

## 1-Introduction

Pour comprendre la notion des ondelettes, il est nécessaire de donner quelques notions mathématiques qui servent d'outils permettant de clarifier l'origine de ces fonctions, leurs développements et leurs applications dans divers domaines scientifiques.

### 2-Espaces fonctionnels:

Il est très important de définir les outils mathématiques qui vont nous accompagner durant notre étude. Pour cela il est nécessaire de comprendre le concept d'espace fonctionnel.

Pour concevoir la notion des ondelettes, il est nécessaire de donner quelques notions mathématiques qui servent d'outils permettant de clarifier l'origine de ces fonctions, leurs développements et leurs applications dans divers domaines scientifiques.

#### 2-1-Espace vectoriel:

La notion d'espace vectoriel joue un rôle primordial en mathématique linéaire. Mais qu'est ce que donc un espace vectoriel et quel rapport y'a-t-il entre cette notion et celle d'espace fonctionnel.

Un espace vectoriel  $V$  sur un corps  $K$  est un ensemble d'éléments appelés vecteurs, muni d'une structure déterminée par:

- une addition, c'est-à-dire une application de  $V \times V$  dans  $V$  associant à tout couple de vecteurs  $(\vec{v}, \vec{w}) \in V$  un vecteur noté  $\vec{v} + \vec{w} \in V$ , telle que  $(V, +)$  soit un groupe commutatif ;
- une multiplication scalaire, c'est-à-dire une application de  $K \times V$  dans  $V$  associant à tout couple  $((\lambda, \vec{v}) \in K \times V$  un vecteur noté  $\lambda\vec{v} \in V$ , telle que:

$$\begin{aligned} \lambda(\mu\vec{v}) &= (\lambda\mu)\vec{v} && \text{(associativité)} \\ \lambda(\vec{v} + \vec{w}) &= \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w} && \text{(distributivité)} \\ (\lambda + \mu)\vec{v} &= \lambda\vec{v} + \mu\vec{v} && \text{(distributivité)} \\ 1\vec{v} &= \vec{v} && \text{(neutralité)} \end{aligned}$$

$$\forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$$

#### 2-2-Base:

Puisque toute somme de vecteurs d'un espace vectoriel  $V$  est un vecteur de ce même espace, il doit être possible d'exprimer tout vecteur d'un espace vectoriel par une somme de vecteurs de cet espace. Ce qui nous amène à introduire la notion de base.

Une base d'un espace vectoriel  $V$  est un ensemble de vecteurs telle que tout vecteur de cet espace peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs de cette base. En mathématique, on dit qu'une base est une partie génératrice minimale. Le nombre de vecteurs d'une base d'un espace vectoriel est appelé dimension de cet espace.

### 2-3-Espace vectoriel de fonctions:[3]

Nous n'avons encore rien précisé quant à la nature des vecteurs. Ils peuvent être des nombres si l'espace vectoriel considéré est l'ensemble des réels ( $V=\mathbb{R}$ ). Dans d'autre cas, il peut s'agir de fonctions.

En mathématique, on écrit une fonction comme étant:

$$f : E \longrightarrow F : x \longrightarrow f(x)$$

C'est ce cas précis qui nous intéresse. Si les vecteurs de l'espace vectoriel sont des fonctions, on l'appelle alors espace fonctionnel. Ce dernier possède comme tout espace vectoriel une base. Toute fonction de l'espace peut être décomposée dans une base de celui-ci, comme n'importe quel vecteur usuel en géométrie. Cette représentation des fonctions comme des vecteurs est très puissante, elle emprunte les méthodes de la géométrie pour les appliquer à l'analyse.

### 2-4-produit scalaire et norme:

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $A \in \mathbb{R}$  dans  $B \in \mathbb{C}$  ; définissons le produit scalaire  $(f, g)$  par:

$$(f, g) = \int_A f(x) \bar{g}(x) dx$$

Où  $\bar{g}(x)$  est le complexe conjugué de  $g(x)$ , et satisfaisant les conditions suivantes:

$$\forall f, g, h \in V \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$$(f, g + h) = (f, g) + (f, h)$$

$$(\lambda f, g) = \lambda (f, g)$$

$$(f, g) = \overline{(g, f)}$$

$$(f, f) \geq 0 \text{ et } (f, f) = 0 \text{ ssi } f = 0$$

D'autre part la norme d'une fonction  $f$  est définie par:

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

Nous pouvons maintenant définir les concepts qui interviendront dans les chapitres ultérieurs. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\{\phi_j / j = 1, \dots, n\}$  une base de cette espace. Elle est qualifiée de:

- orthogonale si et seulement si:

$$(\phi_j, \phi_i) = 0 \quad \forall i \neq j ; i, j = 1, \dots, n$$

- normée ssi:

$$(\phi_j, \phi_j) = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

- orthonormée si et seulement si elle est orthogonale et normée.

### 2-5-Espace fonctionnel:[3]

Ayant ainsi défini ces outils mathématiques, on pourra maintenant parler de l'espace fonctionnel  $L^2$ . C'est l'espace vectoriel complexe des fonctions de carré sommable  $L^2(A)$ ; et c'est par suite l'espace vectoriel des fonctions intégrables de  $A$  dans  $\mathbb{C}$  satisfaisant:

$$\int_A |f(x)|^2 dx < \infty \quad (2-5-1)$$

**3-Analyse de Fourier:** l'analyse par ondelette découle naturellement de l'analyse de Fourier. Il est donc naturel de commencer par celle-ci afin de saisir les bases de la deuxième technique.

