# La symétrisation de Schwarz et quelques applications

# Table des Matières

# Notations

- $\mathbb{R}^N$ est un espace Euclidien de dimension $N$.
- Si $x, y \in \mathbb{R}^N$alors $x.y$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$, c-à-d:

$x = (x_1, ......., x_N)$, et $y = (y_1, ..........., y_N)$, alors $x.y = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i.y_i$

- Si $x \in \mathbb{R}^N$, $|x| = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
- Si $E \subset \mathbb{R}^N$ , alors $|E|$est la mesure de Lebesgue .
- Si $E \subset \mathbb{R}^N$, alors $E^*$est la boule de centre à l'origine telle que $|E| = |E^*|$ .
- $B(x; r)$ est la boule dans $\mathbb{R}^N$ de centre $x$ et de rayon $r$.
- $\omega_N$ est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^N$ tel que $\omega_N = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}$ , avec $\Gamma(s)$ est la fonction Gamma usuelle.
- Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné, alors $\partial\Omega$ sa frantière.
- Soit $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ est la partie positive de $u$.
- $u^- = -\min\{u, 0\}$ est la partie négative de $u$.
- $\nabla u$ est le gradiant de la fonction $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^t = \nabla u$.
- $\Delta u$ est le laplacien de la fonction $u$:$\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ c-à-d: $\triangle u = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \mathrm{div}(\nabla u)$.
- $u^\#$ est le réarrangement unidimensionnel de $u$ .
- $u^*$ est la symétrie sphérique et le réarrangement décroissant de $u$ .
- sup ess(u)=inf $\{M \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \leq M \quad p.p\}$ .
- inf ess(u)=sup $\{M \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \geq M \quad p.p\}$ .

- $C^{0}\left(\overline{\Omega}\right)$ est l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.

- $C^{k}\left(\overline{\Omega}\right)$ est l'espace des fonctions $k$ fois continuement différentiables sur $\overline{\Omega}$; ($k$ $\in \mathbb{N}$).

- $C^{\infty}\left(\Omega\right) = \underset{k\geq 0}{\cap} C^{k}\left(\Omega\right).$

- $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions $C^{\infty}$ à support compact dans $\Omega$.

- $L^{1}\left(\Omega\right) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ intégrable tel que } \int\limits_{\Omega} \left| f\left(x\right)\right| dx < +\infty \right\}.$

- $L^{p}\left(\Omega\right) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{+},\ u \text{ mesurable et } \left| u\right|^{p} \in L^{1}\left(\Omega\right)\right\},\ 1 < p < +\infty$

$$\left\| u\right\|_{L^{p}(\Omega)} = \left[ \int\limits_{\Omega} \left| u\left(x\right)\right|^{p} dx\right]^{1/p}.$$

- $L^{\infty}\left(\Omega\right) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{+} \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } c \text{ telle que } \left| u\left(x\right)\right| \leq c \ \ p.p \text{ sur } \Omega\right\}.$

$$\left\| u\right\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \inf\left\{ c;\ \left| u\left(x\right)\right| \leq c \ \ p.p \text{ sur } \Omega\right\}.$$

# Introduction générale

Ce mémoire est consacré à l'étude de la symétrisation de Schwarz et certaines de ces applications.

La symétrisation de Schwarz est une méthode de modélisation de certains problèmes de la physique, et aussi l'un des principaux outils dans l'étude des inégalités isopérimétriques et les problèmes de compacité.

Plusieurs types de symétrisation sont connues dans la littérature mathématique, on peut citer la symétrisation de Steiner, la symétrisation de chapeau et la symétrisation de Schwarz, que l'on va considérer dans ce mémoire.

La symétrisation de Schwarz est aussi connue comme le réarrangement décroissant des fonctions à symétrie sphérique. Ce type de symétrisation consiste de passer d'une fonction quelconque à une fonction radiale décroissante, tout en conservant la norme dans les espaces $L^p$, et en faisant décroitre la norme du gradient pour certaine classe de fonctions admissibles, alors pour quelques problèmes variationnels on peut utiliser $u^*$(où $u^*$ est la symétrisation de Schwarz de la fonction $u$) au lieu de la fonction générale $u$. Ces propriétés nous permettent de démontrer l'existence de solutions de quelques équations elliptiques avec perte de compacité où les méthodes classiques sont difficiles à utiliser.

Les premiers résultats obtenus dans cette direction ont été prouvé par Polya-Szégö en 1951. Puis complété par plusieurs mathématiciens comme Bandle en 1980, et Mossino en 1984. Depuis lors, plusieurs nouveaux résultats ont été prouvés, et quelques conjectures ont été résolues, particulièrement celle liées au sujet des valeurs propres des opérateurs différentiels partiels elliptiques.

Ce travail est donc divisé en trois chapitres organisés de la manière suivante:

Le premier chapitre est consacré aux rappels des définitions et des théorèmes fondamentaux basés surtout sur les critères de convergence et quelques inégalités connues comme l'inégalité de Sobolev. Les références principales pour ce chapitre sont [2, 8, 12,6].

Dans le deuxième chapitre on définit la notion de la symétrisation de Schwarz et les principaux résultats du réarrangement, ensuite on parle d'un résultat très important de la symétrisation de Schwarz, c'est l'inégalité de Polya-Szégö. Pour plus de détails le lecteur est renvoyé aux [11, 5, 9,7, 12,10].

Enfin, en chapitre trois on montre comment ces techniques on été appliquées .Pour plus de détails le lecteur est renvoyé aux [12, 11, 10, 1, 3,7].

# Chapitre 1

# Préliminaire

## 1.1 La convergence faible dans un Banach

**Définition 1.1** *Soit $E$ un espace de Banach, $E'$ son dual et $\langle .,. \rangle$ le produit de dualité sur $E' \times E$.*

- On dit que la suite $(x_n)$ de $E$ converge faiblement vers $x \in E$ si et seulement si :

$$\langle x', x_n \rangle \to \langle x', x \rangle, \forall x' \in E', \tag{1.1}$$

  et on écrit:

$$x_n \rightharpoonup x \ \text{ faib. dans } E. \tag{1.2}$$

- On dit que la suite $(x'_n)$ de $E^{'}$ converge faiblement $*$ vers $x' \in E^{'}$ si et seulement si :

$$\langle x'_n, x \rangle \to \langle x', x \rangle, \forall x \in E, \tag{1.3}$$

  et on écrit:

$$x'_n \rightharpoonup x' \text{ faib.} * \text{ dans } E'. \tag{1.4}$$

**Théorème 1.1** *Soit $E$ un espace de Banach, $E'$ son dual. Soient $(x_n)$ et $(x'_n)$ deux suites de $E$ et de $E'$ respectivement.*

- Soit $x_n \rightharpoonup x$ faib. dans $E$, alors:

$$\begin{cases} \exists k > 0 \text{ t.q. } \forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\|_E \leq k \\ \|x\|_E \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf \|x_n\|_E \end{cases} \tag{1.5}$$

- Soit $x'_n \rightharpoonup x'$ faib.$*$ dans $E'$, alors:

$$\begin{cases} \exists k > 0 \text{ t.q. } \forall n \in \mathbb{N} : \|x'_n\|_{E'} \leq k \\ \|x'\|_{E'} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf \|x'_n\|_{E'} \end{cases} \tag{1.6}$$

- Si $x_n \to x$ (fortement dans $E$), alors $x_n \rightharpoonup x$ faib. dans $E$.

- Si $x'_n \to x'$ (fortement dans $E'$), alors $x'_n \rightharpoonup x'$ faib.$*$ dans $E'$.
- Si $x_n \rightharpoonup x$ faib. dans $E$ et $x'_n \to x'$ (fortement dans $E'$), alors $\langle x'_n, x_n \rangle \to \langle x', x \rangle$.

**Définition 1.2** *Soit $E$ un espace de Banach, soit $E'$ son dual et soit $E''$ son bidual, i.e le dual de $E'$ .*

*On a une injection canonique $J : E \to E''$ définie comme suit : soit $x \in E$ fixé, l'application $x' \to \langle x', x \rangle$ de $E'$ dans $\mathbb{R}$ constitue une forme linéaire continue sur $E'$ i.e un élément de $E''$ noté $Jx$.On a donc $\langle Jx, x' \rangle_{E'', E'} = \langle x', x \rangle_{E', E}$ , $\forall x \in E, \forall x' \in E'$.*

**Définition 1.3** ***(Espace réflexif):*** *Soit $E$ un espace de Banach et soit $J$ l'injection canonique de $E$ dans $E''$ . On dit que $E$ est réflexif si $J(E) = E''$.*

**Définition 1.4** ***(Espace séparable):*** *On dit qu'un espace de Banach $E$ est séparable s'il existe un ensemble au plus dénombrable et dense dans $E$.*

**Théorème 1.2** *Soit $E$ un espace de Banach réflexif et soit $(x_n)$ une suite bornée de $E$, alors :*

- *il existe une sous suite $(x_{n_k})$ de $(x_n)$ et $x \in E$ tel.que.*
$$x_{n_k} \rightharpoonup x \quad \textit{faib. dans } E. \tag{1.7}$$
- *Si chaque sous suite converge faiblement vers la même limite $x$, alors:*
$$x_n \rightharpoonup x \quad \textit{faib. dans } E. \tag{1.8}$$

## 1.2 Les espaces $L^p$

**Définition 1.5** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$.*
***i)*** *Pour $p = 1$, on pose*

$$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \textit{ intégrable telle que } \int_\Omega |f(x)|\, dx < +\infty \right\}$$

***ii)*** *Soit $1 < p < +\infty$. On pose*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ ; \ f \textit{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}$$

*et on note:*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_\Omega |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \tag{1.9}$$

*où $\|.\|_{L^p(\Omega)}$est une norme sur $L^p(\Omega)$.*
***iii)*** *pour $p = +\infty$, on pose*

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \textit{ mesurable et } \exists \textit{ une constante } C \textit{ telle que } |f(x)| \leq C \textit{ p.p sur } \Omega \}$$

*Dans ce cas on a:*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ \ C \ ; \ |f(x)| \leq C \textit{ p.p sur } \Omega \}\,. \tag{1.10}$$

*où $\|.\|_{L^\infty(\Omega)}$ est une norme sur $L^\infty(\Omega)$.*

**Remarque 1.1** ***(i)*** *L'espace $L^p$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$.*
***(ii)*** *L'espace $L^p$ est un espace réflexif pour$1 < p < +\infty$.*
***(iii)*** *L'espace $L^p$ est un espace séparable pour$1 \leq p < +\infty$, pour $p = +\infty$ l'espace $L^p$ n'est réflexif ni séparable .*

**Remarque 1.2** ***a)*** *Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On désigne par $q$ l'exposant conjugué de $p$ c-à-d : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*
***b)*** *Soit $1 \leq p < +\infty$. Alors l'espace dual de $L^p(\Omega)$ est $L^q(\Omega)$.*

On utilise souvent l'inégalité algébrique suivante:
**Inégalité de Young**: Soit $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$|ab| \leq \frac{1}{p} |a|^p + \frac{1}{q} |b|^q$$

avec $p$ et $q$ sont conjugés.
Comme application on a

**Théorème 1.3** *(Inégalité de Hölder)*
*Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ et $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Alors*

$$(f, g) \in L^1(\Omega) \text{ et } \int_\Omega |(f(x), g(x))| \, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)} \tag{1.11}$$

Plus généralement, on utilise souvent l'inégalité suivante connue comme l'inégalité de Hölder généralisée

**Lemme 1.1 (Inégalité de Hölder généralisée)** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $1 \leq p_i \leq +\infty$ pour $i = 1, ..., N$ et $\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} = 1$, alors , pour $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ avec $i = 1, .., N$,*

$$\int f_1(x) ......f_N(x) \, dx \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} ...... \|f_N\|_{L^{p_N}(\Omega)} \, .$$

