REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCEN

Thèse Ali RIMOUCHE

Présentée à la:

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité: EDP et Applications

Par :

Mr Ali RIMOUCHE

Sur le thème

Sur une classe de problèmes elliptiques à coefficients singuliers

---

Soutenue publiquement le 27/04/2017 à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr S. M. Bouguima	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mr B. Abdellaoui	Professeur	Université de Tlemcen	Examinateur
Mme S. Baghli-Bendimerad	Professeur	Université de Sidi Bel Abbes	Examinatrice
Mr B. Messirdi	Professeur	Université d'Oran	Examinateur
Mr M. Bouchekif	Professeur	Université de Tlemcen	Invité
Mme Y. Nasri-Dali Youcef	MCA	Université de Tlemcen	Directrice de thèse

Laboratoire Systèmes Dynamiques et Applications (SDA)
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie

Dédicaces

Je dédie ce travail :

À mes exemples éternels, mes soutiens moral et source de joie et de bonheur, ceux qui se sont toujours sacrifiés pour me voir réussir, Sidi Cheikh Ali Boudilmi et mon père.

À la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon coeur, ma vie et mon bonheur ; ma mère que j'adore.

À mes soeurs Imen et Houda, pour leurs encouragements, leur aide et leur patience.

À la famille Rimouche et Benrahmani, grands et petits.

اصل و اسلم على سيدنا محمد طب القلوب و دوائها، و عافية الأبدان و شفائها،
و نور الأبصار و ضيائها، و قوت الأرواح و غذائها، و
على آله و صحبه و من اتبعهم بإحسان إلى يوم الدين

Remerciements

Tout d'abord je remercie le DIEU Tout Clément pour ce qu'il m'a offert.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma directrice de thèse Madame Y. Nasri M.C.A à l'Université de Tlemcen, pour ses conseils, ses encouragements et sa patience au cours de la réalisation de ce travail.

Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur S. M. Bouguima Professeur à l'Université de Tlemcen qui a accepté de présider le jury.

Je remercie très respectueusement Monsieur B. Abdellaoui (Professeur à l'Université de Tlemcen), Madame S. Baghli-Bendimerad (Professeur à l'Université de Sidi Bel Abbes) et Monsieur B. Messerdi (Professeur à l'Université d'Oran) de m'avoir fait l'honneur de lire et d'évaluer cette thèse.

Mes vifs remerciements vont également à Monsieur M. Bouchekif Professeur à l'Université de Tlemcen de m'avoir fait l'honneur d'accepter mon invitation.

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants pour leurs précieux conseils et aimables encouragements durant tout mon cursus d'étude surtout Monsieur C. Belkhouja et Madame Belabid.

Spécial merci à tous les membres du laboratoire Systèmes Dynamiques et Applications (S.D.A), en particulier Mme S. Benmansour.

Un grand merci à tous mes collègues, sans oublier mes amis Ahmed, Bilal, Hmida, Mekki, Nabil, Sofiane, Yazid, Aicha, Ibtissem, Loubna, Sanaa, Sihem, Tema et Wahida pour leurs encouragements et leur patience.

Sincères remerciements vont aux membres de ma famille ainsi que mes frères du coeur.

Table des matières

Introduction générale

L'objet de cette thèse est l'étude des problèmes elliptiques à coefficients singuliers.

Les problèmes que nous considérons se caractèrisent par la présence : des nonlinéarités critiques, d'un ou plusieurs poids singuliers dont le point singulier peut se situer soit à l'interieur ou sur le bord du domaine étudié.

Ceci pose un certain nombre de difficultés liées à la perte de compacité des injections de Sobolev ainsi que la régularité des solutions. Les méthodes variationnelles classiques ne sont pas applicables.
L'étude de ce type de problèmes est motivée par leurs intérêts mathématiques en premier lieu.
En second lieu, ils apparaissent dans de nombreux modèles issus : de la physique (optique nonlinéaire), problèmes d'astrophysiques et les phénomènes de réaction-diffusion en biologie.

L'étude des problèmes contenant des nonlinérarités critiques : exposant critique de Sobolev, exposant critique de Sobolev-Hardy avec un poids singulier de type Hardy dont la singularité se trouve à l'interieur du domaine, a fait l'objet de plusieurs travaux de recherches. Contrairement au cas où la singularité se situe sur la frontière du domaine étudié. On constate qu'il y a peu de résultats. L'existence de solutions dépend de la géométrie du domaine.

Notre principal objectif est d'étudier l'effet des coefficients singuliers sur l'existence et la multiplicité des solutions.

La thèse se présente comme suit :
Dans le chapitre 1, nous rapellons les principaux résultats utilisés dans cette thèse.

Dans le chapitre 2. On étudie l'existence et la multiplicité de solutions du problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \frac{u}{|x|^2} = \lambda f(x) u + |u|^{2^*-2} u & \text{dans } \Omega \setminus \{0\}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$ avec $0 \in \Omega$, λ et μ sont des paramètres réels positifs tels que $0 \leq \mu < \bar{\mu} = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$, $\bar{\mu}$ est la meilleure constante de Hardy, $2^* = \frac{2N}{N-2}$

est l'exposant critique de Sobolev et $f \in \mathcal{F}_{2,\beta}$, avec

$$\mathcal{F}_{2,\beta} = \left\{ f \in \mathcal{F}_2 : \exists\, 0 \leq \beta < 2 \text{ tel que } 0 < \lim_{|x| \to 0} |x|^{\beta} f(x) < \infty \right\}.$$

et

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+ : \lim_{|x| \to 0} |x|^2 f(x) = 0 \text{ avec } f \in L^{\infty}_{loc}(\Omega \setminus \{0\}) \right\}.$$

Lorsque $f \equiv 1$, le problème a été considéré par Ferrero-Gazzola [17].

Pour $f \not\equiv 1$, Chaudhuri-Ramaswamy [12] ont étudié le problème de valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -\Delta e - \mu \frac{e}{|x|^2} = \lambda f(x) e & \text{dans } \Omega \\ e = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\lambda$}$$

ils ont montré que le problème ($\mathcal{P}_\lambda$) admet des solutions faibles non triviales dans $H_0^1(\Omega)$ qui correspondent à $\lambda \in \sigma_\mu(f) := (\lambda_k^\mu(f))_{k=1}^{\infty}$.
Nasri [32] a obtenu des résultats pour le problème (1) dans le cas où $\lambda < \lambda_1^\mu(f)$.

Dans notre travail, on prouve que l'existence et la multiplicité de solutions du problème (1) dépend essentiellement de la position du paramètre λ par rapport aux valeurs propres du problème ($\mathcal{P}_\lambda$). On distingue deux cas :

Le cas non-résonant, c'est à dire, λ n'appartient pas au spectre $\sigma_\mu(f)$, on montre que notre problème admet au moins une solution sous les conditions suivantes :

$\mu \in \left[0,\, \bar{\mu} - \left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2\right]$ et

1. $N = 3$ et $1 \leq \beta < 2$,

   ou
2. $N \geq 4$ et $0 \leq \beta < 2$.

Le cas résonant, c'est à dire λ est une valeur propre. On montre l'existence de solutions pour $\mu \in \left[0,\, \bar{\mu} - \left(\frac{N+2}{N}\right)^2 \left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2\right[$ et

1. $N = 3$ et $\frac{7}{5} < \beta < 2$,

   ou
2. $N = 4$ et $\frac{2}{3} < \beta < 2$,

   ou
3. $N \geq 5$ et $0 \leq \beta < 2$.

On démontre aussi que le problème (1) admet v_k paires de solutions non triviales pour tout $\mu \in \left]\bar{\mu} - \left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2,\, \bar{\mu}\right[$, $\lambda \in]\lambda_+,\, \lambda_k^\mu(f)[$ avec $\lambda_+ = \lambda_k^\mu(f) - S_\mu \left(\int_\Omega |x|^{-\beta N/2} dx\right)^{-2/N}$ et si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. $N = 3$ et $\frac{7}{5} < \beta < 2$

2. $N = 4$ et $\frac{2}{3} < \beta < 2$
3. $N \geq 5$ et $0 \leq \beta < 2$,

où v_k désigne la multiplicité de $\lambda_k^{\mu}(f)$.

Dans le chapitre 3, on s'intèresse à l'existence et la multiplicité des solutions du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \frac{|u|^{q-2}u}{|x|^{\beta}} + \frac{|u|^{2^*(s)-2}u}{|x|^{s}} & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $(N \geq 3)$ avec $0 \in \partial\Omega$, λ est un paramètre positif, $0 \leq \beta < 2$, $1 < q < 2$, $0 < s < 2$ et $2^*(s) = \frac{2(N-s)}{N-2}$ l'exposant critique de Hardy-Sobolev. Dans le cas $q = 2$, $\beta = 0$. Le problème (2) a été traité par Ghoussoub-Kang [18]. Ils ont prouvé que l'existence de solutions dépend du signe de la courbure principale de $\partial\Omega$ au voisinage de 0. Le résultat obtenu est le suivant :
Si $N \geq 4$, $0 < \lambda < \lambda_1$ (λ_1 désigne la première valeur propre de $(-\Delta,\ H_0^1(\Omega))$) et que la courbure principale de $\partial\Omega$ au voisinage de 0 est non positive. Alors le problème (2) admet au moins une solution positive.

On remarque que dans notre cas, la fonctionnelle d'energie associée au problème (2) n'est pas bornée inférieurement sur $H_0^1(\Omega)$. A cet effet, on utilise une minimisation sur la variété de Nehari. On établit les résultats suivants :

1. Supposons que $0 \leq \beta < 2$. Alors il existe $\Lambda_0 > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in]0; \Lambda_0[$, le problème (2) admet au moins une solution dans $H_0^1(\Omega)$.
2. Supposons que la courbure moyenne de $\partial\Omega$ est négative, alors il existe $\Lambda > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]0; \Lambda[$, $\max\left\{1, \frac{N-\beta}{N-1}\right\} < q < \frac{N-\beta+1}{N-1}$, le problème (2) admet au moins deux solutions dans $H_0^1(\Omega)$.

Dans le chapitre 4, on se propose d'étudier le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \frac{u}{|x|^{\beta}} + \frac{|u|^{2^*(s)-2}u}{|x|^{s}} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $(N \geq 3)$ avec $0 \in \partial\Omega$, λ est un paramètre positif, $0 \leq \beta < 2$, $0 \leq s < 2$ et $2^*(s) = \frac{2(N-s)}{N-2}$ l'exposant critique de Hardy-Sobolev. On montre que l'existence des solutions dépend de la position de λ par rapport aux valeurs propres du problème

$$\begin{cases} -\Delta e = \lambda \frac{e}{|x|^{\beta}} & \text{dans}\, \Omega \\ e = 0 & \text{sur}\, \partial\Omega, \end{cases}$$

et du paramètre β.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle les principaux résultats utilisés dans cette thèse.

1.1 Espaces de Sobolev

On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.1.1. On note par $C_0^\infty(\Omega)$, l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ définies sur Ω et à support compact dans Ω.

Soit $1 \leq p < \infty$.

Définition 1.1.2. On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par

$$\left\{ u \in L^p(\Omega)/\ \exists g_1, ..., g_N \text{ tels que } \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi \ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)\ \forall i = 1, .., N \right\}.$$

On pose $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$.

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad \text{et} \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Définition 1.1.3. On dit qu'un espace de Banach E est *réflexif* si $j(E) = E''$, avec E'' est le bidual de E et j est l'injection canonique de E dans E''.
Lorsque E est réflexif on identifie implicitement E et E''.

Théorème 1.1.1 ([5])**.** *$W^{1,p}(\Omega)$, muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

est un espace de Banach séparable et réflexif pour $1 < p < \infty$.

Définition 1.1.4 ([5])**.** On définit $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

On pose $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$.

Remarque 1. On a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 1.1.2 ([5]). *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si et seulement si $u = 0$ sur $\partial\Omega$.*

Théorème 1.1.3 ([5]). *$H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle_{H^1} := \langle u, v\rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2},$$

est un espace de Hilbert séparable.

Théorème 1.1.4 (**Inégalité de Poincaré** [5]). *Soit Ω un ouvert borné. Il existe une constante C telle que*

$$||u||_{L^p} \leq C||\nabla u||_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Théorème 1.1.5 (**Immersion de Sobolev** [28]). *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $p \geq 1$.*

i) Si $p < N$, alors
$$\begin{cases} \text{pour tout } q \in [1, p^*)\text{, l'injection de } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ dans } L^q(\Omega) \text{ est compacte.} \\ \text{l'injection de } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ dans } L^{p^*}(\Omega) \text{ est continue où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}. \end{cases}$$

ii) Si $p = N$, alors pour tout $q < \infty$, l'injection de $W_0^{1,N}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte.

iii) Si $p > N$ et $0 < \alpha < 1 - \frac{p}{N}$, alors l'injection de $W_0^{1,N}(\Omega)$ dans $C^{0,\alpha}\left(\bar{\Omega}\right)$ est compacte, avec $C^{0,\alpha}\left(\bar{\Omega}\right) = \left\{ u \in C(\Omega) : \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \right\}$, où $0 < \alpha < 1$.

Définition 1.1.5. Pour tout $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$, $p \geq 1$, soit

$$||u||^p_{W_0^{1,p}} := \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p},$$

par le théorème d'immersion de Sobolev, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, il existe une constante optimale S_p qui ne dépend que de N et p telle que

$$S_p||u||^p_{L^{p^*}} \leq ||u||^p_{W_0^{1,p}}, \quad \text{pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

avec

$$S_p := \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{||u||^p_{W_0^{1,p}}}{||u||^p_{L^{p^*}}}.$$

Proposition 1.1.1 ([36]). *Soit $S := S_2$ la meilleure constante de Sobolev pour l'injection $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{2^*}(\Omega)$. Alors l'infimum S n'est jamais atteint quand Ω est un domaine borné.*

Théorème 1.1.6 ([3]). *L'infimum S est atteint sur $\mathbb{R}^N$ par une des fonctions*

$$U_\varepsilon(x) = \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} \qquad \text{avec } \varepsilon > 0.$$

Définition 1.1.6. On dit que Ω est étoilé par rapport à un point a si pour tout $x \in \Omega$, $\{(1-t)\, a + tx : t \in [0,1]\} \subset \Omega$.

Lemme 1.1.1 (**Inégalité de Hardy** [22]). *Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t + N > 0$ et supposons que $0 \in \Omega$, alors pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega |x|^t |u|^2 dx \leq \left(\frac{2}{N+t}\right)^2 \int_\Omega |x.\nabla u|^2 |x|^t dx.$$

La constante $\left(\frac{2}{N+t}\right)^2$ est optimale et n'est jamais atteinte.

Pour $t = -2$ on obtient

$$\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^2} dx \leq \left(\frac{2}{N-2}\right)^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Lemme 1.1.2 ([16]). *Soit Ω un domaine borné régulier avec $0 \in \partial\Omega$. Posons*

$$\mu_2(\Omega) := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^2} dx}.$$

Alors

$$\frac{(N-2)^2}{4} < \mu_2(\Omega) \leq \frac{N^2}{4}.$$

Lemme 1.1.3 (**Inégalité de Hardy-Sobolev** [21, 22]). *Supposons que $0 \leq s \leq 2$ et $1 \leq q < 2^*(s) = \frac{2(N-s)}{N-2}$, alors*

1. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on a*

$$\left(\int_\Omega \frac{|u|^q}{|x|^s} dx\right)^2 \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^q.$$

2. *L'application $u \mapsto \frac{u}{|x|^{s/q}}$ de $H_0^1(\Omega)$ vers $L^q(\Omega)$ est compacte pour $q < 2^*(s)$.*
3. *Si de plus on a $0 \in \Omega$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\left(\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx\right)^2 \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{2^*(s)}$$

Lemme 1.1.4 ([12]). *Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$ et $0 \leq \beta < 2$. Alors l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2\left(\Omega, |x|^{-\beta} dx\right)$ est compacte.*

Lemme 1.1.5 ([12]). *Soit $0 \leq \beta < 2$, posons $2^*_\beta := \frac{2(N-\beta)}{N-2}$, alors l'injection $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^q\left(\Omega, |x|^{-\beta}dx\right)$ est :*

i) compacte pour tout $1 \leq q < 2^*_\beta$.

ii) continue pour tout $1 \leq q \leq 2^*_\beta$.

Lemme 1.1.6 (**Inégalté de Caffarelli-Kohn-Nierenberg** [9]). *Soient $0 \in \Omega$, $-\infty < a < \frac{N-2}{2}$, $a \leq b \leq a+1$ et $p = \frac{2N}{N-2+2(b-a)}$, alors pour tout $\omega \in H^1_0\left(\Omega, |x|^{-2a}\right)$ et $x \in \Omega$, il existe une constante positive $C_{a,b}$ telle que*

$$\int_\Omega |x|^{-bp} |\omega|^p \, dx \leq C_{a,b} \int_\Omega |x|^{-2a} |\nabla \omega|^2 \, dx. \tag{1.1.1}$$

Lemme 1.1.7 (**Inégalité de Hardy-Sobolev** [18]). *Supposons que $0 \in \partial\Omega$, $0 \leq s < 2$ et $2^*(s) = \frac{2(N-s)}{N-2}$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^1_0(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Lemme 1.1.8 (**Identité de Pohozaev** [35]). *Soit u une solution du problème*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$.

Alors

$$2N \int_\Omega G(u) - (N-2) \int_\Omega g(u)u = \int_{\partial\Omega} x.\nu \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2,$$

où $G(u) = \int_0^u g(s)ds$ et $\nu = \nu(x)$ est le vecteur normal extérieur unitaire à $\partial\Omega$ en x.

Lemme 1.1.9. (Lemme de Brézis-Lieb)[6]. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $(u_n)_n \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Si $(u_n)_n$ est bornée dans $L^p(\Omega)$ et $u_n \to u$ p.p dans Ω, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|u_n\|^p_{L^p} - \|u_n - u\|^p_{L^p}\right) = ||u||^p_{L^p}.$$

Théorème 1.1.7. (Principe du maximum fort). *Soit Ω un domaine borné.*

Si $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\bar{\Omega}\right)$ vérifiant $-\Delta u \leq 0$ et si u atteint un maximum positif à l'intérieur de Ω, alors u est constante sur Ω.

Définition 1.1.7. Une fonctionnelle J définie sur un espace de Banach E est Fréchet-différentiable en un point $u \in E$, s'il existe une application linéaire bornée $J'(u) \in E'$, appelée la différentielle de J en u, telle que

$$\frac{|J(u+v) - J(u) - \langle J'(u), v\rangle|}{\|v\|_E} \to 0 \qquad \text{quand } \|v\|_E \to 0.$$

ou encore, pour tout w dans un voisinage de u, on a

$$J(w) - J(u) = \langle J'(u), w - u \rangle + o\,(w - u)\,.$$

J est dite de classe C^1, si l'application $u \mapsto J'(u)$ est continue.

Théorème 1.1.8 ([36]). *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Supposons qu'il existe une fonction $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable en $x \in \Omega$, continûment différentiable en $u \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}^N$, avec $F_u := \frac{\partial F}{\partial u}$ et $F_p := \frac{\partial F}{\partial p}$ et les conditions suivantes sont vérifiées :*

i) $|F(x,u,p)| \leq C\,(1 + |u|^{s_1} + |p|^2)$, *où* $s_1 \leq \frac{2N}{N-2}$.

ii) $|F_u(x,u,p)| \leq C\,(1 + |u|^{s_2} + |p|^{t_2})$, *où* $s_2 \leq \frac{N+2}{N-2}$ *et* $t_2 \leq \frac{N+2}{N}$.

iii) $|F_p(x,u,p)| \leq C\,(1 + |u|^{s_3} + |p|)$, *où* $s_3 \leq \frac{N}{N-2}$.

Alors, la fonctionnelle J définie par :

$$J(u) := \int_\Omega F\,(x, u(x), \nabla u(x))\,dx,$$

est de classe C^1 et $J'(u)$ est donnée par :

$$\langle J'(u), v \rangle := \int_\Omega \left(F_u\,(x, u, \nabla u)\,v + F_p\,(x, u, \nabla u)\,.\nabla v\right) dx.$$

1.2 Condition de Palais-Smale

Définition 1.2.1. Soient E un espace de Banach, $J \in C^1(E, \mathbb{R})$, $J'(u) : E \longrightarrow E'$ (E' est le dual topologique de E), les dérivées au sens de Fréchet.
On dit que $u \in X$ est un point critique de I si $I'(u) = 0$, sinon u est un point régulier. On dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de I s'il existe un point critique u de I tel que $I(u) = c$, sinon c est dite valeur régulière.

Définition 1.2.2. Soient X un espace de Banach et $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c) $(\mathrm{P.S})_c$, si toute suite $(u_n)_n$ de X telle que

$$\begin{cases} J\,(u_n) \to c & \text{dans } \mathbb{R}, \\ J'\,(u_n) \to 0 & \text{dans } X', \end{cases}$$

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente.

Définition 1.2.3. Soit X un ensemble, la fonction $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite bornée inférieurement dans X, s'il existe une constante réelle m telle que : $\forall x \in X$, $J(x) \geq m$

Définition 1.2.4. Soit X un espace topologique. On dit qu'une fonction $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est semi continue inférieurement (en abrégé s.c.i) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble $|J \leq \lambda| := \{x \in X : J(x) \leq \lambda\}$ est fermé.

On peut énoncer le lemme suivant :

Lemme 1.2.1 (**Principe variationnel d'Ekeland** [15]). *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* J *une fonction s.c.i de* X *dans* $\mathbb{R}$. *On suppose que* J *est bornée inférieurement et on pose* $c = \inf\limits_{x \in X} J(x)$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* u_ε *tel que*

$$\begin{cases} c \leq J(u_\varepsilon) \leq c + \varepsilon, \\ \forall x \in X,\ x \neq u_\varepsilon,\ J(x) - J(u_\varepsilon) + \varepsilon d(x, u_\varepsilon) > 0. \end{cases}$$

Corollaire 1. *Soient* X *un espace de Banach et* $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. *On suppose que la fonction* J *est bornée inférieurement, alors il existe une suite* $\{u_n\} \subset X$ *telle que :*

i) $J(u_n) = c + o(1)$.

ii) $J'(u_n) \to 0$ *dans* H^{-1}.

Si de plus $\{u_n\}$ *vérifie la condition de Palais-Smale au niveau* c. *Alors* J *atteint son minimum* c.

Théorème 1.2.1 (**Théorème du col** [2]). *Soient* X *un espace de Banach,* $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ *une fonction qui vérifie la condition de Palais-Smale. On suppose que* $J(0) = 0$ *telle que*

i) Il existe $R > 0$ *et* $a > 0$ *tels que si* $\|u\| = R$, *alors* $J(u) \geq a$,

ii) Il existe $u_0 \in X$ *tel que* $\|u_0\| > R$ *et* $J(u_0) < a$. *Alors* J *possède une valeur critique* c *telle que* $c \geq a$, *c'est-à-dire, si on pose*

$$\mathcal{B} := \{h : [0,1] \longrightarrow X \text{ continue},\ h(0) = 0 \text{ et } h(1) = u_0\},$$

et

$$c := \inf_{h \in \mathcal{B}} \max_{t \in [0,1]} J(h(t)),$$

alors c *est une valeur critique de* J, *et* $c \geq a$.