#### 3-1- Origine:

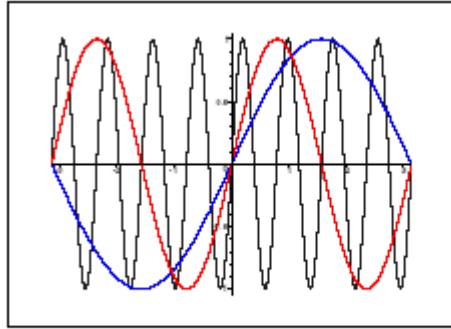
L'analyse de Fourier est née bien avant les travaux de Joseph Fourier. Mais ce dernier représente un repère chronologique important. Son influence sur les mathématiques, les sciences et la technologie qui nous entoure fut considérable.

Depuis Isaac Newton, la nature est décrite et est comprise à travers les équations différentielles dont la majorité ne sont pas résolubles. L'analyse de Fourier trouve sa justification dans la résolution de ces équations. C'est Joseph Fourier qui a affirmé dans un mémoire publié en 1807, ce que Euler (1750) et Clairaut (1757) ont montré auparavant, le fait que les solutions peuvent être représentées sous forme de séries trigonométrique, et que cette décomposition était généralisable à un grand nombre de classes de fonctions.

L'analyse de Fourier a dominé l'analyse mathématique pendant plus d'un siècle. Son influence est incontestable; que ce soit dans les domaines de téléphonie, de l'imagerie médicale ou des outils de communication radio.

#### 3-2-Séries de Fourier:[4]

Nous avons vu que beaucoup d'équations de la physique n'avaient pas de solutions sous forme de fonctions simples. Ces solutions ont été représentées sous forme de séries de fonctions trigonométriques.



Exemple de sinusoides de fréquence différente

**Formalisme :**

Supposons que  $(\varphi_j)$  soit une suite de fonctions orthonormées de l'espace des fonctions de carré sommable sur l'intervalle  $[a, b]$  (noté  $L^2 [a, b]$ ), c'est-à-dire l'espace des fonctions satisfaisant la condition (1). Cette suite forme une base de l'espace  $L^2$ . On peut donc considérer cet espace comme espace vectoriel et construire une fonction quelconque  $f$  de cet espace par une combinaison des vecteurs de la base  $\{\varphi_j\}$ . Elle est infinie du fait que  $L^2$  est un espace de dimension infinie. Elle s'écrira de la forme:

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j \quad (3-2-1)$$

Une somme infinie de ce genre est appelée une série. Pour obtenir les  $c_j$  il suffit de prendre le produit scalaire de  $f$  avec le vecteur de base  $\varphi_j$ . Les coefficients de Fourier  $c_j$  sont :

$$c_j = (f, \varphi_j) = \int_a^b f(x) \varphi_j(x) dx \quad (3-2-2)$$

Une série trigonométrique est de la forme:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (3-2-3)$$

La série de Fourier d'une fonction  $f$  périodique sur le segment  $[-L, L]$  est définie comme la série trigonométrique:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad (3-2-4)$$

Avec les coefficients de Fourier  $a_n$  et  $b_n$  définis par:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \cos n\left(\frac{\pi}{L}y\right) dy \quad n \leq 0 \quad (3-2-5)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \sin n\left(\frac{\pi}{L}y\right) dy \quad n \leq 1 \quad (3-2-6)$$

Le fait que les séries permettent uniquement de représenter les fonctions périodiques, on va avoir besoin d'un nouvel outil pour représenter d'autres fonctions sur  $\mathbb{R}$ .

### 3-3-Transformée de Fourier:[4]

Comme son nom l'indique, la transformée de Fourier est une transformation: on passe d'une représentation d'un signal à une autre. La décomposition en séries de Fourier d'une fonction périodique permet de représenter celle-ci comme une somme infinie de sinus et cosinus de fréquences différentes. Cette décomposition est très limitée. En effet, peu de signaux naturels remplissent la condition d'être périodiques.

On appelle transformée de Fourier de  $f$  la fonction:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (3-3-1)$$

Cette fonction peut être vue comme le spectre en fréquences de la fonction  $f$ .

La transformée de Fourier inverse s'énonce comme suit:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (3-3-2)$$

L'intérêt d'une telle décomposition est de pouvoir analyser ces signaux en fréquences et repérer ainsi leur contenu fréquentiel.

### 3-4-La convolution:

Le produit de convolution est une notion importante surtout en traitement de signal. Pour deux fonction  $f$  et  $g$  intégrables de carré sommable dans  $L^2$ , il est défini comme suit:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \quad (3-4-1)$$

Ce produit peut être envisagé comme un opérateur, associant à une fonction  $f$ , sa convolée par une fonction  $g$  donnée. Le théorème de Plancherel aura une importance capitale lors de l'étude des filtres.

#### **-Théorème:**

Soient  $f$  et  $g$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , la fonction  $h$  définie par  $h = f * g$  appartient à  $L^2(\mathbb{R})$  et:

$$\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \quad (3-4-2)$$

### 3-5-Transformée de Fourier rapide:[5]

L'algorithme que nous allons étudier a été une révolution en analyse numérique et en traitement de signal. Il permet de calculer d'une façon très rapide et de minimiser le nombre d'opérations nécessaires pour l'établissement de la transformée de Fourier d'un signal discret. Pour exemple je citerai les résultats des tests effectués par Jon Claerbout dont le programme lent (utilisant la double boucle de la transformée de Fourier discrète en faisant  $N^2$  itérations) mettait 153s pour calculer la transformée de Fourier discrète d'un signal de 1024 valeurs alors que le programme utilisant la transformée rapide ne met que 0.7s.