**Preuve:**
Le cas $N = 1$ c'est l'inégalité de Hölder usuelle.
Le cas $N \neq 1$: Soit $p'_N$ tel que $\dfrac{1}{p'_N} + \dfrac{1}{p_N} = 1$ ; et $p_N > p_i$ ,$\forall i < N$, alors

$$\int f_1(x) ......f_N(x) \, dx \leq \|f_1 ..............f_{N-1}\|_{L^{p'_N}} \|f_N\|_{L^{p_n}}$$

avec $\dfrac{p_{N'}}{p_1} + ......... + \dfrac{p_{N'}}{p_{n-1}} = 1$ et

$$\begin{aligned}
\|f_1 ..............f_{N-1}\|_{L^{p'_N}} &= \int (|f_1|^{p'_N} .... |f_{N-1}|^{p'_N} \, dx)^{\frac{1}{p'_N}} \\
&\leq \left\{ \left( \int |f_1|^{p_1} \, dx \right)^{\frac{p'_N}{p_1}} .... \left( \int |f_{N-1}|^{p_{N-1}} \, dx \right)^{\frac{p'_N}{p_{N-1}}} \right\}^{\frac{1}{p'_N}} \\
&= \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} ........... \|f_N\|_{L^{p_{N-1}}(\Omega)} \, .
\end{aligned}$$

■

Une conséquence directe de l'inégalité de Hölder, c'est l'inégalité d'interpolation suivante:

**Lemme 1.2 ( Inégalité d'interpolation)** *Soient* $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *avec* $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ *, alors* $f \in L^r(\Omega)$ *pour tout* $p \leq r \leq q$ *et l'on a :*

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{1-\alpha}$$

*où* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{1-\alpha}{q} \qquad (0 \leq \alpha \leq 1).$

## 1.3 Quelques critères de convergence

On regroupe ici les résultats qui permettront de manipuler les différentes notions de convergence de suites dans les espaces $L^p(\Omega)$.

**Théorème 1.4 (Théorème de la convergence monotone)** *Soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite croissante de fonctions mesurables positives. On note*

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x)$$

*on a :*

$$\int_{\Omega} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n(x)\,dx$$

**Lemme 1.3 (Lemme de Fatou)** *Soit* $(f_n)_n$ *une suite des fonctions mesurables positives, alors:*

$$\int_{\Omega} \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)\,dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_{\Omega} f_n(x)\,dx$$

**Théorème 1.5 (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)** *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions de* $L^1(\Omega)$ *convergeant presque partout vers une fonction mesurable* $f$ *.On suppose qu'il existe* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que pour tout* $n \geq 1$ *, on ait* $|f_n| \leq g \quad p.p$ *sur* $\Omega$*.Alors* $f \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0$$

$$\int_{\Omega} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n(x)dx$$

**Lemme 1.4 (Brezis-Lieb)** *Soient* $1 \leq p < +\infty$ *et* $(f_n)_n$*une suite bornée de fonctions de* $L^p(\Omega)$*convergeant p.p vers* $f \in L^p(\Omega)$ *et*

$$\|f\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \left( \|f\|_p^p - \|f - f_n\|_p^p \right)$$

## 1.4 Espace de Sobolev

### 1.4.1 Définitions et quelques propriétés

**Définition 1.6** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert et* $1 \leq p \leq +\infty$, *on définit l'espace de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega),\ \text{tel que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \right\}.$$

*Pour* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *on note* :$\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *la dérivé partielle au sens faible. L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

*ou parfois sa norme équivalente:*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left( \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \quad (si\ \ 1 \leq p < +\infty)$$

**Définition 1.7** *Soit* $1 \leq p < +\infty$. *L'espace* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *est défini comme la fermeture de* $C_0^\infty(\Omega)$ *par rapport à la norme de* $W^{1,p}(\Omega)$.

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega)\ \ / \nabla u \in (L^p(\Omega))^N \ \ et\ u_{|\partial\Omega} = 0 \right\}$$

**Proposition 1** ***(i)*** *L'espace* $W^{1,p}$ *est un éspace de Banach pour* $1 \leq p \leq +\infty$ *.*
***(ii)*** *L'espace* $W^{1,p}$ *est un espace réflèxif pour* $1 < p < +\infty$ *.*
***(iii)*** *L'espace* $W^{1,p}$ *est un espace séparable pour* $1 \leq p < +\infty$ *.*
***(iv)*** *L'espace* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach séparable; il est de plus réflexif pour* $1 < p < +\infty$.

**Remarque 1.3** *Si* $\Omega$ *est borné, la quantité* $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)}$ *définit une norme sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$,*on la note par* $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ *, qui est équivalente à la norme* $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ .*(pour* $1 \leq p < +\infty$*)*

***Remarque 1.4*** *Comme* $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ *est dense dans* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$,*on a* $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, *par contre si* $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^N$ *on a*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \neq W^{1,p}(\Omega)$$

**Théorème 1.6 (Friedrichs)** *Soit* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *avec* $1 \leq p < +\infty$ *, alors il existe une suite* $(u_n)_n$ *de* $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ *telle que:*
(1) $u_{n|\Omega} \to u$ *dans* $L^p(\Omega)$
(2) $\nabla u_{n|\omega} \to \nabla u_{|\omega}$ *dans* $L^p(\Omega)$ *pour tout* $\omega \subset\subset \Omega$.

**Théorème 1.7 (Rellich-Kondrachov)** *On suppose* $\Omega$ *borné de classe* $C^1$, *on a:*
*Si* $p < N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[$ *où* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$
*Si* $p = N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$
*Si* $p > N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset C\left(\overline{\Omega}\right)$
*avec injections compactes .*

**Remarque 1.5** *L'injection compacte permet de passer de la convergence faible à la convergence forte.*

**Remarque 1.6** *Si* $q = p^*$ $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *avec injection continue .*

**Théorème 1.8 (Sobolev-Gagliardo-Niremberg)** *Soit* $1 \le p < N$, *alors* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ *où* $p^*$*est donné par :*$\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$ *et il exite une contante* $S = S(p,N)$ *telle que*

$$S \|u\|_{L^{p^*}} \le \|\nabla u\|_{L^p} \ ,\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

**Preuve:** On pose $D_i = \dfrac{d}{dx_i}$ , $\forall i = 1, ..., N$
**Le premier cas**: $p = 1 < N$
Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ on a:

$$|u(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} D_i u(x) dx_i \right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)| \, dx_i \ ,\forall i$$

On sait que

$$|u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \le \prod_{i=1}^{N} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u| \, dx_i \right)^{\frac{1}{N-1}}$$

Intégrant sur $\mathbb{R}^N$,et on utilise l'énégalité de Hölder,on obtient:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} dx &\le \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{i=1}^{N} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u| \, dx_i \right)^{\frac{1}{N-1}} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D_1 u| \, dx_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \prod_{i=2}^{N} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u| \, dx_i \right)^{\frac{1}{N-1}} dx_1 ... dx_N \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D_1 u| \, dx_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=2}^{N} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u| \, dx_i \right)^{\frac{1}{N-1}} dx_1 ... dx_N \\
&\le \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D_1 u| \, dx_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \prod_{i=2}^{N} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u| \, dx_i dx_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} dx_2 .. dx_N
\end{aligned}$$

Donc:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} dx \le \left( \prod_{i=1}^{N} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u| \, dx_i \right)^{\frac{1}{N-1}} \right)$$

On sait que

$$\forall a_1,..,a_N : \prod_{i=1}^{N} a_i \leq \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right)^N \quad \text{et} \quad \left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right)^2 \leq N\sum_{i=1}^{N} a_i^2$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}}\,dx &\leq \left(\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N} |D_i u|\,dx\right)^N\right)^{\frac{1}{N-1}} = \frac{1}{N^{\frac{1}{N-1}}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|\,dx\right)^{\frac{N}{N-1}} \\ &\leq \frac{1}{N^{\frac{1}{N-1}}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|\,dx\right)^{\frac{N}{N-1}}\end{aligned}$$

ainssi pour $C_N$ une constante qui dépend seulement de $N$ on a

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq C_N \|\nabla u\|_{L^1}$$

**Le deuxième cas** :pour $p \neq 1$ :
On applique l'inégalité précédente pour $|u|^\gamma$ avec $\gamma > 0$

$$\begin{aligned}\||u|^\gamma\| &\leq \gamma C_N \left\||u|^{\gamma-1}|\nabla u|\right\|_{L^1} \\ &\leq \gamma C_N \left\||u|^{\gamma-1}\right\|_{L^{p'}} \||\nabla u|\|_{L^p} \quad (\text{ d'aprés l'inégalité de Hölder })\end{aligned}$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, On choisit $\gamma$ tel que $\frac{\gamma N}{N-1}=(\gamma-1)\,p'$, donc $\gamma=\frac{(N-1)p}{N-p}>0$.
Comme $\frac{\gamma N}{N-1}=(\gamma-1)\ p'=\frac{Np}{N-p}\ =q$, donc

$$\|u\|_{L^p}^{\gamma} \leq \gamma C_N \|u\|_{L^q}^{\gamma-1} \|\nabla u\|_{L^p}$$

$$\|u\|_{L^q} \leq \gamma C_N \|\nabla u\|_{L^p}$$

avec $\gamma > 0$, et $C_N = \frac{1}{N^{\frac{1}{n-1}}} > 0$. Comme conclusion on obtient que $S_N > 0$. ■

## 1.5 Le lemme variationnel d'Ekeland

On sait que si $J$ une fonction de classe $C^1$ bornée inférieurement , en général il n'est pas vrai que pour toute suite minimisante $(u_n)_n$ la dérivée $J'(u_n)$ tend vers zéro. Cependant on a le lemme suivant:
Soient $(X,d)$ un espace métrique complet et $J$ une fonction s.c.i de $X$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $J$ est bornée uniformement et on pose $c := \inf_{x\in X} J(x)$ .Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il éxiste $u_n$ tel que :

$$\begin{cases} c \leq J(u_\varepsilon) \leq c+\varepsilon, \\ \forall x \in X, x \neq u_\varepsilon, J(x) - J(u_\varepsilon) + \varepsilon d(x,u_\varepsilon) > 0 \end{cases}$$

# Chapitre 2

# Le réarrangement décroissant

Dans ce chapitre on va définir le réarrangement décroissant; ainsi que la symétrisation de Schwarz comme étant un type particulier de réarrangement d'une fonction définit dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Donné une fonction réelle définit sur un tel domaine; on construit une fonction dans la boule centrée à l'origine et a une mesure même que $\Omega$. En particulier, on souhaite que cette nouvelle fonction être radiales et diminue radialement. Afin de définir ceci, d'abord on construit le réarrangement unidimensionnel décroissant de la fonction donnée.

## 2.1 Définitions et propriétés

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable borné, et soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

Pour $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{u > t\}$ est définie par $\{u > t\} = \{x \in \Omega / u(x) > t\}$.

Alors la fonction de distribution de $u$ est donnée par $\mu_u(t) = |\{u > t\}|$, cette fonction est une fonction décroissante monotone de $t$. donc

$$\mu_u(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \geq \sup \ ess\,(u) \\ |\Omega| & si \quad t \leq \inf \ ess\,(u) \end{cases}$$

Alors $\mu_u(t)$ à valeur dans l'intervalle $[0, |\Omega|]$.