Théorème 1.2.2 (**Théorème de Linking** [2]). *Soit* E *un espace de Banach avec* $E = Y \oplus X$, *où* $\dim Y < \infty$. *Supposons que* $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ *une fonction qui satisfait :*

i) Il existe $\rho,\ \alpha > 0$ *tel que* $I\mid_{\partial B_\rho \cap X} \geq \alpha$

ii) Il existe $e \in \partial B_\rho \cap X$ *et* $R > \rho$ *tels que si* $Q = \left(\partial \bar{B}_\rho \cap Y\right) \oplus \{r.e : 0 < r < R\}$, *alors* $I\mid_{\partial Q} < 0$.

Si I *satisfait la condition de* $(PS)_c$ *avec*

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in Q} T(h(u)),$$

où

$$\Gamma = \{h \in C(Q, E) : h\mid_{\partial Q} = id\mid_{\partial Q}\}$$

Alors c *est une valeur critique pour* I *et* $c \geq \alpha$.

Remarque 2. On remarque que si $I\mid_Y \leq 0$ et il existe $e \in \partial B_1 \cap X$ et $\tilde{T} > \rho$ tels que $I(u) \leq 0$ pour $u \in Y \oplus Span\{e\}$ et $\|u\| \geq \tilde{T}$, alors pour tout grand nombre T, $Q = (\partial B_T \cap Y) \oplus \{t.e : 0 < t < T\}$ satisfait $I\mid_{\partial Q} \leq 0$

Théorème 1.2.3 ([11]). *Soient E un espace de Hilbert et $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ une fonction qui vérifie les conditions suivantes :*

1. $I(u) = I(-u)$, $I(0) = 0$.
2. *Il existe une constante $c^* > 0$ tel que I satisfait la condition de $(PS)_c$ pour tout $c \in]0, c^*[$.*
3. *Il existe deux sous espaces fermés V, W de E et trois constantes positives ρ, δ, β avec $\delta < \beta < c^*$ telles que*
   a) $I(u) \leq \beta$ *pour tout* $u \in W$.
   b) $I(u) \geq \delta$ *pour tout* $u \in B_\rho \cap V$.
   c) $\operatorname{codim} V < +\infty$ *et* $\dim W \geq \operatorname{codim} V$.

Alors I admet au moins

$$\dim W - \operatorname{codim} V$$

pairs de points critiques avec des valeurs critiques dans $]\delta, \beta[$.

1.3 Multiplicateurs de Lagrange

Définition 1.3.1. Soient X un espace de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ et un ensemble de contraintes de la forme

$$F := \{v \in X : I(v) = 0\}.$$

On suppose que pour tout $v \in F$, on a $I'(v) \neq 0$.

Si $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, on dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de J sur F s'il existe $v \in F$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $J(v) = c$ et $J'(v) = \lambda I'(v)$.

Le point v est un point critique de J sur F et le réel λ est appelé multiplicateur de Lagrange pour la valeur critique c.

De cette définition, on a le résultat suivant :

Proposition 1.3.1 ([28]). *Sous les hypothèses et notations de la définition 1.3.1, on suppose que $v_0 \in F$ est tel que $J(v_0) = \inf_{v \in F} J(v)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$J'(v_0) = \lambda I'(v_0).$$

1.4 Méthodes directes

Définition 1.4.1. Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach réflexif et $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$

1) On dit que J est faiblement semi-continue inférieurement si pour toute suite $(u_n) \subset X$ qui converge faiblement vers $u \in X$ on a $J(u) \leq \liminf J(u_n)$.
2) On dit que J est coercive s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in X$ on a $J(x) \geq \alpha \|x\|_X + \beta$.

On a le théorème suivant :

Théorème 1.4.1 ([36]). *Soient $(X, \|.\|)$ un espace de Banach réflexif, M un sous-ensemble de X faiblement fermé et $J : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction coercive et faiblement semi continue inférieurement i.e :*

i/ $J(u) \to \infty$ *quand* $||u|| \to \infty$, $u \in M$.

ii/ *Pour tout* $u \in M$, *toute suite* (u_n) *dans* M *tels que* $u_n \rightharpoonup u$ *faiblement dans* X *on a*
$$J(u) \leq \liminf J(u_n).$$
Alors J *est bornée inférieurement sur* M *et atteint son infimum dans* M.

Définition 1.4.2. On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$
pour $f \in H^{-1}(\Omega)$ (où $H^{-1}(\Omega)$ est le dual topologique de $H_0^1(\Omega)$) si
$$\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi - f\varphi)\, dx = 0 \text{ pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

1.5 Notions de géométrie différentielle

1.5.1 Sous-variété

Définition 1.5.1. Soient N et d deux entiers naturels tels que $N \geq d$. On dit que $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ est une sous-variétré, de dimension d, si pour tout $x \in \mathcal{M}$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^N$, un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^N$ et $f : U \longrightarrow V$ un difféomorphisme tel que
$$f(U \cup \mathcal{M}) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}).$$

Définition 1.5.2. Soit $\mathcal{M}$ une sous-variété de dimension d et $x \in \mathcal{M}$. L'espace tangent à $\mathcal{M}$ en x, noté $T_x\mathcal{M}$, est un ensemble de vecteurs tangents en x aux courbes contenues dans $\mathcal{M}$ et passant par x.

1.5.2 Courbure principale et moyenne

Définition 1.5.3. Soit $\mathcal{M}$ une sous-variété de dimension d. L'application de Gauss est une application différentiable de $\mathcal{M}$ à valeurs dans la sphère unité $\mathbb{S}^d$.

Définition 1.5.4. La différentielle en $x \in \mathcal{M}$ de l'application de Gauss, vue comme un endomorphisme de $T_x\mathcal{M}$ est applée l'endomorphisme de Weingarten.

Définition 1.5.5. On appelle courbure principale, les valeurs propres de l'endomorphisme de Weingarten.
La moyenne de la courbure principale est dite courbure moyenne.

Chapitre 2

Résultats d'existence et de multiplicité pour une équation elliptique à poids singulier

Ce chapitre est le développement de l'article [33]

2.1 Introdution

Dans ce chapitre, on étudie l'existence des solutions non triviales du problème semilinéaire suivant

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \frac{u}{|x|^2} = \lambda f(x) u + |u|^{2^*-2} u & \text{dans } \Omega \setminus \{0\}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$ avec $0 \in \Omega$, λ et μ sont des paramètres positifs tels que $0 \leq \mu < \bar{\mu} = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$, $\bar{\mu}$ est la meilleure constante de Hardy, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev et f est une fonction singulière positive qu'on spécifiera ultérieurement.

L'étude de ce type de problèmes est motivée par ses diverses applications, par exemple, il a été présenté comme un modèle pour l'équation nonlinéaire de Schrödinger avec un potentiel singulier. L'équation est de la forme suivante :

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2} \Delta \psi + V(x)\psi = |\psi|^{p-1} \psi, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+,$$

i est l'unité imaginaire et $\hbar$ désigne la constante de Plank. Ce modèle décrit la condensation de Bose-Einstein [29, 30] ou la propagation de la lumière dans des matériaux optiques non linéaires [31].

L'intérêt mathématique réside dans le fait que ces problèmes sont doublement critiques en raison de la présence de l'exposant critique et le potentiel de Hardy.

Si $\lambda \leq 0$ et Ω est étoilé par rapport à l'origine, en utilisant l'identité de Pohozaev [35] on montre que le problème (P_λ) n'admet pas de solution.

Quand $f \equiv 1$, le problème (P_λ) a fait l'objet de plusieurs travaux, nous citons par exemple [10, 13, 17, 26] et leur références.
Le point de départ pour étudier ce type de problèmes est le travail de Jannelli [26]. Il a prouvé les résultats suivants pour $f \equiv 1$:

1. Si $0 \leq \mu \leq \bar{\mu} - 1$, alors le problème (P_λ) admet au moins une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $0 < \lambda < \lambda_1^\mu$ où λ_1^μ est la première valeur propre de l'opérateur $\left(-\Delta - \frac{\mu}{|x|^2}\right)$ dans $H_0^1(\Omega)$.
2. Si $\bar{\mu} - 1 < \mu < \bar{\mu}$, alors le problème (P_λ) admet au moins une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $\mu^* < \lambda < \lambda_1^\mu$ où

$$\mu^* = \min_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega \frac{|\nabla \varphi(x)|^2}{|x|^{2\gamma}} dx}{\int_\Omega \frac{|\varphi(x)|^2}{|x|^{2\gamma}} dx}, \quad \text{et } \gamma = \sqrt{\bar{\mu}} + \sqrt{\bar{\mu} - \mu}.$$

Ferrero et Gazzola [17] ont montré l'existence de solutions pour $\lambda \geq \lambda_1^\mu$. Cao et Han [10] ont complété les résultats obtenus dans [17].

Quand f est une fonction mesurable positive avec $f \not\equiv 1$, Nasri [32] a étendu les résultats au cas où f peut être singulière.
En suivant le même raisonement de [10] et [17], nous établissons des résultats d'existence et de multiplicité lorsque f est une fonction singulière. Le cas résonant et non résonant sont considérés.

2.2 Préliminaires et principaux résultats

Tout au long de ce chapitre, nous notons C, C_1, $C_2, \ldots$ des constantes positives ; B_R est la boule centrée en 0 avec un rayon R ; $H_0^1(\Omega)$ désigne l'espace de Hilbert ; H^{-1} est le dual topologique de $H_0^1(\Omega)$; $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, désigne l'espace de Lebesgue et $|.|_p$ est sa norme usuelle.
Pour $0 \leq \mu < \bar{\mu}$, on munit l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega) := H_\mu(\Omega)$ du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_\mu = \int_\Omega \left(\nabla u \nabla v - \mu \frac{uv}{|x|^2} \right) dx, \qquad \forall u, v \in H_\mu(\Omega),$$

on définit la norme

$$\|u\|_\mu := \left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \mu \frac{u^2}{|x|^2} \right) dx \right)^{1/2}, \qquad \forall u \in H_\mu(\Omega),$$

Par l'inégalité de Hardy [22], on montre que cette dernière est équivalente à la norme standard de $H_0^1(\Omega)$.

Soit
$$\mathcal{F}_2 = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+ : \lim_{|x|\to 0} |x|^2 f(x) = 0 \text{ avec } f \in L^\infty_{loc}(\Omega \setminus \{0\}) \right\}.$$
Pour $0 \leq \beta < 2$, on pose
$$\mathcal{F}_{2,\beta} = \left\{ f \in \mathcal{F}_2 : \exists\, 0 \leq \beta < 2 \text{ tel que } 0 < \lim_{|x|\to 0} |x|^\beta f(x) < \infty \right\}.$$

Dans ce qui suit, nous rappelons quelques résultats préliminaires :

Lemme 2.2.1 ([12]). *Soit $0 \leq \mu < \bar{\mu}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}_2$.*
Le problème de valeurs propres
$$\begin{cases} -\Delta e - \mu \frac{e}{|x|^2} = \lambda f(x) e & dans\, \Omega \\ e = 0 & sur\, \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2.1}$$
admet des solutions faibles non-triviales dans $H^1_0(\Omega)$, qui correspondent à $\lambda \in \sigma_\mu(f) := \left(\lambda^\mu_k(f)\right)_{k=1}^{\infty}$ où
$$0 < \lambda^\mu_1(f) \leq \lambda^\mu_2(f) \leq \cdots \to +\infty.$$
Si Ω est $C^{1,1}$, alors toutes les solutions faibles du problème (2.2.1) sont dans $H^1_0(\Omega) \cap W^{2,r}(\Omega)$ pour tout $1 < r < \frac{2N}{N+2}$.

Lemme 2.2.2 ([12]). *Soit $f \in \mathcal{F}_2$, alors l'injection $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega, f dx)$ est compacte.*

Lemme 2.2.3 ([12]). *Soit $2^*_\beta := \frac{2(N-\beta)}{N-2}$, si $f \in \mathcal{F}_{2,\beta}$, alors l'injection $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega, f dx)$ est :*

i) compacte pour tout $2 \leq q < 2^*_\beta$.

ii) continue pour tout $2 \leq q \leq 2^*_\beta$.

Les exemples de fonctions $f \in \mathcal{F}_{2,\beta}$ peuvent être :

1) Toute fonction bornée.

2) Dans un voisinage de 0, f s'écrit sous forme $|x|^{-\beta}$ pour tout $0 < \beta < 2$.

3) $f(x) = \frac{|x|^{-\beta}}{|\log|x||}$ dans un voisinage de 0.

Une question naturelle et intéressante : peut-on étendre l'étude quand f est une fonction singulière ?
La réponse est affirmative.
Nos principaux résultats sont les suivants :

Théorème 2.2.1. *Supposons que $\mu \in \left[0, \bar{\mu} - \left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2\right]$ et $\lambda \notin \sigma_\mu(f)$. Alors le problème ($P_\lambda$) admet au moins une solution si :*

i) $N = 3$ *et* $1 \leq \beta < 2$.

ii) $N \geq 4$ *et* $0 \leq \beta < 2$.

Théorème 2.2.2. *Supposons que* $\mu \in \left]\bar{\mu} - \left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2, \bar{\mu}\right[$ *et qu'il existe* $\lambda_k^\mu(f) \in \sigma_\mu(f)$ *tel que* $\lambda \in (\lambda_+, \lambda_k^\mu(f))$ *avec* $\lambda_+ = \lambda_k^\mu(f) - S_\mu \left(\int_\Omega |x|^{-\beta N/2} dx\right)^{-2/N}$. *Alors le problème* (P_λ) *admet* v_k *paires de solutions non-tirviales si :*

i) $N = 3$ *et* $\frac{7}{5} < \beta < 2$

ii) $N = 4$ *et* $\frac{2}{3} < \beta < 2$

iii) $N \geq 5$ *et* $0 \leq \beta < 2$,

où v_k *désigne la multiplicité de* $\lambda_k^\mu(f)$.

Théorème 2.2.3. *Supposons que* $\mu \in \left[0, \bar{\mu} - \left(\frac{N+2}{N}\right)^2 \left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2\right[$. *Alors pour tout* $\lambda > 0$, *le problème* (P_λ) *admet au moins une solution si :*

i) $N = 3$ *and* $\frac{7}{5} < \beta < 2$

ii) $N = 4$ *and* $\frac{2}{3} < \beta < 2$

iii) $N \geq 5$ *and* $0 \leq \beta < 2$.

La fonctionnelle d'énergie associée au problème (P_λ) ne satisfait pas la condition (P.S) du fait que les injections $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2\left(\Omega, |x|^{-2} dx\right)$ ne sont pas compactes. Dans ce cas, les arguments standard de la théorie des points critiques ne sont pas applicables. En appliquant le raisonnement de Brézis-Nirenberg [7] on prouve que la fonctionnelle d'energie associée au problème (P_λ) satisfait la condition $(\text{P.S})_c$ pour un certain niveau de compacité c. En utilisant les techniques introduites dans [10, 17] on établit la preuve de nos résultats.

2.3 Comportement asymptotique des fonctions propres

Fixons $k \in \mathbb{N}$ et posons

$$H^- = span\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}, \quad H^+ = \left(H^-\right)^\perp.$$

Prenons $m \in \mathbb{N}$ tel que $B_{1/m} \subset \Omega$ et définissons la fonction $\xi_m : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\xi_m(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in B_{1/m}(0), \\ m\,|x| - 1 & \text{si } x \in A_m = B_{2/m}(0) \setminus B_{1/m}(0), \\ 1 & \text{si } x \in B_{2/m}(0). \end{cases}$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, on pose $e_i^m = \xi_m e_i$ et $H_m^- = span\{e_1^m, e_2^m, \ldots, e_k^m\}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, considérons les fonctions suivantes

$$u_m^\varepsilon(x) = \begin{cases} u_\varepsilon^*(x) - u_\varepsilon^*\left(\frac{1}{m}\right) & \text{si } x \in B_{1/m}(0) \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus B_{1/m}(0). \end{cases}$$

Lemme 2.3.1. *Pour $\mu < \bar{\mu}$ et $i \neq j\,(i, j = 1, 2, \ldots, k)$, on a*

i)

$$\left\|e_i^m - e_i\right\|_\mu \to 0 \quad \textit{quand } m \to \infty,$$

ii)

$$\left\|e_k^m\right\|_\mu \leq \lambda_k^\mu(f) + Cm^{-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}, \tag{2.3.1}$$

$$\left|\langle e_i^m, e_j^m\rangle_{L^2(\Omega,f)}\right| \leq Cm^{-2+\beta\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} \tag{2.3.2}$$

$$\left|\langle e_i^m, e_j^m\rangle_\mu\right| \leq Cm^{-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}, \tag{2.3.3}$$

$$\left\|e_k^m\right\|_{L^2(\Omega,f)} \leq \lambda_k^\mu(f) + Cm^{-2+\beta\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}, \tag{2.3.4}$$

iii) Pour $\Lambda = \{u \in H_m^- : \left\|u\right\|_{L^2(\Omega,\, f)} = 1\}$, on a

$$\max_{u\in\Lambda}\left\|u\right\|_\mu \leq \lambda_k^\mu(f) + Cm^{-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}.$$

Pour démontrer ce lemme, on a besoin du résultat suivant :

Lemme 2.3.2. *Soit e_i $(i \in \mathbb{N})$ les solutions $L^2(\Omega,\, f)$ normalisées du problème (2.2.1) qui correspondent aux valeurs propres λ_i, alors*

$$|e_i(x)| \leq C\,|x|^{-\gamma'}, \qquad x \in \Omega \setminus \{0\}.$$

Démonstration. Soit $v(x) = |x|^{\gamma'} e_i(x)$, alors

$$\begin{aligned}
-div\left(|x|^{-2\gamma'} \nabla v\right) &= -div\left(|x|^{-2\gamma'} \nabla\left(|x|^{\gamma'} e_i\right)\right) \\
&= -div\left(|x|^{-2\gamma'}\left(|x|^{\gamma'} \nabla e_i + \gamma' e_i |x|^{-\gamma'-2} x\right)\right) \\
&= -div\left(|x|^{-\gamma'} \nabla e_i + \gamma' e_i |x|^{-3\gamma'-2} x\right) \\
&= -div\left(|x|^{-\gamma'} \nabla e_i\right) - \gamma' div\left(e_i |x|^{-3\gamma'-2} x\right) \\
&= -|x|^{-\gamma'} \Delta e_i + \gamma' |x|^{-3\gamma'-2} x \nabla e_i - \gamma'\Bigg(div\left(|x|^{-3\gamma'-2} x\right) e_i \\
&\quad + |x|^{-3\gamma'-2} x \nabla e_i\Bigg) \\
&= -|x|^{-\gamma'} \Delta e_i - \gamma'\left(N |x|^{-\gamma'-2} + (-\gamma'-2)|x|^{-3\gamma'-4} |x|^2\right) e_i \\
&= -|x|^{-\gamma'} \Delta e_i - \gamma' N |x|^{-\gamma'-2} e_i + \gamma'(\gamma'+2)|x|^{-\gamma'-2} e_i \\
&= -|x|^{-\gamma'} \Delta e_i - \gamma' N |x|^{-\gamma'-2} e_i + (\gamma' N - \mu)|x|^{-\gamma'-2} e_i \\
&= -|x|^{-\gamma'} \Delta e_i - \mu |x|^{-\gamma'-2} e_i \\
&= |x|^{-\gamma'} \lambda_i f e_i
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} -div\left(|x|^{-2\gamma'} \nabla v\right) = \lambda_i |x|^{-2\gamma'} f v & \text{dans}\, \Omega \setminus \{0\} \\ v = 0 & \text{sur}\, \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3.5}$$

où $v \in C^2(\Omega \setminus \{0\}) \cap C^1\left(\bar{\Omega} \setminus \{0\}\right)$, on conclut que $v \in H_0^1\left(\Omega,\, |x|^{-2\gamma'}\right)$.
En effet, en utilisant l'inégalité de Hardy, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^{-2\gamma'} |\nabla v|^2 dx &= \int_\Omega |x|^{-2\gamma'} \left||x|^{\gamma'} \nabla e_i + \gamma' |x|^{\gamma'-2} x e_i\right|^2 dx \\
&\leq 2\int_\Omega \left(|\nabla e_i|^2 + (\gamma')^2 \frac{e_i^2}{|x|^2}\right) dx \\
&\leq \frac{2(\bar{\mu} + \gamma'^2)}{\bar{\mu} - \mu} \int_\Omega \left(|\nabla e_i|^2 - \mu \frac{e_i^2}{|x|^2}\right) dx \\
&\leq \frac{4\lambda_i^\mu(f)\bar{\mu}}{\bar{\mu} - \mu}.
\end{aligned}$$

En multipliant (2.3.5) par une fonction test $\varphi \in H_0^1\left(\Omega,\, |x|^{-2\gamma'}\right)$ et en intégrant par parties, on trouve

$$\int_\Omega |x|^{-2\gamma'} \nabla v \nabla \varphi \, dx = \lambda_i^\mu(f) \int_\Omega f |x|^{-2\gamma'} v \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1\left(\Omega,\, |x|^{-2\gamma'}\right), \tag{2.3.6}$$

Pour tout $s, l > 1$, on définit $v_l = \min\{|v|, l\}$. En choisissant $\varphi = vv_l^{2(s-1)} \in H_0^1\left(\Omega, |x|^{-2\gamma'}\right)$ dans (2.3.6), on conclut que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^{-2\gamma'} \nabla v \nabla\left(vv_l^{2(s-1)}\right) dx &= \int_\Omega |x|^{-2\gamma'} \nabla v \Big(v_l^{2(s-1)} \nabla v + 2(s-1) \\
&\quad \times vv_l^{2(s-1)-1} \nabla v_l \Big) dx \qquad (2.3.7)\\
&= \int_\Omega |x|^{-2\gamma'} |\nabla v|^2 v_l^{2(s-1)} dx + 2(s-1) \qquad (2.3.8)\\
&\quad \times \int_\Omega |x|^{-2\gamma'} vv_l^{2(s-1)-1} \nabla v . \nabla v_l dx \\
&= \lambda_i^\mu(f) \int_\Omega f |x|^{-2\gamma'} v^2 v_l^{2(s-1)} dx.
\end{aligned}$$

Comme $v_l \leq v$, on a

$$\int_\Omega |x|^{-2\gamma'} |\nabla v|^2 v_l^{2(s-1)} dx + 2(s-1) \int_\Omega |x|^{-2\gamma'} v_l^{2(s-1)} |\nabla v_l|^2 dx \leq \lambda_i \int_\Omega f |x|^{-2\gamma'} v^2 v_l^{2(s-1)} \mathrm{d}x.$$

Prenant $a = b = \gamma' < \frac{N-2}{2}$ et $\omega = vv_l^{s-1}$ dans l'inégalité de (C-K-N) (1.1.1), et en utilisant (2.3.7), on trouve

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |x|^{-p\gamma'} v_l^{ps-2} v^2 dx\right)^{2/p} &\leq \left(\int_\Omega |x|^{-p\gamma'} \left|v_l^{s-1} v\right|^p dx\right)^{2/p} \\
&\leq C_{a,a} \int_\Omega |x|^{-2\gamma'} \left|\nabla\left(v_l^{s-1} v\right)\right|^2 dx \\
&\leq 2C_{a,a} \Big((s-1)^2 \int_\Omega |x|^{-2\gamma'} v^2 v_l^{2(s-1)-2} |\nabla v_l|^2 dx \\
&\quad + \int_\Omega |x|^{-2\gamma'} v_l^{2(s-2)/2} |\nabla v|^2 dx \Big) \\
&\leq 2C_{a,a} \Big((s-1)^2 \int_\Omega |x|^{-2\gamma'} v^2 v_l^{2(s-1)} |\nabla v_l|^2 dx \\
&\quad + \int_\Omega |x|^{-2\gamma'} v_l^{2(s-2)/2} |\nabla v|^2 dx \Big) \\
&\leq 2C_{a,a} \lambda_i^\mu(f) \int_\Omega f |x|^{-2\gamma'} v_l^{2(s-2)} v^2 dx
\end{aligned}$$

alors

$$\left(\int_\Omega |x|^{-p\gamma'} v_l^{ps-2} v^2 dx\right)^{1/ps} \leq (C_0 s)^{1/2s} \left(\int_\Omega f |x|^{-2\gamma'} v_l^{2s-2} v^2 dx\right)^{1/2s} \qquad (2.3.9)$$

où $C_0 = 2C_{a,a}\lambda_i^\mu(f)$.