Reprenons l'équation de la transformée de Fourier discrète donnée par :

$$S_{\tau,T}(k\nu) = \tau \sum_{n=0}^{N-1} s(n\tau) \exp(-2i\pi kn/N) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

Et posons :  $W = \exp. (-2i\pi /N)$

Donc la transformée de Fourier discrète prend la forme suivante:

$$S_{\tau,T}(k\nu) = \tau \sum_{n=0}^{N-1} s(n\tau) W^{kn} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

Avec une forme matricielle on aura :

$$\begin{bmatrix} S(0) \\ S(\nu) \\ S(2\nu) \\ S(3\nu) \\ \vdots \end{bmatrix} = \tau \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & W & W^2 & W^3 & \dots \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & \dots \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(0) \\ s(\tau) \\ s(2\tau) \\ s(3\tau) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

La matrice inverse a la même structure :

$$\begin{bmatrix} s(0) \\ s(\tau) \\ s(2\tau) \\ s(3\tau) \\ \vdots \end{bmatrix} = \tau \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & W^{-3} & \dots \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & W^{-6} & \dots \\ 1 & W^{-3} & W^{-6} & W^{-9} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S(0) \\ S(\nu) \\ S(2\nu) \\ S(3\nu) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Ces équations matricielles nécessitent  $N^2$  multiplications et autant d'additions ce qui est énorme. En 1965 Cooley et Tuckey ont proposés un algorithme permettant de calculer très rapidement des transformées de Fourier discrètes en ramenant le calcul d'une transformée de longueur  $N$  à celui de deux transformées de longueur  $N/2$ . Pratiquement, cela revient à décomposer le signal  $s(n\tau)$  en deux signaux :

$$\begin{cases} s'(n) \equiv s(2n\tau) & (n = 0, 1, \dots, N/2 - 1) \\ s''(n) \equiv s[(2n + 1)\tau] & (n = 0, 1, \dots, N/2 - 1) \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} S_{\tau,T}(k\nu) &= \tau \sum_{n=0}^{N/2-1} s(2n\tau)W^{2kn} + \tau \sum_{n=0}^{N/2-1} s[(2n + 1)\tau]W^{k(2n+1)} \\ &= \tau \sum_{n=0}^{N/2-1} s'(n)(W^2)^{kn} + \tau W^k \sum_{n=0}^{N/2-1} s''(n)(W^2)^{nk} \end{aligned}$$

Pour  $k=0, 1, \dots, N/2 - 1$ , les deux sommes sont les transformées de Fourier discrètes des deux signaux  $s'$  et  $s''$

Posons  $k=l+N/2$ , les deux sommes peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} S_{\tau,T}[l + N/2\nu] &= \tau \sum_{n=0}^{N/2-1} s'(n)(W^2)^{n(l+N/2)} + \tau W^{l+N/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} s''(n)(W^2)^{n(l+N/2)} \\ &= \tau \sum_{n=0}^{N/2-1} s'(n)W^{nN} (W^2)^{nl} + \tau W^{N/2} W^l \sum_{n=0}^{N/2-1} s''(n)W^{nN} (W^2)^{nl} \end{aligned}$$

Mais  $W^{LN}=1$  et  $W^{N/2}=-1$ , ce qui permet d'obtenir la forme simplifiée suivante :

$$S_{\tau,T}[(k + N/2)v] = \frac{S'_{2\tau,T}(kv)}{2} - \frac{S''_{2\tau,T}(kv)}{2} W^k$$

Avec  $k=0,1,\dots,N/2 -1$ . On a donc réduit le calcul de la transformée de Fourier discrète d'une série de  $N$  valeurs à celui de deux transformées de séries de  $N/2$  valeurs. Si  $N=2^p$ , l'on peut effectuer cette réduction  $p$  fois et commencer le processus en calculant les transformées de Fourier discrètes de  $N$  séries ne comportant qu'une valeur, puis celles des séries de deux valeurs, puis 4, etc..., jusqu'à la série complète. On remarque que le nombre d'opérations est réduit : cet algorithme permet de calculer la transformée d'une série de  $N$  valeurs en seulement  $2Np$  opérations contre  $2N^2$  pour l'algorithme direct utilisé.

Le sou programme suivant, TFR (à titre d'indication), en langage FORTRAN met en œuvre l'algorithme de transformation de Fourier rapide

Subroutine TFR\_dirinv\_signal\_n\_

Subroutine TFR (dirinv, signal, n)

Integer n, i, j, k, m, i step

Real dirinv, scale, arg

Complex signal (n), cmplx, cw, cdel, ct

Do i=1, n

Signal (i) = signal (i)\* scale

End do

J=1

K=1

Do i=1, n

If (i.le.j) then

Ct= signal (j)

Signal (j) =signal (i)

Signal (i) =ct

End if

M=n/2

Do while (j.gt.m.and.m.gt.1)

J=j-m

M=m/2

End do

Do while (k.ge.n)

I step=2\*k

Cw=1

Arg=dirinv\*3.14159265/float (k)

Cdel=complex (cos (arg), sin (arg))

Do m=1, k

Do i=m, n, I step

Ct=cw\*signal (i+k)

Signal (i+k) =signal (i)-ct



```

Signal (i) =signal (i) +ct
Cw=cw*cde1
End do
K=I step
End do
End do

```

### 3-6-Transformée de Fourier fenêtrée:

Le support des sinusoides  $e^{i\omega t}$  dans la transformée de Fourier couvre tout l'axe réel. Donc pour un  $\omega$  fixé,  $\hat{f}(\omega)$  dépend des valeurs de  $f$  à tout les instants  $t$  appartenants à  $\mathbb{R}$ . Pour évaluer complètement un événement local, il faudrait donc retrouver les coefficients correspondants dans toute la transformée du signal. En conséquence il est donc difficile d'analyser les caractéristiques locales de  $f$  à partir de sa transformée. Or dans beaucoup de problèmes, on recherche une certaine localisation en temps de l'analyse fréquentielle. Par exemple, la voix est un signal dont la décomposition fréquentielle varie au cours de temps, ce qui pourrait demander une certaine étude locale du signal. Une première idée qui vient à l'esprit est d'analyser le signal dans une fenêtre qui se déplace le long de l'axe des temps. Une conséquence immédiate serait alors une résolution fixe en temps et en fréquence.