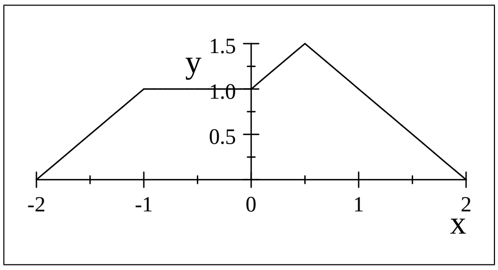
**Définition 2.1** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné, et soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors le réarrangement (unidimensionnel) décroissant de $u$, notée par $u^{\#}$ est définie dans $[0, |\Omega|]$ par*

$$\begin{cases} u^{\#}(0) = supess(u) \\ u^{\#}(s) = inf\{t/\mu(t) < s\} \ , s > 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

**Remarque 2.1** *$u^{\#}$ est la fonction inverse de la fonction de distribution $\mu_u(t)$ de $u$.*

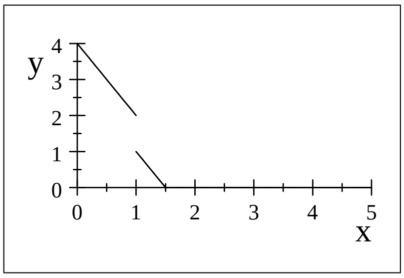
**Exemple 1** Soit $\Omega = (-2, 2) \subset \mathbb{R}$, on considère $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$u(y) = \begin{cases} 2 + y & si & -2 \leq y \leq -1 \\ 1 & si & -1 \leq y \leq 0 \\ 1 + y & si & 0 \leq y \leq 0.5 \\ 2 - y & si & 0.5 \leq y \leq 2 \end{cases} \tag{2.2}$$




Alors il est facile de vérifier que
Si $\mathbf{0} \leq \ \mathbf{t} < \mathbf{1}$**:** $\mu_u(t) = |\{y/2 + y > t\} \cup \{y/2 - y > t\}| = |\{y/t + 2 < y < 2 - t\}| = 4 - 2t$
Si $\mathbf{1} \leq \mathbf{t} < \mathbf{1.5}$ $\mu_u(t) = |\{y/1 + y > t\} \cup \{y/2 - y > t\}| = |\{y/t - 1 < y < 2 - t\}| = 3 - 2t$
Donc

$$\mu_u(t) = \begin{cases} 4 - 2t & si \quad 0 \leq t < 1 \\ 3 - 2t & si \quad 1 \leq t \leq 1.5 \\ 0 & si \quad t \geq 1.5 \end{cases}$$

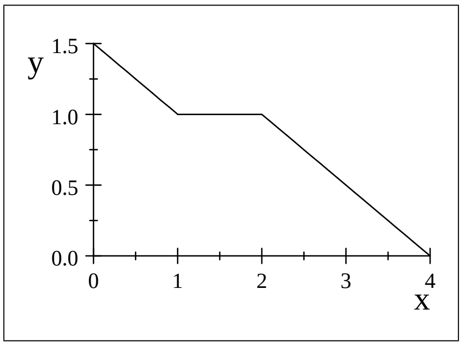



Et on a par définition

$$\left. \begin{array}{l} u^{\#}(0) = supess(s) \\ u^{\#}(s) = inf\left\{t/\mu_u(t) < s\right\}, s > 0. \end{array} \right\}$$

Et on sait que la fonction $u^{\#}$ est la fonction inverse de la fonction $\mu_u$ donc
Si $\mathbf{0} < \mathbf{t} < \mathbf{1}$. On a $u^{\#}(s) = inf\left\{t/4 - 2t < s\right\}$, donc $s = \mu_u(t) = 4 - 2t \Rightarrow t = \frac{4-s}{2}$, puisque $\mathbf{0} < \mathbf{t} < \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{2} < \mathbf{s} < \mathbf{4}$ donc $u^{\#}(s) = \frac{4-s}{2}$
Si $\mathbf{1} < \mathbf{t} < \mathbf{1,5}$ **:**
$u^{\#}(s) = inf\left\{t/3 - 2t < s\right\}, s > 0$
on a $s = \mu_u(t) = 3 - 2t \Rightarrow t = \frac{3-s}{2}$
puisque $\mathbf{1} < \mathbf{t} < \mathbf{1,5} \Rightarrow \mathbf{0} < \mathbf{s} < \mathbf{1}$ donc $u^{\#}(s) = \frac{3-s}{2}$
On conclut que

$$u^{\#}(s) = \begin{cases} (3-s)/2 & si \quad 0 \leq s \leq 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq s \leq 2 \\ (4-s)/2 & si \quad 2 \leq s \leq 4 \end{cases}$$




**Proposition 2** *Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné. Alors $u^\#$ est une fonction décroissante et continue à gauche*

**Preuve:** **•(i)** Soit $s_1 < s_2$ alors $|\{u > t\}| < s_1 \Longrightarrow |\{u > t\}| < s_2$, donc

$$\{t/\mu_u(t) < s_1\} \subset \{t/\mu_u(t) < s_2\} \Longrightarrow \inf\{t/\mu_u(t) < s_2\} < \inf\{t/\mu_u(t) < s_1\}$$
$$\Longrightarrow u^\#(s_2) \leq u^\#(s_1)$$

Donc la fonction $u^\#$est décroissante.
**•(ii)** Soit $s \in (0, |\Omega|)$, par définition de $u^\#$,$\forall \epsilon > 0, \exists t$ tel que $u^\#(s) \leq t \leq u^\#(s) + \epsilon$ et $\mu_u(t) < s$.
Choisissons $h > 0$ tel que $\mu_u(t) < s - h < s$, alors pour tout $0 < h' \leq h$ , on a $\mu_u(t) < s - h' < s$. Donc $u^\#(s) \leq u^\#(s) + \epsilon$. Alors on obtient que la fonction $u^\#$ est continue à gauche. ■

**Proposition 3** *L'application $u \longmapsto u^\#$ est croissante c-à-d: si $u \leq v$ où $u$ et $v$ sont des fonctions réelles dans $\Omega$ . Alors*

$$u^\# \leq v^\# \tag{2.3}$$

**Preuve:** Puisque

$$\{u > t\} \subset \{v > t\} \Longrightarrow |\{u > t\}| \leq |\{v > t\}|$$

donc,

$$|\{v > t\}| < s \Longrightarrow |\{u > t\}| < s$$

alors

$$\{t/|\{v > t\}| < s\} \subset \{t/|\{u > t\}| < s\} \Longrightarrow \inf\{t/|\{u > t\}| < s\} \leq \inf\{t/|\{v > t\}| < s\}$$
$$\Longrightarrow u^\# \leq v^\#$$

■

**Définition 2.2** *Deux fonctions $u$ et $v$ à valeurs réelles (éventuellement, les domaines de définition sont différents) sont équimesurables si elles ont la même fonction de répartition.(c-à-d $\mu_u(t) = \mu_v(t)$)*
*Les fonctions équimesurables sont réarrangements l'un de l'autre.*

On montre maintenant que $u^{\#}$ est un réarrangement de $u$ .

**Proposition 4** *La fonction* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *et* $u^{\#} : [0, |\Omega|] \to \mathbb{R}$ *sont equimesurables i.e pour tout* $t$,

$$|\{u > t\}| = \left|\left\{u^{\#} > t\right\}\right| \tag{2.4}$$

**Preuve:** On a par définition, $u^{\#}(s) = \inf\{t/\mu_u(t) < s\}, s > 0$, donc si

$$u^{\#}(s) \leq t \Longrightarrow \mu_u(t) = |\{u > t\}| < s$$

et si

$$u^{\#}(s) > t \Longrightarrow \mu_u(t) = |\{u > t\}| > s$$

$$\Longrightarrow \left\{s/u^{\#}(s) > t\right\} \subset \{s/\,|\{u > t\}| \geq s\}$$

et puisque $u^{\#}$est décroissant, on a par définition

$$\left|\left\{u^{\#} > t\right\}\right| = \sup\left\{s/u^{\#}(s) > t\right\} \leq |\{u > t\}| \tag{2.5}$$

D'autre part, soit $\left|\left\{u^{\#} \geq t\right\}\right| = s$ par la continuité à gauche et la décroissance de $u^{\#}$ on a $u^{\#}(s) = t$ , alors par définition

$$|\{u > t\}| \leq s$$

Donc

$$|\{u > t\}| \leq \left|\left\{u^{\#} \geq t\right\}\right| \tag{2.6}$$

En appliquant (2.5)et (2.6) pour $t + h$ au lieu de $t$, on obtient:

$$\left|\left\{u^{\#} > t + h\right\}\right| \leq |\{u \geq t + h\}| \leq \left|\left\{u^{\#} \geq t + h\right\}\right|$$

En passant à la limite quand $h \to 0$, on obtient:

$$\left|\left\{u^{\#} > t\right\}\right| \leq |\{u > t\}| \leq \left|\left\{u^{\#} > t\right\}\right|$$

Donc

$$|\{u > t\}| = \left|\left\{u^{\#} > t\right\}\right|$$

■

**Théorème 2.1** *Soit* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. Soit* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction borélienne positive et mesurable alors:*

$$\int_\Omega F(u(x))dx = \int_0^{|\Omega|} F(u^{\#}(s))ds. \tag{2.7}$$

**Preuve:** Soit $E = [t, +\infty]$ ,et $F(\xi) = \chi_E(\xi)$ où $\chi_E$ est la fonction caractéristique de $E$. Alors on a :

$$\chi_E(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \xi \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\chi_E(u(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad u(x) \in E \\ 0 & \quad \text{sinon} \end{cases}$$

donc

$$\int_\Omega F(u(x))dx = \int_\Omega \chi_E(u(x))\, dx = \int_t^\infty 1dx = |\{u \geq t\}|$$

on sait que $u$ et $u^\#$ sont equimesurables, alors

$$|\{u \geq t\}| = \left|\left\{u^\# \geq t\right\}\right| = \int_0^{|\Omega|} F(u^\#(s))ds$$

Donc

$$\int_\Omega F(u(x))dx = \int_0^{|\Omega|} F(u^\#(s))ds$$

Comme on peut exprimer une fonction $F$ positive mesurable comme limite d'une suite de fonctions positives et croissantes $\{F_n\}$, on obtient $\forall$ $n$,

$$\int_\Omega F_n(u(x))dx = \int_0^{|\Omega|} F_n(u^\#(s))ds \tag{2.8}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega F_n(u(x))dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{|\Omega|} F_n(u^\#(s))ds$$

on applique le théorème de la convergence monotone, on obtient:

$$\int_\Omega \lim_{n\to+\infty} F_n(u(x))dx = \int_0^{|\Omega|} \lim_{n\to+\infty} F_n(u^\#(s))ds$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega F(u(x))dx = \int_0^{|\Omega|} F(u^\#(s))ds$$

■

**Corollaire 2.1** *Soit* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction borélienne et soit* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *telle que* $F(u) \in L^1(\Omega)$ *, alors* $F(u^\#) \in L^1((0, |\Omega|))$ *et (2.8) est toujourst valide*

**Corollaire 2.2** *Soit* $u \in L^p(\Omega)$ *pour* $1 \leq p < +\infty$, *alors* $u^\# \in L^p((0, |\Omega|))$ *et*

$$\|u\|_{p,\Omega} = \left\|u^\#\right\|_{p,(0,|\Omega|)}$$

**Remarque 2.2** *Le résultat reste vrai pour* $p = +\infty$, *puisque*

$$\begin{cases} u_\#(0) = supess(u) \\ u_\#(|\Omega|) = infess\,(u) \end{cases}$$

On démontre le résultat suivant comme conséquence du théorème(2.1).

