

1-Problème de la théorie cinétique :

Le système auquel l'on s'intéresse dans la théorie cinétique est un gaz dilué de N molécules identiques de masse m contenu dans une boîte de volume V . Le gaz est suffisamment dilué. Nous analyserons l'influence des collisions qui redistribuent l'énergie entre les molécules et jouent un rôle important dans l'évolution du gaz vers l'équilibre macroscopique. On se place dans le cas où la température est élevée et la densité est assez faible pour que les molécules puissent être représentées sous forme de paquets d'ondes localisés dont les dimensions, mesurées par la longueur d'onde thermique $\lambda = h / \sqrt{2\pi mkT}$ sont petites devant la distance intermoléculaire moyenne : $\lambda \leq (V/N)^{1/3}$

Nous allons, dans ce travail, présenter des principes de modélisation qui aboutissent à des équations de transport appelées aussi équations cinétiques. On parle de façon générique de l'équation de Boltzmann en faisant référence aux travaux de Ludwig Boltzmann (1844-1906) sur la cinétique des gaz ; équation valable pour les gaz dilués dont lesquels la distance moyenne entre les molécules est assez grande devant la portée des forces intermoléculaires : $r_0 \ll d$.

Nous allons maintenant découvrir comment aboutir aux différentes équations de transport auxquelles satisfont les fonctions de distribution à particules multiples. Et ceci en jouant sur deux paramètres principaux d'échelle temporelle.

1-1-Echelle temporelle :

Il s'agit bien sûr de définir deux paramètres de temps τ_0 et de τ_r désignant successivement le temps d'une collision et l'autre s'écoulant entre deux collisions.

La distance typique parcourue par une molécule entre deux collisions est le libre parcours moyen. L'ordre de grandeur de cette distance dans un gaz à l'équilibre thermodynamique est :

$l \approx \frac{1}{n\sigma_{tot}}$ Ou n est la densité du gaz ; et $\sigma_{tot.} = \int \sigma(\Omega)d\Omega$: la section efficace totale de collision.

* τ_r : détermine l'ordre de grandeur du temps pendant lequel s'établit la distribution de Maxwell. Il faut noter qu'il est d'autant plus grand que la densité des particules est petite et l'interaction est faible : il a l'ordre de grandeur de l'intervalle de temps entre deux collisions.

* τ_0 : ne dépend pratiquement pas de la densité des particules ni de l'intensité de leur interaction : l'ordre de grandeur du temps est d'une collision.

Si les collisions sont suffisamment efficaces, l'évolution d'un gaz initialement hors d'équilibre comprend une première étape de relaxation vers un état dit équilibre local sur des distances de l'ordre de l (libre parcours moyen) et des temps de l'ordre de temps de collision. Cette première étape est suivie d'une autre dite hydrodynamique mettant en jeu des distances plus grandes devant l et des temps plus long que le temps de collision.

2-Fonctions de distribution à particules multiples :

2-1-Fonction de distribution à $t < \tau_0$:

A l'étape initiale de l'évolution d'un processus lorsque le temps t est petit par rapport à un certain temps caractéristique de chaotisation τ_0 , les fonctions de distribution à particules multiples sont soumises à des variations très rapides alors que la fonction de distribution à une particule ne varie pas.

2-2-Chaîne d'équations intégrales pour les fonctions de distribution à $t \gg \tau_0$:

CHAPITRE 2 CLASSIFICATION DES EQUATIONS DE TRANSPORT

Les fonctions de distribution à particules multiples deviennent des fonctionnelles de la fonction de distribution à une particule :

$$f_s(x_1, \dots, x_s, t) \rightarrow f_s(x_1, \dots, x_s; f_1(x', t)) \quad (3-3)$$

Généralement, la fonction de distribution à particules multiples dépend des valeurs initiales de toutes les fonctions de distribution à particules multiples $f_s(x_1, \dots, x_s, 0)$; mais après un temps grand par rapport à τ_0 , les fonctions f_s deviennent alors des fonctionnelles de f_1 . Cette perte de mémoire est une propriété fondamentale des systèmes à grand nombre de particules. La dépendance de temps de f_s s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = \int dx \frac{\delta f_s(x_1, \dots, x_s; f_1(x', t))}{\delta f_1(x, t)} \frac{\partial f_1(x, t)}{\partial t} \quad (3-4)$$

Où $\delta f_s / \delta f_1$ est une dérivée fonctionnelle.