Ces fenêtres sont appelées les atomes de Gabor, construites en translatant une fenêtre de base  $g$  en temps et en fréquence:

$$g_{u,\xi}(t) = g(t - u)e^{i\xi t} \quad (3-6-1)$$

La transformée de Fourier à fenêtre glissante permet d'analyser des signaux dans des fenêtres temps fréquence. Ces dernières sont fixes: on a toujours la même résolution en temps et en fréquence. Certains signaux sont une succession de phases stationnaires, ou la fréquence est stable sur une longue durée, et de phases transitoires, ou il y'a de fortes variations de fréquences sur une courte durée. D'où l'idée d'adapter les dimensions des fenêtres temps fréquence. Et par la que la théorie des ondelettes se sont introduites.

## 4-Notion des ondelettes:[4]

### 4-1-Historique :

La théorie des ondelettes est récente: elle est née au milieu des années 80. Et pourtant elle est déjà utilisée dans de nombreux domaines qu'ils soient théoriques ou pratiques: analyse harmonique, vision par ordinateur, traitement du signal, compression d'images, analyse de turbulences etc...

Le terme ondelette signifie une petite onde (selon ses inventeurs le géophysicien Morlet et le physicien croate Grossman). La petite dimension se rapporte à la condition que cette fonction

(de fenêtre) est de longueur finie (compactly supported). L'onde se rapporte à la condition que cette fonction est oscillante.

Certains chercheurs ont pensés que les ondelettes pourraient supplanter l'analyse de Fourier, un important outil mathématique, vieux de presque deux siècles utilisé dans le développement de la téléphonie, de l'informatique ou dans l'audio-visuel. Maintenant on constate que les deux langages se complètent.

Une ondelette est une onde localisée. Lorsqu'on décompose une fonction en séries de Fourier, on la décompose en fait en fréquence. La décomposition en ondelette ajoute une dimension, la décomposition est double: en fréquence mais aussi en espace. Une fonction est ainsi représentée comme une somme d'oscillations de fréquences précises se produisant à un endroit précis, c'est-à-dire une somme d'ondelettes.

Yves Meyer, un des fondateurs du sujet écrit: à l'inverse de ce qui se passe pour les séries de Fourier, les coefficients d'une série d'ondelettes traduisent de façon simple, précise et fidèle les propriétés des fonctions du moins les propriétés qui correspondent à une discontinuité, un évènement imprévu. L'idée originale sur laquelle sont basées les ondelettes est apparue dès 1940 grâce au physicien Denis Gabor qui a introduit la notion de la transformée de Fourier à fenêtre glissante dans le but de remédier au problème de localisation temps fréquence en proposant de multiplier le signal par une fonction localisée dans le temps (fenêtre) et ensuite appliquer la transformée de Fourier. L'inconvénient est que la taille et la forme de la fenêtre sont inchangées au cours de l'analyse. Or pour étudier un signal qui a en général une allure irrégulière, il est potentiellement intéressant de pouvoir changer la forme de la fenêtre analysante en temps. C'est à partir de là que sont nées les ondelettes qui s'adaptent d'elles même à la taille et aux caractéristiques qu'elles cherchent.

#### 4-2-Avantages de la transformée en ondelettes:

Le fait que la transformée utilise des fonctions bien localisées dans le plan temps fréquence, cela lui donne beaucoup d'avantages. Pour les signaux physiques présentant des variations très rapides, des sauts, des marches, bref des discontinuités; l'analyse en ondelettes est adaptée car l'ondelette va détecter ces variations.

Avec l'analyse de Fourier, les discontinuités d'un signal ne sont pas facilement analysables, car les coefficients des fréquences correspondantes sont étalées dans toute la transformée.

La transformée en ondelettes peut représenter complètement et efficacement un signal quelconque en peu de coefficients.

Lors de l'analyse des transitoires, une brusque variation (une discontinuité) du signal produit un grand coefficient d'ondelette, alors que pour un comportement du signal continu et ne variant pas trop, on obtient de petits coefficients.

#### 4-3-Principe d'incertitude:

Une limite théorique dans cette perspective est bien connue: c'est l'inégalité de Heisenberg. Soit une fonction de base  $f$  qu'on suppose de norme  $L_2$  égale à 1:

$$\int |f(t)|^2 dt = 1$$

On définit le centre  $c(f)$  et la largeur  $\Delta(f)$  d'une telle fonction par:

$$c(f) = \int t |f(t)|^2 dt$$

$$\Delta(f) = \sqrt{\int (t - c(f))^2 |f(t)|^2 dt}$$

L'inégalité de Heisenberg est une inégalité fondamentale qui s'écrit pour toute fonction  $f$  de norme 1:

$$\Delta(f)\Delta(\hat{f}) \geq \frac{1}{2}$$

Cette inégalité interdit donc d'avoir une fonction avec des largeurs temporelle et fréquentielle toutes deux aussi petite que l'on veut.