On peut choisir $s^* > 0$ tel que $1 < s^* < \frac{N-\beta}{N-2}$.

Définissons par la suite

$$s_j = s^* \left(\frac{p}{2}\right)^j \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.3.10}$$

D'après (2.3.9), on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |x|^{-p\gamma'} v_l^{s_{j+1}-2} v^2 dx\right)^{1/2s_{j+1}} &\leq (C_0 s_j)^{1/2s_j} \left(\int_\Omega f\,|x|^{-2\gamma'} v_l^{2s_j-2} v^2 dx\right)^{1/2s_j} \\
&\leq \cdots \\
&\leq C_0^{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2s_j}} \prod_{j=0}^{\infty} s_j^{1/2s_j} \left(\int_\Omega f\,|x|^{-2\gamma'} |v|^{2s^*} dx\right)^{1/2s_j} \quad (2.3.11)
\end{aligned}$$

de (2.3.10), on conclut que

$$\begin{cases}
\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{s_j} = \frac{1}{s^*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{p}\right)^j \leq C \\
\prod_{j=0}^{\infty} s_j^{1/2s_j} = (s^*)^{(1/2s^*)\sum_{j=0}^{\infty}(2/p)^j} \left(\frac{p}{2}\right)^{(1/2s^*)\sum_{j=0}^{\infty} j(2/p)^j} \leq C
\end{cases} \tag{2.3.12}$$

Le choix de s^* et le fait que $2 < 2s^* < 2^*_\beta$, impliquent que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f\,|x|^{-2\gamma'} |v|^{2s^*} dx &= \int_\Omega f\,|x|^{(2s^*-2)\gamma'} |e_i|^{2s^*} dx \\
&\leq (diam\,\Omega)^{(2s^*-2)\gamma'} \int_\Omega f\,|e_i|^{2s^*} dx \\
&\leq (diam\,\Omega)^{(2s^*-2)\gamma'} C \int_\Omega f\,|\nabla e_i|^2 dx \\
&\leq C
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

D'après (2.3.12), (2.3.13) et (2.3.11), on a

$$\left\|v_l\right\|_{L^{2s_{j+1}}(\Omega)} \leq (diam\,\Omega)^{p\gamma'/2s_{j+1}} \left(\int_\Omega |x|^{-p\gamma'} v_l^{2s_{j+1}-2} v^2 dx\right)^{1/2s_{j+1}} \leq C,$$

puisque $s_{j+1} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on déduit que

$$\left\|v_l\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$$

□

Démonstration du lemme 2.3.1. Pour démontrer le premier point, il suffit de montrer la convergence dans $H_0^1(\Omega)$. A cet effet, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla(e_i^m - e_i)|^2 dx &= \int_\Omega |e_i \nabla\xi_m + (\xi_m - 1)\nabla e_i|^2 dx \\
&= \int_{A_m} |\nabla\xi_m|^2 (e_i)^2 dx + 2\int_{A_m} \nabla\xi_m (\xi_m - 1) e_i \nabla e_i\, dx \\
&\quad + \int_{B_{2/m}} (\xi_m - 1)^2 |\nabla e_i|^2 dx.
\end{aligned}$$

On commence par montrer que $\int_{A_m} |\nabla \xi_m|^2 (e_i)^2 \, dx \to 0$.
En effet, en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{A_m} |\nabla \xi_m|^2 (e_i)^2 \, dx &= m^2 \int_{A_m} (e_i)^2 \, dx < m^2 \int_{B_{2/m}} (e_i)^2 \, dx \\
&\leq m^2 \left(\int_{B_{2/m}} |e_i|^{(2N/(N-2))} \, dx \right)^{(N-2)/N} \left(\int_{B_{2/m}} dx \right)^{2/N} \\
&= m^2 \left(\int_{B_{2/m}} |e_i|^{(2N/(N-2))} \, dx \right)^{(N-2)/N} C \left(\frac{2}{m} \right)^2 \\
&= C \left(\int_{B_{2/m}} |e_i|^{(2N/(N-2))} \, dx \right)^{(N-2)/N} \\
&\to 0 \qquad\qquad \text{quand } m \to \infty,
\end{aligned}$$

ceci découle de la continuitée absolue de l'intégrale.
D'une manière similaire on prouve que $\int_{A_m} \nabla \xi_m (\xi_m - 1) e_i \nabla e_i \, dx \to 0$. En effet

$$\begin{aligned}
\left| \int_{A_m} \nabla \xi_m (\xi_m - 1) e_i \nabla e_i \, dx \right| &\leq m \left(\int_{A_m} |e_i|^{2^*} dx \right)^{1/2^*} \left(\int_{A_m} |\nabla e_i|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\int_{A_m} dx \right)^{1/N} \\
&= \left(\int_{B_{2/m}} |e_i|^{2^*} dx \right)^{1/2^*} \left(\int_{B_{2/m}} |\nabla e_i|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\to 0 \qquad\qquad \text{quand } m \to \infty.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant le second point, en effet, d'une part

$$\begin{aligned}
\left\| e_i^m \right\|_\mu - \left\| e_i \right\|_\mu &= \int_\Omega \left(|\xi_m \nabla e_i + e_i \nabla \xi_m|^2 - |\nabla e_i|^2 - \mu \frac{(\xi_m - 1) e_i^2}{|x|^2} \right) dx \\
&= \int_\Omega \left(\left(\xi_m^2 - 1 \right) |\nabla e_i|^2 + 2 \xi_m e_i \nabla \xi_m \nabla e_i + e_i^2 |\nabla \xi_m|^2 \right. \\
&\quad \left. - \mu \frac{(\xi_m - 1) e_i^2}{|x|^2} \right) dx. \qquad (2.3.14)
\end{aligned}$$

D'autre part, en multipliant les termes de (2.2.1) par $(\xi_m^2 - 1) e_i$ et en intégrant par parties, on obtient

$$\int_\Omega \left(\left(\xi_m^2 - 1 \right) |\nabla e_i|^2 + 2 \xi_m e_i \nabla \xi_m \nabla e_i - \mu \frac{(\xi_m^2 - 1) e_i^2}{|x|^2} \right) dx = \lambda_i^\mu(f) \int_\Omega f \left(\xi_m^2 - 1 \right) e_i^2 dx. \qquad (2.3.15)$$

En utilisant (2.3.15) et le fait que $0 \leq \xi_m \leq 1$, (2.3.14) nous donne que

$$\begin{aligned}\left\|e_i^m\right\|_\mu &\leq \left\|e_i\right\|_\mu + e_i^2 \left|\nabla \xi_m\right|^2 + \lambda_i^\mu(f) \int f\left(\xi_m^2 - 1\right) e_i^2 dx \\ &\leq \lambda_i^\mu(f) + Cm^2 \int_0^{2/m} r^{N-1-2\gamma'} dr \\ &\leq \lambda_i^\mu(f) + Cm^{-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}},\end{aligned}$$

qui implique (2.3.1).

Pour $i \neq j$, on a $\langle e_i, e_j\rangle_\mu = 0$ et alors

$$\begin{aligned}\langle e_i^m, e_j^m\rangle_\mu &= \int_\Omega \left(\nabla e_i^m \nabla e_j^m - \mu \frac{e_i^m e_j^m}{|x|^2}\right) dx \\ &= \int_\Omega \left(\left(\xi_m \nabla e_i + e_i \nabla \xi_m\right)\left(\xi_m \nabla e_j + e_j \nabla \xi_m\right) - \mu \frac{e_i^m e_j^m}{|x|^2}\right) dx \\ &= \int_\Omega \left(\xi_m^2 \nabla e_i \nabla e_j + \xi_m e_j \nabla \xi_m \nabla e_i + \xi_m e_i \nabla \xi_m \nabla e_j\right. \\ &\quad \left. + \left|\nabla \xi_m\right|^2 e_i e_j - \mu \frac{\xi_m^2 e_i e_j}{|x|^2}\right) dx \\ &= \int_\Omega \left(\left(\xi_m^2 - 1\right) \nabla e_i \nabla e_j + \xi_m e_j \nabla \xi_m \nabla e_i + \xi_m e_i \nabla \xi_m \nabla e_j\right. \\ &\quad \left. + \left|\nabla \xi_m\right|^2 e_i e_j - \mu \frac{\left(\xi_m^2 - 1\right) e_i e_j}{|x|^2}\right) dx. \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

En multipliant les termes de (2.2.1) par $\left(\xi_m^2 - 1\right) e_i$ et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{gathered}\int_\Omega \left(\left(\xi_m^2 - 1\right) \nabla e_i \nabla e_j + 2\xi_m e_j \nabla \xi_m \nabla e_i - \mu \frac{\xi_m^2 e_i e_j}{|x|^2}\right) dx \\ = \\ \lambda_i^\mu(f) \int_\Omega f\left(\xi_m^2 - 1\right) e_i e_j \, dx,\end{gathered} \tag{2.3.17}$$

et de manière similaire, on a

$$\begin{gathered}\int_\Omega \left(\left(\xi_m^2 - 1\right) \nabla e_i \nabla e_j + 2\xi_m e_i \nabla \xi_m \nabla e_j - \mu \frac{\xi_m^2 e_i e_j}{|x|^2}\right) dx \\ = \\ \lambda_j^\mu(f) \int_\Omega f\left(\xi_m^2 - 1\right) e_i e_j \, dx.\end{gathered} \tag{2.3.18}$$

En additionnant terme à terme (2.3.17) et (2.3.18), on trouve

$$\begin{gathered}\int_\Omega \left(\left(\xi_m^2 - 1\right) \nabla e_i \nabla e_j + \xi_m e_j \nabla \xi_m \nabla e_i + \xi_m e_i \nabla \xi_m \nabla e_j - \mu \frac{\xi_m^2 e_i e_j}{|x|^2}\right) dx \\ = \\ \frac{\lambda_i^\mu(f) + \lambda_j^\mu(f)}{2} \int_\Omega f\left(\xi_m^2 - 1\right) e_i e_j dx.\end{gathered} \tag{2.3.19}$$

En remplaçant le deuxième terme de (2.3.16) par sa valeur dans (2.3.17), on déduit que

$$\langle e_i^m,\, e_j^m\rangle_\mu = \int_\Omega |\nabla\xi_m|^2\, e_i e_j\, dx + \frac{\lambda_i^\mu(f)+\lambda_j^\mu(f)}{2}\int_\Omega f\left(\xi_m^2-1\right) e_i e_j\, dx$$

Par le Lemme 2.3.2, on a

$$\begin{aligned}
\left|\langle e_i^m,\, e_j^m\rangle_\mu\right| &\leq \int_{B_{2/m}(0)} |\nabla\xi_m|^2\, |e_i|\, |e_j|\, dx + \frac{\lambda_i^\mu(f)+\lambda_j^\mu(f)}{2} \\
&\quad \times \int_{B_{2/m}(0)} f\left(\xi_m^2-1\right) |e_i|\, |e_j|\, dx \\
&\leq Cm^2\int_0^{2/m} r^{N-1-2\gamma'}dr + C\int_0^{2/m} r^{N-1-2\gamma'-\beta}dr \\
&\leq Cm^{-2\sqrt{\bar\mu-\mu}} + Cm^{-2+\beta-2\sqrt{\bar\mu-\mu}} \\
&\leq Cm^{-2\sqrt{\bar\mu-\mu}}.
\end{aligned}$$

D'où l'inégaliré (2.3.3).
Démontrons l'estimation (2.3.2).

Notons que pour $i \neq j$, $\int_\Omega e_i e_j = 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\left|\langle e_i^m,\, e_j^m\rangle_{L^2(\Omega,f)}\right| &= \int_{B_{2/m}(0)} f\xi_m^2 e_i e_j\, dx \\
&\leq C\int_0^{2/m} r^{N-1-2\gamma'-\beta}dr \\
&\leq Cm^{-2+\beta-2\sqrt{\bar\mu-\mu}}.
\end{aligned}$$

Aussi on a l'estimation (2.3.2).
On a

$$\begin{aligned}
\left\|e_i^m\right\|_{L^2(\Omega,f)} &= \int_{B_{2/m}(0)} fe_i^2dx - \int_{B_{2/m}(0)} f\left(1-\xi_m^2\right)e_i^2dx \\
&\geq 1-\int_{B_{2/m}(0)} fe_i^2dx \\
&\geq 1-Cm^{-2+\beta-2\sqrt{\bar\mu-\mu}}.
\end{aligned}$$

Il reste à montrer le troisième point. Soit $u_m \in H_m^-$, $\left\|u_m\right\|_{L^2} = 1$, tel que

$$\max_{u\in\Lambda}\left\|u\right\|_\mu^2 = \left\|u_m\right\|_\mu^2 \tag{2.3.20}$$

alors il existe $\alpha_1^m,\, \alpha_2^m, \ldots,\, \alpha_k^m$ tels que $u_m = \sum_{i=1}^k \alpha_i^m e_i^m$, donc

$$\left\|u_m\right\|_\mu^2 = \sum_{i=1}^k (\alpha_i^m)^2\left\|e_i^m\right\|_\mu^2 + 2\sum_{1\leq i\leq j\leq k}\alpha_i^m\alpha_j^m\langle e_i^m,\, e_j^m\rangle_\mu \tag{2.3.21}$$

et

$$1 = \left\|u_m\right\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i^m)^2 \left\|e_i^m\right\|_{L^2}^2 + 2 \sum_{1\le i\le j\le k} \alpha_i^m \alpha_j^m \langle e_i^m, e_j^m\rangle_{L^2} \tag{2.3.22}$$

De (2.3.3), il résulte qu'il existe $m_0 > 0$ tel que pour tout $m \geq m_0$, on a

$$\left|\langle e_i^m, e_j^m\rangle_{L^2}\right| < \frac{1}{4} \tag{2.3.23}$$

De (2.3.4), (2.3.22) et (2.3.23), on déduit que pour tout $m \geq m_0$,

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i^m)^2 \left\|e_i^m\right\|_{L^2}^2 + 2 \sum_{1\le i\le j\le k} |\alpha_i^m| \left|\alpha_j^m\right| \left|\langle e_i^m, e_j^m\rangle_{L^2}\right| \\ &\geq \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i^m)^2 - Cm^{-2+\beta-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} - \frac{1}{4} \sum_{1\le i\le j\le k} \left((\alpha_i^m)^2 + \left(\alpha_j^m\right)^2\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i^m)^2 - Cm^{-2+\beta-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}, \end{aligned}$$

qui implique que

$$|\alpha_i^m| \leq C. \tag{2.3.24}$$

En outre, de (2.3.3), (2.3.4), (2.3.22) et (2.3.24), on obtient

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i^m)^2 \left\|e_i^m\right\|_{L^2}^2 + 2 \sum_{1\le i\le j\le k} |\alpha_i^m| \left|\alpha_j^m\right| \left|\langle e_i^m, e_j^m\rangle_{L^2}\right| \\ &\geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i^m)^2 - Cm^{-2+\beta-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i^m)^2 \leq 1 + Cm^{-2+\beta-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} \tag{2.3.25}$$

donc de (2.3.1), (2.3.2), (2.3.21), (2.3.24) et (2.3.25), on conclut que pour m suffisament grand, on a

$$\begin{aligned} \left\|u_m\right\|_{\mu}^2 &\leq \lambda_k^\mu(f)\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i^m)^2 + Cm^{-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} + 2 \sum_{1\le i\le j\le k} |\alpha_i^m| \left|\alpha_j^m\right| \left|\langle e_i^m, e_j^m\rangle_{L^2}\right| \\ &\leq \lambda_k^\mu(f) + Cm^{-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} + Cm^{-2+\beta-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} \\ &\leq \lambda_k^\mu(f) + Cm^{-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} \end{aligned}$$

□

2.4 Caractérisation variationnelle

Il est bien connu que les solutions du problème (P_λ) sont les points critiques de la fonctionnelle d'énergie associée à (P_λ) :

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^2}dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega f\,|u|^2\,dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*}\,dx. \tag{2.4.1}$$

Soit

$$S_\mu := \inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2 - \mu\frac{u^2}{|x|^2}\right)dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}dx\right)^{2/2^*}}.$$

D'après [38], on sait que S_μ est atteint par la famille de fonctions

$$u_\varepsilon^*(x) = \frac{C_\varepsilon}{\left(\varepsilon^2\,|x|^{\gamma'/\sqrt{\bar\mu}} + |x|^{\gamma/\sqrt{\bar\mu}}\right)^{\sqrt{\bar\mu}}}$$

avec $C_\varepsilon = \left(\frac{4\varepsilon N(\bar\mu-\mu)}{N-2}\right)^{\sqrt{\bar\mu}/2}$, $\gamma = \sqrt{\bar\mu}+\sqrt{\bar\mu-\mu}$ et $\gamma' = \sqrt{\bar\mu}-\sqrt{\bar\mu-\mu}$.

Lemme 2.4.1. *Si $0 \le \mu < \bar\mu$, alors J_λ satisfait la condition $(\mathrm{P.S})_c$ pour $c < \frac{1}{N}S_\mu^{N/2}$.*

Démonstration. On commence par montrer que pour $0 \le \mu < \bar\mu$, alors toute suite $(u_n) \subset H_\mu(\Omega)$ qui satisfait

$$J_\lambda(u_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^2}dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega f u_n^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega u_n^{2^*}\,dx \to c \tag{2.4.2}$$

et pour tout φ dans $H_\mu(\Omega)$, vérifiant

$$\begin{aligned}\langle J'(u_n),\varphi\rangle &= \int_\Omega \nabla u_n\varphi\,dx - \mu\int_\Omega \frac{u_n\varphi\,dx}{|x|^2} - \lambda\int_\Omega f u_n\varphi\,dx - \int_\Omega u_n^{2^*-2}u_n\varphi\,dx \\ &= o(1)\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\|\nabla u_n\|_2 \to \infty$. Posons $w_n = \frac{u_n}{\|\nabla u_n\|_2}$, alors $\|\nabla w_n\|_2 = 1$. Donc il existe une sous suite notée w_n tel que

$$\begin{array}{ll} w_n \rightharpoonup w & \text{faiblement dans } H_\mu(\Omega), \\ w_n \to w & \text{p.p dans } \Omega, \\ w_n \to w & \text{fortement dans } L^2(\Omega, f\,dx), \\ w_n \to w & \text{fortement dans } L^t(\Omega) \text{ pour } 1 \le t < 2^*, \\ |w_n| \le K(x,t) & \text{pour } K(.,t) \in L^t(\Omega). \end{array}$$

En divisant (2.4.3) par $\|\nabla u_n\|_2$, on obtient

$$\int_\Omega \left(\nabla w_n \psi - \frac{\mu}{|x|^2} w_n \psi\right) dx - \int_\Omega |u_n|^{2^*-2} w_n \psi \, dx - \lambda \int_\Omega f w_n \psi \, dx = \frac{o(1)}{\|\nabla u_n\|_2} \|\psi\| = o(1), \tag{2.4.4}$$

comme

$$\begin{array}{lll} |w_n|^{2^*-2} w_n \psi & \to & |w|^{2^*-2} w\psi \quad \text{p.p dans } \Omega; \\ \left| |w_n|^{2^*-2} w_n \psi \right| & \leq & C\, |K(x)| \in L^1(\Omega). \end{array}$$

En appliquant le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on trouve

$$\int_\Omega |w_n|^{2^*-2} w_n \psi \, dx \to \int_\Omega |w|^{2^*-2} w\psi \, dx \quad \text{quand } n \to \infty,$$

sachant que

$$\int_\Omega |u_n|^{2^*-2} w_n \psi \, dx = \|\nabla u_n\|_2^{2^*-2} \int_\Omega |w_n|^{2^*-2} w_n \psi \, dx,$$

en passant à la limite dans (2.4.4), on obtient

$$\int_\Omega |w|^{2^*-2} w\psi \, dx = 0,$$

puisque $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ est arbitraire alors $w(x) = 0$ pour p.p x dans Ω.

D'une part, en divisant (2.4.2) par $\|\nabla u_n\|_2^2$, on trouve

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w_n|^2 \, dx - \frac{\mu}{2} \int_\Omega \frac{w_n^2}{|x|^2} dx - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega f w_n^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega |u_n|^{2^*-2} w_n^2 \, dx \to \frac{c}{\|\nabla u_n\|^2} = o(1). \tag{2.4.5}$$

D'autre part, du fait que $w_n \rightharpoonup w$ faiblement dans $H_\mu(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega f w_n^2 \, dx \to \int_\Omega f w^2 \, dx = 0,$$

par conséquent, en passant à la limite dans (2.4.5), on obtient

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{\mu}{|x|^2} w_n^2 \, dx = \frac{1}{2^*} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^{2^*-2} w_n^2 \, dx. \tag{2.4.6}$$

De manière similaire, en prenant $\psi = w_n$ dans (2.4.4), on obtient

$$1 - \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{\mu}{|x|^2} w_n^2 \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^{2^*-2} w_n^2 \, dx. \tag{2.4.7}$$

En multipliant (2.4.6) par 2^* et en soustrayant le résultat de (2.4.7), nous obtenons

$$\left(\frac{2^*}{2} - 1\right) = \left(\frac{2^*}{2} - 1\right) \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{\mu}{|x|^2} w_n^2 \, dx. \tag{2.4.8}$$

D'après l'inégalité de Hardy, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{\mu}{|x|^2} w_n^2\, dx \leq \frac{\mu}{\bar{\mu}}\int_\Omega |\nabla w_n|^2\, dx = \frac{\mu}{\bar{\mu}},$$

donc

$$\left(\frac{2^*}{2}-1\right) \leq \left(\frac{2^*}{2}-1\right)\frac{\mu}{\bar{\mu}},$$

ce qui est absurde car $\mu < \bar{\mu}$. Donc $\{u_n\}$ est bornée dans $H_\mu(\Omega)$.