On pourra par la suite arriver à une chaîne d'équations intégrales pour les fonctions de distribution à particules multiples :

$$f_s(x_1, \dots, x_s; f) = \prod_{1 \leq i \leq s} f(x_i) + \int_{-\infty}^0 d\tau S_0^{(s)}(\tau) K_s(x_1, \dots, x_s; S_0^{(1)}(-\tau) f) \quad (3-5)$$

Avec :

$$K_s(f) = \int dx \frac{\delta f_s(f)}{\delta f(x)} \times L_0(x; f) - \{H_0^{(s)}, f_s(f)\}$$

Et :

$$L_0(x, f) = \{H(x), f(x)\} = -p/m \times \partial f(x) / \partial x, \text{ crochet de poisson}$$

$$S_0^{(s)}(t) \text{ est l'opérateur de l'évolution de } s \text{ particules libres ; et d'ici on a déduit } S_0^{(1)}(-\tau)$$

On rappelle que ces équations sont vraies pour des échelles de temps t tels que :

$$\tau_r \cong t \gg \tau_0$$

A partir d'ici on va traiter deux cas différents :
 -le cas des systèmes à faibles interactions
 -le cas d'une densité faible avec interaction
 quelconque.

a-Cas d'une interaction faible : la solution des équations (3-4) peut être écrite comme un développement en série suivant les puissances de l'énergie d'interaction :

$$f_s(f) = f_s^{(0)}(f) + f_s^{(1)}(f) + \dots, s \geq 2$$

Cela correspond à un développement fonctionnel L :

$$L(f) = L^{(1)}(f) + L^{(2)}(f) + \dots$$

Après substitution de ces développements dans (3-4), on obtient le système suivant pour les fonctions $f_s^{(k)}$:

$$f_s^{(k)}(f) = \int_{-\infty}^0 d\tau S_0^{(s)}(\tau) \{ V^{(s)}, f_s^{(k-1)}(f) \} + \int dx_{s+1} \left\{ \sum_{1 \leq i \leq s} V(x_i - x_{s+1}), f_{s+1}^{(k-1)}(f) \right\} - \sum_{i=0}^k \int dx \delta f_s^{(i)}(\cdot) / \delta f(x) \times L^{(k-1)}(x; f) \Big|_{f \rightarrow S_0^{(1)}(\tau)} \quad (3-6)$$

En se limitant aux termes d'ordre zéro et un, l'équation cinétique s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \times \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial p} = 0 \quad (3-7)$$

Cette équation est appelée équation cinétique à champ self consistent.

Nous avons considéré que $L^{(1)}(x, f)$, maintenant on cherche une forme pour la fonctionnelle $L^{(2)}(x, f)$ et on aura :

$$L^{(2)}(x_1, f) = \int_{-\infty}^0 d\tau \int dx_2 \{ V(x_1 - x_2), \{ V(x_1 - x_2 + \tau/m(p_1 - p_2)), f(x_1) f(x_2) \} \}$$

Après un développement de $f(x_2)$, on aura l'expression suivante de $L^{(2)}(x_1, f)$:

$$L^{(2)}(x_1, f) = -\partial J(x_1; f) / \partial p_1 \quad (3-8)$$

Avec :

$$J_i(x_1, f) = C \int d^3 p_2 |p_1 - p_2|^{-3} ((p_1 - p_2)^2 \delta_{ik} - (p_1 - p_2)_i (p_1 - p_2)_k) (\partial f(x_1) / \partial p_{1k} \times f(x_2) - \partial f(x_2) / \partial p_{2k} \times f(x_1)) \Big|_{x_1=x_2}$$

Ou :

$$C = m / 8\pi \times \int_0^\infty dq q^3 V_q^2$$

$$V_q = \int d^3 x V(x) e^{-iqx}$$

La fonctionnelle $L^{(2)}$ est appelée intégrale des collisions. Dans le cas d'une interaction faible, ce dernier devient une divergence, dans l'espace des impulsions, par rapport à un certain vecteur J_i qu'on appelle courant des particules.