On connaît également les fonctions qui réalisent le minimum de cette limite théorique: ce sont les fonctions gaussiennes translatées et dilatées:

$$A e^{-(t-t_0)^2/2\Delta t^2} e^{i\omega_0 t}$$

Où  $A$  est un coefficient de normalisation tel que la fonction ait une norme  $L_2$  égale à 1. Pour de telles fonctions, l'inégalité de Heisenberg devient une égalité. Ces fonctions ont été appelées ondelettes de Gabor.

4-4-Ondelettes continues: il s'agit de l'analyse et de la synthèse des fonctions de carré intégrable sur la droite réelle à l'aide des translatées dilatées d'une seule fonction  $\psi$ .

$\psi$  est appelée fonction mère, ou ondelette mère.

Les ondelettes  $\psi_{a,b}$  sont les fonctions d'analyse (et de synthèse) de cette transformation et sont définies par:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (4-4-1)$$

C'est-à-dire qu'on a localisé  $\psi$  en la translatant de  $b$  et en la dilatant d'un facteur  $a$ .

Le facteur  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  est un facteur de normalisation qui assure que  $\psi_{a,b}$  a une norme  $L^2$  égale à

1.

L'analyse de  $f$  se fait à l'aide de sa transformée en ondelettes :

$$W(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \quad (4-4-2)$$

Et :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (4-4-3)$$

Ce coefficient d'ondelettes (un nombre à valeur généralement complexe) contient toutes les informations nécessaires pour conduire une analyse multi-échelle.

Par ses propriétés de dilatation –contraction, en modifiant le facteur  $a$ , et de translation, en changeant  $b$ , la transformée en ondelette est caractérisée dans le plan espace échelle par une fenêtre dont la largeur diminue lorsqu'on se focalise sur les structures de petites échelles (haute fréquence) ou s'élargit lorsqu'on s'intéresse au comportement à grande échelle (basse fréquence). La synthèse (ou reconstruction) de  $f$  à partir de ses coefficients d'ondelettes est décrite par la formule suivante:

$$f(t) = \frac{1}{C} \int_{a=-\infty}^{\infty} \int_{b=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|^2} W(a, b) \psi_{a,b}^*(t) da db \quad (4-4-4)$$

#### 4-5-Propriétés d'une ondelette mère:

La fonction ondelette mère doit répondre à certaines conditions:

1-La fonction est prise de telle sorte que son énergie vaille 1 à fin qu'elle ait un support compact ou une décroissance suffisamment rapide.

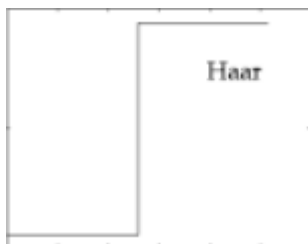
2-De moyenne nulle:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

Cette condition est appelée < condition d'admissibilité > de l'ondelette et montre tout simplement l'aspect ondulatoire de cette fonction.

#### 4-6-Exemples d'ondelettes:

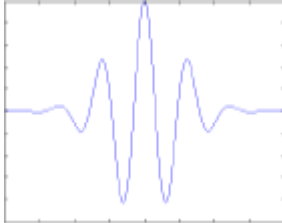
- L'ondelette de Haar: c'est la plus simple des ondelettes; définie sur l'intervalle  $[0,1]$  (parfois sur  $[-1/2, 1/2]$ ) comme suit:



$\psi(x)$  : Ondelette de Haar

C'est une ondelette simple, facile à mettre en œuvre; son support est compact, donc bien localisée en espace.

- L'ondelette de Morlet: il s'agit de la gaussienne modulée :



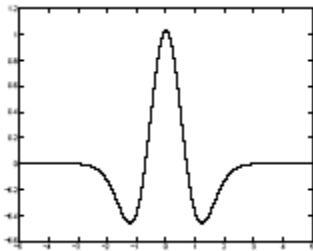
$\psi(x)$  : ondelette de Morlet

- L'ondelette chapeau mexicain:

$$\Psi(t) = c_1 (1 - t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$C_1$  est telle que  $E_\Psi = 1$

C'est la dérivée seconde de la gaussienne, et  $\hat{\Psi}(\nu) = c_2 \nu^2 e^{-\frac{\nu^2}{2}}$



$\psi(x)$  : ondelette chapeau mexicain

#### 4-7- Transformée par ondelettes discrète:

Le support d'une transformée continue est en théorie infinie; pourtant il est possible de démontrer que la reconstruction du signal original ne nécessite qu'un ensemble discret de valeurs de a et de b. En générale on pose  $a=2^k$ , k entier, et  $b=2^l$ , l entier, ce qui revient à échantillonner les coordonnées (a, b) sur une grille identique à celle montrée sur la figure (1).

On parle souvent de découpage temps fréquence puisque a représente la fréquence et b le facteur temps. Ce processus s'appelle échantillonnage dyadique car les valeurs consécutives des valeurs discrètes du facteur d'échelle a diffèrent par un facteur deux.

Finalement la transformée par ondelette discrète (TOD) d'une fonction f est de la forme:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_k^l 2^{-k/2} \psi(2^{-k}t - l)$$

Cette équation apparaîtra naturellement dans le contexte d'analyse multi résolution (AMR).

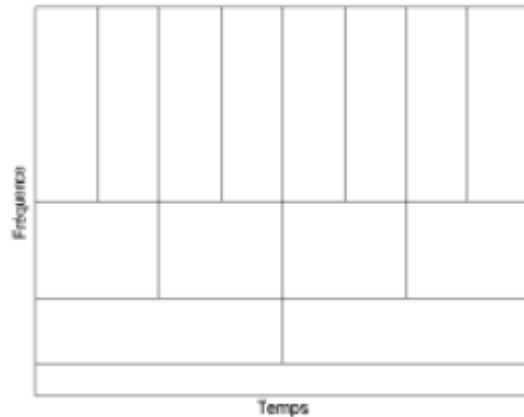


Fig. (1): échantillonnage temps fréquence de la transformée discrète.