**Lemme 2.1** *Soit* $u : [0, l] \to \mathbb{R}$ *une fonction décroissante, alors*

$$u = u^\# \ p.p \tag{2.9}$$

**Preuve:** On a $u(s) \geq t \Longrightarrow \mu_u(t) \geq s$, donc $u^{\#}(s) = \inf\{\sigma/\mu_u(\sigma) < s\} > t$,

$$\Longrightarrow \inf\{\sigma/\mu_u(\sigma) < s\} \geq u(s) \Longrightarrow u^{\#}(s) \geq u(s) \tag{2.10}$$

•Pour tout $s \in [0, l]$ , soit $s$ un point de continuité de $u$ et puisque $u$ est décroissante, on a :

$$\begin{aligned} u(s) < t &\Longrightarrow \mu_u(t) = |\{u > t\}| \leq s \\ &\Longrightarrow |\{u > u(s-h)\}| \leq s - h < s \end{aligned}$$

pour $h > 0$,par définition, $u^{\#}(s) \leq u(s-h)$, quand $h \to 0$, et par continuité de $u$ en $s$ donc

$$u^{\#}(s) \leq u(s) \tag{2.11}$$

alors d'aprés (2.10) et (2.11), on trouve

$$u^{\#}(s) = u(s)$$

■

**Proposition 5** *Soit* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction croissante.*
*Soit* $u : \Omega \to \mathbb{R}$, *où* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *est borné alors :*

$$\psi\left(u^{\#}\right) = (\psi(u))^{\#}. \tag{2.12}$$

**Preuve:** **Etape(1)** : Si $v, w : [0, l] \to \mathbb{R}$ sont équimesurables et décroissantes alors :

$$v = w \quad p.p$$

car comme elles sont décroissantes, d'aprés le lemme précédent,

$$v = v^{\#} \text{ et } w = w^{\#} \ p.p$$

et comme elles sont eqimesurables, donc $v^{\#} = w^{\#}$.

**Etape(2)** : Notre résultat est vrai si on peut montrer que $\psi\left(u^{\#}\right)$ et $(\psi(u))^{\#}$ sont toutes les deux équimesurables et décroissantes dans $[0, |\Omega|]$.
En utilisant la définition du réarrangement et le fait que $\psi$ est décroissante on a

$$\begin{aligned} \left|\left\{\psi\left(u^{\#}\right) > t\right\}\right| &= \int_0^{|\Omega|} \chi_{\{\psi(u^{\#})>t\}}(s)ds = \int_\Omega \chi_{\{\psi(u)>t\}}(x)dx \qquad \text{(d'aprés 2.7)} \\ &= |\{\psi(u) > t\}| = \left|\left\{(\psi(u))^{\#} > t\right\}\right| = \left|\left\{\psi\left(u^{\#}\right) > t\right\}\right| \quad \text{(d'aprés 2.9)} \end{aligned}$$

donc

$$\psi\left(u^{\#}\right) = (\psi(u))^{\#}$$

■

**Corollaire 2.3** *Pour* $u : \Omega \to \mathbb{R}$, *on a* $(u^+)^{\#} = \left(u^{\#}\right)^+$.

**Preuve:** Il suffit d'appliquer le résultat précédent avec $\psi(s) = s_+$. ■

**Remarque 2.3** *Soit $v$ une fonction mesurable, alors si $c \in \mathbb{R}$, on a*

$$(v + c)^\# = v^\# + c. \tag{2.13}$$

*En général, pour deux fonctions non constantes $v, w$,*

$$(v + w)^\# \neq v^\# + w^\#. \tag{2.14}$$

## 2.2 Quelques inégalités classiques

**Proposition 6** *Soit $p = 1$ ou $+\infty$, alors pour $f, g \in L^p(\Omega)$*

$$\left\| f^\# - g^\# \right\|_{p,(0,|\Omega|)} \leq \|f - g\|_{p,\Omega} \tag{2.15}$$

**Preuve:** Pour $p = +\infty$ alors pour tout $x \in \Omega$,on a

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq \|f - g\|_{\infty,\Omega} \\ \Longrightarrow -\|f - g\|_{\infty,\Omega} &\leq f(x) - g(x) \leq \|f - g\| \\ \Longrightarrow f(x) - \|f - g\|_{\infty,\Omega} &\leq g(x) \leq f(x) + \|f - g\|_{\infty,\Omega} \end{aligned}$$

par monotonicité de l'application du réarrangement (la proposition(2))et la remarque précédente(2.13) on déduit que

$$f^\#(x) - \|f - g\|_{\infty,\Omega} \leq g^\#(x) \leq f^\#(x) + \|f - g\|_{\infty,\Omega}$$

donc

$$\left\| f^\# - g^\# \right\|_{\infty,(0,|\Omega|)} \leq \|f - g\|_{\infty,\Omega}$$

Pour $p = 1$

on pose $h = \max\{f, g\}$ ,et comme $f \leq h$ et $g \leq h$,on a

$$f^\# \leq h^\# \text{ et } g^\# \leq h^\#$$

donc

$$\begin{aligned} \left| f^\# - g^\# \right| &= \left| f^\# - h^\# + h^\# - g^\# \right| \\ &\leq \left| f^\# - h^\# \right| + \left| h^\# - g^\# \right| = 2h^\# - f - g \end{aligned}$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{|\Omega|} \left| f^\#(s) - h^\#(s) \right| ds &\leq \int_0^{|\Omega|} (2h^\#(s) - f^\#(s) - g^\#(s)) ds = \int_{|\Omega|} (2h(x) - f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_{|\Omega|} |f(x) - g(x)| \, dx \qquad car(h = \max\{f, g\} = \frac{f + g + |f + g|}{2}) \end{aligned}$$

donc

$$\left\| f^\# - g^\# \right\|_{1,(0,|\Omega|)} \leq \|f - g\|_{1,\Omega}$$

■

**Théorème 2.2** *Soit $1 \leq p \leq +\infty$, l'application $u \longmapsto u^\#$ est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^p((0, |\Omega|))$.*

**Preuve:** Si $p = 1$ ou $p = +\infty$ on a ce résultat d'aprés la proposition précédente. Soit $1 < p < \infty$, soit $u_n \to u$ dans $L^p$, puisque $\Omega$ est borné implique $u_n \to u$ dans $L^1(\Omega)$ donc $u_n^\# \to u^\#$ dans $L^1((0, |\Omega|))$ par conséquent $u_{n_k}^\# \to u^\#$ p.p.

$$\left\| u_{n_k}^\# \right\|_{p,(0,|\Omega|)} = \| u_{n_k} \|_{p,\Omega} \to \|u\|_p = \left\| u^\# \right\|_{p,(0,|\Omega|)}$$

Puisque l'espace $L^p$ est réflexif pour $1 < p < +\infty$ donc il est uniformément convexe; alors on conclut que

$$u_{n_k}^\# \to u^\# \ dans \ L^p((0, |\Omega|))$$

et

$$\forall n_k, u_{n_k}^\# \to u^\# \ dans \ L^p((0, |\Omega|))$$

Comme la limite est indépendante de la sous-suite, donc la suite $\left\{ u_n^\# \right\}_n$ converge vers $u^\#$ dans $L^p((0, |\Omega|))$

$$u_n^\# \to u^\# \text{ dans } L^p((0, |\Omega|))$$

■

**Remarque 2.4** *L'application $u \to u^\#$ n'est surjective ni injective dans l'espace $L^p$.*

Nous avons vu dans la section précédente que le réarrangement préserve les intégrales (prendre $F(t) = t$ en théoréme (2.1)).
Maintenant, nous considérons l'intégrale sur des sous-ensembles appropriés.

**Proposition 7** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné, et soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable . Soit $E \subset \Omega$ un sous-ensemble mesurable donc .*

$$\int_E u(x)dx \leq \int_0^{|E|} u^\#(s)ds \tag{2.16}$$

*l'inégalité (2.16) est vraie ssi $(u_{\setminus E})^\# = u^\#\setminus_{[0,|E|]}$ p.p*

**Preuve:** Soit $v = u_{\setminus E}$ , si $s \in [0, |E|]$ , et si $|\{u > t\}| < s$
alors

$$|\{v > t\}| = |\{u > t\} \cap E| < s$$

ainsi

$$\{t / |\{u > t\}| < s\} \subset \{t / |\{v > t\}| < s\}$$

donc

$$v^\#(s) \leq u^\#(s) .$$

$$\Longrightarrow \int_E u(x)dx = \int_E v(x)dx = \int_0^{|E|} v^\#(s)\, ds \leq \int_0^{|E|} u^\#(s)\, ds. \tag{2.17}$$

Ce qui prouve(2.16).De plus l'inégalité (2.17) est vraie ssi $v^\# = u^\#$ *p.p* ■
Dans ce qui suit on va utiliser les deux lemmes techniques suivants

**Lemme 2.2** *Soit* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *et soit* $t \in \mathbb{R}$. *on définit*

$$E_t = \{x \in \Omega / u(x) > t\} \text{ et } F_t = \{x \in \Omega / u(x) \leq t\} = \Omega \backslash E_t$$

*On définit* $b : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ *par :*

$$b(t,x) = \begin{cases} \chi_{E_t}(x) \ \ si \ t \geq 0 \\ -\chi_{F_t}(x) \ \ si \ t < 0 \end{cases}$$

*et*

$$\chi_{E_t}(x) \begin{cases} 1 \ si \ x \in E_t \\ 0 \ si \ \ non \end{cases}$$

$$\chi_{F_t}(x) = \begin{cases} 1 \ si \ x \in F_t \\ 0 \ \ \ si \ non \end{cases}$$

*Alors*

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t,x)dt \tag{2.18}$$

**Preuve:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b(t,x)dt = \int_{-\infty}^{0} -\chi_{F_t}(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} \chi_{E_t}(x)\,dx$$

Si $u(x) \geq 0$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b(t,x)dt = \int_{0}^{+\infty} \chi_{E_t}(x)\,dx = \int_{0}^{u(x)} 1dt = u(x)$$

Si $u(x) < 0$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b(t,x)dt = \int_{-\infty}^{0} -\chi_{F_t}(x)\,dx = -\int_{u(x)}^{0} 1dx = u(x)$$

■

**Lemme 2.3** *Soient* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *avec* $g$ *est intégrable sur* $\Omega$. *Soit* $a \leq f \leq b \leq +\infty$. *Alors*

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx = a\int_{\Omega} g(x)dx + \int_{a}^{b} (\int_{\{f>t\}} g(x)\,dx)dt \tag{2.19}$$

**Preuve:** On suppose que $a \geq 0$, posant $E_t = \{f > t\}$ , d'aprés le lemme précédent on a:

$$f(x) = \int_{0}^{b} \chi_{E_t}(x)\,dt.$$

et d'aprés le théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f(x)g(x)dx &= \int_{\Omega} g(x)\int_{0}^{b} \chi_{E_t}(x)\,dtdx = \int_{0}^{b}\int_{\Omega} g(x)\chi_{E_t}(x)\,dxdt \\
\int_{\Omega} f(x)g(x)dx &= \int_{0}^{a}\int_{\Omega} g(x)\chi_{E_t}(x)\,dtdx + \int_{a}^{b}\int_{\Omega} g(x)\chi_{E_t}(x)\,dtdx \\
&= \int_{0}^{a}\int_{\Omega} g(x)dtdx + \int_{a}^{b}\int_{E_t} g(x)dtdx \\
&= a\int_{\Omega} g(x)dx + \int_{a}^{b}\left(\int_{\{f>t\}} g(x)dx\right)dt
\end{aligned}$$

■

On va démonter le Théorème de Hardy-Littlewood.