Donc, il existe une sous suite notée (u_n) telle que

$$\begin{aligned}
&u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } H_\mu(\Omega),\\
&u_n \to u \text{ p.p dans } \Omega,\\
&u_n \to u \text{ fortement dans } L^2(\Omega, f\,dx).
\end{aligned}$$

Posons $v_n := u_n - u$, d'après le Lemme de Brézis-Lieb [6], on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_n|^2\, dx &= \int_\Omega |\nabla v_n|^2\, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + o(1),\\
\int_\Omega \tfrac{u_n^2}{|x|^2} dx &= \int_\Omega \tfrac{v_n^2}{|x|^2} dx + \int_\Omega \tfrac{u^2}{|x|^2} dx + o(1),\\
\int_\Omega |u_n|^{2^*}\, dx &= \int_\Omega |v_n|^{2^*}\, dx + \int_\Omega |u|^{2^*}\, dx + o(1),
\end{aligned}$$

et

$$\langle J_\lambda'(u), \psi\rangle = 0 \quad \text{pour tout } \psi \in H_\mu(\Omega).$$

Par suite, u est une solution de (P_λ). De plus, on a

$$J_\lambda(v_n) \to c - J_\lambda(u), \qquad J_\lambda'(v_n) \to 0 \text{ dans } (H_\mu(\Omega))'.$$

Comme $\langle J_\lambda'(u), u\rangle = 0$, il résulte que

$$J_\lambda(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega |u|^{2^*}\, dx \geq 0.$$

En utilisant le fait que $v_n \to 0$ fortement dans $L^2(\Omega,\, f dx)$ et

$$\langle J_\lambda'(u_n), u_n\rangle = \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 - \frac{\mu}{|x|^2}u_n^2\right) dx - \int_\Omega |u_n|^{2^*}\, dx - \lambda\int_\Omega f u_n^2 dx = 0, \tag{2.4.9}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(|\nabla v_n|^2 - \frac{\mu}{|x|^2}v_n^2\right) dx - \int_\Omega |v_n|^{2^*}\, dx\\
&= \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 - \frac{\mu}{|x|^2}u_n^2\right) dx - \int_\Omega |u_n|^{2^*}\, dx + o(1)\\
&- \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \frac{\mu}{|x|^2}u^2\right) dx - \int_\Omega |u|^{2^*}\, dx + o(1)\\
&= o(1).
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

Posons

$$\int_\Omega \left(|\nabla v_n|^2 - \frac{\mu}{|x|^2} v_n^2 \right) dx \to b, \qquad \int_\Omega |v_n|^{2^*} dx \to b$$

Par définition de S_μ, on obtient

$$\begin{aligned} S_\mu \left(\int_\Omega |v_n|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} &\leq \int_\Omega \left(|\nabla v_n|^2 - \frac{\mu}{|x|^2} v_n^2 \right) dx \\ &= \int_\Omega |v_n|^{2^*} dx + o(1), \quad \text{par (2.4.10)}. \end{aligned}$$

ainsi $S_\mu b^{2/2^*} \leq b$. Si $b \neq 0$, alors $b \geq S_\mu^{N/2}$ et

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_n) &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 - \frac{\mu}{|x|^2} u_n^2 \right) dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega |u_n|^{2^*} dx - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega f u_n^2 dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) \int_\Omega |u_n|^{2^*} dx + o(1) \\ &= \frac{1}{N} \int_\Omega |v_n|^{2^*} dx + \frac{1}{N} \int_\Omega |u|^{2^*} dx + o(1) \\ &\geq \frac{1}{N} \int_\Omega |v_n|^{2^*} dx + o(1) \to \frac{1}{N} b \geq \frac{1}{N} S_\mu^{N/2}, \end{aligned}$$

ce qui contredit le fait que $J_\lambda(u_n) \to c < \frac{1}{N} S_\mu^{N/2}$, par conséquent $b = 0$.
On a

$$\int_\Omega \left(|\nabla v_n|^2 - \frac{\mu}{|x|^2} v_n^2 \right) dx \geq \left(1 - \frac{\mu}{\bar{\mu}} \right) \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx,$$

comme $\mu < \bar{\mu}$, alors

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx \to 0, \quad \text{quand } n \to \infty,$$

ainsi $u_n \to u$ fortement dans $H_\mu(\Omega)$. □

Lemme 2.4.2. *Pour m suffisament grand et ε suffisament petit, on a*

i)

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_m^\varepsilon| - \mu \frac{(u_m^\varepsilon)^2}{|x|^2} \right) dx \leq S_\mu^{N/2} + C \varepsilon^{N-2} m^{2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}, \tag{2.4.11}$$

ii)

$$\int_\Omega (u_m^\varepsilon)^{2^*} dx \geq S_\mu^{N/2} - C \varepsilon^N m^{2N\sqrt{\bar{\mu}-\mu}/(N-2)}. \tag{2.4.12}$$

iii)

$$\int_\Omega f(u_m^\varepsilon)^2 dx \geq \begin{cases} C_1 \varepsilon^{\frac{\sqrt{\bar{\mu}}}{2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}(2-\beta)} - C \varepsilon^{2\sqrt{\bar{\mu}}} m^{-2+\beta+2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} & \text{si } \mu < \bar{\mu} - \left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2. \\ C_2 \varepsilon^{(N-2)/2} |\ln \varepsilon| - C \varepsilon^{N-2} & \text{si } \mu = \bar{\mu} - \left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2. \end{cases} \tag{2.4.13}$$

Démonstration. La preuve de *i)* et de *ii)* est similaire à celle de [17]. On montre uniquement le point *iii)*.
On a

$$\int_\Omega f\left(u_\varepsilon^*\right)^2 dx \geq \begin{cases} C_1 \varepsilon^{\sqrt{\bar\mu}(2-\beta)/2\sqrt{\bar\mu-\mu}} & \text{si } \mu < \bar\mu - \left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2 \\ C_2 \varepsilon^{(N-2)/2} \left|\ln \varepsilon\right| & \text{si } \mu = \bar\mu - \left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f\left(u_m^\varepsilon\right)^2 dx &= \int_\Omega f\left(u_\varepsilon^*(x) - u_\varepsilon^*\left(\frac{1}{m}\right)\right)^2 dx \\
&\geq \int_\Omega f\left(u_\varepsilon^*\right)^2 dx - 2\int_\Omega f \frac{u_\varepsilon^* C_\varepsilon}{\left(\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\bar\mu}} + \left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\bar\mu}}\right)^{\sqrt{\bar\mu}}} dx \\
&\geq \int_\Omega f\left(u_\varepsilon^*\right)^2 dx \\
&\quad -C\int_\Omega f \frac{\varepsilon^{2\sqrt{\bar\mu}}}{\left(\varepsilon^2|x|^{\gamma'/\sqrt{\bar\mu}} + |x|^{\gamma/\sqrt{\bar\mu}}\right)^{\sqrt{\bar\mu}}\left(\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\bar\mu}} + \left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\bar\mu}}\right)^{\sqrt{\bar\mu}}} dx.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon^{2\sqrt{\bar\mu}}}{\left(\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\bar\mu}} + \left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\bar\mu}}\right)^{\sqrt{\bar\mu}}} &= \frac{\varepsilon^{2\sqrt{\bar\mu}}}{\varepsilon^{2\sqrt{\bar\mu}}\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'}\left(1 + \varepsilon^{-2}\left(\frac{1}{m}\right)^{2\sqrt{\bar\mu-\mu}/\sqrt{\bar\mu}}\right)^{\sqrt{\bar\mu}}} \\
&\leq \frac{\varepsilon^{2\sqrt{\bar\mu}}}{\varepsilon^{2\sqrt{\bar\mu}}\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'}\varepsilon^{-2\sqrt{\bar\mu}}\left(\frac{1}{m}\right)^{2\sqrt{\bar\mu-\mu}}} \\
&\leq \varepsilon^{2\sqrt{\bar\mu}} m^\gamma,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{B_{1/m}} f \frac{dx}{\left(\varepsilon^2|x|^{\gamma'/\sqrt{\bar\mu}} + |x|^{\gamma/\sqrt{\bar\mu}}\right)^{\sqrt{\bar\mu}}} &= \int_0^{1/m} \frac{r^{N-1-\beta} dr}{\left(\varepsilon^2 r^{\gamma'/\sqrt{\bar\mu}} + r^{\gamma/\sqrt{\bar\mu}}\right)^{\sqrt{\bar\mu}}} \\
&= \int_0^{1/m} \frac{r^{N-1-\beta} dr}{\varepsilon^{2\sqrt{\bar\mu}} r^{\gamma'}\left(1 + \left(\frac{r}{\varepsilon^{\frac{\sqrt{\bar\mu}}{\sqrt{\bar\mu-\mu}}}}\right)^{\frac{2\sqrt{\bar\mu-\mu}}{\sqrt{\bar\mu}}}\right)^{\sqrt{\bar\mu}}} \\
&= \varepsilon^{\frac{(N-\beta-\gamma')\sqrt{\bar\mu}}{\sqrt{\bar\mu-\mu}} - 2\sqrt{\bar\mu}} \int_0^{1/m\varepsilon^{\frac{\sqrt{\bar\mu}}{\sqrt{\bar\mu-\mu}}}} \frac{\tau^{N-1-\beta} d\tau}{\tau^{\gamma'}\left(1 + \tau^{\frac{2\sqrt{\bar\mu-\mu}}{\sqrt{\bar\mu}}}\right)^{\sqrt{\bar\mu}}} \\
&\leq \varepsilon^{\frac{(N-\beta-\gamma')\sqrt{\bar\mu}}{\sqrt{\bar\mu-\mu}} - 2\sqrt{\bar\mu}} \int_0^{1/m\varepsilon^{\frac{\sqrt{\bar\mu}}{\sqrt{\bar\mu-\mu}}}} \frac{\tau^{N-1-\beta} d\tau}{\tau^{\gamma'}\tau^{\frac{2\sqrt{\bar\mu-\mu}}{\sqrt{\bar\mu}}\sqrt{\bar\mu}}} \\
&\leq m^{-\gamma'-2+\beta}
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\left(u_m^\varepsilon\right)^2 dx &\geq \int_\Omega f\left(u_\varepsilon^*\right)^2 dx - C\varepsilon^{2\sqrt{\bar\mu}} m^\gamma m^{-\gamma'-2+\beta} \\ &\geq \int_\Omega f\left(u_\varepsilon^*\right)^2 dx - C\varepsilon^{2\sqrt{\bar\mu}} m^{-2+\beta+2\sqrt{\bar\mu-\mu}}.\end{aligned}$$

Pour $\mu \leq \bar\mu - \left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2$, on retrouve le résultat voulu. □

Proposition 2.4.1. *Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda_k^\mu(f) \leq \lambda < \lambda_{k+1}^\mu(f)$. Alors :*

i) Il existe $\rho,\ \alpha > 0$ tels que $J_\lambda\,|_{\partial B_\rho \cap H^+} \geq \alpha$.

ii) Il existe $R > \rho$ tel que $J_\lambda\,|_{\partial Q_m^\varepsilon} \leq p(m)$ avec $p(m) \to 0$ quand $m \to +\infty$ où $Q_m^\varepsilon = \left(\overline{B_R} \cap H_m^-\right) \oplus \{r.u_m^\varepsilon : 0 < r < R\}$.

Démonstration. Pour $u \in H^+$, on a

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \frac{\mu}{|x|^2}u^2\right) dx \geq \lambda_{k+1}^\mu(f) \int_\Omega f u^2 dx, \tag{2.4.14}$$

En utilisant (2.4.14), les inégalités de Sobolev et Hardy, on obtient

$$\begin{aligned}J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}^\mu(f)}\right) \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \frac{\mu}{|x|^2}u^2\right) dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx \\ &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}^\mu(f)}\right)\left(1 - \frac{\mu}{\bar\mu}\right) \|\nabla u\|_2^2 - C|u|_{2^*}^{2^*}.\end{aligned}$$

Par conséquent, on peut choisir $\|\nabla u\|_2 = \rho$ suffisament petit et $\alpha > 0$ tel que $J_\lambda\,|_{\partial B_\rho \cap H^+} \geq \alpha$.

Pour tout $u \in H_m^-$ et d'après des estimations du Lemme 2.3.1, on obtient :

$$\begin{aligned}J_\lambda(u) &\leq C_1 m^{-2\sqrt{\bar\mu-\mu}} \int_\Omega f u^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega u^{2^*} dx \\ &\leq C_2 m^{-2\sqrt{\bar\mu-\mu}} |u|_{2^*}^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*} \\ &\leq C_3 m^{-N\sqrt{\bar\mu-\mu}}.\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Par conséquent

$$\lim_{m\to\infty} \max_{u \in H_m^-} J_\lambda(u) = 0.$$

D'autre part, on a

$$J_\lambda\left(r u_m^\varepsilon\right) \leq \frac{r^2}{2}\left\|u_m^\varepsilon\right\|_\mu - \frac{r^{2^*}}{2^*}\left|u_m^\varepsilon\right|_{2^*}^{2^*},$$

alors $J_\lambda\left(ru_m^\varepsilon\right)$ est négatif si $r = R$ et R est suffisamment grand.
Donc

$$J_\lambda(u) \leq Cm^{-N\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} \quad \text{pour tout } u \in H_m^- \cup \left\{H_m^- \oplus Ru_m^\varepsilon\right\}.$$

Comme $\max\limits_{0\leq r\leq R} J_\lambda\left(ru_m^\varepsilon\right) < +\infty$, si $v \in H_m^- \oplus \mathbb{R}^+ u_m^\varepsilon$, on peut écrire $v = u + ru_m^\varepsilon$ avec $\left|supp\left(u_m^\varepsilon\right) \cap supp(u)\right| = 0$, alors pour R grand, on aura

$$J_\lambda \mid_{\partial Q_m^\varepsilon} \leq 0.$$

□

2.5 Preuve du Théorème 2.2.1

Lemme 2.5.1. *Supposons que* $\mu \in \left[0, \bar{\mu} - \left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2\right]$. *Alors*

$$J_\lambda\left(t_\varepsilon u_m^\varepsilon\right) < \frac{1}{N} S_\mu^{N/2} \qquad \textit{pour } \varepsilon \textit{ suffisamment petit.}$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t_\varepsilon > 0$ tel que

$$J_\lambda\left(t_\varepsilon u_m^\varepsilon\right) \geq \frac{1}{N} S_\mu^{N/2}, \tag{2.5.1}$$

alors on affirme qu'il existe une sous-suite de (t_ε) telle que $t_\varepsilon \to t_0$. Sinon on suppose que $t_\varepsilon \to +\infty$, alors $J_\lambda\left(t_\varepsilon u_m^\varepsilon\right) \to -\infty$ quand $\varepsilon \to 0$, ce qui contredit (2.5.1), ainsi (t_ε) est bornée et il existe $t_0 \geq 0$ tel que $t_\varepsilon \to t_0$.
Si $t_0 = 0$ alors à l'aide des injections continues, on sait que $\int_\Omega f u_m^\varepsilon dx$ et $|u_m^\varepsilon|_{2^*}$ sont bornés, la même chose pour $\|u_m^\varepsilon\|_\mu$.
On a

$$\frac{t_\varepsilon^2}{2}\left[\int_\Omega \left|\nabla u_m^\varepsilon\right|^2 dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega \frac{\left(u_m^\varepsilon\right)^2}{|x|^2} dx - \frac{\lambda t_\varepsilon^2}{2}\int_\Omega f\left(u_m^\varepsilon\right)^2 dx\right] - \frac{t_\varepsilon^{2^*}}{2^*}\int_\Omega \left(u_m^\varepsilon\right)^{2^*} dx = o(1),$$

ce qui est en contradiction avec (2.5.1). Donc $t_\varepsilon \to t_0 > 0$.
En utilisant (2.4.11) et (2.4.12) et soit $\varepsilon \to 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\|t_\varepsilon u_m^\varepsilon\right\|_\mu^2 &\leq \frac{1}{2} S_\mu^{N/2} + \frac{t_\varepsilon^2 - 1}{2} S_\mu^{N/2} + C\varepsilon^{N-2} m^{2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}, \\ -\frac{1}{2^*}\left|t_\varepsilon u_m^\varepsilon\right|_{2^*}^{2^*} &\leq -\frac{1}{2^*} S_\mu^{N/2} - \frac{1}{2^*}\left(t_\varepsilon^{2^*} - 1\right) S_\mu^{N/2} + C\varepsilon^N m^{2N\sqrt{\bar{\mu}-\mu}/(N-2)}. \end{aligned}$$

En additionnant ces deux inégalités, on obtient

$$\frac{1}{2}\|t_\varepsilon u_m^\varepsilon\|_\mu^2 - \frac{1}{2^*}\left|t_\varepsilon u_m^\varepsilon\right|_{2^*}^{2^*} \leq \frac{1}{N} S_\mu^{N/2} + \frac{1}{2}\Big(t_\varepsilon^2 - 1 - \frac{N-2}{N}\Big(t_\varepsilon^{2^*} - 1\Big)\Big) S_\mu^{N/2} + C\varepsilon^{N-2}$$

Du fait que $\max\limits_{x\geq 0}\Big(x^2-1-\frac{N-2}{N}(x^{2^*}-1)\Big)=0$, on trouve

$$\frac{1}{2}\left\|t_\varepsilon^2 u_m^\varepsilon\right\|_\mu^2-\frac{1}{2^*}\int_\Omega \left(t_\varepsilon u_m^\varepsilon\right)^{2^*}\leq \frac{1}{N}S_\mu^{N/2}+C\varepsilon^{N-2}.$$

Estimons $\int_\Omega f\left(t_\varepsilon u_m^\varepsilon\right)^2$ pour $\mu\leq\bar{\mu}-\left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2$.
Pour $q=\frac{1}{2^{1/\gamma'}}$, on peut prendre ε assez petit, on aura alors

$$\varepsilon^{\sqrt{\bar{\mu}}/\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}<\frac{1}{qm}.$$

Ainsi il existe $C>0$ tel que

$$\varepsilon^2|x|^{\gamma'/\sqrt{\bar{\mu}}}+|x|^{\gamma/\sqrt{\bar{\mu}}}\leq C|x|^{\gamma/\sqrt{\bar{\mu}}},\qquad \forall\,|x|\geq\varepsilon^{\sqrt{\bar{\mu}}/\gamma}.$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\left(t_\varepsilon u_m^\varepsilon\right)^2 &\geq C\int_{\varepsilon^{\sqrt{\bar{\mu}}/\gamma}}^{1/qm} r^{-\beta}\left(u_\varepsilon^*(r)-u_\varepsilon^*(\frac{1}{m})\right)^2 r^{N-1}dr\\ &\geq C\int_{\varepsilon^{\sqrt{\bar{\mu}}/\gamma}}^{1/qm} r^{-\beta}\left(u_\varepsilon^*(r)\right)^2 r^{N-1}dr\\ &\geq CC_\varepsilon^2\int_{\varepsilon^{\sqrt{\bar{\mu}}/\gamma}}^{1/qm} r^{-\beta}r^{-2\gamma}r^{N-1}dr\\ &\geq CC_\varepsilon^2\int_{\varepsilon^{\sqrt{\bar{\mu}}/\gamma}}^{1/qm} r^{-\beta+1-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}dr.\end{aligned}$$

On distingue alors deux cas :
1) $\mu<\bar{\mu}-\left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2$

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\left(t_\varepsilon u_m^\varepsilon\right)^2dx &\geq C\varepsilon^{2\sqrt{\bar{\mu}}}\varepsilon^{2\left(\sqrt{\bar{\mu}}/\gamma\right)\left(2-\beta-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}\right)}\\ &\geq C\varepsilon^{N-2}\varepsilon^{2\left(\sqrt{\bar{\mu}}/\gamma\right)\left(2-\beta-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}\right)}.\end{aligned}$$

2) $\mu=\bar{\mu}-\left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2$

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\left(t_\varepsilon u_m^\varepsilon\right)^2dx &\geq CC_\varepsilon^2\int_{\varepsilon^{\frac{\sqrt{\bar{\mu}}}{\gamma}}}^{1/qm} r^{-\beta+1-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}dr\\ &\geq C\varepsilon^{2\sqrt{\bar{\mu}}}\left|\ln\varepsilon^{2\left(\sqrt{\bar{\mu}}/\gamma\right)}\right|.\end{aligned}$$

D'où $J_\lambda\left(t_\varepsilon u_m^\varepsilon\right)<\frac{1}{N}S_\mu^{N/2}$ pour $\mu\in\left[0,\,\bar{\mu}-\left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2\right]$. □

Preuve du Théorème 2.2.1. On a

$$\inf_{h\in\Gamma}\max_{u\in Q_m^\varepsilon}J_\lambda\left(h\left(u\right)\right)\leq\max_{u\in Q_m^\varepsilon}J_\lambda\left(u\right).\tag{2.5.2}$$

Pour la preuve du Théorème 2.2.1, il suffit de montrer que

$$\max_{u \in Q_m^\varepsilon} J_\lambda(u) < \frac{1}{N} S_\mu^{N/2}$$

Supposons par l'absurde que

$$\max_{u \in Q_m^\varepsilon} J_\lambda(u) \geq \frac{1}{N} S_\mu^{N/2} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Comme $\{v \in Q_m^\varepsilon : J_\lambda(v) \geq 0\}$ est un ensemble compact alors la borne superieure dans (2.5.2) est atteinte ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\omega_\varepsilon \in H_m^-$ et $t_\varepsilon \geq 0$ tels que pour $v_\varepsilon := \omega_\varepsilon + t_\varepsilon u_m^\varepsilon$, on a

$$J_\lambda(v_\varepsilon) := \sup_{u \in Q_m^\varepsilon} J_\lambda(u) \geq \frac{1}{N} S_\mu^{N/2},$$

i.e

$$\frac{1}{2}\left\|v_\varepsilon\right\|_\mu^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega f v_\varepsilon^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega v_\varepsilon^{2^*} dx \geq \frac{1}{N} S_\mu^{N/2}, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{2.5.3}$$

En utilisant la preuve du Lemme 2.5.1, on déduit que $\left(t_\varepsilon\right)$ admet une sous-suite convergente, $\left(\omega_\varepsilon\right)$ est bornée et

$$t_\varepsilon \to t_0 > 0, \quad \omega_\varepsilon \to \omega_0 \in H_m^-.$$

Du Lemme 2.3.1 et le fait que $\lambda \in \left(\lambda_k^\mu(f), \lambda_{k+1}^\mu(f)\right)$, on obtient

$$\begin{aligned} J_\lambda(\omega_\varepsilon) &= \frac{1}{2}\left\|\omega_\varepsilon\right\|_\mu^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega f \omega_\varepsilon^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{2^*} dx \\ &\leq \frac{\lambda_k^\mu(f) + o(1)}{2}\left|\omega_\varepsilon\right|_2^2 - \frac{\lambda}{2}\left|\omega_\varepsilon\right|_2^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Pour m assez grand. En utilisant (2.5.3) et en procédant de la même manière que celle dans le Lemme 2.5.1, on obtient

$$J_\lambda\left(v_\varepsilon\right) = J_\lambda\left(\omega_\varepsilon\right) + J_\lambda\left(t_\varepsilon u_m^\varepsilon\right) \leq J_\lambda\left(t_\varepsilon u_m^\varepsilon\right) < \frac{1}{N} S_\mu^{N/2}$$

ce qui est absurde. □

2.6 Preuve du Théorème 2.2.2

Soit

$$\lambda_+ = \min\{\lambda_j^\mu(f) \in \sigma : \lambda < \lambda_j^\mu(f)\},$$

on désigne par $M\left(\lambda_j^\mu(f)\right)$ l'espace propre qui correspond à $\lambda_j^\mu(f)$.
On pose

$$M^+ = \overline{\bigoplus_{\lambda_j^\mu(f) \geq \lambda_+} M\left(\lambda_j^\mu(f)\right)}^{H_\mu} \text{ et } M^- = \bigoplus_{\lambda_j^\mu(f) \leq \lambda_+} M\left(\lambda_j^\mu(f)\right),$$

Lemme 2.6.1. *On suppose que* $\lambda_+ - \lambda < S_\mu \left(\int_\Omega |x|^{-\beta N/2} dx\right)^{-2/N}$, *alors on a*

$$\beta_\lambda = \sup_{u \in M^-} J_\lambda(u) \le \frac{1}{N}\Big(\lambda_+ - \lambda\Big)^{N/2} \int_\Omega |x|^{-\beta N/2} < \frac{1}{N} S_\mu^{N/2}.$$

De plus, il existe $\rho_\lambda > 0$ *et* $\delta_\lambda \in \Big(0,\, \beta_\lambda\Big)$ *tels que* $J_\lambda(u) \ge \delta_\lambda$ *pour tout* $u \in M^+$ *avec* $\Big\|u\Big\|_\mu = \rho_\lambda$.