Explication du schéma :

Le schéma représente le pavage temps fréquence pour la transformée en ondelette discrète ou un pavé élémentaire de cet espace est de surface constante tandis que la résolution temporelle est proportionnelle à  $a$  (facteur d'échelle) et que la résolution fréquentielle est inversement proportionnelle à  $a$ .

4-8-Analyse multi résolution orthonormée (AMR):

- Définition: on appelle Analyse multi résolution orthormée de  $L^2(\mathbb{R})$  toute suite  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  d'espaces fermés de  $L^2(\mathbb{R})$  avec les propriétés suivantes:
  - (i)  $\forall j \in \mathbb{Z} : V_j \subset V_{j+1}$
  - (ii)  $\forall j \in \mathbb{Z} : f \in V_j \Leftrightarrow f(2 \cdot) \in V_{j+1}$
  - (iii)  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
  - (iv)  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$
  - (v) il existe une fonction  $\varphi \in V_0$ , appelée fonction d'échelle telle que  $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  est une base orthonormale de  $V_0$ .

Par conséquence, à chaque degré de résolution  $j$ , la famille de fonctions  $\{\varphi_{jk} := 2^{j/2} \varphi(2^j \cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  forme une base orthonormée de l'espace  $V_j$  pour la norme  $L^2$ . Comme  $\varphi$  appartient à  $V_0$  et  $V_0$  est inclus dans  $V_1$ , il en résulte que  $\varphi$  peut s'exprimer comme combinaison linéaire, donc il existe une suite de réels  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  telle que :

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2x - k) \tag{4-8-1}$$

En intégrant l'équation (4-8-1) et comme la fonction d'échelle est normalisée à 1 alors on déduit que la suite  $(h_k)$  vérifie:

$$\sum_k h_k = \sqrt{2} \tag{4-8-2}$$

La fonction d'échelle est complètement déterminée par l'équation (4-8-1) et la condition de normalisation:  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$

L'espace  $V_j$  engendré par la famille  $\{\varphi_{jk} := 2^{j/2} \varphi(2^j \cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$  servira à approximer les fonctions en calculant les projections de celles-ci sur  $V_j$ . Comme  $\overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$  alors toute fonction élément de  $L^2(\mathbb{R})$  peut être approximée en calculant ses projections. Pour pouvoir approximer les fonctions constantes il faut supposer que la fonction d'échelle et ses translatées forment une partition de l'unité:  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x - k) = 1$

Par passage aux transformées de Fourier (4-8-1) devient :

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

Ou  $m_0$  est une fonction périodique définie par:

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-ik\xi}$$

On va prendre  $\varphi$  telle que:

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

Soit  $W_j$  l'espace complémentaire de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$  et on écrira :

$$L_2(\mathbb{R}) = \overline{\cup_{j \geq 0} V_j} = V_0 \oplus \bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j$$

Par définition, l'espace  $W_j$  contient l'information manquante lors du passage de  $V_j$  à  $V_{j+1}$  donc c'est l'espace des détails à l'échelle  $j$ .

Donc pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $W_j$  est défini par :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \oplus W_j = \dots = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_j = V_0 \oplus \bigoplus_{l=0}^j W_l$$

D'ou:

$$L_2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{j \geq 0} V_j} = V_0 \oplus \bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j.$$

Ainsi en notant pour tout  $j$ ,  $(\psi_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}$  une base de  $W_j$ , toute fonction de  $L^2(\mathbb{R})$  peut s'écrire comme la série (convergente dans  $L^2(\mathbb{R})$ ) :

$$f(x) = \sum_k a_k \varphi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_k \beta_{jk} \psi_{jk}(x) \quad (4-8-3)$$

Les coefficients d'ondelettes sont:

$$a_k = \int f(x) \overline{\varphi_{0k}(x)} dx, \quad \beta_{jk} = \int f(x) \overline{\psi_{jk}(x)} dx \quad (4-8-4)$$

La fonction  $\Psi$  est appelée ondelette. Donc à tout niveau de résolution  $j \in \mathbb{Z}$ , la famille

$\psi_{jk}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}x - k)$  forme une base orthonormée de  $W_j$ . Et d'une manière similaire comme  $W_0$  est inclus dans  $V_1$ ; il existe une suite de réels  $(g_k)$  telle que :

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_n g(n) \phi(2x - n) \quad (4-8-4)$$

Cette relation s'appelle relation à deux échelles.

Qui s'écrit aussi :

$$\hat{\psi}(x) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (4-8-5)$$

Où  $m_0$  et  $m_1$  sont les fonctions de transfert des filtres  $\frac{1}{\sqrt{2}}h$  et  $\frac{1}{\sqrt{2}}g$ .

En comprimant ou en dilatant  $\psi$  on construit alors des bases orthonormées des autres espaces de détails.

Comme nous venons de voir, l'idée de la multi résolution consiste à représenter une fonction comme une limite de ses approximations successives ou chacune est une version lissée de la précédente. Les approximations successives sont présentées à différentes



résolutions. Cette analyse nous permet d'obtenir une base de fonctions d'échelles et une base d'ondelettes.

La décomposition multi échelle, comme nous venons de voir, revient à projeter le signal ou la fonction d'une part sur la base des fonctions d'échelles ce qui nous donne des approximations à différentes résolutions et d'autre part sur la base d'ondelettes ce qui nous permet d'obtenir les détails nécessaires à la synthèse.