Et donc l'équation cinétique s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{\partial J_i}{\partial p_i} \quad (3-9)$$

C'est l'équation intégrale de Fokker Planck.

b- cas d'une densité faible :

Nous allons, à partir de quelques transformations, déduire l'équation cinétique d'un gaz de densité faible ($N/V \ll r_0^{-3}$) en supposant que l'interaction n'entraîne pas l'apparition des états liés.

CHAPITRE 2 CLASSIFICATION DES EQUATIONS DE TRANSPORT

En supposant, en premier lieu, qu'aucune force extérieure n'agit sur la particule, les fonctions de distribution à particules multiples seront sous la forme d'une série fonctionnelle suivant les puissances de la fonction de distribution à une particule qui n'est qu'un développement suivant les puissances de la densité des particules.

$$f_s(f) = f_s^{(s)}(f) + f_s^{(s+1)}(f) + \dots, \quad s \geq 2$$

Le développement suivant la fonctionnelle $L(x, f)$:

$$L(x, f) = L^{(2)}(x, f) + L^{(3)}(x, f) + \dots,$$

-En absence de forces extérieures :

L'équation cinétique prendra comme forme générale la forme suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \times \frac{\partial f}{\partial x} = L^{(2)}(x, f) + \dots,$$

La fonctionnelle, en tenant compte de l'effet de collision, sera :

$$L^{(2)}(x, f) = \int d^3 p_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dbb \frac{|p_2 - p_1|}{m} \times \{ f(x_1, p_1') f(x_1, p_2') - f(x_1, p_1) f(x_1, p_2) \}$$

Donc l'équation cinétique aura la forme finale suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} = \int d^3 p_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dbb \frac{|p_2 - p_1|}{m} \times \{ f(x_1, p_1') f(x_1, p_2') - f(x_1, p_1) f(x_1, p_2) \} \quad (3-10)$$

Cette équation est l'équation cinétique de Boltzmann.

-En présence de force extérieure : l'équation se réécrit comme suit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + F \frac{\partial f}{\partial p} = L^{(2)}(x, f) \quad (3-11)$$

2-3-Equations de transport pour des temps $t \gg \tau_r$: pour un intervalle de temps long par rapport au temps de relaxation, l'état du système ne sera plus décrit à l'aide de la fonction de distribution. L'échelle de temps et l'échelle spatiale ne seront plus pertinentes pour l'évolution. On passe à des échelles macroscopiques ou les grandeurs hydrodynamiques, telles que la densité de masse $\rho^{(m)}(x, t)$, la densité d'énergie $\varepsilon(x, t)$ (ou la température $T(x, t)$) et la densité d'impulsion $\pi(x, t)$ (ou la vitesse hydrodynamique $\mu(x, t)$), vont jouer un rôle primordial dans l'évolution du système. En conséquence la fonction de distribution devient une fonctionnelle des grandeurs hydrodynamiques

$$f(x, p, t) \xrightarrow{t \gg \tau_r} f(x, p, \rho^{(m)}(x', t), \varepsilon(x', t), \mu(x', t)) \quad (3-12)$$

CHAPITRE 2 CLASSIFICATION DES EQUATIONS DE TRANSPORT

Comme pour $t \gg \tau_0$ les fonctions de distribution à particules multiples sont des fonctionnelles de la fonction à une particule, pour $t \gg \tau_r$ elles deviennent des fonctionnelles universelles des grandeurs hydrodynamiques. On remarque donc que l'équation (3-11) est analogue à l'équation (3-3).

Après quelques transformations et substitutions on obtient les équations recherchées :

$$\partial \rho^{(m)} / \partial t + \partial \pi_i / \partial x = 0$$

$$\partial \pi_i / \partial t + \partial t_{ik} / \partial x_k = 0 \quad (3-13)$$

$$\partial \varepsilon / \partial t + \partial q_i / \partial x_i = 0$$

Où t_{ik} est le tenseur des tensions et q_i est la densité du flux d'énergie.

$$t_{ik} = m^{-1} \langle p_i p_k \rangle \quad (3-14)$$

$$q_i = m^{-1} \langle p_i p^2 / 2m \rangle$$

Pour que ces équations aient un sens, il faut résoudre l'équation de Boltzmann pour connaître la fonction de distribution et par suite calculer t_{ik} et q_i

Il faut noter que des équations analogues à celles traitées précédemment, sont vraies non seulement pour les gaz mais aussi pour les liquides. Pour ces derniers, l'étape cinétique de l'évolution n'existe pas ; et seule l'étape hydrodynamique a un sens.