**Théorème 2.3 (Hardy-Littlewood)** *Soit* $f \in L^{p}(\Omega)$ *et* $g \in L^{q}(\Omega)$, $1 \leq p, q \leq +\infty$, *où*$\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{q}\right) = 1$, *alors*

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx \leq \int_{0}^{|\Omega|} f^{\#}(s)g^{\#}(s)ds \tag{2.20}$$

**Preuve:** On suppose que $f \in L^{\infty} \cap L^{p}$. Soient $a$ et $b$ deux nombres réeles, tels que $a \leq f \leq b$, alors d'aprés le lemme précédent on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f(x)g(x)dx &= a\int_{\Omega} g(x)dx + \int_{a}^{b}\int_{\{f>t\}} g(x)dxdt \\
&= a\int_{0}^{|\Omega|} g^{\#}(s)\,ds + \int_{a}^{b}\int_{\{f>t\}} g(x)dxdt ......(\text{car } g = g^{\#}) \\
&\leq a\int_{0}^{|\Omega|} g^{\#}(s)\,ds + \int_{a}^{b}\int_{0}^{|\{f>t\}|} g^{\#}(s)dsdt .....(\text{d'aprés (2.3)}) \\
&= a\int_{0}^{|\Omega|} g^{\#}(s)\,ds + \int_{a}^{b}\int_{0}^{\left|\{f^{\#}>t\}\right|} g^{\#}(s)dsdt \qquad (\text{d'aprés (2.4)}) \\
&= \int_{0}^{|\Omega|} f^{\#}(s)g^{\#}(s)ds
\end{aligned}$$

Où la dérniére égalité provient de (2.19). Si $1 \leq p \leq \infty$ , le cas général peut être complété par un argument de densité puisque nous avons l'application $u \mapsto u^{\#}$est continue de $L^{p}(\Omega)$ dans $L^{p}((0, |\Omega|))$. ■

Nous avons vu que l'application de réarrangement est non-expansive entre les espaces $L^{p}$ lorsque $p = 1, 2$ ou $+\infty$.

La démonstration est vraie pour tout $1 < p < +\infty$. Pour la démonstration, on utilise les deux remarques suivantes.

**Remarque 2.5** *Soit* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction croissante. Soit* $f \in L^{p}(\Omega)$ *et* $\psi(g) \in L^{q}$ *où* $\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{q}\right) = 1, 1 \leq p, q \leq +\infty$. *Donc on a :*

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx \leq \int_{0}^{|\Omega|} f^{\#}(s)\,\psi\left(g^{\#}(s)\right)ds$$

**Remarque 2.6** *(a)Soit* $u : \Omega \to \mathbb{R}$, *on a*

$$\left(\chi_{\{u>t\}}\right)^{\#} = \chi_{\{u^{\#}>t\}}$$

*(b)Si* $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$, *alors*

$$\int_{\Omega} u(x)\chi_{\{v\leq t\}}(x)\,dx \geq \int_{0}^{|\Omega|} u^{\#}(s)\,\chi_{\{v^{\#}\leq t\}}(s)\,ds$$

**Théorème 2.4** *Soient* $f, g \in L^{p}(\Omega)$, *où* $1 < p < \infty$, *alors:*

$$\left\| f^{\#} - g^{\#} \right\|_{p,(0,|\Omega|)} \leq \|f - g\|_{p,\Omega} \tag{2.21}$$

**Preuve:** Posons $J(t) = |t|^{p}$ on définit:

$$J_{+}(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \\ |t|^{p} & si \quad t > 0 \end{cases}$$

$$J_{-}(t) = \begin{cases} |t|^{p} & si \quad t \leq 0 \\ 0 & si \quad t > 0 \end{cases}$$

Ainsi que $J = J_{+} + J_{-}$ , $J_{+}$et $J_{-}$ les deux fonctions sont convexes et différentiables, alors

$$J_{+}(f(x) - g(x)) = \int_{g(x)}^{f(x)} J'_{+}(f(x) - t)\,dt$$

et on a par définition :

$$J_{+}(f(x) - t) = \begin{cases} 0 & si \quad f(x) \leq t \\ |f(x) - t|^{p} & si \quad f(x) > t \end{cases}$$

donc

$$\int_{g(x)}^{f(x)} J'_{+}(f(x) - t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} J'_{+}(f(x) - t)\,\chi_{\{g\leq t\}}(x)\,dt \quad \text{avec} \quad f(x) > t$$

D'après le théorème de Fubini, il résulte:

$$\int_{\Omega} J_{+}(f(x) - g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega} J'_{+}(f(x) - t)\,\chi_{\{g\leq t\}}(x)\,dxdt......(*)$$

Et d'aprés (2.9) on a

$$\int_{0}^{|\Omega|} J_{+}\left(f^{\#}(s) - g^{\#}(s)\right)ds = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{|\Omega|} J'_{+}\left(f^{\#}(x) - t\right)\chi_{\{g^{\#}\leq t\}}(s)\,dsdt......(**)$$

Et puisque $J^{+}$ est convexe, on a $J'_{+}$ est croissante, ainsi ,d'aprés (2.12), on obtient:

$$\left(J'_{+}(f(x) - t)\right)^{\#}(s) = J'_{+}\left(f^{\#}(s) - t\right)$$

et d'aprés la remarque précédente, on déduit que :

$$\int_\Omega J'_+ \left(f(x)-t\right) \chi_{\{g\leq t\}}\left(x\right) dx \geq \int_0^{|\Omega|} J'_+ \left(f^{\#}(x)-t\right) \chi_{\left\{g^{\#}\leq t\right\}}\left(s\right) ds$$

Alors, d'aprés (*)et (**), on déduit que

$$\int_\Omega J_+ \left(f(x)-g(x)\right) \geq \int_0^{|\Omega|} J_+ \left(f^{\#}(s)-g^{\#}(s)\right) ds$$

La même démonstration pour $J_-$ . ■

## 2.3 Symétrisations de schwarz

Etant donné un sous-ensemble mesurable $E\subset\mathbb{R}^N$ de mesure finie, on note par $E^*$ tel que $E^*=B(0,R)$ est la boule ouverte centrée à l'origine et ayant la même mesure que $E$, ie $|E^*|=|E|=N\omega_N R^N$.

Etant donné un vecteur $x\in\mathbb{R}^N$, on note sa norme Euclidienne par $|x|$ . Enfin , on désigne par $w_N$, le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^N$ noté par

$$w_N = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}$$

où $\Gamma$ est la fonction Gamma , telle que :

$$(\Gamma\left(s\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}dt, \quad \mathrm{Re}(s)>0)$$

**Définition 2.3** *Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^N$, un domaine borné. Soit $u:\Omega\to\mathbb{R}$ une fonction mesurable*
*Alors sa symértisation de Schwarz ,ou sa symétrisation sphérique est la fonction :*
$u^*:\Omega\to\mathbb{R}$ *est définie par :*

$$u^*\left(x\right) = u^{\#}\left(w_N\left|x\right|^N\right), x\in\Omega^*$$

*Observons que, si $R$ est le rayon de $\Omega^*$, alors :*

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^*} u^*\left(x\right) dx &= \int_{\Omega^*} u^{\#}\left(w_N\left|x\right|^N\right) dx \\
&= \int_0^R u^{\#}\left(w_N\ \ r^N\right) N w_N\ r^{N-1} dr \\
&= \int_0^{|\Omega^*|} u^{\#}\left(s\right) ds = \int_0^{|\Omega|} u^{\#}(s) ds
\end{aligned}$$

### 2.3.1 Propriétés de la symétrisation

Nous pouvons traduire les résultats obtenus dans la section précédente pour le réarrangement unidimensionnel décroissant pour obtenir les résultats correspondants pour la symétrisation. En particulier, on déduit facilement les propriétés suivantes

- $u^*$ est la symétrique radiale décroissant .
- $u, u^{\#}$ et $u^*$ sont équimesurables .
- Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne de telle sorte que $F \geq 0$ or $F(u) \in L^p(\Omega)$, alors :

  $$\int_{\Omega^*} F(u^*(x))\, dx = \int_{\Omega} F(u(x))\, dx \quad (***)$$

  En particulier, $u$ et $u^*$ont la même norme $L^p$ et

  $$\int_{\Omega} u(x)dx = \int_{\Omega^*} u^*(x)\, dx$$

  où $u$ est intégrable dans $\Omega$.
- Si $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante, alors

  $$(\psi(u))^* = \psi(u^*) .$$
- L'application $u \longmapsto u^*$ est une application non expansive de $L^p(\Omega)$ dans $L^p(\Omega^*)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$.
- Si $E \subset \Omega$ est un sous-ensemble, alors :

  $$\int_E u(x)dx \leq \int_0^{|E|} u^{\#}(s)\, ds = \int_{E^*} u^*(x)\, dx$$
- L'égalité se produit ssi

  $$(u\backslash_E)^* = u^*\backslash_{E^*}$$
- (Hardy-littlewood)

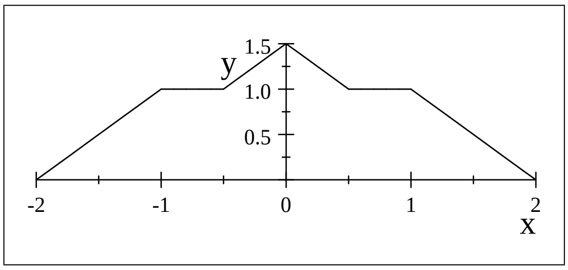
Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ où $(\frac{1}{p}) + (\frac{1}{q}) = 1$
alors

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx \leq \int_0^{|\Omega|} f^{\#}(s)\, g^{\#}(s)ds = \int_{\Omega^*} f^*(x)\, g^*(x)\, dx \quad (1.3.3)$$

On conclut cette section par le calculm de la symétrisation de Schwarz de la fonction dans l'exemple suivant :

**Exemple 2.1** *Soit* $\Omega = (-2, 2) \subset \mathbb{R}$ *et* $u : \ \Omega \to \mathbb{R}$ *définie comme dans l'éxemple (2.2), alors* $\Omega^* = (-2, 2)$ *est donnée par :*

$$u^*(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - |x| & si \quad 0 \leq |x| \leq 0.5 \\ 1 & si \quad 0.5 \leq |x| \leq 1 \\ 2 - |x| & si \quad 1 \leq |x| \leq 2 \end{cases} \tag{2.22}$$




On peut montrer que l'application $f \mapsto f^*$ est non-expancive de $L^p(\mathbb{R}^N)$ ,dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ .et que l'inégalité de Hardy-littlewood est concervée.

**Théorème 2.5** *Soient* $f, g$ *et* $h$ *des fonctions boréliennes dans* $\mathbb{R}^N$*, elles tend vers zéro à l'infini, on définit :*

$$I(f, g, h) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)g(x-y)h(y)dxdy$$

*alors:*

$$I(f, g, h) \leq I(f^*, g^*, h^*) \tag{2.23}$$

**Preuve:**

$$\begin{aligned} I(f, g, h) &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)g(x-y)h(y)dxdy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f^{\#}(x)g^{\#}(x-y)h^{\#}(y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f^*(x)g^*(x-y)h^*(y)dxdy \end{aligned}$$

donc

$$I(f, g, h) \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f^*(x)g^*(x-y)h^*(y)dxdy.$$

■

## 2.4 Inégalité de Polya-Szégö

Dans cette section, on parle d'une inégalité trés importante dans la symétrisation de Schwarz ; c'est l'inégalité de Polya-Szégö.