#### 4-9-Les filtres:[4]

D'un point de vue mathématique, un filtre peut être une fonction ou une suite de nombres s'il est numérique. Un filtre classique est un dispositif électronique disposant d'un fil d'entrée portant le signal et d'un fil de sortie portant le signal filtré. On peut citer l'exemple de filtre passe bas et de filtre passe haut. En effet, pour les mathématiciens un filtre est un opérateur de l'espace fonctionnel; c'est-à-dire une application d'une fonction de l'espace fonctionnel sur une autre de cet espace.

Donc la relation suivante consacrée à l'analyse de Fourier:

$$\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

nous permet de préciser l'action d'un filtre sur un signal. Un filtre est un opérateur de l'espace fonctionnel  $L^2$  qui applique un signal  $f(t)$  sur sa convolée avec une fonction  $g(t)$  caractéristique du filtre.

$$f(t) * g(t) = F(t)$$

Grâce au théorème de Plancherel, nous pouvons détailler l'effet d'un filtre sur un signal:

$$\hat{F}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

Mallat a eu l'idée de considérer l'analyse par ondelette comme une décomposition du signal par une cascade de filtres, associant une paire de filtres à chaque niveau de résolution.

L'utilisation d'ondelettes orthogonales dans un système de multi résolution fondée sur des filtres aboutit à une multi résolution complète et rapide du signal. Les ondelettes ont apporté au traitement de signal la régularité, les filtres ont apporté la rapidité.

#### 4-10-Construction des bases d'ondelettes orthonormées de $L^2$ :

La base reine a été longtemps le système trigonométrique. On savait depuis les travaux de Bernoulli sur l'équation des ondes et les travaux de Fourier motivés par l'équation de chaleur, que cette base est incroyablement bien adaptée à la recherche des solutions de nombreux problèmes de physique. Malheureusement, les mathématiciens commencèrent à

rencontrer de sérieux problèmes depuis que Du-Bois-Reymond démontra en 1873 que la série de Fourier d'une fonction continue peut diverger en certains points .

Alfred Haar construisa en 1909 une base orthonormée de  $L^2([0,1])$  définis par:

$$\psi_{JK}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}x - k) \quad (4-10-1)$$

Haar montra que les sommes partielles de la décomposition d'une fonction continue dans cette base convergent d'une façon uniforme. Sa base possédait une autre propriété remarquable qui a fait défaut au système trigonométrique du fait qu'elle est une base incondionnelle. Par contre cette base ne peut pas être une base d'espace ne contenant que des fonctions continues puisque ses éléments ne sont pas continus; cette remarque a motivé les recherches pour régulariser sa base. Le but était de construire des bases bien localisées et adaptées à une plus grande gamme d'espace fonctionnelle. En 1927 Schauder a découvert une base qui a pris son nom, ayant une même forme algorithmique que la base de Haar mais en prenant pour la primitive de l'ondelette de Haar.

En 1928, Franklin applique le procédé d'ortho normalisation à la base de Schauder et obtient une base qui est simultanément incondionnelle pour les espaces  $L^p$  et pour les espaces de Sobolev de faible régularité.

A un autre extrême, on notera l'existence de la base de Shannon ou l'ondelette est mal localisée en espace. En 1981 Stromberg fournit une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$  qui a la forme algorithmique de (1).

Un perfectionnement sera apporté par Yves Meyer qui construit en 1986 [3] une ondelette à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées. Cette base convient pour l'analyse de tous les espaces de Sobolev.

Il s'agit de bases ortho normales de  $L^2(\mathbb{R})$  de la forme  $\psi_{jk}(x)$  représentant une translatée dilatée dyadique d'une ondelette mère  $\Psi$  :

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \quad (4-10-2)$$

Toutes les bases découlent d'analyse multi résolution introduite par Mallat en 1986.

Les bases d'ondelettes peuvent présenter des propriétés très intéressantes permettant une transformée efficace et rapide. Un support local et l'orthogonalité sont très certainement les deux plus importants:

- L'orthogonalité assure que l'information est encodée de façon optimale (sans redondance).
- Un support étroit permet quant à lui une reconstruction rapide.

#### 4-11-Ondelettes orthogonales:

Les ondelettes orthogonales sont des ondelettes  $\psi$  telles que la famille  $2^{j/2}\psi(2^j t - k)$  soit une base orthogonale de  $L^2(\mathbb{R})$ . Historiquement, les premières ondelettes qui ont été mises au point sont les ondelettes orthogonales (Meyer, Mallat), si bien que les familles d'ondelettes non orthogonales ont reçu l'appellation d'ondelettes bi orthogonales. Le préfixe bi est censé rappeler que deux bases d'ondelettes sont utilisées, une pour l'analyse (la base duale) et une pour la reconstruction.

Il existe un certain nombre de famille d'ondelettes orthogonales couramment utilisées. Les plus connues sont sans doute les ondelettes de Daubechies. Ces ondelettes résultent de compromis optimaux entre deux critères contradictoires: le nombre de moments nuls des ondelettes et la taille de leur support. Il existe d'autres familles d'ondelettes orthogonales, comme les coiflets, du nom de Ronald Coifman, ou les symmlets qui sont des ondelettes presque symétriques.

Les bases d'ondelettes orthonormées ont un avantage théorique considérable dans les problèmes de compression et de débruitage.