Démonstration. Pour tout $u \in M^-$ on a $\Big\|u\Big\|_\mu^2 \le \lambda_+ \int_\Omega f u^2 dx$. Par le fait que M^- est un espace de dimension finie, en utilisant l'inégalité de Hölder et sachant que

$$\max_{t \ge 0} \left(A\frac{t^2}{2} - B\frac{t^{2^*}}{2^*}\right) = \frac{1}{N} A \left(\frac{A}{B}\right)^{(N-2)/2} \qquad \text{pour tout } A,\, B > 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \Big|\nabla u\Big|^2 dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega \frac{u^2}{\Big|x\Big|^2} dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega f u^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx \\
&\le \frac{1}{2}\Big(\lambda_+ - \lambda\Big)\int_\Omega f u^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx \\
&\le \frac{1}{2}\Big(\lambda_+ - \lambda\Big)\int_\Omega |x|^{-\beta} u^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx \\
&\le \int_\Omega \max_{t \ge 0}\left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_+ - \lambda\Big)|x|^{-\beta} t^2 - \frac{1}{2^*} t^{2^*}\right) dx.
\end{aligned}$$

Soit $u \in M^+$, par l'inégalité $\Big\|u\Big\|_\mu^2 \ge \lambda_+ \int_\Omega f u^2 dx$ et $\Big\|u\Big\|_\mu^2 \ge S_\mu \Big|u\Big|_{2^*}^2$

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &\ge \frac{\lambda_+ - \lambda}{2\lambda_+}\Big\|u\Big\|_\mu^2 - \frac{1}{S_\mu^{2/2^*} 2^*}\Big\|u\Big\|_\mu^{2^*} \\
&\ge \max_{t \ge 0}\left(\frac{\lambda_+ - \lambda}{2\lambda_+} t^2 - \frac{1}{S_\mu^{2/2^*} 2^*} t^{2^*}\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{\lambda_+ - \lambda}{2\lambda_+}\right)^{N/2} S_\mu^{N/2}
\end{aligned}$$

Si on prend $\rho_\lambda = \left(\left(\frac{\lambda_+ - \lambda}{\lambda_+}\right) S_\mu^{2/2^*}\right)^{(N-2)/4}$ et $\delta_\lambda < \frac{1}{N}\left(\frac{\lambda_+ - \lambda}{\lambda_+}\right)^{N/2} S_\mu^{N/2}$, alors on obtient $J_\lambda(u) \ge \delta_\lambda$ pour tout $u \in M^+ \cap \partial B_{\rho_\lambda}$. Il reste à montrer que $\delta_\lambda < \beta_\lambda$. En effet, comme $M^+ \cap M^- = M\Big(\lambda_+\Big)$, on a $M^+ \cap M^- \cap B_{\rho_\lambda} \ne \varnothing$ et tout $u \in M^+ \cap M^- \cap B_{\rho_\lambda}$ satisfait $\delta_\lambda < J_\lambda(u) \le \beta_\lambda = \sup_{u \in M^-} J_\lambda(u)$. □

2.7 Preuve du Théorème 2.2.3

Proposition 2.7.1. *Soit* $\mu < \bar{\mu} - \left(\frac{N+2}{N}\right)^2 \left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2$. *Alors pour tout* $\lambda > 0$, $c < \frac{1}{N} S_\mu^{\frac{N}{2}}$.

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe k tel que $\lambda_k^\mu(f) \leq \lambda < \lambda_{k+1}^\mu(f)$. Soit $\max_{u \in Q_m^\varepsilon} J_\lambda(u) = J_\lambda(w_m + t_m^\varepsilon u_m^\varepsilon)$, où $w_m \in H_m^-$.
En utilisant le même calcul que celui dans le deuxième point de la Proposition 2.4.1, on a

$$J_\lambda(w_m) \leq Cm^{-N\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}.$$

En choisissant $\varepsilon = m^{-\frac{N+2}{N-2}\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}$

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_m^\varepsilon|^2 - \mu \frac{(u_m^\varepsilon)^2}{|x|^2} \right) dx \leq S_\mu^{N/2} + Cm^{-N\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}$$

$$\int_\Omega (u_m^\varepsilon)^{2^*} dx \geq S_\mu^{N/2} - Cm^{\left(-N^2/(N-2)\right)\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}$$

$$\int_\Omega f (u_m^\varepsilon)^2 dx \geq Cm^{-(N+2)\left(\frac{2-\beta}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned}
c &\leq \max_{u \in Q_m^\varepsilon} J_\lambda(u) \\
&\leq J_\lambda(w_m + t_m^\varepsilon u_m^\varepsilon) \\
&\leq J_\lambda(w_m) + J_\lambda(t_m^\varepsilon u_m^\varepsilon) \\
&\leq Cm^{-N\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} + \frac{(t_m^\varepsilon)^2}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u_m^\varepsilon|^2 - \mu \frac{(u_m^\varepsilon)^2}{|x|^2} - \lambda \int_\Omega f (u_m^\varepsilon)^2 \right) dx \\
&\quad - \frac{(t_m^\varepsilon)^{2^*}}{2^*} \int_\Omega (u_m^\varepsilon)^{2^*} dx \\
&\leq Cm^{-N\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} + \frac{(t_m^\varepsilon)^2}{2} \left(S_\mu^{\frac{N}{2}} + Cm^{-N\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} - Cm^{-(N+2)\left(\frac{2-\beta}{2}\right)} \right) \\
&\quad - \frac{(t_m^\varepsilon)^{2^*}}{2^*} \left(S_\mu^{\frac{N}{2}} - Cm^{-\frac{N^2}{N-2}\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} \right) \\
&\leq Cm^{-N\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} + \frac{1}{N} \left(S_\mu^{\frac{N}{2}} + Cm^{-N\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} - Cm^{-(N+2)\left(\frac{2-\beta}{2}\right)} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{S_\mu^{\frac{N}{2}} + Cm^{-N\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} - Cm^{-(N+2)\left(\frac{2-\beta}{2}\right)}}{S_\mu^{\frac{N}{2}} - Cm^{-\frac{N^2}{N-2}\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}} \right)^{\frac{N-2}{2}}.
\end{aligned}$$

Notons que pour $\mu < \bar{\mu} - \left(\frac{N+2}{N}\right)^2 \left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2$, on a
$(N+2)\left(\frac{2-\beta}{2}\right) < N\sqrt{\bar{\mu}-\mu} < \frac{N^2}{N-2}\sqrt{\bar{\mu}-\mu}$ et on déduit que

$$c \leq \frac{1}{N} S_\mu^{N/2} + Cm^{-N\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} - Cm^{-(N+2)\left(\frac{2-\beta}{2}\right)} < \frac{1}{N} S_\mu^{N/2}.$$

□

Preuve du Théorème 2.2.3. J_λ satisfait les hypthèses du Théorème de Linking. Alors J_λ admet une suite de $(\mathrm{P.S})_c$ au niveau $c \geq \inf\limits_{u \in \partial B_\rho \cap H^+} J_\lambda(u)$, à l'aide du Lemme 2.4.1 et de la Proposition 2.7.1 on déduit que c est une valeur critique pour J_λ et u est une solution non-triviale du problème (P_λ). $\square$

Solutions multiples pour un problème semilinéaire avec singularités au bord

Ce chapitre est le développement de l'article [34].

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie l'existence et la multipilicité des solutions non triviales du problème elliptique semilinéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \frac{|u|^{q-2}u}{|x|^{\beta}} + \frac{|u|^{2^*(s)-2}u}{|x|^{s}} & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $(N \geq 3)$ avec $0 \in \partial\Omega$, λ est un paramètre positif, $0 \leq \beta < 2$, $1 < q < 2$, $0 < s < 2$ et $2^*(s) = \frac{2(N-s)}{N-2}$ l'exposant critique de Hardy-Sobolev.

Pour $\lambda = 0$, l'étude du problème revient à l'étude du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{|u|^{2^*(s)-2}u}{|x|^{s}} & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_0}$$

le problème (P_0) est relatif à l'inégalité de Hardy-Sobolev

$$\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x.$$

La meilleure constante est définie comme suit :

$$\mu_s(\Omega) := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x\right)^{2/2^*(s)}},$$

- Lorsque $0 \in \Omega$, Ghoussoub et Yuan [21] ont montré que $\mu_s(\Omega)$ n'est atteint que si $\Omega = \mathbb{R}^N$par les fonctions suivantes :

  $$y_\varepsilon(x) = (\varepsilon(N-s)(n-2))^{(N-2)/2(2-s))} \left(\varepsilon + |x|^{2-s}\right)^{(2-N)/(2-s)},$$

  avec $\varepsilon > 0$.

- Lorsque $0 \in \partial\Omega$, la situation est différente. Le problème (P_0) a été étudié en premier par Egnell [14] sur le cône
  $\Gamma := \left\{x \in \mathbb{R}^N : \ x = r\theta, \ \theta \in \Sigma \text{ et } r > 0\right\}$ où Σ est un domaine connexe sur la sphère unité $\mathbb{S}^{N-1}$ avec $\bar{\Gamma} \neq \mathbb{R}^N$. Il a montré que le problème (P_0) admet au moins une solution positive. Ghoussoub et Kang [18], Ghoussoub et Robert [19, 20] ont généralisé les résultats précédents pour un domaine borné. Ils ont prouvé que l'existence de solutions est étroitement liée au signe de la courbure principale (ou moyenne) de la frontière du domaine au voisinage du point 0.
  Les principaux résultats obtenus sont :
  1) $\mu_s(\Omega) \leq \mu_s\left(\mathbb{R}^N_+\right) := \mu_s$.
  2) μ_s est atteint pour $N \geq 3$ par les fonctions ψ qui vérifient
  $$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{N-1}}.$$
  3) Soit Ω un domaine suffisament régulier de $\mathbb{R}^N$, $(N \geq 3)$. Si la courbure moyenne de $\partial\Omega$ au point 0 est négative alors $\mu_s(\Omega)$ est atteint.
  4) Si $T(\Omega) \subset \mathbb{R}^N_+$ pour une rotation T, alors $\mu_s(\Omega)$ n'est jamais atteint sauf si Ω est un demi-espace.

Le cas où $0 \in \Omega$ a fait l'objet de plusieurs travaux de recherches contrairement au cas $0 \in \partial\Omega$. Vu le nombre de difficultés rencontrées. La perte de compacité liée à l'exposant critique et la position de la singularité.

Une question naturelle se pose : peut-on avoir des résultats de multiplicité en introduisant un terme concave ?
La réponse est affirmative.

La fonctionnelle d'énerige J_λ associée au problème (P_λ) est définie dans $H_0^1(\Omega)$ par :

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega \frac{|u|^q}{|x|^\beta}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx. \tag{3.1.1}$$

On a $J_\lambda \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$. Les solutions de (P_λ) sont les points critiques de J_λ.

On remarque que J_λ n'est pas bornée inférieurement sur $H_0^1(\Omega)$, mais elle l'est sur une variété dite la variété de Nehari. Cette dernière est définie comme suit :

$$\mathcal{N}_\lambda = \left\{u \in H_0^1(\Omega) \smallsetminus \{0\} : \langle J'_\lambda(u), u\rangle = 0\right\}.$$

$u \in \mathcal{N}_\lambda$ si et seulement si

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx - \lambda\int_\Omega \frac{|u|^q}{|x|^\beta}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.1.2}$$

Par conséquent, pour $u \in \mathcal{N}_\lambda$, On obtient

$$J_\lambda(u) = \frac{2-s}{2(N-s)} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*(s)} \right) \int_\Omega \frac{|u|^q}{|x|^\beta} \mathrm{d}x, \tag{3.1.3}$$

équivalent

$$J_\lambda(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*(s)} \right) \int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx. \tag{3.1.4}$$

On pose

$$\Lambda_0 = \frac{K}{\left(\int_\Omega ||x|^{-\beta}|^{q^*} dx \right)^{1/q^*}} \mu_s^{2^*(s)(2-q)/2(2^*(s)-2)} S^{q/2}$$

avec $K = (2^*(s) - 2) \frac{(2-q)^{(2-q)/(2^*(s)-2)}}{(2^*(s)-q)^{(2^*(s)-q)/(2^*(s)-2)}}$.

Nos principaux résultats sont les suivants :

Théorème 3.1.1. *Supposons que $0 \leq \beta < 2$. Alors pour tout $\lambda \in (0; \Lambda_0)$, le problème (P_λ) admet au moins une solution dans $H_0^1(\Omega)$.*

Théorème 3.1.2. *Supposons que $N \geq 3$, $\max\left\{1, \frac{N-\beta}{N-1}\right\} < q < \frac{N-\beta+1}{N-1}$, $0 \leq \beta < 2$ et la courbure moyenne de $\partial\Omega$ est négative au voisinage de 0. Alors il existe $\Lambda > 0$, tel que pour tout $\lambda \in (0; \Lambda)$, le problème (P_λ) admet au moins deux solutions dans $H_0^1(\Omega)$.*

Le chapitre est organisé comme suit : Dans la section 3.2, nous établissons quelques résultats préliminaires nécessaires à la preuve de nos résultats. La section 3.3, concerne la preuve du Théorème 3.1.1. Quant à la section 3.4 est consacrée à la démonstration du résultat de multiplicité.

3.2 Préliminaires

Dans cette section, nous établissons quelques résultats préliminaires. Commençons par les lemmes suivants :

Lemme 3.2.1. *La fonctionnelle J_λ est coèrcive et bornée inférieurement sur $\mathcal{N}_\lambda$.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{N}_\lambda$, alors

$$J_\lambda(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(s)} \right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*(s)} \right) \int_\Omega \frac{|u|^q}{|x|^\beta} dx$$

D'aprés l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{|u|^q}{|x|^\beta} \mathrm{d}x \leq \left(\int_{\Omega} |x|^{-\beta q^*} \mathrm{d}x \right)^{1/q^*} \left(\int_{\Omega} |u|^{2^*} \mathrm{d}x \right)^{q/2^*},$$

où $q^* = \frac{2^*}{2^*-q}$.

En utilisant la définition de la meilleure constante de Sobolev, on obtient

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{2^*} \right)^{q/2^*} dx \leq S^{-q/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{q/2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(s)} \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*(s)} \right) \left(\int_{\Omega} |x|^{-\beta q^*} dx \right)^{1/q^*} \\ &\quad \times S^{-q/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{q/2} \\ &\geq -C_{q,\beta,s} \lambda^{2/(2-q)}, \end{aligned}$$

avec $C_{q,\beta,s} := \left(\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*(s)} \right) \left(\int_{\Omega} |x|^{-\beta q^*} dx \right)^{1/q^*} S^{-q/2} \right)^{2/(2-q)} \left(\frac{q}{2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(s)} \right)} \right)^{q/(2-q)}$. $\square$

Posons

$$\Psi_\lambda(u) = \langle J_\lambda'(u), u \rangle. \tag{3.2.1}$$

Pour $u \in \mathcal{N}_\lambda$, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \Psi_\lambda'(u), u \rangle &= 2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - 2^*(s) \int_{\Omega} \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx - q\lambda \int_{\Omega} \frac{|u|^q}{|x|^\beta} \mathrm{d}x. \\ &= (2-q) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (2^*(s) - q) \int_{\Omega} \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx && (3.2.2) \\ &= (2 - 2^*(s)) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda (q - 2^*(s)) \int_{\Omega} \frac{|u|^q}{|x|^\beta} \mathrm{d}x. && (3.2.3) \end{aligned}$$

Il est naturel de répartir $\mathcal{N}_\lambda$ en trois sous ensembles qui correspondent aux maximums locaux, minimums locaux et les points d'inflexions. On définit respectivement

$$\mathcal{N}_\lambda^+ = \{ u \in \mathcal{N}_\lambda : \langle \Psi_\lambda'(u), u \rangle > 0 \}, \ \mathcal{N}_\lambda^- = \{ u \in \mathcal{N}_\lambda : \langle \Psi_\lambda'(u), u \rangle < 0 \}$$

et

$$\mathcal{N}_\lambda^0 = \{ u \in \mathcal{N}_\lambda : \langle \Psi_\lambda'(u), u \rangle = 0 \}.$$

Lemme 3.2.2. *Supposons que u_0 est un minimum local de J_λ sur $\mathcal{N}_\lambda$. Alors si $u_0 \notin \mathcal{N}_\lambda^0$, on a $J_\lambda'(u_0) = 0$ dans H^{-1}.*

Démonstration. Si u_0 est un minimum local de J_λ sur $\mathcal{N}_\lambda$, alors

$$J_\lambda\left(u_0\right)=\min_{u\in\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda(u),$$

avec $\mathcal{N}_\lambda=\left\{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}:\Psi_\lambda\left(u\right)=0\right\}.$

Par la théorie des multiplicateurs de Lagrange, il existe $\mu\in\mathbb{R}$ tel que $J_\lambda'\left(u_0\right)=\mu\Psi_\lambda'\left(u_0\right)$. Par suite

$$\left\langle J_\lambda'\left(u_0\right),u_0\right\rangle=\mu\left\langle\Psi_\lambda'\left(u_0\right),u_0\right\rangle. \tag{3.2.4}$$

Puisque $u_0\notin\mathcal{N}_\lambda^0$, alors $\left\langle\Psi_\lambda\left(u_0\right),u_0\right\rangle\neq 0$, (3.2.4) implique que $\mu=0$. Par conséquent $J_\lambda'\left(u_0\right)=0$. □

Maintenant, on affirme le lemme suivant :

Lemme 3.2.3. *Pour tout* $\lambda\in(0,\Lambda_0)$, $\mathcal{N}_\lambda^0=\emptyset$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons que pour tout $\lambda>0$ on a $\mathcal{N}_\lambda^0\neq\emptyset$.

Pour $u_0\in\mathcal{N}_\lambda^0$, on a

$$\int_\Omega|\nabla u|^2dx=\lambda\left(\frac{q-2^*(s)}{2-2^*(s)}\right)\int_\Omega\frac{|u|^q}{|x|^\beta}\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\nabla u|^2dx &\leq \lambda\left(\frac{q-2^*(s)}{2-2^*(s)}\right)\left(\int_\Omega\left||x|^{-\beta}\right|^{q^*}dx\right)^{1/q^*}\left(\int_\Omega|u|^{2^*}dx\right)^{q/2^*}\\ &\leq \frac{\lambda}{S^{q/2}}\left(\frac{q-2^*(s)}{2-2^*(s)}\right)\left(\int_\Omega\left||x|^{-\beta}\right|^{q^*}dx\right)^{1/q^*}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2dx\right)^{q/2},\end{aligned}$$

où S est la meilleure constante de Sobolev pour l'injection de $W_0^{1,2}(\Omega)$ dans $L^{2^*}(\Omega)$ et $q^*=\frac{2^*}{2^*-q}$.

Par conséquent

$$\left(\int_\Omega|\nabla u|^2dx\right)^{(2-q)/2}\leq\frac{\lambda}{S^{q/2}}\left(\frac{q-2^*(s)}{2-2^*(s)}\right)\left(\int_\Omega\left||x|^{-\beta}\right|^{q^*}dx\right)^{1/q^*}$$

et

$$\left(\int_\Omega|\nabla u|^2dx\right)^{1/2}\leq\lambda^{1/(2-q)}\left[S^{-q/2}\left(\frac{q-2^*(s)}{2-2^*(s)}\right)\left(\int_\Omega\left||x|^{-\beta}\right|^{q^*}dx\right)^{1/q^*}\right]^{1/(2-q)}.$$

En utilisant (3.2.2), on trouve

$$\left(\frac{2-q}{2^*(s)-q}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \int_\Omega \frac{u^{2^*(s)}}{|x|^s}dx,$$

Sachant que

$$\left(\int_\Omega \frac{u^{2^*(s)}}{|x|^s}dx\right)^{2/2^*(s)} \leq \mu_s^{-1}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \tag{3.2.5}$$

il s'en suit

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2} \geq \mu_s^{2^*(s)/2(2^*(s)-2)}\left[\left(\frac{2-q}{2^*(s)-q}\right)\right]^{1/(2^*(s)-2)} \tag{3.2.6}$$

(3.2.5) et (3.2.6), nous donne

$$\begin{aligned}\lambda &\geq \frac{K}{\left(\int_\Omega \||x|^{-\beta}|^{q^*}dx\right)^{1/q^*}}\mu_s^{2^*(s)(2-q)/2(2^*(s)-2)}S^{q/2} \\ &:= \Lambda_0,\end{aligned}$$

avec $K = (2^*(s)-2)\,\frac{(2-q)^{(2-q)/(2^*(s)-2)}}{(2^*(s)-q)^{(2^*(s)-q)/(2^*(s)-2)}}$, d'où la contradiction. $\square$

D'après le Lemme 3.2.3, on déduit que pour tout $\lambda \in (0,\Lambda_0)$, $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{N}_\lambda^+ \cup \mathcal{N}_\lambda^-$.