Nous utiliserons deux approximations pour obtenir les équations de l'hydrodynamique d'un fluide parfait, puis celle d'un fluide visqueux.

2-4-Equations hydrodynamiques pour les fluides :

Pour trouver les équations hydrodynamiques correspondantes à (3-11), on part de la supposition suivante : soit la grandeur $\chi(p)$ concernant une molécule qui se conserve lors d'une collision, donc on aura :

$$\chi(p_1) + \chi(p_2) = \chi(p_1') + \chi(p_2')$$

Avec p_1, p_2 les impulsions des particules avant la collision.

Et p_1', p_2' celles après la collision.

La masse m , les trois composantes de la quantité de mouvement, et l'énergie cinétique dans le repère lié au fluide $\varepsilon = 1/2 \times m[v - u(r,t)]^2$ sont des quantités conservées lors de la collision de deux molécules : invariants collisionnels.

Démontrons tout d'abord le théorème suivant :

$$\int \chi(r, p, t) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} dp = 0$$

Où $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$ est le membre de droite de l'équation de Boltzmann, $\chi(r, p, t)$ est l'un des cinq invariants lors d'une collision.

CHAPITRE 2 CLASSIFICATION DES EQUATIONS DE TRANSPORT

$$\int \chi(r, p, t) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll.} dp = \int dp \int dp_1 \int d\Omega \sigma(\Omega) |v - v_1| \chi(r, p, t) (f' f'_1 - ff_1) \quad (3-15)$$

Pour calculer cette expression, on remarque que rien ne va changer si on permute les quantités de mouvement p et p_1 .

$$\int \chi(r, p, t) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll.} dp = 1/2 \int dp \int dp_1 \int d\Omega \sigma(\Omega) |v - v_1| (\chi + \chi_1) (f' f'_1 - ff_1) \quad (3-16)$$

Si on associe à la collision $\{p, p_1\} \rightarrow \{p', p'_1\}$ la collision inverse $\{p', p'_1\} \rightarrow \{p, p_1\}$, les sections efficaces sont les mêmes.

On a :

$$|v - v_1| = |v' - v'_1|$$

Et :

$$Dp dp_1 = dp' dp'_1$$

Il s'en suit que :

$$\int \chi(r, p, t) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll.} dp = 1/4 \int dp \int dp_1 \int d\Omega \sigma(\Omega) |v - v_1| (\chi + \chi_1 - \chi' - \chi'_1) (f' f'_1 - ff_1) \quad (3-17)$$

Partant du fait que χ est un invariant collisionnel, donc le membre de droite de l'équation (3-17) est nul et par suite :

$$\int \chi(r, p, t) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll.} dp = 0 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Le théorème général du bilan associé à l'équation de Boltzmann s'obtient en multipliant celle-ci par χ et en intégrant sur les quantités de mouvement :

$$\int \chi(r, p, t) \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v \nabla_r f + F \nabla_p f \right)_{coll.} dp = 0$$

On peut la réécrire sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \times \int \chi f dp - \int f \frac{\partial \chi}{\partial t} \times dp + \nabla_r \cdot \int \chi v f dp - \int v \cdot \nabla_r \chi f dp + \int \nabla_p \cdot (\chi F f) dp - \int f \cdot \nabla_p \chi f dp = 0 \quad (3-18)$$

Le cinquième terme est nul et par suite l'équation (3-18) prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle n \chi \rangle - n \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial t} \right\rangle + \nabla_r \cdot \langle n \chi v \rangle - n \langle v \cdot \nabla_r \chi \rangle - n \langle F \cdot \nabla_p \chi \rangle = 0 \quad (3-19)$$

Où $n \equiv n(r, t)$ est la densité locale, indépendante de la vitesse.

A partir de ce théorème on peut établir trois équations de bilan local : pour la masse, la quantité de mouvement et l'énergie interne.