**Théorème 2.6 (Polya-Szégö)** *Soit* $1 \leq p < +\infty$*, soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un domaine borné , et soit* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*, alors:*

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^p \, dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \tag{2.24}$$

*en particulièr,* $u^* \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$

**Preuve:** pour la preuve voir [11]. ■

**Remarque 2.7** *Si* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *et* $u \geq 0$*, alors pour tout* $0 < a < |\Omega|$*, on a* $u^\# \in W^{1,p}((a, |\Omega|))$ *. En particulier,* $u^\#$ *sera absolument continue dans tout intervalle* $[a, |\Omega|]$*,* $a > 0$*, donc toute les singularités de* $u^\#$ *sont concentrées en zéro.*

**Remarque 2.8** *1-Soit* $1 \leq p < +\infty$*. Inégalité de Polya-Szégö est vrai dans* $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$
*.*
*2- Le réarrangement est continue dans* $L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$ *dans lui même, par contre le réarrangement n'est pas continue dans* $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *pour* $N \geq 2$*. [Almgren et Lieb (1989)] ont prouvé que la continuité de l'application du réarrangement est limitée à une classe des fonctions qui possèdent une propriété qu'on appelle la Co-régularité de région. Cependant,[Coron(1984)] a prouvé que l'application du réarrangement est continue de* $W^{1,p}(\mathbb{R})$ *dans lui même.*

Pour $p = +\infty$, on a le résultat suivant

**Théorème 2.7** *Soit* $u \geq 0$*, nulle sur* $\partial\Omega$ *et* $u$ *est Lipschitz continue avec la constante de Lipschitz* $L$*. Alors* $u^*$ *est aussi Lipschitz continue avec la constante de Lipschitz est inférieure ou égale à* $L$*.*

**Remarque 2.9** *Nous concluons cette section en considérant un cas ou l'égalité de Polya-Szégö est atteinte dans (2.24). Évidemment, si* $\Omega$ *est une boule et si* $u$ *est symétrique, radiale et décroissante (après une translation d'origine au centre de cette boule),* $u = u^*$ *nous avons l'égalité dans (2.24).*

*Est-ce-que l'inverse est vraie, c-à-d, si l'égalité dans (2.24) implique que* $\Omega$ *est une boule et si, après une translation de l'origine,* $u = u^*$*. Cela en général n'est pas vrai .*

**Exemple 2.2** *On considère* $\Omega = (-2, 2) \subset \mathbb{R}$ *et soit* $u$ *une fonction comme dans l'exemple (2.2). Sa symétrisation a été calculé dans l'exemple (2.22).Donc il est facile de vérifier que*

$$\int_{-2}^{2} \left|u'(x)\right|^2 dx = \int_{-2}^{2} \left|u^{*'}(x)\right|^2 dx = 3$$

*mais* $u \neq u^*$

# Chapitre 3

# Quelques applications

## 3.1 L'inégalité de Sobolev

Soit $1 \leq p \leq N$, on sait que $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^{p^*}\left(\mathbb{R}^N\right)$ où $p^*$ est l'exposant critique,donné par $p^* = \frac{Np}{N-p}$ , et il existe une constante $S = S(N,p)$ telle que $S\left\|u\right\|_{L^{p*}} \leq \left\|\nabla u\right\|_{L^p}$ , $\forall u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

**Remarque 3.1** *$S$ est calculabe et égale à*

$$S = \sqrt{\pi} N^{\frac{1}{p}} \left(\frac{N-p}{p-1}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{N}{p}\right)\Gamma\left(1+N-\frac{N}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)\Gamma\left(N\right)}\right)^{\frac{1}{N}}, \quad \text{où } 1 < p < \infty.$$

*Et* $S = N\omega_N^{\frac{1}{N}}$ *pour* $p = 1$.

- **On montre que la constante $S$ est invariante par dilatation dans l'espace.**

Soit $\lambda > 0$ , si $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ , on définit $u_\lambda\left(x\right) = u\left(\lambda x\right)$.
Par définition on a

$$S = \inf_{u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \frac{\left\|\nabla u\right\|_{L^p}}{\left\|u\right\|_{L^{p^*}}}$$

on pose $\lambda x = y \Rightarrow x = \frac{y}{\lambda}$ et $dx = \lambda^{-N}dy$, on obtient

$$\frac{\left\|\nabla u_\lambda\left(x\right)\right\|_{L^p}}{\left\|u_\lambda\left(x\right)\right\|_{L^{p^*}}} = \lambda^{-(1-\frac{N}{p^*}+\frac{N}{p})}\frac{\left\|\nabla u\right\|_{L^p}}{\left\|u\right\|_{L^{p^*}}} = \frac{\left\|\nabla u\right\|_{L^p}}{\left\|u\right\|_{L^{p^*}}}$$

Pour que l'égalité antérieure soit valide, il faut que l'exposont de $\lambda$ soit nul. Comme $p^* = \frac{pN}{N-p}$, on aura

$$S = \inf_{u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \frac{\left\|\nabla u\left(\lambda x\right)\right\|_{L^p}}{\left\|u\left(\lambda x\right)\right\|_{L^{p^*}}} = \inf_{u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \frac{\left\|\nabla u\left(x\right)\right\|_{L^p}}{\left\|u\left(x\right)\right\|_{L^{p^*}}}$$

On conclut que la constante de Sobolev $S$ est invariante par dilatation.

- **On montre que la constante $S$ est invariante par changement de domaine**.

Plus précisément on a

$$S = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\|\nabla u\|_{L^p}}{\|u\|_{L^{p*}}}$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné.
• On suppose que $\Omega_1 = B_r$ et $\Omega_2 = B_R$, des boules centrées en 0 de rayon $r$ et $R$ respectivement. Soit $u \in C_0^\infty(B_r)$, pour $x \in B_R$, on pose $\tilde{u}(x) = u(\frac{x}{R}r)$, donc

$$S(\Omega_1) = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega_1)} \frac{\left\|\nabla u(\frac{x}{R}r)\right\|_{L^p}}{\left\|u(\frac{x}{R}r)\right\|_{L^{p*}}} = \inf_{\tilde{u} \in W_0^{1,p}(\Omega_2)} \left( \left(\frac{R}{r}\right)^{-(1+\frac{N}{p}-\frac{N}{P*})} \frac{\|\nabla \tilde{u}\|_{L^P}}{\|\tilde{u}\|_{L^{p*}}} \right)$$

avec $-1 - \frac{N}{p} + \frac{N}{p^*} = 0$. Donc $S(\Omega_1) = S(\Omega_2)$. Soit maintenant un domaine $\Omega$ quelconque, on considère $B_r$ et $B_R$, des boules centré en 0 de rayon $r$ et $R$ avec $B_r \subset \Omega \subset B_R$ Donc $S(B_R) \leq S(\Omega) \leq S(B_r) = S(B_R)$. Donc on conclut que la constante de Sobolev $S$ ne dépend pas du domaine.

- **On montre que la constante de Sobolev $S$ n'est pas atteinte sur un domaine borné**

Par l'absurde, on suppose qu'il existe un domaine $\Omega$ et $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tels que $S(\Omega) = \frac{\|\nabla u_0\|_{L^p}}{\|u_0\|_{L^{p*}}} = S(\mathbb{R}^N)$ ($S$ est invariante par changement de domaine ). Soit $\Omega_1$ un domaine borné tel que $\Omega \subsetneq \Omega_1$, on pose

$$v_0 = \begin{cases} |u_0| & dans \quad \Omega \\ 0 & sur \quad \Omega_1 \setminus \Omega \end{cases}$$

donc

$$S(\Omega_1) \leq \frac{\|\nabla v_0\|_{L^p}}{\|v_0\|_{L^{p*}}} = \frac{\|\nabla u_0\|_{L^P}}{\|u_0\|_{L^{p*}}} = S(\Omega)$$

Par l'invariance de $S$, on obtient

$$S(\Omega_1) = \frac{\|\nabla v_0\|_{L^P}}{\|v_0\|_{L^{p*}}}$$

Notant qu'on peut définir $S$ de la manière suivante :

$$S = S(\Omega) = \inf \left\{ ||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \text{ ,tel que } \int_\Omega |v|^{p*} \, dx = 1 \right\}$$

Donc l'équation d'Euler associée peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} -\triangle_p v_0 = S(\Omega_1) v_0^{p^*-1} & \text{dans } \Omega_1 \\ v_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1, \end{cases}$$

Mais d'aprés le principe de maximum on a

$$-\triangle_p v_0 \geq 0 \text{ dans } \Omega_1 \quad \text{et} \quad v_{0\diagdown\partial\Omega_1} \geq 0 \text{ sur}$$

donc $v_0 > 0$ sur $\Omega_1$ , contradiction avec la définition de $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega_1)$. Donc on conclut que la constante $S$ n'est pas atteinte dans un domaine borné. Par le même argument on peut voir que $S$ n'est pas atteinte dans un domain $\Omega \subsetneqq \mathbb{R}^N$.

- **On montre que la constante $S$ est atteinte dans $\mathbb{R}^N$.**

On va utiliser le lemme suivant

**Lemme 3.1** *Soit $N \geq 2$ et $1 < p < +\infty$ , il éxiste une constante $c(p,N)$ telle que , pour $u \in W_{rad}^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, on a*

$$|u(x)| \leq c(p,N)\,|x|^{\frac{-(N-1)}{p}} \left(\|\nabla u\|_p + \|u\|_p\right)$$

*de plus $|x|^{\frac{-(N-1)}{p}} u(x) \to 0$ lorsque $|x| \to +\infty$. par ailleurs dans la classe d'équivalence de $u$, il éxiste un représentant holdérièn en déhors de l'origine.*

**Preuve:** Comme $u$ est radiale on a

$$\begin{aligned} |u|^p &= -p\int_r^{+\infty} \left|u'\right| |u|^{p-1}\,ds \leq p\int_r^{+\infty} s^{-(N-1)} \left|u'\right| |u|^{p-1} s^{(N-1)}ds \leq pr^{-(N-1)}\int_r^{+\infty} \left|u'\right| |u|^{p-1} s^{(N-1)}ds \\ &\leq pr^{-(N-1)}[\frac{1}{p}\int_r^{+\infty} \left|u'\right|^p s^{(N-1)}ds + \frac{1}{p'}\int_r^{+\infty} |u|^{p'(p-1)} s^{(N-1)}ds] \leq cr^{-(N-1)}(\int_r^{+\infty} (\left|u'\right|^p + |u|^p)s^{(N-1)}ds) \end{aligned}$$

Donc

$$|u(x)| \leq c(N,p)\,|x|^{-\frac{(N-1)}{p}} \|u\|_{W^{1,p}}$$

Pour voir que dans la classe d'équivalence de $u \in W_{rad}^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ , il existe une fonction continue en déhors de l'origine, en posant $f(r) := u(x)$ *si* $r = |x|$, pour $|x| > |y| > 0$ on a

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq \int_{|y|}^{|x|} \left|f'(s)\right| ds \leq ||x| - |y||^{\frac{1}{p'}} (\int_y^x \left|f'(s)\right|^p ds)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C\Big||x| - |y|\Big|^{\frac{1}{p'}} |y|^{\frac{-(N-1)}{p}} \|\nabla u\|_{W^{1,p}} \end{aligned}$$

ce qui montre que $u$ est höldérienne en dehors de l'origine. ∎
Comme consequence on a le resultat de compacité suivant

**Théorème 3.1 (W-Strauss)** *Soient $N \geq 2$ et $1 \leq p < N$, alors pour $p < q < p^*$, l'injection de $W_{rad}^{1,p}(I\!R^N)$ dans $L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$ est compacte.*

**Preuve:** Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de $W^{1,p}_{rad}(I\!R^N)$, donc $u_n$ converge faiblement vers $u \in W^{1,p}_{rad}(I\!R^N)$. On pose $v_n = u_n - u$ , il s'agit de montrer que $\|v_n\|_q$ tend vers zéro. D'aprés le lemme précédent,désignant par $C$ diverse constantes indépendantes de $n$, On a pour tout $R > 0$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|x|\geq R} |v_n(x)|^q\,dx &= \int\limits_{|x|\geq R} |v_n(x)|^{q-p}\,|v_n(x)|^p\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |v_n(x)|^{q-p}\,|v_n(x)|^p\,\chi_{(|x|\geq R)}(x)dx \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \sup|v_n(x)|^{q-p}\,\chi_{(|x|\geq R)}(x)\,|v_n(x)|^p\,dx = (\sup_{|x|>R}|v_n|)^{q-p}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|v_n(x)|^p\,dx \\
&\leq CR^{\frac{-(N-1)(q-p)}{p}}||v_n||_{W^{1,p}} \leq CR^{\frac{-(N-1)(q-p)}{p}}
\end{aligned}$$