Pour tout $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, posons

$$t_m = t_{max}(u) := \left(\frac{(2-q)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{(2^*(s)-q)\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx}\right)^{1/(2^*(s)-2)}.$$

Lemme 3.2.4. *Supposons que $\lambda \in (0,\Lambda_0)$ et $u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$, alors il existe $0 < t^- < t_m < t^+$ tels que, $t^-u \in \mathcal{N}_\lambda^+$, $t^+u \in \mathcal{N}_\lambda^-$ et*

$$J_\lambda\left(t^+u\right) = \sup_{t\geq t_m} J_\lambda(tu)\,; \qquad J_\lambda\left(t^-u\right) = \inf_{0\leq t\leq t_m} J_\lambda(tu)\,.$$

Démonstration. Posons

$$\Phi(t) = J_\lambda(tu)\,, \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}^+,$$

alors

$$\Phi'(t) = t\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - t^{2^*(s)-1}\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx - \lambda t^{q-1}\int_\Omega \frac{|u|^q}{|x|^\beta}\,\mathrm{d}x.$$

Prenons

$$\phi(t) = t^{2-q} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - t^{2^*(s)-q} \int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx,$$

alors ϕ est concave et atteint son maximum au point t_m.

$$\begin{aligned}
\phi(t_m) &= \left[\frac{2-q}{2^*(s)-q}\right]^{(2-q)/(2^*(s)-2)} \left(1 - \frac{2-q}{2^*(s)-q}\right) \\
&\times \left[\frac{\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{2^*(s)-q}}{\left(\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx\right)^{2-q}}\right]^{1/(2^*(s)-2)} \\
&= K \left[\frac{\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{2^*(s)-q}}{\left(\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx\right)^{2-q}}\right]^{1/(2^*(s)-2)}.
\end{aligned}$$

Comme $\int_\Omega \frac{|u|^q}{|x|^\beta} \mathrm{d}x > 0$ et en utilisant l'hypothèse $\lambda < \Lambda_0$, on a nécessairement

$$\lambda \int_\Omega \frac{|u|^q}{|x|^\beta} \mathrm{d}x < \phi(t_m).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 &= \frac{K}{\||x|^{-\beta}\|_{q^*}} \mu_s^{2^*(s)(2-q)/2(2^*(s)-2)} S^{q/2} \\
&\leq \frac{K}{\|u\|_{2^*}^q \||x|^{-\beta}\|_{q^*}} \left[\|\nabla u\|_2^2\right]^{(2^*(s)-q)/(2^*(s)-2)} \\
&\leq \frac{K}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*} dx\right)^{q/2^*} \left(\int_\Omega ||x|^{-\beta}|^{q^*} dx\right)^{1/q^*}} \left[\frac{\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{2^*(s)-q}}{\left(\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx\right)^{2-q}}\right]^{1/(2^*(s)-2)} \\
&\leq \frac{\phi(t_m)}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*} dx\right)^{q/2^*} \left(\int_\Omega ||x|^{-\beta}|^{q^*} dx\right)^{1/q^*}}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\phi(t_m) &\geq \left(\int_\Omega |u|^{2^*} dx\right)^{q/2^*} \left(\int_\Omega \left||x|^{-\beta}\right|^{q^*} dx\right)^{1/q^*} \Lambda_0 \\
&\geq \Lambda_0 \int_\Omega \frac{|u|^q}{|x|^\beta} \mathrm{d}x > \lambda \int_\Omega \frac{|u|^q}{|x|^\beta} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Donc il existe $t^- < t_m < t^+$ tels que $\Phi'(t^+) = \Phi'(t^-) = 0$ et $\phi'(t^+) < 0$ $\left(J_\lambda(t^+u) = \sup_{t\geq t_m} J_\lambda(tu)\right)$ et $\phi'(t^-) > 0$ $\left(J_\lambda(t^-u) = \inf_{0\leq t\leq t_m} J_\lambda(tu)\right)$.

Montrons maintenant que $t^+u \in \mathcal{N}_\lambda^-$.

On a

$$\left(t^+\right)^{2-q}\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \left(t^+\right)^{2^*(s)-q}\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx = \lambda\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^\beta}dx,$$

alors

$$\left(t^+\right)\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \left(t^+\right)^{2^*(s)-1}\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx = \lambda\left(t^+\right)^{q-1}\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^\beta}dx.$$

En multipliant la dernière inégalité par t^+, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla t^+u|^2dx - \int_\Omega \frac{|t^+u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx = \lambda\int_\Omega \frac{(t^+u)^q}{|x|^\beta}dx.$$

Donc $t^+u \in \mathcal{N}_\lambda$.

On a

$$\phi'(t^+) < 0,$$

Alors

$$(2-q)(t^+)^{1-q}\int_\Omega |\nabla u|^2dx < (2^*(s)-q)\,(t^+)^{2^*(s)-q-1}\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx.$$

En multipliant l'inégalité par $(t^+)^{1+q}$, on obtient

$$(2-q)\int_\Omega |\nabla t^+u|^2dx < (2^*(s)-q)\int_\Omega \frac{|t^+u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx,$$

d'où $t^+u \in \mathcal{N}_\lambda^-$.

En procédant de la même manière, on montre que $t^-u \in \mathcal{N}_\lambda^+$. □

Lemme 3.2.5. *Posons*

$$c = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda(u)\,; \quad c^+ = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+} J_\lambda(u)\,; \quad c^- = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^-} J_\lambda(u)\,.$$

Alors

i) Si $\lambda \in (0, \Lambda_0)$, on a $c \leq c^+ < 0$.

ii) Si $\lambda \in \left(0, \frac{q}{2}\Lambda_0\right)$, on a $c^- > 0$.

Démonstration. Commençons par montrer le premier point.

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$ l'unique solution de $-\Delta v = |x|^{-\beta}$, alors

$$\int_\Omega \frac{v}{|x|^\beta} = \|\nabla v\|_2^2 > 0.$$

D'après le Lemme 3.2.4, il existe un unique $t_0 := t^-(v) > 0$, tel que $t_0 v \in \mathcal{N}_\lambda^+$, par conséquent, en utilisant (3.2.2), nous obtenons

$$\int_\Omega \frac{|t_0 v|^{2^*(s)}}{|x|^s} < \frac{2-q}{2^*(s)-q}\|\nabla t_0 v\|_2^2.$$

En utilisant (3.1.4), on a

$$\begin{aligned} J_\lambda(t_0 v) &< \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\|\nabla t_0 v\|_2^2 + \frac{2-q}{2^*(s)q}\|\nabla t_0 v\|_2^2 \\ &= -t_0^2 \frac{2-q}{2q}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(s)}\right)\|\nabla v\|_2^2 \\ &= -t_0^2 \frac{2-q}{2q}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(s)}\right)\left\||x|^{-\beta}\right\|_{H^{-1}}^2. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Par définition de c et c^+, on déduit que $c \le c^+ < 0$.

Passons à la démonstration du deuxième point. Soit $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$, de (3.2.2), on a

$$(2-q)\|\nabla u\|_2^2 - (2^*(s)-q)\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} < 0$$

Par définition de μ_s et S, on a

$$\left(\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}\right)^{2/2^*(s)} \le \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\mu_s} \quad \text{et} \quad \|u\|_{2^*}^2 \le \frac{\|\nabla u\|_2^2}{S},$$

donc

$$\left(\frac{2-q}{2^*(s)-q}\right)^{1/(2^*(s)-2)} \mu_s^{2^*(s)/2(2^*(s)-2)} < \|\nabla u\|_2,$$

et

$$\left(\frac{2-q}{2^*(s)-q}\right)^{(2-q)/(2^*(s)-2)} \mu_s^{2^*(s)(2-q)/2(2^*(s)-2)} < \|\nabla u\|_2^{2-q}.$$

Posons

$$C_\lambda := \frac{2^*(s)-q}{2\cdot 2^*(s)} K \mu_s^{2^*(s)(2-q)/2(2^*(s)-q)} \lambda \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2^*(s)}\right)\frac{\||x|^{-\beta}\|_{q^*}}{S^{q/2}},$$

qui est strictement positive pour tout $\lambda < \frac{q}{2}\Lambda_0$.

On a

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(s)}\right)\|\nabla u\|_2^2 - \lambda\frac{\||x|^{-\beta}\|_{q^*}}{S^{q/2}}\|\nabla u\|_2^q\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2^*(s)}\right) \\ &\geq C_\lambda\left[\frac{2-q}{2^*(s)-q}S^{2^*/2}\right]^{q/(2^*(s)-2)}, \end{aligned}$$

ainsi, pour $\lambda \in \left(0; \frac{q}{2}\Lambda_0\right)$, on a $c^- > 0$. □

Lemme 3.2.6. *Supposons que* $\lambda \in (0, \Lambda_0)$ *et* $u \in \mathcal{N}_\lambda$. *Alors il existe* $\varepsilon > 0$ *et une fonction différentiable* $\xi : B(0,\varepsilon) \subset H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *telles que :*

$$\xi(0) = 1,\ \xi(w)\,(u-w) \in \mathcal{N}_\lambda$$

et

$$\langle \xi'(0), w\rangle = \frac{2\int_\Omega \nabla u \nabla w - 2^*(s)\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)-2}uw}{|x|^s} - q\lambda\int_\Omega \frac{u^{q-2}uw}{|x|^\beta}}{(2-q)\int_\Omega|\nabla u|^2 - (2^*(s)-q)\left(\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}\right)}. \tag{3.2.8}$$

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{N}_\lambda$. Définissons la fonction $F : \mathbb{R}\times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ comme suit :

$$\begin{aligned} F(t,w) &= \langle J'_\lambda(t(u-w)), t(u-w)\rangle \\ &= t^2\int_\Omega |\nabla(u-w)|^2 - t^{2^*(s)}\int_\Omega \frac{|(u-w)|^{2^*(s)}}{|x|^s} \\ &- t^q\lambda\int_\Omega \frac{|(u-w)|^q}{|x|^\beta}, \end{aligned}$$

alors $F(1,0) = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t,w) &= 2t\int_\Omega |\nabla(u-w)|^2 - 2^*(s)t^{2^*(s)-1} \\ &\times \int_\Omega \frac{|(u-w)|^{2^*(s)}}{|x|^s} - q\lambda t^{q-1}\int_\Omega \frac{|(u-w)|^q}{|x|^\beta}. \end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial F}{\partial t}(1,0) = 2\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \mu\frac{u^2}{|x|^2}\right) - 2^*(s)\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} - q\lambda\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^\beta} \neq 0$, par conséquent, on peut appliquer le Théorème des fonctions implicites au point $(1,0)$.

Donc il existe une boule $B(0,\varepsilon) \subset H_0^1(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ et une fonction différentiable $\xi : B(0,\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telles que $\xi(0) = 1$,

$$\begin{aligned} \langle \xi'(0), v\rangle &= -\frac{\left\langle \frac{\partial F}{\partial w}(1,0), v\right\rangle}{\frac{\partial F}{\partial t}(1,0)} \\ &= \frac{2\int_\Omega \nabla u\nabla v - 2^*(s)\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)-2}uv}{|x|^s} - q\lambda\int_\Omega \frac{u^{q-2}uv}{|x|^\beta}}{(2-q)\int_\Omega |\nabla u|^2 - (2^*(s)-q)\left(\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}\right)}. \end{aligned}$$

et

$$F(\xi(w), w) = 0 \quad \text{pour tout } w \in B(0, \varepsilon),$$

qui est équivalent à $\langle J'_\lambda(\xi(w)(u-w)), \xi(w)(u-w)\rangle = 0$ pour tout $w \in B(0,\varepsilon)$. Ainsi $\xi(w)(u-w) \in B(0,\varepsilon) \subset \mathcal{N}_\lambda$. $\square$

En utilisant les mêmes arguments du Lemme 3.2.6, on obtient :

Lemme 3.2.7. *Supposons que $\lambda \in (0, \Lambda_0)$ et $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction différentiable $\xi : B(0,\varepsilon) \subset H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telles que :*

$$\xi(0) = 1, \; \xi(w)(u-w) \in \mathcal{N}_\lambda^-$$

et

$$\langle \xi'(0), w\rangle = \frac{2\int_\Omega \nabla u \nabla w - 2^*(s)\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)-2}uw}{|x|^s} - q\lambda \int_\Omega \frac{u^{q-2}uw}{|x|^\beta}}{(2-q)\int_\Omega |\nabla u|^2 - (2^*(s)-q)\left(\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}\right)}. \tag{3.2.9}$$

Lemme 3.2.8. *Pour tout $\lambda \in (0,\Lambda_0)$, il existe une suite minimisante $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda$ telle que :*

i) $J_\lambda(u_n) = c + o(1)$.

ii) $J'_\lambda(u_n) \to 0$ *dans* H^{-1}.

Démonstration. En appliquant le principe variationnel d'Ekeland pour le problème de minimisation $\inf\limits_{\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda = c$. On obtient l'existence d'une suite minimisante $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda$ possédant les propriétés suivantes :

1) $J_\lambda(u_n) < c + \frac{1}{n}$.

2) $J_\lambda(u_n) \le J_\lambda(w) + \frac{1}{n}\|\nabla(w-u_n)\|_2^2, \qquad \forall w \in \mathcal{N}_\lambda$.

Pour n suffisament grand et d'après (3.2.7), on trouve

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_n) &= \frac{2-s}{2(N-s)}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*(s)}\right)\int_\Omega \frac{u_n^q}{|x|^\beta} \\ &< c + \frac{1}{n} < -t_0^2\frac{2-q}{2Nq}\left\||x|^{-\beta}\right\|_{H^{-1}}^2. \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Donc

$$\lambda\int_\Omega \frac{u_n^q}{|x|^\beta} \ge \left(\frac{2^*(s)t_0^2}{2N}\right)\left(\frac{2-q}{2^*(s)-q}\right)\left\||x|^{-\beta}\right\|_{H^{-1}}^2,$$

alors

$$\|\nabla u_n\|_2 \ge \left[\left(\frac{\lambda 2^*(s) S^{q/2} t_0^2}{2N}\right)\left(\frac{2-q}{2^*(s)-q}\right)\frac{\left\||x|^{-\beta}\right\|_{H^{-1}}^2}{\left\||x|^{-\beta}\right\|_{q^*}}\right]^{1/q}, \tag{3.2.11}$$

En utilisant (3.2.10), les inégalités de Hölder et de Sobolev, on obtient

$$\|\nabla u_n\|_2 \leq \left[\lambda S^{-q/2}\left(\frac{2(N-s)}{2-s}\right)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2^*(s)}\right)\left\||x|^{-\beta}\right\|_{q^*}\right]^{1/(2-q)}. \tag{3.2.12}$$

Montrons que $\|J'_\lambda(u_n)\|_{H^{-1}} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

En appliquant le Lemme 3.2.6, on a l'existence $\varepsilon_n > 0$ et $0 < \delta < \varepsilon_n$ tels que $\xi_n(w_\delta)(u_n - w_\delta) \in \mathcal{N}_\lambda$ avec $\xi_n : B(0,\varepsilon_n) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $w_\delta = \frac{\delta u}{\|\nabla u\|_2}$ pour $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$.
Définissons, $\eta_\delta := \xi_n(w_\delta)(u_n - w_\delta)$.
Comme $\eta_\delta \in \mathcal{N}_\lambda$ et utilisons *(ii)*, on déduit

$$J_\lambda(\eta_\delta) - J_\lambda(u_n) \geq -\frac{1}{n}\|\nabla(\eta_\delta - u_n)\|_2,$$

par le Théorème des accroissement finis, on obtient

$$\langle J'_\lambda(u_n), \eta_\delta - u_n\rangle + o(\|\nabla(\eta_\delta - u_n)\|_2) \geq -\frac{1}{n}\|\nabla(\eta_\delta - u_n)\|_2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\langle J'_\lambda(u_n), -w_\delta\rangle + (\xi_n(w_\delta)-1)\langle J'_\lambda(u_n), u_n - w_\delta\rangle \quad &\geq \quad -\frac{1}{n}\|\nabla(\eta_\delta - u_n)\|_2 \\ &+ o(\|\nabla(\eta_\delta - u_n)\|_2).\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Comme $\eta_\delta = \xi_n(w_\delta)(u_n - w_\delta) \in \mathcal{N}_\lambda$ et par (3.2.13), on a

$$\begin{aligned}-\delta\left\langle J'_\lambda(u_n), \frac{u}{\|\nabla u\|_2}\right\rangle + (\xi_n(w_\delta)-1)\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(\eta_\delta), u_n - w_\delta\rangle \quad &\geq \quad -\frac{1}{n} \\ &\times \|\nabla(\eta_\delta - u_n)\|_2 + o(\|\nabla(\eta_\delta - u_n)\|_2).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left\langle J'_\lambda(u_n), \frac{u}{\|u\|}\right\rangle \quad &\leq \quad \frac{\|\nabla(\eta_\delta - u_n)\|_2}{n\delta} + \frac{o(\|\nabla(\eta_\delta - u_n)\|_2)}{\delta} \\ &+ \quad \frac{(\xi_n(w_\delta)-1)}{\delta}\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(\eta_\delta), u_n - w_\delta\rangle.\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Comme

$$\|\nabla(\eta_\delta - u_n)\|_2 \leq \delta|\xi_n(w_\delta)| + |\xi_n(w_\delta) - 1|\,\|\nabla u_n\|_2$$

et

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{|\xi_n(w_\delta) - 1|}{\delta} \leq \|\xi'_n(0)\|.$$

Si on fait tendre δ vers 0 dans (3.2.14) pour n fixé, alors par (3.2.11) et (3.2.12), on conclut :

$$\|J'_\lambda(u_n)\|_{H^{-1}} \leq \frac{C}{n}\left(1+\|\xi'_n(0)\|\right),$$

pour une constante convenable C, qui nous ramène à montrer que $|\xi'_n(0)|$ est uniformément bornée en n.

Par (3.2.9) et les estimations (3.2.11) et (3.2.12), on obtient :

$$\|\xi'_n(0)\| \leq \frac{C_1}{\left|(2-q)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - (2^*(s)-q)\int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx\right|},$$

où $C_1 > 0$ est une constante convenable. Par conséquent, il faut qu'on montre que $\left|(2-q)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - (2^*(s)-q)\int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx\right|$ est bornée loin de zéro.

Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $\{u_n\}$, telle que

$$(2-q)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - (2^*(s)-q)\int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx = o(1). \tag{3.2.15}$$

De plus, (3.2.15) et le fait que $u_n \in \mathcal{N}_\lambda$ donne

$$\begin{aligned}\lambda\int_\Omega \frac{|u_n|^q}{|x|^\beta}\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx \\ &= \frac{2^*(s)-2}{2-q}\int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx + o(1). \end{aligned}\tag{3.2.16}$$

En combinant (3.2.15), (3.2.11) et (3.2.12), on trouve une constante $\rho > 0$ tel que

$$\int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx > \rho \quad \text{pour } n \text{ assez grand.} \tag{3.2.17}$$

Soit $I_\lambda : \mathcal{N}_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$I_\lambda(u) = K\left[\frac{\|\nabla u\|_2^{2(2^*(s)-q)}}{\left(\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx\right)^{2-q}}\right]^{1/(2^*(s)-2)} - \lambda\int_\Omega \frac{|u|^q}{|x|^\beta}.$$

D'une part, en utilisant (3.2.16), on obtient

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_n) &= K\left[\frac{\|\nabla u_n\|_2^{2(2^*(s)-q)}}{\left(\int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx\right)^{2-q}}\right]^{1/(2^*(s)-2)} - \lambda\int_\Omega \frac{|u_n|^q}{|x|^\beta} \\
&= K\left[\frac{\left(\frac{2^*(s)-2}{2-q}\int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx\right)^{2^*(s)-q}}{\int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx}\right]^{1/(2^*(s)-2)} - \frac{2^*(s)-2}{2-q} \\
&\times \int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx + o(1) \\
&= o(1).
\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

De l'autre, d'après (3.2.11), (3.2.12), (3.2.17) et le fait que $\lambda \in (0, \Lambda_0)$, on a

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_n) &= K\left[\frac{\|\nabla u_n\|_2^{2(2^*(s)-q)}}{\left(\int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx\right)^{2-q}}\right]^{1/(2^*(s)-2)} - \lambda\int_\Omega \frac{|u_n|^q}{|x|^\beta} \\
&\geq K\left[\frac{\|\nabla u_n\|_2^{2(2^*(s)-q)}}{\left(\int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx\right)^{2-q}}\right]^{1/(2^*(s)-2)} - \lambda \|\nabla u_n\|_2^q S^{-q/2}\left\||x|^{-\beta}\right\|_{q^*} \\
&\geq \|\nabla u_n\|_2^q\left[KS^{2^*(s)(2-q)/2(2^*(s)-2)} - \lambda S^{-q/2}\left\||x|^{-\beta}\right\|_{q^*}\right] \\
&> d_0,
\end{aligned}$$

pour un $d_0 > 0$ et n suffisament grand, ce qui est impossible.

On conclut que :

$$\|J_\lambda'(u_n)\|_{H^{-1}} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

De la preuve du Lemme 3.2.8 on peut déduire le résultat suivant :
Il existe une suite minimisante $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^-$ telle que $J_\lambda(u_n) = c^- + o(1)$ et $J_\lambda'(u_n) = o(1)$. □

3.3 Preuve du Théorème 3.1.1

Maintenant, démontrons qu'il existe un minimum local de J_λ sur $\mathcal{N}_\lambda^+$.

Proposition 3.3.1. *Soit* $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda$ *une suite minimisante telle que :*

i) $J_\lambda(u_n) = c + o(1)$, *ii)* $J'_\lambda(u_n) \to 0$ *dans* H^{-1}.

Alors, pour tout $\lambda \in (0, \Lambda_0)$, $\{u_n\}$ *admet une sous suite qui converge fortement vers un point* w_0 *dans* $H_0^1(\Omega)$, *de plus* $w_0 \in \mathcal{N}_\lambda^+$ *et* $J_\lambda(w_0) = c = c^+$.

Démonstration. Soit $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda$ une suite satisfaisant *i)* et *ii)*. De (3.2.11) et (3.2.12), on déduit que $\{u_n\}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. D'après le Théorème des injections compactes de Sobolev, il existe $w_0 \in H_0^1(\Omega)$ et une sous suite $\{u_n\}$ telles que

$$\begin{aligned} &u_n \rightharpoonup w_0 \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ &u_n \to w_0 \text{ fortement dans } L^q\left(\Omega, |x|^{-\beta}dx\right), \ \forall q \in]1;2[\text{ et } 0 \le \beta < 2. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse *ii)*, on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle J'_\lambda(u_n), w\rangle = \langle J'_\lambda(w_0), w\rangle = 0, \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

i.e w_0 est une solution faible du problème (P_λ), en particulier, $w_0 \in \mathcal{N}_\lambda$.

Commençons par montrer que $u_n \to w_0$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\|\nabla w_0\|_2 < \liminf \|\nabla u_n\|_2$, alors

$$\begin{aligned} c &\le J_\lambda(w_0) \\ &= \frac{2-s}{2(N-s)} \int_\Omega |\nabla w_0|^2 dx - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*(s)}\right)\int_\Omega \frac{|w_0|^q}{|x|^\beta}dx \\ &< \liminf J_\lambda(u_n) = c, \end{aligned}$$

il résulte que $u_n \to w_0$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$ et $J_\lambda(w_0) = c$.

On a $w_0 \in \mathcal{N}_\lambda^+$. En effet, supposons le contraire, d'après le Lemme 3.2.4, il exsite deux nombres uniques t_0^- et t_0^+, tels que $t_0^- w_0 \in \mathcal{N}_\lambda^+$ et $t_0^+ w_0 \in \mathcal{N}_\lambda^-$, en particulier, on a $t_0^- < t_0^+ = 1$. Du fait que

$$J'_\lambda\left(t_0^- w_0\right) = 0 \text{ et } \Psi'_\lambda\left(t_0^- w_0\right) > 0,$$

il existe $t_0^- < t^- \le t_0^+$ tel que $J_\lambda(t_0^- w_0) < J_\lambda(t^- w_0)$, donc d'après le Lemme 3.2.4, on obtient

$$J_\lambda(t_0^- w_0) < J_\lambda(t^- w_0) \le J_\lambda(t_0^+ w_0) = J_\lambda(w_0),$$

d'où la contradiction.

□

3.4 Preuve du Théorème 3.1.2

Dans cette partie, on montre l'existence d'une seconde solution.