2-4-a-Equation de bilan local de la masse :

On injecte $\chi = m$ dans l'équation (3-19) et on aura :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle mn \rangle + \nabla \cdot \langle mnv \rangle = 0 \quad (3-20)$$

Si on introduit la densité locale de masse $\rho(r, t) = mn(r, t)$, l'équation (3-20) prend la forme de l'équation de bilan local de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (3-21)$$

2-4-b-Equation de bilan local de la quantité de mouvement :

Pour $\chi = mv_i$ on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho v_i \rangle + \nabla \cdot \langle \rho v_i v \rangle - \frac{1}{m} \rho F_i \quad (3-22)$$

On remarque que : $\langle v_i v_j \rangle = \langle (v_i - u_i)(v_j - u_j) \rangle + u_i u_j$

Pour $i=x, y, z$ l'équation (3-22) prend les formes suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho v_x \rangle + \nabla \cdot \langle \rho v_x v \rangle - \frac{1}{m} \rho F_x$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho v_y \rangle + \nabla \cdot \langle \rho v_y v \rangle - \frac{1}{m} \rho F_y$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho v_z \rangle + \nabla \cdot \langle \rho v_z v \rangle - \frac{1}{m} \rho F_z$$

On peut réécrire l'ensemble de ces trois équations sous la forme suivante :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u u + \underline{P}) = \frac{\rho}{m} F \quad (3-23)$$

$\rho u u$ est le tenseur de composantes $\rho u_i u_j$ et \underline{P} est le tenseur des pressions, de

composantes $P_{ij} = \rho \langle (v_i - u_i)(v_j - u_j) \rangle$. (3-24)

L'équation (3-23) peut être formulée comme suit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \nabla \right) u = \frac{1}{m} F - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{P} \quad (3-25)$$

2-4-c-Equation de bilan local de l'énergie interne :

Posons $\chi = \frac{1}{2} m [v - u(r, t)]^2$ et remplaçons dans l'équation (3-19) et on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho [v - u]^2 \rangle + \frac{1}{2} \nabla \cdot \langle \rho v [v - u]^2 \rangle - \frac{1}{2} \rho \langle v \cdot \nabla [v - u]^2 \rangle = 0 \quad (3-26)$$

CHAPITRE 2 CLASSIFICATION DES EQUATIONS DE TRANSPORT

La forme de l'équation de bilan local de l'énergie interne s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon_{\text{int.}})}{\partial t} + \nabla \cdot [J_Q + \rho\varepsilon_{\text{int.}} u] = -\underline{P} : \nabla u \quad (3-27)$$

Une autre écriture de cette dernière équation est :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right) \varepsilon_{\text{int.}} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot J_Q = -\frac{1}{\rho} \underline{P} : \nabla u \quad (3-28)$$

Ces équations sont vraies en admettant que :

-La densité locale d'énergie interne par unité de masse est donnée par :

$$\varepsilon_{\text{int.}}(r, t) = \frac{1}{2} \langle [v - u(r, t)]^2 \rangle$$

-le flux de chaleur J_Q est comme suit :

$$J_Q = \frac{1}{2} \rho(r, t) \langle (v - u(r, t)) [v - u(r, t)]^2 \rangle \quad (3-29)$$

Ces équations de bilan local de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie interne ne seront vraies que si la solution de l'équation de Boltzmann sera connue et par la suite on pourra écrire les expressions de \underline{P} et de J_Q . Ces équations deviendront alors les équations de l'hydrodynamique possédant un contenu physique.

A- Approximation d'ordre zéro :

Pour une telle approximation, on assimile la distribution à un équilibre local caractérisé par une densité locale $n(r, t)$, une vitesse moyenne locale $u(r, t)$ et une température locale $T(r, t)$ qui varient lentement dans l'espace et dans le temps :

$$f(r, p, t) \approx f^{(0)}(r, p, t)$$

Avec $f^{(0)}$ est donnée par l'expression suivante :

$$f^{(0)}(r, p, t) = n(r, p, t) \left[\frac{1}{2\pi mkT(r, t)} \right]^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{(p - mu(r, t))^2}{2mkT(r, t)} \right] \quad (3-30)$$

On fait un changement de variables en posant :

$$C = n \left(\frac{1}{2\pi mkT} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$A = \frac{m}{2kT}$$

Le tenseur de pressions, défini par (3-24), s'écrit, lorsque la moyenne est calculée à l'aide de la fonction de distribution d'ordre zéro,

$$P_{ij}^{(0)} = \frac{\rho}{n} C \int (v_i - u_i)(v_j - u_j) e^{-A|v-u|^2} dp \quad (3-31)$$