En pratique, les bases d'ondelettes biorthogonales n'offrent pas la même souplesse dans leur conception que les ondelettes orthogonales. Il faut noter que la relation duale entre la base d'analyse des  $(\tilde{\psi}_{jk})$  et de reconstruction  $(\psi_{jk})$  est symétrique et que les rôles peuvent être inter changés, on peut très bien utiliser la dernière base pour l'analyse et la première pour la reconstruction pour avoir la formule:

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_{jk}, f \rangle \tilde{\psi}_{jk} \quad (4-11-1)$$

Au lieu de la formule:

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{jk} \rangle \psi_{jk} \quad (4-11-2)$$

## 5-Algorithmes:

Le choix de l'algorithme est très lié au choix de l'ondelette et au type de transformations utilisées.

Les aspects numériques ont joué un rôle important dans le succès des ondelettes. Deux algorithmes principaux ont été mis en évidence : l'algorithme à trou et l'algorithme de Mallat. Le premier concerne l'analyse multirésolution non-orthogonales, le second est pratiquement le seul utilisé dans le cas des analyses orthogonales et bio-orthogonales.

### 5-1-Algorithme d'analyse :

-projection sur les fonctions d'échelles :

Le but de l'algorithme est de calculer les coefficients d'ondelettes à partir des différentes approximations.

Le point clef est fourni par la décomposition de  $a_n^j = \langle f, \varphi_{j,n} \rangle$  en fonction de  $a_n^{j-1} = \langle f, \varphi_{j-1,n} \rangle$ .

Par construction  $\varphi(x)$  est une fonction de  $V_0$  et  $V_0 \subset V_{-1}$ , on peut donc décomposer  $\varphi(x)$  sur la base de  $V_{-1}$ , il existe alors une suite numérique telle que :

$$\varphi(x) = \sum_n h[n] \varphi_{-1,n}(x) \tag{5-1-1}$$

Avec :

$$\varphi_{-1,n}(x) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j} x - n) \tag{5-1-2}$$

$h[n]$  sera considérée comme étant la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique.

A partir de (5-1-1) et (5-1-2) nous aurons :

$$\varphi(x) = \sum_n h[n] 2^{1/2} \varphi(2x - n)$$

Donc :

$$\varphi_{j,n}(x) = 2^{-j/2} \sum_k h[k] 2^{1/2} \varphi(2^{-j} x - n - k) \tag{5-1-3}$$

Nous aboutirons à :

$$\varphi_{j,n} = \sum_k h[k] \varphi_{j-1,k+2n} \tag{5-1-4}$$

Finalement on peut calculer  $a_n^j = \langle f, \varphi_{j,n} \rangle$  de l'approximation à la résolution  $j$  :

$$a_n^j = \sum_k h[k] \langle f, \varphi_{j-1,k+2n} \rangle \tag{5-1-5}$$

En posant  $l=k+2n$  on aura :

$$a_n^j = \sum_l h[l - 2n] \langle f, \varphi_{j-1,l} \rangle \tag{5-1-6}$$

Si on note  $\tilde{h}[n] = h[-n]$  le filtre symétrique de  $h$ , on obtient donc :

$$a_n^j = \sum_l \tilde{h}[2n - l] a_l^{j-1} \tag{5-1-7}$$

**Interprétation :**

En considérant  $a_n^j$  comme une séquence numérique avec l'indice  $n$ , ce calcul peut être interprété comme un produit de convolution entre  $\tilde{h}$  et  $a^{j-1}$  évalué pour un indice sur deux.

**-Projection sur les fonctions d'ondelettes :**

Un schéma analogue est suivi pour la décomposition de l'ondelette pour aboutir finalement à l'écriture suivante :

$$d_n^j = \sum_l \tilde{g}[2n-l] d_l^{j-1} \quad (5-1-8)$$

Avec :

$d_n^j$  est le coefficient de détail et  $g[n]$  la réponse impulsionnelle du filtre numérique associé à l'ondelette.

Remarque :

Les mêmes interprétations peuvent être faites comme celles concernant les fonctions d'échelles.

### 5-2-Algorithme de reconstruction :

La décomposition est basée sur l'équation :

$$A_{j-1}f = \sum_n a_n^j \varphi_{j,n} + \sum_n d_n^j \psi_{j,n} \quad (5-2-1)$$

Avec :

$$a_n^j = \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \text{ et } d_n^j = \langle f, \psi_{j,n} \rangle \quad (5-2-2)$$

$A_j$  est un projecteur, donc on peut écrire :

$$A_{j-1}f = \sum_n a_n^{j-1} \langle A_{j-1}f, \varphi_{j-1,n} \rangle \varphi_{j-1,n} \quad (5-2-3)$$

En faisant le changement de variable, on aura l'équation suivante :

$$a_n^{j-1} = \sum_n a_n^j \langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j-1,n} \rangle + \sum_n d_n^j \langle \psi_{j,k}, \varphi_{j-1,n} \rangle \quad (5-2-4)$$

Or nous avons vu précédemment :

$$\varphi_{j,k} = \sum_l h[l] \varphi_{j-1,l+2k}$$

Pour deux résolutions successives quelconques, on pourra évaluer le produit scalaire :

$$\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j-1,n} \rangle = \sum_l h[l] \delta[n-l-2k] \langle \varphi_{j-1,l+2k}, \varphi_{j-1,n} \rangle \quad (5-2-5)$$

Puisque les fonctions d'échelle forment une base orthonormée pour une échelle donnée, nous en fin :

$$\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j-1,n} \rangle = h[n-2k] \quad (5-2-6)$$

Et de même pour les ondelettes :

$$\langle \psi_{j,k}, \varphi_{j-1,n} \rangle = g[n-2k] \quad (5-2-7)$$

D'où l'on aboutit à l'équation de reconstruction :

$$a_n^{j-1} = \sum_k a_k^j h[n-2k] + \sum_k d_k^j g[n-2k] \quad (5-2-8)$$