D'une manière analogue que celle de la démonstration du Lemme 3.2.8, on montre que pour $\lambda \in]0, \frac{q}{2}\Lambda_0[$, il existe une suite minimisante $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^-$, telle que

i) $J_\lambda(u_n) = c^- + o(1)$.

ii) $J'_\lambda(u_n) \to 0$ dans H^{-1}.

iii) $\{u_n\}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

On pose

$$c^* := \frac{2-s}{2(N-s)}\mu_s^{(N-s)/(2-s)} - C_{q,\beta,s}\lambda^{2/(2-q)}.$$

où $C_{q,\beta,s}$ est la constante définie dans le Lemme 3.2.1.

Lemme 3.4.1. *J_λ satisfait $(\mathrm{P.S})_c$ pour $c \in]-\infty, c^*[$.*

Démonstration. Soit $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda$ une suite minimisante. Comme $\{u_n\}$ est bornée, alors

$$\begin{aligned}
&u_n \rightharpoonup w_1 && \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\
&u_n \rightharpoonup w_1 && \text{faiblement dans } L^{2^*(s)}(\Omega, |x|^{-s}dx) \text{ pour } 0 \le s < 2, \\
&u_n \to w_1 && \text{p.p. dans } \Omega, \\
&u_n \to w_1 && \text{fortement dans } L^q\left(\Omega, |x|^{-\beta}dx\right) \text{ pour } 0 \le \beta < 2 \text{ et pour tout } 1 < q < 2,
\end{aligned}$$

Comme $\{u_n\}$ converge faiblement vers w_1 dans $H_0^1(\Omega)$, alors $J'_\lambda(w_1) = 0$, ce qui implique que $\langle J'_\lambda(w_1), w_1\rangle = 0$, d'où

$$\int_\Omega \frac{|w_1|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx = \int_\Omega |\nabla w_1|^2 dx - \int_\Omega \frac{|w_1|^q}{|x|^\beta}dx,$$

et

$$\int_\Omega \frac{|u_n|^q}{|x|^\beta}dx = \int_\Omega \frac{|w_1|^q}{|x|^\beta}dx + o(1).$$

Posons $v_n = u_n - w_1$, en appliquant le Lemme de Brézis-Lieb, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega |\nabla w_1|^2 dx + o(1), \tag{3.4.1}$$

$$\int_\Omega \frac{|v_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx = \int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx - \int_\Omega \frac{|w_1|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx \tag{3.4.2}$$

et comme $J_\lambda(u_n) = c + o(1)$ et $J'_\lambda(u_n) = o(1)$, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega \frac{|v_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx = c - J_\lambda(w_1) + o(1), \tag{3.4.3}$$

et
$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \int_\Omega \frac{|v_n|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx = o(1).$$
Donc, on peut affirmer que
$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx \to \ell, \quad \int_\Omega \frac{|v_n|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx \to \ell. \tag{3.4.4}$$
En utilisant la définition de μ_s, on déduit que
$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx \geq \mu_s \left(\int_\Omega \frac{|v_n|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx \right)^{2/2^*(s)}.$$
Par conséquent soit $\ell = 0$ ou $\ell = \mu_s^{2^*(s)/(2^*(s)-2)}$.
Raisonnons par l'absurde, supposons que $\ell = \mu_s^{2^*(s)/(2^*(s)-2)}$, d'après (4.2.3) et (4.2.4), on obtient
$$c \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(s)} \right) \ell + J_\lambda(w_1) \geq c^*,$$
ce qui est absurde. Donc $\ell = 0$ et on conclut que $u_n \to w_1$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$. $\square$

On commence par montrer que
$$\inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda^-} J_\lambda(u) = c^- < c^*.$$
Pour cela on a besoin de quelques notations.

Soit $\psi \in H_0^1\left(\mathbb{R}_+^N\right)$ la solution du problème
$$\begin{cases} -\Delta \psi = \frac{|\psi|^{2^*(s)-2}\psi}{|y|^s} & \text{dans } \mathbb{R}_+^N, \\ \psi = 0 & \text{sur } \partial\mathbb{R}_+^N, \end{cases}$$
alors il existe une constante $C > 0$ tel que $|\psi(y)| \leq C\left(1 + |y|^{1-N}\right)$ et $|\nabla\psi(y)| \leq C\left(1 + |y|^{-N}\right)$ (pour plus de détails voir [19]).

Dans un voisinage U de 0, $\partial\Omega$ peut être représentée par $x_N = \phi(x')$ où $x' = (x_1, \ldots, x_{N-1})$, $\phi(0) = 0$, $\nabla'\phi(0) = 0$, $\nabla' = (\partial_1, \ldots, \partial_{N-1})$ et la normale extérieure de $\partial\Omega$ au point 0 est $-e_N = (0, 0, \ldots, -1)$. On définit
$$\tilde{\Phi}(x) = (x', x_N - \phi(x')).$$
Supposons que les courbures principales $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1}$ de $\partial\Omega$ sont finies. Comme $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors ϕ peut être représentée comme suit
$$\phi(x') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i x_i^2 + o\left(|x'|^2\right).$$

Pour $r_0 > 0$ assez petit, choisissons U et $\tilde{U}$ deux voisinages de 0 tels que :

$$\tilde{\Phi}(U) = B_{r_0}(0), \qquad \tilde{\Phi}(\tilde{U}) = B_{r_0/2}(0),$$
$$\tilde{\Phi}(U \cap \Omega) = B^+_{r_0}(0), \qquad \tilde{\Phi}(\tilde{U} \cap \Omega) = B^+_{r_0/2}(0)$$

Définissons

$$u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-(N-2)/2}\psi\left(\frac{\tilde{\Phi}(x)}{\varepsilon}\right)$$

et

$$\hat{u}_\varepsilon(x) = \xi(x)u_\varepsilon(x) \text{ avec } \xi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \text{ et } \xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \tilde{U}, \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus U. \end{cases}$$

Proposition 3.4.1. *Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a*

i)

$$\int_\Omega |\nabla \hat{u}_\varepsilon(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \mu_s - K_1 H(0)(1+o(1))\varepsilon + K_2 H(0)(1+o(1))\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right). \quad (3.4.5)$$

ii)

$$\int_{\Omega\cap\tilde{U}} \frac{|\hat{u}_\varepsilon(x)|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx = 1 - \frac{2^*(s)K_1}{2\mu_s} H(0)(1+o(1))\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right). \quad (3.4.6)$$

iii)

$$\int_{\Omega\cap\tilde{U}} \frac{|\hat{u}_\varepsilon(x)|^q}{|x|^\beta} dx \geq O\left(\varepsilon^{-\frac{N-2}{2}q+N-\beta}\right), \quad (3.4.7)$$

pour tout $\max\left\{1, \frac{N-\beta}{N-1}\right\} < q < \frac{N-\beta+1}{N-1}$,

avec $H(0) := \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N-1}\alpha_i$ est la courbure moyenne de $\partial\Omega$ au point 0,
$K_1 := \frac{2s\mu_s}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\psi(y)|y'|y_N}{|y|^{2+s}} dy$ *et* $K_2 := \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\partial_N \psi(y', 0)|^2 |y'|^2 dy'$.

Démonstration. La démonstration des points *i)* et *ii)* sont dans [23]. Montrons *iii)*

Soit $x \in \Omega \cap \tilde{U}$, en utilisant le changement de variables $y = \frac{\tilde{\Phi}(x)}{\varepsilon}$, on obtient

$$x = \tilde{\Phi}^{-1}(\varepsilon y),$$

et

$$y \in B^+_{r_0/2\varepsilon},$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\cap\tilde{U}} \frac{\hat{u}^q_\varepsilon(x)}{|x|^\beta}\mathrm{d}x &= \int_{B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{\psi^q(y)\varepsilon^{-\frac{N-2}{2}q}}{\left|\tilde{\Phi}^{-1}(\varepsilon y)\right|^\beta}\varepsilon^N \mathrm{d}y \\ &= \varepsilon^{-\frac{N-2}{2}q+N}\int_{B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{\psi^q(y)}{\left|\tilde{\Phi}^{-1}(\varepsilon y)\right|^\beta}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \tilde{U}$, on a $\tilde{\Phi}(x) = (x', x_N - \phi(x')) = y = (y', y_N)$

Donc $x = \tilde{\Phi}^{-1}(y) = (y', y_N + \phi(y'))$ car $\begin{cases} x' = y', \\ y_N = x_N - \varepsilon(x') \Rightarrow x_N = y_N + \phi(y') \end{cases}$

et

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{\Phi}^{-1}(y)\right|^2 &= \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 + (y_N + \phi(y'))^2 \\
&= |y'|^2 + y_N^2 + 2y_N\phi(y') + (\phi(y'))^2 \\
&= |y|^2 + 2y_N\phi(y') + \phi^2(y').
\end{aligned}$$

Et on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left|\tilde{\Phi}^{-1}(\varepsilon y)\right|^\beta} &= \frac{1}{\left(\left|\tilde{\Phi}^{-1}(y)\right|^2\right)^{\beta/2}} \\
&= \frac{1}{\left(|\varepsilon y|^2 + 2\varepsilon y_N\phi(\varepsilon y') + \phi^2(\varepsilon y')\right)^{\beta/2}} \\
&= \frac{1}{|\varepsilon y|^\beta\left(1 + \frac{2\varepsilon y_N\phi(\varepsilon y')}{\varepsilon^2|y|^2} + \frac{\phi^2(\varepsilon y')}{\varepsilon^2|y|^2}\right)^{\beta/2}}
\end{aligned}$$

Sachant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + O(x^2)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left|\tilde{\Phi}^{-1}(\varepsilon y)\right|^\beta} &= \frac{1}{|\varepsilon y|^\beta}\left(1 + \frac{2y_N\phi(\varepsilon y')}{\varepsilon|y|^2} + \frac{\phi^2(\varepsilon y')}{\varepsilon^2|y|^2}\right)^{-\beta/2} \\
&= \frac{1}{|\varepsilon y|^\beta}\left[1 - \frac{\beta}{2}\left(\frac{2y_N\phi(\varepsilon y')}{\varepsilon|y|^2} + \frac{\phi^2(\varepsilon y')}{\varepsilon^2|y|^2}\right)\right. \\
&\quad \left. + O\left(\left(\frac{2y_N\phi(\varepsilon y')}{\varepsilon|y|^2} + \frac{\phi^2(\varepsilon y')}{\varepsilon^2|y|^2}\right)^2\right)\right].
\end{aligned}$$

Comme $\phi(y') \sim O(|y'|)$ et $\frac{2y_N\phi(\varepsilon y')}{\varepsilon|y|^2} + \frac{\phi^2(\varepsilon y')}{\varepsilon^2|y|^2} \sim O(\varepsilon)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\cap\tilde{U}} \frac{|\hat{u}_\varepsilon(x)|^q}{|x|^\beta}dx &= \varepsilon^{-\frac{N-2}{2}q+N}\int_{B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{|\psi(y)|^q}{\varepsilon^\beta|y|^\beta}\left(1 - \frac{\beta y_N\phi(\varepsilon y')}{\varepsilon|y|^2} + O\left(\varepsilon^2\right)\right)dy \\
&= \varepsilon^{-\frac{N-2}{2}q+N}\left[\frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_{B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{|\psi(y)|^q}{|y|^\beta}dy - \frac{\beta}{\varepsilon^{\beta+1}}\int_{B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{|\psi(y)|^q y_N\phi(\varepsilon y')}{|y|^{\beta+2}}dy\right. \\
&\quad \left. + O\left(\varepsilon^{2-\beta}\right)\int_{B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{|\psi(y)|^q}{|y|^\beta}\mathrm{d}y\right]
\end{aligned}$$

$$\int_{B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{|\psi(y)|^q}{|y|^\beta}\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{|\psi(y)|^q}{|y|^\beta}\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^N_+\setminus B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{|\psi(y)|^q}{|y|^\beta}dy$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N_+\setminus B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{|\psi(y)|^q}{|y|^\beta}dy &\leq \int_{\mathbb{R}^N_+\setminus B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{(1+|y|)^{q(1-N)}}{|y|^\beta}dy \\
&\leq \int_{r_0/2\varepsilon}^{+\infty} \frac{(1+r)^{q(1-N)}\, r^{N-1}}{r^\beta}dr \\
&\leq -C\varepsilon^{q(N-1)-N+\beta} \text{ pour } q > \frac{N-\beta}{N-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{|\psi(y)|^q y_N \phi(\varepsilon y')}{|y|^{\beta+2}}dy &\leq \int_{B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{(1+|y|)^{q(1-N)}|y||\varepsilon y|^2}{r^{\beta+2}}dy \\
&\leq \varepsilon^2 C\int_0^{r_0/2\varepsilon} \frac{(1+r)^{q(1-N)}r^3}{r^{\beta+2}}r^{N-1}dr \\
&\leq C\varepsilon^{q(N-1)-N+\beta+1}.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\int_{\Omega\cap\tilde{U}} \frac{|\hat{u}_\varepsilon(x)|^q}{|x|^\beta}\mathrm{d}x \geq O\left(\varepsilon^{-\frac{N-2}{2}q+N-\beta}\right),$$

pour tout $\max\left\{1, \frac{N-\beta}{N-1}\right\} < q < \frac{N-\beta+1}{N-1}$ et $0 \leq \beta < 2$ $\square$

Lemme 3.4.2. *Supposons que* $\max\left\{1, \frac{N-\beta}{N-1}\right\} < q < \frac{N-\beta+1}{N-1}$, $0 \leq \beta < 2$ *et* $H(0) < 0$. *Alors il existe* $\Lambda^* > 0$ *tel que* $\lambda \in (0, \Lambda^*)$, *alors*

$$\sup_{t\geq 0} J_\lambda(t\hat{u}_\varepsilon) < c^*,$$

pour tout $\varepsilon > 0$ *assez petit. De plus,* $c^- \leq \sup_{t\geq 0} J_\lambda(t\hat{u}_\varepsilon)$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
J_\lambda(t\hat{u}_\varepsilon) &= \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla \hat{u}_\varepsilon|^2 - \frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\int_\Omega \frac{|\hat{u}_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s} - \lambda\frac{t^q}{q}\int_\Omega \frac{|\hat{u}_\varepsilon|^q}{|x|^\beta} \\
&\leq \frac{t^2}{2}\left[\mu_s - K_1H(0)(1+o(1))\varepsilon + K_2H(0)(1+o(1))\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right)\right] \\
&\quad -\frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\left[1 - \frac{2^*(s)K_1}{2\mu_s}H(0)(1+o(1))\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right)\right] - \lambda\frac{t^q}{q} \\
&\quad \times O\left(\varepsilon^{-\frac{N-2}{2}q+N-\beta}\right) \\
&\leq \left(\frac{\mu_s}{2}t^2 - \frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\right) + \left(\frac{K_1-K_2+o(1)}{2}t^2 + \frac{K_1+o(1)}{2\mu_s}t^{2^*(s)}\right)H(0)\varepsilon \\
&\quad -\lambda\frac{t^q}{q}O\left(\varepsilon^{-\frac{N-2}{2}q+N-\beta}\right) + O\left(\varepsilon^2\right) \\
&:= g_1(t) + g_2(t)H(0)\varepsilon - \lambda\frac{t^q}{q}O\left(\varepsilon^{-\frac{N-2}{2}q+N-\beta}\right) + O\left(\varepsilon^2\right).
\end{aligned}$$

La fonction g_1 admet un unique maximum

$$g_1\left(t^*\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(s)}\right)\mu_s^{2^*(s)/(2^*(s)-2)},$$

où $t^*=\mu_s^{1/(2^*(s)-2)}$, et

$$g_2\left(t^*\right)=\left(\frac{K_2+o(1)}{2}\right)\mu_s^{2/(2^*(s)-2)}>0.$$

Soit $\varepsilon>0$ suffisamment petit. On affirme qu'il existe $\Lambda^*>0$ tel que $\sup_{t\geq 0} J_\lambda\left(t\hat{u}_\varepsilon\right)<c^*$ pour tout $\lambda\in]0,\Lambda^*[$. En effet

Soit $r_1>0$, tel que

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(s)}\right)\mu_s^{2^*(s)/(2^*(s)-2)}-C_{q,\beta,s}\lambda^{2/(2-q)}>0,\quad \lambda\in]0,r_1[.$$

En utilisant la définition de J_λ et $\hat{u}_\varepsilon$, on obtient

$$\sup_{t\geq 0} J_\lambda\left(t\hat{u}_\varepsilon\right)\leq\frac{t^2}{2}\int_\Omega|\nabla\hat{u}_\varepsilon|^2dx,\ \text{pour tout } t\geq 0,\ \text{et } \lambda>0,$$

ce qui implique qu'il existe $t_0>0$ tel que

$$\sup_{0\leq t\leq t_0} J_\lambda\left(t\hat{u}_\varepsilon\right)<c^*,\quad \text{pour tout } \lambda\in]0,r_1[.$$

Soit $\varepsilon>0$ et supposons que $H(0)<0$, alors on peut choisir $r_2>0$, tel que

$$g_2(t^*)H(0)\varepsilon-\lambda\frac{(t^*)^q}{q}O\left(\varepsilon^{-\frac{N-2}{2}q+N-\beta}\right)+O\left(\varepsilon^2\right)<-C_{q,\beta,s}\lambda^{2/(2-q)},\qquad \text{pour tout } \lambda\in]0,r_2[.$$

Par conséquent, si on prend $\Lambda^*=\min\{r_1,r_2\}$, alors pour $\lambda\in]0,\Lambda^*[$ et $\varepsilon>0$, on a

$$\sup_{t\geq 0} J_\lambda\left(t\hat{u}_\varepsilon\right)<c^*.$$

Montrons maintenant que $c^-\leq\sup_{t\geq 0} J_\lambda\left(t\hat{u}_\varepsilon\right)$. Pour $\lambda\in(0,\Lambda^*)$, $H(0)<0$, $0\leq\beta<2$ et $\max\left\{1,\frac{N-\beta}{N-1}\right\}<q<\frac{N-\beta+1}{N-1}$, on a

$$\sup_{t\geq 0} J_\lambda\left(t\hat{u}_\varepsilon\right)<\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(s)}\right)\mu_s^{2^*(s)/(2^*(s)-2)}-C_{q,\beta,s}\lambda^{2/(2-q)},$$

pour tout $\varepsilon>0$ assez petit.

$$c^-\leq J_\lambda\left(t_\varepsilon\hat{u}_\varepsilon\right)\leq\sup_{t\geq 0} J_\lambda\left(t\hat{u}_\varepsilon\right)<c^*.$$

□

Proposition 3.4.2. *Soit* $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^-$ *une suite minimisante telle que :*

a) $J_\lambda(u_n) \to c^-$.

b) $\|J'_\lambda(u_n)\|_{H^{-1}} \to 0$.

Alors, pour tout $\lambda \in]0, \Lambda[$, *avec* $\Lambda = \min\{\frac{q}{2}\Lambda_0, \Lambda^*\}$, $\{u_n\}$ *admet une sous-suite qui converge fortement vers un point* w_1 *dans* $H_0^1(\Omega)$, *en plus* $w_1 \in \mathcal{N}_\lambda^-$ *et* $J_\lambda(w_1) = c^-$.

Démonstration. Soit $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^-$ une suite qui vérifie *a)* et *b)* de la Proposition 3.4.2, d'après (3.2.11) et (3.2.12), $\{u_n\}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. En utilisant les mêmes arguments que la démonstration de la Proposition 3.3.1, on montre que sous les hypthèses du Lemme 3.4.2 et du Lemme 3.2.5, $u_n \to w_1$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$, $J_\lambda(w_1) = c^-$ et que w_1 est aussi une solution du problème (P_λ). $\square$

Chapitre 4

Sur un problème elliptique contenant l'exposant de Hardy-Sobolev

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence des solutions positives du problème semilinéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \frac{u}{|x|^{\beta}} + \frac{|u|^{2^*(s)-2}u}{|x|^s} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $(N \geq 3)$ avec $0 \in \partial\Omega$, λ est un paramètre positif, $0 \leq \beta < 2$, $0 < s < 2$ et $2^*(s) = \frac{2(N-s)}{N-2}$ est l'exposant critique de Hardy-Sobolev.

Pour $\beta = 0$ et $s = 0$, on retrouve le célèbre travail de Brézis et Nierenberg [7] qui a constitué le point de départ à l'étude des problèmes non compactes.

Pour $0 < s < 2$, on a :

- Si $0 \in \Omega$ et $\beta = 0$, Ghoussoub et Yuan [21] ont montré que si $N \geq 4$, alors le problème (P_λ), admet au moins une solution positive pour tout $0 < \lambda < \lambda_1$, où λ_1 est la première valeur propre du $(-\Delta,\, H_0^1(\Omega))$.
- Si $0 \in \partial\Omega$ et $\beta = 0$, ce problème a été étudié par Ghoussoub et Kang [18], ils ont montré que si $N \geq 4$ et la courbure principale de $\partial\Omega$ est négative au voisinage de 0, alors le problème (P_λ) admet au moins une solution positive pour tout $0 < \lambda < \lambda_1$.

Dans ce chapitre on va étudier le problème (P_λ) pour $\lambda > 0$. Pour cela on définit la fonctionnelle d'énerige J_λ associée au problème (P_λ), par

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^{\beta}} dx - \frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{4.1.1}$$

$J_\lambda \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Les solutions de (P_λ) sont les points critiques de J_λ.

Lemme 4.1.1 ([12]). *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \beta < 2$, alors le problème de valeurs propres*

$$\begin{cases} -\Delta e = \lambda \frac{e}{|x|^{\beta}} & dans\, \Omega \\ e = 0 & sur\, \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1.2}$$

admet des solutions faibles non triviales dans $H_0^1(\Omega)$, qui correspondent à $\lambda \in \sigma_\beta := \left(\lambda_k^\beta\right)_{k=1}^{\infty}$ où $0 < \lambda_1^\beta \leq \lambda_2^\beta \leq \cdots \to +\infty$.

Théorème 4.1.1. *Soit $0 \leq \beta < 2$ et $0 < \lambda < \lambda_1^\beta$, alors le problème ($P_\lambda$) admet au moins une solution positive si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

i) Si $0 \leq \beta \leq 1$ et la courbure moyenne au voisinage de 0 est négative,

ii) $1 < \beta < 2$.

4.2 Preuve du principal Théorème

Vérifions que J_λ satisfait les conditions géométriques.

Lemme 4.2.1. *Supposons que $0 \leq \beta < 2$ et $0 < \lambda < \lambda_1^\beta$. Alors*

i) Il exsite α, $\delta > 0$ tels que $J_\lambda(u) \geq \alpha$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\|\nabla u\|_2 = \delta$.

ii) $J_\lambda(v) < 0$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\|\nabla u\|_2 > \delta$.

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Hardy-Sobolev et le fait que $0 < \lambda < \lambda_1^\beta$, on obtient

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1^\beta}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{2^*(s)\mu_s^{2^*(s)/2}}\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx,$$

où μ_s est la meilleure constante de Hardy-Sobolev.

Alors pour un $\delta > 0$ suffisament petit, il existe un $\alpha > 0$, tel que

$$J_\lambda(u) \geq \alpha, \qquad \text{pour tout } \|\nabla u\|_2 = \delta.$$

Pour $t > 0$, on a

$$J_\lambda(tu) = \frac{t^2}{2}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \lambda \int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^\beta} dx\right) - \frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx,$$

quand $t \to +\infty$, on a $J_\lambda(tu) \to -\infty$. Donc il existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que $J_\lambda(tv) < 0$ pour $\|\nabla v\|_2 > \delta$. □

On montre que J_λ satisfait la condition de $(\mathrm{P.S})_c$ pour un certain niveau c.