En introduisant la vitesse $U=v-u$ dans un repère lié au fluide en mouvement

$$P_{ij}^{(0)} = m^4 C \int U_i U_j e^{-AU^2} dU \quad (3-32)$$

A l'inverse des éléments non diagonaux qui sont nuls, les éléments diagonaux sont tous égaux à la pression hydrostatique locale $P(r,t) = n(r,t)kT(r,t)$. On a donc

$$P_{ij}^{(0)}(r,t) = n(r,t)kT(r,t)\delta_{ij} \quad (3-33)$$

Le flux de chaleur, donné par l'expression (3-29) est donné à l'ordre zéro par :

$$J_Q^{(0)} = \frac{1}{2} m^4 C \int U U^2 e^{-AU^2} dU = 0 \quad (3-34)$$

On remarque de ce fait qu'à l'approximation zéro, le tenseur des pressions se réduit au terme de pression hydrostatique : il n'y a pas de transfert de quantité de mouvement par viscosité. Par contre le flux de chaleur est nul. Donc les phénomènes dissipatifs ne sont pas pris en compte. Le gaz considéré se comporte comme un fluide parfait.

-Hydrodynamique de fluide parfait :

Les équations de l'hydrodynamique de fluide parfait s'obtiennent en injectant les expressions (3-33) et (3-34) dans les équations de bilan local (3-25) et (3-28)

L'équation de bilan local de la quantité de mouvement prend la forme suivante :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right) u = \frac{1}{m} F - \frac{1}{\rho} \nabla P \quad (3-35)$$

Cette équation prend le nom d'équation d'Euler

B- Approximation d'ordre un :

Pour trouver une approximation d'ordre un de la fonction de distribution, il faut passer par l'équation de Boltzmann dans l'approximation du temps de relaxation :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla_r + F \cdot \nabla_p \right) (f^{(0)} + f^{(1)}) = -\frac{f^{(1)}}{\tau} \quad (3-36)$$

En supposant que $f^{(1)} \ll f^{(0)}$, on peut écrire $f^{(1)}$ comme :

$$f^{(1)} \approx -\tau \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla_r + F \cdot \nabla_p \right) f^{(0)}$$

On utilise pour $f^{(0)}$ les notations suivantes :

$$f^{(0)}(r, p, t) = \frac{\rho}{m} \left(\frac{1}{2\pi m \theta} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{m}{2\theta} U^2 \right], \quad \text{avec } U=v-u \text{ et } \theta = kT$$

On calcule les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \rho} = \frac{f^{(0)}}{\rho}$$

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta} \left(\frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{3}{2} \right) f^{(0)}$$

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial u_i} = \frac{m}{\theta} U_i f^{(0)}$$

Après calculs on en déduit :

$$f^{(1)} = -\tau \cdot f^{(0)} \left[\frac{1}{\rho} D(\rho) + \frac{1}{\theta} \left(\frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{3}{2} \right) D(\theta) + \frac{m}{\theta} U_j D(u_j) - \frac{1}{\theta} F \cdot U \right]$$

On suppose l'opérateur différentiel D défini par :

$$D(\mathbf{x}) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{x}$$

Si on utilise les équations hydrodynamiques dans l'approximation d'ordre zéro, on obtient :

$$D(\rho) = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} + U \cdot \nabla \rho$$

$$D(u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{1}{m} F_j + U \cdot \nabla u_j$$

$$D(\theta) = -\frac{3}{2} \theta \nabla \cdot \mathbf{u} + U \cdot \nabla \theta$$

En injectant ces grandeurs dans l'équation de $f^{(1)}$ on aura :

$$f^{(1)} = -\tau \cdot f^{(0)} \left[\frac{1}{\theta} (U \cdot \nabla \theta) \left(\frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) + \frac{m}{\theta} U_i U_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \frac{m}{\theta} U^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right]$$

Si on introduit le tenseur symétrique des contraintes $\underline{\Lambda}$ avec les coordonnées suivantes :

$$\Lambda_{ij} = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

CHAPITRE 2 CLASSIFICATION DES EQUATIONS DE TRANSPORT

On réécrit $f^{(1)}$ sous la forme :

$$f^{(1)} = -\tau \cdot f^{(0)} \left[\frac{1}{\theta} (U \cdot \nabla \theta) \left(\frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) + \frac{1}{\theta} \Lambda_{ij} \left(U_i U_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} U^2 \right) \right]$$

