38) est oscillaiore.

Exemple 7. Considérons l'équation différentielle :

$$x''(t) - px'(t) + t\sqrt{t}x(t^2) = 0 \qquad t \geq 1 \tag{4.40}$$

Quand p est une constante positive il est facile de vérifier que l'équation (4.40) est oscillatoire pour tout $p > 0$ et on a

$a(t) = 1$, $q(t) = t\sqrt{t}$, $g(t) = t^2$, $p(t) = p$, $f(x) = x$, $k = 1$, $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = 1$

comme $\delta_1 = -1$ et $\delta_2 = 1$,on applique le Théorème 7donc soit l'hypothèse ;
(i) $\dfrac{f(x)}{x} = 1 > 0$; $g(t) = t^2 \geq t$; $g'(t) = 2t \geq 0$; $p'(t) = p' = 0 \geq 0 \quad \forall t \geq 1$.
(ii)considérons l'équation suivante ;

$$x''(t) + t\sqrt{t}x(t^2) = 0 \qquad t \geq 1 \tag{4.41}$$

si on suppose que $x(t) \leq 0 \Rightarrow x(t^2) \leq 0$ alors l'équation (4.41) devient ;

$$x''(t) = -t\sqrt{t}x(t^2) \geq 0$$

donc

$$x''(t) \geq 0$$

l'équation (4.40) implique ;

$$px'(t) - t\sqrt{t}x(t^2) \geq 0 \Rightarrow x'(t) - \frac{1}{p}t\sqrt{t}x(t^2) \geq 0$$

on applique le lemme 3 on déduit qu'il n'existe aucune solution positive de l'équation (4.41) contradiction .
Donc l'équation (4.41) est oscillatoire.
(iii)

$$\lim_{u\to\infty} inf \int_u^{u^2} \left(\int_t^{t^2} s\sqrt{s}ds - p \right) dt = \lim_{u\to\infty} \frac{2}{30} u^{12} = +\infty > \frac{1}{e}$$

Alors l'équation (4.40) est oscillatoire pour $\delta_1 = -1$ et $\delta_2 = 1$.