Lemme 4.2.2. *J_λ satisfait* $(\mathrm{P.S})_c$ *pour tout* $c < \frac{2-s}{2(N-s)}\mu_s^{(N-s)/(2-s)}$.

Démonstration. Soit $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ une suite de Palais-Smale satisfaisant i) $J_\lambda(u_n) = c + o(1)$, ii) $J'_\lambda(u_n) \to 0$ dans H^{-1}, alors

$$2J_\lambda(u_n) - \langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle = \left(1 - \frac{2}{2^*(s)}\right)\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx \leq 2c + o(1).$$

Donc $\{u_n\}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, par conséquent :

$$\begin{array}{ll} u_n \rightharpoonup u & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ u_n \rightharpoonup u & \text{faiblement dans } L^{2^*(s)}(\Omega, |x|^{-s}dx) \text{ pour } 0 \leq s < 2, \\ u_n \to u & \text{p.p dans } \Omega, \\ u_n \to u & \text{fortement dans } L^2\left(\Omega, |x|^{-\beta}dx\right) \text{ pour } 0 \leq \beta < 2, \end{array}$$

on déduit alors que

$$\langle J'_\lambda(u), w\rangle = 0, \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

i.e u est une solution faible du problème (P_λ). Posons $v_n = u_n - u$, alors par le Lemme de Brézis-Lieb [6], on obtient

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + o(1), \tag{4.2.1}$$

$$\int_\Omega \frac{|v_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx = \int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx - \int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx \tag{4.2.2}$$

et comme $J_\lambda(u_n) = c + o(1)$ et $J'_\lambda(u_n) = o(1)$, on obtient

$$J_\lambda(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega \frac{|v_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx = c + o(1), \tag{4.2.3}$$

et

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \int_\Omega \frac{|v_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx = o(1).$$

Donc, on peut affirmer que

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx \to \ell, \quad \int_\Omega \frac{|v_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx \to \ell. \tag{4.2.4}$$

En utilisant la définition de μ_s, on déduit que

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx \geq \mu_s\left(\int_\Omega \frac{|v_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx\right)^{2/2^*(s)},$$

donc $\ell \geq \mu_s \ell^{2/2^*(s)}$. Par conséquent $\ell = 0$ ou $\ell = \mu_s^{2^*(s)/(2^*(s)-2)}$.
Supposons par l'absurde que $\ell = \mu_s^{2^*(s)/(2^*(s)-2)}$, en passant à la limite dans (4.2.3), on trouve

$$c = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(s)}\right)\ell + J_\lambda(u).$$

et comme $c < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(s)}\right)\mu_s^{(N-s)/(2-s)}$, on a

$$J_\lambda(u) < 0.$$

Du fait que u est une solution faible du problème (P_λ), on obtient

$$J_\lambda(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(s)}\right)\int_\Omega \frac{|v_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx \geq 0$$

ce qui est une contradiction. Donc $\ell = 0$ et on conclut que $u_n \to u$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$. $\square$

Soit $\psi \in H_0^1\left(\mathbb{R}_+^N\right)$ la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \frac{|\psi|^{2^*(s)-2}\psi}{|y|^s} & \text{dans } \mathbb{R}_+^N, \\ \psi = 0 & \text{sur } \partial\mathbb{R}_+^N, \end{cases}$$

alors il existe une constante $C > 0$ tel que $|\psi(y)| \leq C\left(1 + |y|^{1-N}\right)$ et $|\nabla\psi(y)| \leq C\left(1 + |y|^{-N}\right)$ (pour plus de détails voir [19]).

Dans un voisinage U de 0, $\partial\Omega$ peut être représentée par $x_N = \phi(x')$ où $x' = (x_1, \ldots, x_{N-1})$, $\phi(0) = 0$, $\nabla'\phi(0) = 0$, $\nabla' = (\partial_1, \ldots, \partial_{N-1})$ et la normale extérieure de $\partial\Omega$ au point 0 est $-e_N = (0, 0, \ldots, -1)$. On définit

$$\Phi(x) = (x', x_N - \phi(x')).$$

Supposons que les courbures principales $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1}$ de $\partial\Omega$ sont finies. Comme $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors φ peut être représentée comme suit

$$\varphi(x') = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\alpha_i x_i^2 + o\left(|x'|^2\right).$$

Pour $r_0 > 0$ assez petit, choisissons U et $\tilde{U}$ deux voisinages de 0 tels que :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(U) &= B_{r_0}(0), & \tilde{\Phi}(\tilde{U}) &= B_{r_0/2}(0), \\ \tilde{\Phi}(U \cap \Omega) &= B_{r_0}^+(0), & \tilde{\Phi}(\tilde{U} \cap \Omega) &= B_{r_0/2}^+(0) \end{aligned}$$

Définissons

$$u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-(N-2)/2}\psi\left(\frac{\tilde{\Phi}(x)}{\varepsilon}\right)$$

et

$$\hat{u}_\varepsilon(x) = \xi(x)u_\varepsilon(x) \text{ avec } \xi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \text{ et } \xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \tilde{U}, \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus U. \end{cases}$$

Proposition 4.2.1. *Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a*

i)

$$\int_\Omega |\nabla \hat{u}_\varepsilon(x)|\, \mathrm{d}x = \mu_s - K_1 H(0)(1+o(1))\varepsilon + K_2 H(0)(1+o(1))\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right). \quad (4.2.5)$$

ii)

$$\int_{\Omega\cap\tilde{U}} \frac{\hat{u}_\varepsilon^{2^*(s)}(x)}{|x|^s}\mathrm{d}x = 1 - \frac{2^*(s)K_1}{2\mu_s}H(0)(1+o(1))\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right). \quad (4.2.6)$$

iii)

$$\int_{\Omega\cap\tilde{U}} \frac{\hat{u}_\varepsilon^{2}(x)}{|x|^\beta}\mathrm{d}x \geq O\left(\varepsilon^{2-\beta}\right). \quad (4.2.7)$$

avec $H(0) := \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N-1}\alpha_i$ est la coubure moyenne de $\partial\Omega$ au point 0,
$K_1 := \frac{2s\mu_s}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}_+^N}\frac{\psi(y)|y'|y_N}{|y|^{2+s}}\mathrm{d}y$ et $K_2 := \int_{\mathbb{R}^{N-1}}|\partial_N\psi(y',0)|^2|y'|^2\,\mathrm{d}y'$

Démonstration. La démonstration des points *i)* et *ii)* sont dans [23].
Montrons *iii)*.

Soit $x \in \Omega\cap\tilde{U}$, en utilisant le changement de variables $y = \frac{\tilde{\Phi}(x)}{\varepsilon}$, on obtient

$$x = \tilde{\Phi}^{-1}(\varepsilon y),$$

et

$$y \in B^+_{r_0/2\varepsilon},$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\cap\tilde{U}} \frac{\hat{u}_\varepsilon^{2}(x)}{|x|^\beta}\mathrm{d}x &= \int_{B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{\psi^2(y)\varepsilon^{-(N-2)}}{\left|\tilde{\Phi}^{-1}(\varepsilon y)\right|^\beta}\varepsilon^N dy \\ &= \varepsilon^2\int_{B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{\psi^2(y)}{\left|\tilde{\Phi}^{-1}(\varepsilon y)\right|^\beta}dy\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \tilde{U}$, on a $\tilde{\Phi}(x) = (x', x_N - \varphi(x')) = y = (y', y_N)$.

Donc $x = \tilde{\Phi}^{-1}(y) = (y', y_N + \varphi(y'))$ car $\begin{cases} x' = y', \\ y_N = x_N - \varepsilon(x') \Rightarrow x_N = y_N + \varphi(y') \end{cases}$
et

$$\begin{aligned} \left|\tilde{\Phi}^{-1}(y)\right|^2 &= \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 + (y_N + \varphi(y'))^2 \\ &= |y'|^2 + y_N^2 + 2y_N\varphi(y') + (\varphi(y'))^2 \\ &= |y|^2 + 2y_N\varphi(y') + \varphi^2(y'). \end{aligned}$$

Et on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left|\tilde{\Phi}^{-1}(\varepsilon y)\right|^\beta} &= \frac{1}{\left(\left|\tilde{\Phi}^{-1}(\varepsilon y)\right|^2\right)^{\beta/2}} \\ &= \frac{1}{\left(|\varepsilon y|^2 + 2\varepsilon y_N\varphi(\varepsilon y') + \varphi^2(\varepsilon y')\right)^{\beta/2}} \\ &= \frac{1}{|\varepsilon y|^\beta\left(1 + \frac{2\varepsilon y_N\varphi(\varepsilon y')}{\varepsilon^2|y|^2} + \frac{\varphi^2(\varepsilon y')}{\varepsilon^2|y|^2}\right)^{\beta/2}} \end{aligned}$$

Sachant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + O(x^2)$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left|\tilde{\Phi}^{-1}(\varepsilon y)\right|^\beta} &= \frac{1}{|\varepsilon y|^\beta}\left(1 + \frac{2y_N\varphi(\varepsilon y')}{\varepsilon|y|^2} + \frac{\varphi^2(\varepsilon y')}{\varepsilon^2|y|^2}\right)^{-\beta/2} \\ &= \frac{1}{|\varepsilon y|^\beta}\left[1 - \frac{\beta}{2}\left(\frac{2y_N\varphi(\varepsilon y')}{\varepsilon|y|^2} + \frac{\varphi^2(\varepsilon y')}{\varepsilon^2|y|^2}\right)\right. \\ &\qquad \left. + O\left(\left(\frac{2y_N\varphi(\varepsilon y')}{\varepsilon|y|^2} + \frac{\varphi^2(\varepsilon y')}{\varepsilon^2|y|^2}\right)^2\right)\right]. \end{aligned}$$

Comme $\varphi(y') \sim O(|y'|)$ et $\frac{2y_N\varphi(\varepsilon y')}{\varepsilon|y|^2} + \frac{\varphi^2(\varepsilon y')}{\varepsilon^2|y|^2} \sim O(\varepsilon)$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\cap\tilde{U}} \frac{\hat{u}_\varepsilon^2(x)}{|x|^\beta}\mathrm{d}x &= \varepsilon^2 \int_{B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{\psi^2(y)}{\varepsilon^\beta|y|^\beta}\left(1 - \frac{\beta y_N\varphi(\varepsilon y')}{\varepsilon|y|^2} + O\left(\varepsilon^2\right)\right)\mathrm{d}y \\ &= \varepsilon^2\left[\frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_{B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{\psi^2(y)}{|y|^\beta}\mathrm{d}y - \frac{\beta}{\varepsilon^{\beta+1}}\int_{B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{\psi^2(y)y_N\varphi(\varepsilon y')}{|y|^{\beta+2}}\mathrm{d}y\right. \\ &\qquad \left. + O\left(\varepsilon^{2-\beta}\right)\int_{B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{\psi^2(y)}{|y|^\beta}\mathrm{d}y\right] \end{aligned}$$

$$\int_{B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{\psi^2(y)}{|y|^\beta}\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\psi^2(y)}{|y|^\beta}\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^N_+\setminus B^+_{r_0/2\varepsilon}} \frac{\psi^2(y)}{|y|^\beta}\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^N \backslash B_{r_0/2\varepsilon}^+} \frac{\psi^2(y)}{|y|^\beta} \mathrm{d}y &\leq \int_{\mathbb{R}_+^N \backslash B_{r_0/2\varepsilon}^+} \frac{(1+|y|)^{2(1-N)}}{|y|^\beta} \mathrm{d}y \\
&\leq \int_{r_0/2\varepsilon}^{+\infty} \frac{(1+r)^{2(1-N)}\, r^{N-1}}{r^\beta} \mathrm{d}r \\
&\leq -C\varepsilon^{N-2+\beta}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{B_{r_0/2\varepsilon}^+} \frac{\psi^2(y) y_N \varphi(\varepsilon y')}{|y|^{\beta+2}} \mathrm{d}y &\leq \int_{B_{r_0/2\varepsilon}^+} \frac{(1+|y|)^{2(1-N)}|y||\varepsilon y|^2}{r^{\beta+2}} \mathrm{d}y \\
&\leq \varepsilon^2 C \int_0^{r_0/2\varepsilon} \frac{(1+r)^{2(1-N)} r^3}{r^{\beta+2}} r^{N-1} \mathrm{d}r \\
&\leq C\varepsilon^{N+\beta-1}.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\int_{\Omega \cap \tilde{U}} \frac{\hat{u}_\varepsilon^q(x)}{|x|^\beta} \mathrm{d}x \geq O\left(\varepsilon^{2-\beta}\right),$$

□

Lemme 4.2.3. *Supposons que $0 < \lambda < \lambda_1^\beta$, si l'une des conditions suivantes :*

1) $0 \leq \beta \leq 1$ *et* $H(0) < 0$,

2) $1 < \beta < 2$.

est satisfaite, alors

$$\sup_{t \geq 0} J_\lambda(t\hat{u}_\varepsilon) < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(s)}\right) \mu_s^{(N-s)/(2-s)} := c^*.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
J_\lambda(t\hat{u}_\varepsilon) &= \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla \hat{u}_\varepsilon|^2 - \frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)} \int_\Omega \frac{|\hat{u}_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s} - \lambda \frac{t^2}{2} \int_\Omega \hat{u}_\varepsilon^2 |x|^\beta \\
&\leq \frac{t^2}{2}\left[\mu_s - K_1 H(0)(1+o(1))\varepsilon + K_2 H(0)(1+o(1))\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right)\right] \\
&\quad - \frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\left[1 - \frac{2^*(s) K_1}{2\mu_s} H(0)(1+o(1))\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right)\right] - \lambda \frac{t^2}{2} \\
&\quad \times O\left(\varepsilon^{2-\beta}\right) \\
&\leq \left(\frac{\mu_s}{2} t^2 - \frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\right) + \left(\frac{K_1 - K_2 + o(1)}{2} t^2 + \frac{K_1 + o(1)}{2\mu_s} t^{2^*(s)}\right) H(0)\varepsilon \\
&\quad - \lambda \frac{t^2}{2} O\left(\varepsilon^{2-\beta}\right) + O\left(\varepsilon^2\right) \\
&:= g_1(t) + g_2(t) H(0)\varepsilon - \lambda \frac{t^2}{2} O\left(\varepsilon^{2-\beta}\right) + O\left(\varepsilon^2\right).
\end{aligned}$$

La fonction g_1 admet un unique maximum

$$g_1\left(t^*\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(s)}\right)\mu_s^{(N-s)/(2-s)},$$

où $t^*=\mu_s^{1/(2^*(s)-2)}$, et

$$g_2\left(t^*\right)=\left(\frac{K_2+o(1)}{2}\right)\mu_s^{(N-2)/(2-s)}>0.$$

On déduit alors que

$$\sup_{t\geq 0}J_\lambda\left(t\hat{u}_\varepsilon\right)<\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(s)}\right)\mu_s^{(N-s)/(2-s)}.$$

sous une des conditions suivantes :

1) $0\leq\beta\leq 1$ et $H(0)<0$,
2) $1<\beta<2$.

□

Preuve du Théorème 4.1.1. En utilisant les Lemmes 4.2.2, 4.2.1 et 4.2.3, J_λ satisfait les hypothèses du Théorème du Col. Alors c est une valeur critique i.e il existe $u\in H_0^1(\Omega)$ tel que $J_\lambda(u)=c>0$ et $J_\lambda'(u)=0$. Comme $J_\lambda(u)=J_\lambda(|u|)$, alors le problème (P_λ) admet une solution positive. □

Perspectives

1) Etudier l'existence de solutions du problème

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \frac{u}{|x|^2} = \frac{|u|^{2^*(s)-2}u}{|x|^s} & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N_+$, $N \geq 3$, $0 \in \partial\Omega$ et $\mu > 0$.

2) Etendre les résultats du chapitre 2 pour $0 \in \partial\Omega$.

3) Etudier le problème du chapitre 4 pour $\lambda > \lambda_1^\beta$.

4) Etudier l 'existence de solutions pour les problèmes de type

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \frac{u}{|x|^2} = \lambda \frac{|u|^{q-2}u}{|x|^\beta} + \frac{|u|^{2^*(s)-2}u}{|x|^s} & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec $2 \leq q \leq 2^*$, $0 \leq \beta < 2$ et $0 \in \partial\Omega$.

Bibliographie

[1] B. Abdellaoui, I. Peral ; *Some results for semilinear elliptic equations with critical potential*, P. Roy. Soc. Edinb. A. 132 (2002), 1-24.

[2] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz ; *Dual variational methods in critical point theory and application*, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.

[3] T. Aubin ; *Problèmes isoprimétriques et espaces de Sobolev*, J. Diff. Geom. 11 (1976), 573-598.

[4] P. Bartolo, V. Benci, D. Fortunato ; *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear prolems with "strong resonance" at infinity*, Nonlinear Anal. 7 (1983), 981-1012.

[5] H. Brézis ; *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Dunod, 1999.

[6] H. Brézis, E. Lieb ; *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. A.M.S 88 (1983), 486-490.

[7] H. Brézis, L. Nirenberg ; *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent*, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), 437-477.

[8] M. Bouchekif, A. Matallah ; *Singular elliptic equations involving a concave term and critical Caffarelli-Kohn-Nirenberg exponent with sign-changing weight functions*, Electron. J. Differential Equations 32 (2010), 1-12.

[9] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg ; *First order interpolation inequalities with weights*. Compositio Mathematica 53 (1984), 259-275.

[10] D. Cao, P. Han ; *Solutions for semilinear elliptic equations with critical exponents and Hardy potential*, J. Differential Equations 205 (2004), 521-537.

[11] G. Cerami, D. Fortunato, M. Struwe ; *Bifurcation and multiplicity results for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents*, Ann. Inst. H. Poincaré. Analyse non linéaire, t. 1 (1984), 341-350.

[12] N. Chaudhuri, M. Ramaswamy ; *Existence of positive solutions of some semilinear elliptic equations with singular coefficients*, J. Proc. Soc. Ed 131 (2001), 1275-1295.

[13] J. Q. Chen ; *Existence of solutions for a nonlinear PDE with an inverse square potential*, J. Differential Equations 195 (2003), 497-519.

[14] H. Egnell ; *Positive solutions of semilinear equations in cones*, Trans. Amer. Math. Soc. 11 (1992), 191-201.

[15] I. Ekeland ; *On the variational principle*, J . Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324-353.

[16] M. M. Fall, R. Musina ; *Hardy-Poincaré inequalities with boundary singularities*, Prépublication Département de Mathématique Université Catholique de Louvain La-Neuve 364 (2010),

[17] A. Ferrero, F. Gazzola ; *Existence of solutions for singular critical growth semilinear elliptic equations*, J. Differential Equations 177 (2001), 494-522.

[18] N. Ghoussoub, X. S. Kang ; *Hardy-Sobolev critical elliptic equations with boundary singularities*, AIHP-Analyse non linéaire 21 (2004), 767-793.

[19] N. Ghoussoub, F. Robert ; *The effect of curvature on the best constant in the Hardy-Sobolev inequalities*, Geom. Funct. Anal. 16 (6) (2006), 1201-1245.

[20] N. Ghoussoub, F. Robert ; *Concentration estimates for Emden Fowler equations with boundary singularities and critical growth*, IMRP Int. Math. Res. Pap. 21867 (2006), 1-85.

[21] N. Ghoussoub, C. Yuan ; *Multiple solutions for quasi-linear PDES involving the critical Sobolev and Hardy exponents*, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), 5703-5743.

[22] G. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya ; *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1934.

[23] C. H. Hsia, C. S. Lin, H. Wadade ; *Revisiting an idea of Brézis and Nirenberg*, J. Funct. Anal. 259 (2010), 1816-1849.

[24] T. S. Hsu, H. L. Lin ; *Multiple positive solutions for singular elliptic equations with concave-convex nonlinearities and sign-changing weights*, Bound. Value Probl. 2009 (2009), 1-17.

[25] T. S. Hsu, H. L. Lin ; *Multiple positive solutions for singular elliptic equations with weighted Hardy terms and critical Sobolev-Hardy exponents*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics 140 (2010), 617-633

[26] E. Jannelli ; *The role palyed by space dimension in elliptic critical problem*, J. Differential Equations 156 (1999), 407-426.

[27] D. Kang, S. Peng ; *Solutions for semilinear elliptic problems wiht critical Sobolev-Hardy exponents and Hardy potentials*, Appl. Math. Lett. 17 (2004), 411-416.

[28] O. Kavian ; *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag, 1993.

[29] E. H. Lieb, R. Seiringer ; *Proof of Bose-Einstein condensation for dilute trapped gases*, Phys. Rev. Lett. 88 (2002), 170-409.

[30] P. Meystre ; *Atom Optics*, Springer, 2001.

[31] D. L. Mills ; *Nonlinear Optics*, Springer, 1998.

[32] Y. Nasri ; *An existence result for elliptic problems with singular critical growth*, Electron. J. Differential Equations 84 (2007), 1-6.

[33] Y. Nasri, A. Rimouche ; *Existence and multilicity results for elliptic equation with singular growth*, Electron. J. Differential Equations 65 (2016), 1-11.

[34] Y. Nasri, A. Rimouche ; *Multiple solutions for a semilinear problem with boundary singularities*, submitted for publication.

[35] S. Pohozaev ; *Eigenfunction of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet Math. Dokl. 6 (1965), 681-703.

[36] M. Struwe ; *Variational Methods Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag 2008.

[37] G. Tarantello ; *On nonhomegenuous elliptic involving critical Sobolev exponent*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non linéaire 9 (1992), 281-304.

[38] S. Terracini ; *On the positive entire solutions to a class of equations with singular coefficients and critical exponents*, Adv. Differential Equations 1 (1996), 241-264.

[39] T. F. Wu ; *On semilinear elliptic equations involving concave-convex nonlinearities and sign-changing weight function*, J. Anal. Appl. 318 (2006), 253-270.

Résumé

Dans cette thèse on s'interesse à l'étude d'existence et de multiplicité de solutions pour une classe d'équations elliptiques non linéaire contenant des exposants critiques et des poids singuliers sur un domaine borné avec les conditions au bord de Dirichlet.

Mots clès : Exposant critique de Sobolev, Condition de Palais Smale, Problèmes elliptiques non linéaire, Méthodes variationnelles, Poid singulier.

Abstract

In this thesis we are interested in the existence and multiplicity of solutions for a class of nonlinear elliptic equations involving critical exponents and Singular weights in a bounded domain under Dirichlet conditions.

Keywords : Critical Sobolev exponenent, Palais Smale condition, Nonlinear elliptic problems, Variational methods, Singular weight.

الملخص

في هَذه الَاطروحة نُنَاقش وجود و تعدَد حلول فِئة من المعَادلَات الجزيئية غير الخطية التي تحتوي علَى الَاسُس الحرجة لسوبوليف في مجَال محدود مع شرط ديريكلي.

الكلمَات المفتَاحية

الَاسُس الحرجة لسوبوليف، شرط بَالي سمَايل، المعَادلَات الجزيئية الغير خطية.

DISCIPLINE : MATHÉMATIQUES

Laboratoire Systèmes Dynamiques et Applications–Tlemcen