-Tenseur de pression et flux de chaleur :

A cet ordre d'approximation, on peut calculer le tenseur des pressions \underline{P} qui a pour composantes :

$$P_{ij} = m \int (v_i - u_i)(v_j - u_j) (f^{(0)} + f^{(1)}) dp = nkT \delta_{ij} + P_{ij}^{(1)}$$

On aura finalement, en posant $\eta = nkT\tau$ qu'on peut identifier au coefficient de viscosité, l'expression de P_{ij} :

$$P_{ij} = \delta_{ij} P - \eta \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)$$

Le flux de chaleur aura l'expression suivante :

$$J_Q = -\frac{\tau \cdot m^4}{2} \int U U^2 \left(\frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) \frac{1}{\theta} U_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} f^{(0)} dU$$

Comme le flux de chaleur est proportionnel au gradient thermique, il prendra la forme suivante :

$$J_Q = -k \nabla T$$

Avec : k est la conductivité thermique

-Equations hydrodynamiques au premier ordre :

En substituant les expressions du tenseur des pressions et du flux de chaleur dans les équations de bilan local de la quantité de mouvement et de l'énergie interne on aura deux équations importantes :

-équation de bilan local de la quantité de mouvement prendra la forme suivante :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right) u = \frac{1}{m} F - \frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 u + \frac{\eta}{3\rho} \nabla (\nabla \cdot u)$$

C'est l'équation de Navier Stokes

-équation de bilan local de l'énergie interne sera donc :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right) T + \frac{2}{3} T (\nabla \cdot u) = \frac{1}{\rho c_v} \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{1}{2} \frac{\eta}{\rho c_v} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)^2$$

C'est l'équation de chaleur avec c_v la chaleur spécifique donnée par : $c_v = \frac{3k}{2m}$

2-5-Fonctions de distribution dans le cas des interactions avec particules étrangers :

Un autre cas important s'impose lors des interactions avec particules étrangers au système au lieu des interactions mutuelles. Pour cela, considérons des variables dynamiques quelconques $\xi_i \equiv \xi$ qui caractérisent l'état des particules du système. Donc on doit trouver les variations de la fonction de distribution $f(\xi, t)$ dues aux collisions.

En considérant des intervalles de temps comprises entre τ_0 et τ_r , et supposons que les variables dynamiques n'ont que de petites variations durant les collisions, on obtiendra l'équation suivante pour la fonction de distribution $f(\xi, t) \equiv f$:

$$\partial f / \partial t = -\partial / \partial \xi_i \times (A_i(\xi) f) + 1/2 \times \partial^2 / (\partial \xi_i \partial \xi_k) \times (B_{ik}(\xi) f) \quad (3-15)$$

Avec :

$$A_i(\xi) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \Delta \xi_i \rangle_{\Delta t} / \Delta t \quad (3-16)$$

$$B_{ik}(\xi) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \Delta \xi_i \Delta \xi_k \rangle_{\Delta t} / \Delta t$$

C'est l'équation différentielle de Fokker Planck.

3-Equation cinétique pour les électrons du plasma :

Le plasma est un gaz entièrement ou partiellement ionisé, mais en moyenne électriquement neutre. L'interaction électrostatique joue un rôle important dans ce genre de système. Pour plus de simplicité on ne considère que la composante légère du plasma, à savoir les électrons. La fonction de distribution $f(x, p, t)$ satisfait l'équation suivante :

$$\partial f / \partial t + v \partial f / \partial x + eE \partial f / \partial p = L^{(2)}(x; f) \quad (3-17)$$

Ou :

E est le champ électrique, $L^{(2)}$ est l'intégrale des collisions.

En l'absence de l'intégrale des collisions, l'équation est dite équation cinétique de Vlasov :

$$\partial f / \partial t + v \partial f / \partial x + eE \partial f / \partial p = 0 \quad (3-18)$$

L'intégrale des collisions est donnée par (3-8) avec l'exception du cas de l'interaction coulombienne ou V_q est donnée par :

$$V_q = 4\pi \cdot e^2 / q^2$$