Donc pour $R > 0$ assez grand, on obtient $\left\|v_n\chi_{(|x|\geq R}\right\|_{L^q} \leq \epsilon$. d'aprés le théorème de Rellich-Kondrachov, l'injection de $W^{1,p}(|x| < R)$ dans $L^q((|x| < R))$ est compacte car $q < p^*$. Fixons $n_0 \geq 1$ assez grand tel que pour $n \geq n_0$ on a $\|v_n\|_{L^q(|x|<R)} \leq \epsilon$. Donc pour $n >> n_0$, on a $\|v_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq 2\varepsilon$. D'où le resultat. ■

- **On montre que la constante $S$ est atteinte dans $\mathbb{R}^N$.** Rappellons que

$$S = \inf_{u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,dx}{\left(\int\limits_{\mathbb{R}}|u|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{p}{p^*}}}$$

On définit l'éspace

$$D^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) = \left\{u \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)\ /\ \int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,dx < c\right\}$$

L'espace $D^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ est muni de la norme $\|u\|^p_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,dx$. Il est clair que

$$S = \inf_{u\in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,dx}{\left(\int\limits_{\mathbb{R}}|u|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{p}{p^*}}}$$

D'aprés l'inégalité de Polya-Szégö on a $\int\limits_{I\!R^N}|\nabla u^*|^p\,dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,dx$, avec $u^*$ est la symetrisation de Schwarz de $u$. En utilisant les propriétés de la symétrisation de Schwarz on a

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u|^{p^*}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N}|u^*|^{p^*}\,dx$$

Donc

$$S = \inf_{u^*\in D^{1,p}(I\!R^N)} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u^*|^p\,dx}{\left(\int\limits_{\mathbb{R}}|u^*|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{p}{p^*}}} \leq \inf_{u\in D^{1,p}(I\!R^N)} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,dx}{\left(\int\limits_{\mathbb{R}}|u|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{p}{p^*}}} \tag{3.1}$$

Donc

$$S = \inf_{u^* \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*|^p \, dx}{\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |u^*|^{p^*} \, dx\right)^{\frac{p}{p^*}}}$$

Soit $(v_n)_n$ une suite minimisante radiale, décroissante et positive. On suppose que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} (v_n(x))^{p^*} dx = 1 \text{ et } \int |\nabla v_n(x)|^p \, dx \to S$$

Donc la suite $(v_n)_n$ est bornée dans $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, alors il éxiste une sous-suite notée $v_n$ qui converge faiblement dans $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, ie $v_n \rightharpoonup \bar{v}$ dans $D^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, donc $v_n \to \bar{v}$ p.p. D'aprés le théorème de Réllich-Kondrachov qui donne $W^{1,p}(B_R) \subset L^q(B_R)$ avec une injection compacte,où $B$ est la boule de centre 0 et de rayon $R$ assez grand et $q < p^*$ . Donc on a $v_n \to \bar{v}$ fortement dans$L^q(B_R)$.
D'aprés le lemme de Strauss

$$\begin{aligned} v_n(x) &\leq C|x|^{\frac{-(N-1)}{P}} \|\nabla v_n\|_{L^p} \\ &\leq \bar{C}|x|^{\frac{-(N-1)}{P}} \quad \text{car } (\|\nabla v_n\|_{L^p} < c \text{ par définition}) \end{aligned}$$

Donc $(v_n)$ bornée uniformément dans $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$

- (I)-Si $v_n \to \bar{v} \neq 0$, donc $\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\bar{v}\right|^{p^*} dx \neq 0$, on utilisant le lemme de Fatou , on a

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\bar{v}\right)^{p^*} dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int\limits_{\mathbb{R}^N} (v_n)^{p^*} dx = 1$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\bar{v}\right)^{p^*} dx \leq 1$$

D'aprés la semi continuité inférieur des normes on a :

$$\left\|\bar{v}\right\|_{D^{1,p}} \leq \lim_{m\to\infty} \inf \|v_n\|_{D^{1,p}} = S$$

On conclut que si $\bar{v} \neq 0$

$$\begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\bar{v}\right)^{p^*} dx \leq & 1 \\ \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla\bar{v}\right)^{p} dx \leq & S \end{cases}$$

**Le premier cas** : si $\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\bar{v}(x)\right)^{p^*} dx = 1$

On a par définition

$$S \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla \bar{v}\right|^p dx \qquad (*)$$

et on a

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla \bar{v}\right|^p dx \leq S \qquad\qquad (**)$$

donc d'aprés (*)et (**) , on conclut que $S$ est attainte et :

$$S = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla \bar{v}\right|^p dx$$

**Le deuxième cas** : si $0 < \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\bar{v}(x)\right)^{p^*} dx < 1$

On a :

$$S = \inf \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p \, dx \quad \text{tel que} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^N} (v_n(x))^{p^*} \, dx = 1 \right\}$$

Et d'aprés le lemme variationnel d'Ekland:

$$-\triangle_p v_n = I v_n^{p^\star - 2} v_n + o\,(1)$$

On montre que $I = S$. On prend $v_n$ comme fonction test dans l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\int\limits_{I\!R^N} -\triangle_p v_n v_n dx &= \int\limits_{I\!R^N} I v_n^{p^\star-2} v_n^2 dx + o\,(1) = I \int\limits_{I\!R^N} v_n^{p^*} dx + o\,(1) \\ &= I + o\,(1) \qquad\quad (\text{car on a par hypothése } \int\limits_{I\!R^N} v_n^{p^*} dx = 1)\end{aligned}$$

Passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient $S = \int\limits_{I\!R^N} |\nabla v|^p \, dx = I$. d'où le résultat

On fixe $\varphi \in C_c^\infty\left(I\!R^N\right)$ :

$$\int\limits_{I\!R^N} -\triangle_p v_n \varphi dx = s \int\limits_{I\!R^N} v_n^{p^\star-1} \varphi dx + o\,(1)$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$ , on obtient $\int\limits_{I\!R^N} -\triangle_p v \varphi dx = S \int\limits_{I\!R^N} v^{p^\star-1} \varphi dx$. Si $\varphi = \bar{v}$ on a

$$\int\limits_{I\!R^N} \left|\nabla \bar{v}\right|^p dx = S \int\limits_{I\!R^N} \left(\bar{v}\,(x)\right)^{p^*} dx$$

par hypothése on a

$$\int\limits_{I\!R^N}\left(\bar{v}\left(x\right)\right)^{p^*}dx<1$$

donc

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{\int\limits_{I\!R^N}\left|\nabla\bar{v}\right|^p dx}{\left(\int\limits_{I\!R^N}\left(\bar{v}\left(x\right)\right)^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}}}=\frac{s\int\limits_{I\!R^N}\left(\bar{v}\left(x\right)\right)^{p^*}dx}{\left(\int\limits_{I\!R^N}\left(\bar{v}\left(x\right)\right)^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}}}\\ &= S\left(\int\limits_{I\!R^N}\left(\bar{v}\left(x\right)\right)^{p^*}dx\right)^{1-\frac{p}{p^*}}<S \quad \left(\text{car on a} \int\limits_{I\!R^N}\left(\bar{v}\left(x\right)\right)^{p^*}dx<1\right) \end{aligned}$$

une contradiction avec l'hypothèse.

- (II)-Si $v_n \to \bar{v}=0$. On choisit une suite $(w_n)_n$ telle que $w_n\left(x\right)=R_n^{\frac{-(N-p)}{p}}v_n\left(\frac{x}{R_n}\right)$, donc

$$\begin{aligned} \int\limits_{I\!R^N}\left(w_n\left(x\right)\right)^{p^*}dx &= \int\limits_{I\!R^N}\left(R_n^{\frac{-(N-p)}{p}}v_n\left(\frac{x}{R_n}\right)\right)^{p^*}dx \quad \text{avec} \quad p^*=\frac{Np}{N-p}\\ &= R_n^{-N}\int\limits_{I\!R^N}\left(v_n\left(\frac{x}{R_n}\right)\right)^{p^*}dx \end{aligned}$$

On pose $y=\frac{x}{R_n}$, on obtient

$$R_n^{-N}\int\limits_{I\!R^N}\left(v_n\left(\frac{x}{R_n}\right)\right)^{p^*}dx = R_n^{-N}\int\limits_{I\!R^N}\left(v_n(y)\right)^{p^*}R_n^N dy=\int\limits_{I\!R^N}\left(v_n(y)\right)^{p^*}dy=1$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \int\limits_{I\!R^N}\left|\nabla w_n\right|^p dx &= \int\limits_{I\!R^N}\left|\nabla(R_n^{\frac{-(N-p)}{p}}v_n(\frac{x}{R_n}))\right|^p dx = R_n^{N-p}\int\limits_{I\!R^N}\left|\nabla(v_n(\frac{x}{R_n}))\right|^p dx\\ &= R_n^{N-p}\int\limits_{I\!R^N}\left|\nabla(v_n(y))\right|^p R_n^{-p}R_n^N dy=\int\limits_{I\!R^N}\left|\nabla(v_n(y))\right|^p dy \end{aligned}$$

Donc , on conclut que $\begin{cases}\int\limits_{I\!R^N}\left(w_n\left(x\right)\right)^{p^*}dx=1\\ \int\limits_{I\!R^N}\left|\nabla w_n\right|^p dx\to S\end{cases}$

On choisit un $R_n$tel que $\int\limits_{B(0,1)}\left(w_n\left(x\right)\right)^{p^*}dx=\frac{1}{2}$.Il est clair que la suite $(w_n)_n$ est bornée dans $I\!R^N\backslash\left\{0\right\}$.

D'après la première discussion, si $w_n \rightharpoonup w_0 \neq 0$, la constante $S$ est atteinte. On suppose que $w_0 \equiv 0$, on a

$$1 = \int\limits_{\mathbb{R}^N} (w_n(x))^{p^*} dx = \int\limits_{B(0,1)} (w_n(x))^{p^*} dx + \int\limits_{1<|x|<R} (w_n(x))^{p^*} dx + \int\limits_{|x|>R} (w_n(x))^{p^*} dx$$

- On calcule $\int\limits_{1<|x|<R} (w_n(x))^{p^*} dx$ : Puisque $w_n(x) \leq c|x|^{\frac{-(N-1)}{p}}$ et $w_n(x) \to 0$ p.p, donc d'aprés le théorème de la convergence dominé on a $\int\limits_{\mathbb{R}^N} (w_n(x))^{p^*} dx \to 0$ si $n \to \infty$.
- On calcule $\int\limits_{|x|>R} (w_n(x))^{p^*} dx$: on a:

$$\begin{aligned} \int\limits_{|x|>R} (w_n(x))^{p^*} dx &\leq \bar{c} \int\limits_{|x|>R} |x|^{\frac{-(N-1)p^*}{p}} dx = \bar{c}\omega_N \int\limits_R^{+\infty} r^{\frac{-N(N-1)}{N-p}} r^{N-1} dr \\ &= \frac{-\bar{c}\omega_N}{\alpha+1} R^{\alpha+1} \to 0 \qquad \text{quand} \quad R \to +\infty \end{aligned}$$

Alors :

$$1 = \int\limits_{\mathbb{R}^N} (w_n(x))^{p^*} dx = \int\limits_{B(0,1)} (w_n(x))^{p^*} dx + \int\limits_{1<|x|<R} (w_n(x))^{p^*} dx + \int\limits_{|x|>R} (w_n(x))^{p^*} dx$$

Passant à la limite, on obtient:

$$1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (w(x))^{p^*} dx = \frac{1}{2}$$

ce qui est impossible

Alors on conclut que $S$ n'est pas atteinte si $\bar{v} = 0$ .

## 3.2 Application (II)

Fixons $p < q < p^*$,on considère le problème de minimisation suivant

$$S_q = \inf_{u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p \, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx}{\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}}}.$$

Le but de cette section est de démontrer que $S_q$ est atteinte.
**1-On commence par démontrer que $S_q$ est positive**.

Soit $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, on a

$$\|u\|_{L^q} \leq \|u\|_{L^{p^*}}^{\theta} \|u\|_{L^p}^{(1-\theta)} \quad \text{d'aprés l'inégalité d'intèrpolation,avec } \ 0 \leq \theta \leq 1$$

Donc

$$\|u\|_{L^q}^p \leq \|u\|_{L^{p^*}}^{p\theta} \|u\|_{L^p}^{p(1-\theta)}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q}^p &\leq \frac{1}{p} \|u\|_{L^{p^*}}^{p^2\theta} + \frac{1}{q} \|u\|_{L^p}^{p(1-\theta)q} \quad (\text{appliquons l'inégalité deYoung}, 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}) \\
&\leq \frac{s}{p} \|\nabla u\|_{L^p}^{p^2\theta} + \frac{1}{q} \|u\|_{L^p}^{p(1-\theta)q} \qquad (\text{pour } \theta = \frac{1}{p}) \\
&\leq c\left[\|\nabla u\|_{L^p}^p + \|u\|_{L^p}^p\right] \qquad (\text{avec } \ c = \max\left(\frac{s}{p}, \frac{1}{q}\right))
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} \leq \frac{\|\nabla u\|_{L^p}^p + \|u\|_{L^p}^p}{\|u\|_{L^q}^p}$$

$$\Rightarrow 0 < \inf_{u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)} \frac{1}{c} \leq \inf_{u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)} \frac{\|\nabla u\|_{L^p}^p + \|u\|_{L^p}^p}{\|u\|_{L^q}^p} = S_q$$

Donc $S_p$ est positive
2- D'aprés le théorème de Pölya-Szégö on a $\|\nabla u^*\|_{L^p} \leq \|\nabla u\|_{L^p}$, et

$\|u^*\|_{L^p} = \|u\|_{L^p}, \|u^*\|_{L^{p^*}} = \|u\|_{L^{p^*}}$ (la symetrisation de Schwarz conserve les normes dans $L^q(\mathbb{R}^N)$.)

donc

$$S_q = \inf_{u \in W_r^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx}{\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}}} \leq \inf_{u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx}{\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}}}$$

et puisque $(\mathbb{R}^N)^* = \mathbb{R}^N$, alors

$$S_q = \inf_{u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx}{\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}}}.$$

Soit $(v_n)_n$ une suite minimisante ,décroissante radiale et positive , telle que $\int\limits_{I\!R^N} (v_n(x))^p \, dx = 1$ et $\int\limits_{I\!R^N} v_n^p dx + \int\limits_{I\!R^N} |\nabla v_n|^p dx \to S_q$, donc la suite $(v_n)_n$ est bornée dans $W^{1,p}\left(I\!R^N\right)$, d'où l'existence de $v_0 \in W_r^{1,p}(I\!R^N)$ tel que $v_n \rightharpoonup v_0$ faiblement dans $W_r^{1,p}(I\!R^N)$.
D'aprés le théorème de Riellich-Kondrachov on a l'injection compacte de $W^{1,p}(B_R)$ dans $L^q(B_R), \forall q < p^*$ ou $B_R$ est la boule de centre 0 et de rayon $R$. Donc $v_n \to v_0$ fortement dans $L^q(B_R)$.

**1) Si** $v_0 \neq 0$. D'aprés le lemme de Fatou ,on a :

$$\int\limits_{I\!R^N} (v_0(x))^q \, dx \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \int\limits_{I\!R^N} (v_n(x))^q \, dx = 1,$$

par la semi continuité inférieure des normes, on a

$$\|v_0\|^p_{W^{1,p}\left(I\!R^N\right)} \leq \|v_n\|^p_{W^{1,p}\left(I\!R^N\right)} = S_q$$

On conclut que si $v_0 \neq 0$

$$\begin{cases} \int\limits_{I\!R^N} (v_0(x))^q \, dx \leq 1 \\ \|v_0\|^p_{W^{1,p}\left(I\!R^N\right)} \leq S_q \end{cases}$$

**(i)- Si** $\int\limits_{I\!R^N} (v_0(x))^q \, dx = 1$, on a par définition

$$S_p \leq \|v_0\|^p_{W^{1,p}\left(I\!R^N\right)} \tag{3.2}$$

et

$$S_q \geq \|v_0\|^p_{W^{1,p}\left(I\!R^N\right)} \tag{3.3}$$

Donc d'aprés (3.2)et (3.3) on conclut que la constante $S_q$ est atteinte et $S_q = \|v_0\|^p_{W^{1,p}\left(I\!R^N\right)}$.

**(ii)-Si** $0 < \int\limits_{I\!R^N} (v_0(x))^q \, dx < 1$, on a

$$S_q = \inf\left\{ \|v_n\|^p_{W^{1,p}\left(I\!R^N\right)} \text{ tel que } \int\limits_{I\!R^N} (v_n(x))^q \, dx = 1 \right\}$$

d'aprés le lemme variationnel d'Ekland , on a

$$-\triangle_p v_n + v_n^{p-1} = \lambda v_n^{q-1} + o(1)$$

• Comme dans le cas de la constante de Sobolev (Application I), on peut démontrer facilement que $\lambda = S_q$ et que $v_0$ est une solution de l'équation d' Euler associer, c.à.d,

$$-\triangle_p v_0 + v_0^{p-1} = \lambda v_0^{q-1}.$$

En testant l'equation précédente par $v_0$, on obtient

$$\int\limits_{I\!R^N} |\nabla v_0|^p \, dx + \int\limits_{I\!R^N} |v_0|^p \, dx = S_q \int\limits_{I\!R^N} |v_0|^q \, dx$$

Donc

$$S_q \leq \frac{\int\limits_{I\!R^N} |\nabla v_0|^p dx + \int\limits_{I\!R^N} |v_0|^p dx}{(\int\limits_{I\!R^N} |v_0|^q dx)^{\frac{p}{q}}} = \frac{S_q \int\limits_{I\!R^N} |v_0|^q dx}{(\int\limits_{I\!R^N} |v_0|^q dx)^{\frac{p}{q}}} = S_q \left( \int\limits_{I\!R^N} |v_0|^q dx \right)^{1-\frac{p}{q}} < S_q \text{ car } \int\limits_{I\!R^N} |v_0|^q dx < 1$$

une contradiction avec la définition de $v_0$. Donc $\int\limits_{I\!R^N} |v_0|^q dx = 1$ et on conclut que $S_q$ est atteinte dans ce cas.

**2)-Si** $v_0 = 0$. D'aprés le lemme de Strauss on a

$$\begin{aligned} v_n(x) &\leq c\,|x|^{-\left(\frac{N-p}{p}\right)} \|v_n\|_{W^{1,p}(I\!R^N)} \\ &\leq \bar{c}\,|x|^{-\left(\frac{N-p}{p}\right)} \qquad (\text{car } (v_n)_n \text{ est bornée dans} W^{1,p}\left(I\!R^N\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\int\limits_{I\!R^N} (v_n(x))^q \, dx = \int\limits_{B_R} (v_n(x))^q \, dx + \int\limits_{I\!R^N \backslash B_R} (v_n(x))^q \, dx,$$

on sait que $v_n \to v_0 = 0$ fortement dans $L^q(B_R)$, donc $\int\limits_{B_R} (v_n(x))^q \, dx \to 0$ quand $n \to +\infty$

$$\begin{aligned} \int\limits_{I\!R^N \backslash B_R} (v_n(x))^q \, dx &\leq \bar{c} \int\limits_{I\!R^N \backslash B_R} |x|^{-\left(\frac{N-p}{p}\right)q} \, dx \\ &\leq \bar{c}\omega_N \int\limits_{I\!R^N \backslash B_R} r^{-\left(\frac{N-p}{p}\right)q} r^{N-1} dr = \frac{\bar{c}\omega_N}{|\alpha+1|} R^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Si $\alpha + 1 < 0$, c.à.d $q > \frac{Np}{N-1}$, on aura

$$\int\limits_{I\!R^N \backslash B_R} (v_n(x))^q \, dx \to 0 \text{ quand } R \to +\infty.$$

D'aprés la définition de $v_n$,

$$1 = \int\limits_{I\!R^N} (v_n(x))^q \, dx \leq 0 \quad \text{impossible}$$

Donc on conclut que la constante $S_q$ est atteinte.

Si $p < q < \frac{Np}{N-1}$, fixons $q_0$ tel que $\frac{Np}{N-1} < q_0 < p^*$. D'aprés le calcul précédent on a

$$\int\limits_{I\!R^N \backslash B_R} v_n^q dx \to 0 \text{ quand } R \to +\infty.$$

Utilisant l'inégalité d'intèrpolation, on aura

$$||v_n||_{L^q(I\!R^N\setminus B_R)} \leq ||v_n||^{\theta}_{L^p(I\!R^N\setminus B_R)} ||v_n||^{1-\theta}_{L^{q_0}(I\!R^N\setminus B_R)} \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

Passant à la limite quand $n \to \infty$, il résulte que

$$||v_n||_{L^q(I\!R^N\setminus B_R)} \to 0 \text{ pour } R \to \infty.$$

D'où le résultat. Donc comme conclusion finale on aura que $v_0 \neq 0$ est la constante $S_q$ est atteinte.

**Remarque 3.2** *Il est clair que $v_0$ est une solution de l'équation d'Euler associée, plus précisément on obtient que $v_0$ est une solution positive radiale de l'équation*

$$-\triangle_p v_0 + v_0^{p-1} = S_q v_0^q, v_0 \in W^{1,p}\left(I\!R^N\right).$$

**Remarque 3.3** *Dans le cas où $q = p^*$ le comportement de $S_q$ est singulier dans le sens ou $S_q$ n'est pas atteinte et l'equation d'Euler associée n'a pas de solution. Plus précisément on a les propriétés suivantes de $S_{p^*}$.*

**Affirmation I** Montrons que $\mathbf{S}_{p^*} = S$, où $S$ est la constante de Sobolev.
Rappelons que

$$\mathbf{S}_{p^*} = \inf_{u\in W^{1,p}(I\!R^N)} \frac{\int\limits_{I\!R^N} |u(x)|^p dx + \int\limits_{I\!R^N} |\nabla u(x)|^p\, dx}{\left(\int\limits_{I\!R^N} |u(x)|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}}} \text{ et } S = \inf_{u\in W^{1,p}\left(I\!R^N\right)} \frac{\int\limits_{I\!R^N} |\nabla u(x)|^p\, dx}{\left(\int\limits_{I\!R^N} |u(x)|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}}}.$$

Soit $\varphi \in C_c^\infty\left(I\!R^N\right)$, on pose $\varphi_\mu(x) = \mu^{\frac{-(N-p)}{p}} \varphi\left(\frac{x}{\mu}\right)$, on a

$$\int\limits_{I\!R^N} \left|\nabla\varphi_\mu(x)\right|^p dx = \int\limits_{I\!R^N} |\nabla\varphi(x)|^p\, dx \int\limits_{I\!R^N} \left|\varphi_\mu(x)\right|^{p^*} dx = \int\limits_{I\!R^N} |\varphi(x)|^{p^*}\, dx$$

et

$$\int\limits_{I\!R^N} \left|\varphi_\mu(x)\right|^p dx = \mu^p \int\limits_{I\!R^N} \left|\varphi\left(\frac{x}{\mu}\right)\right|^p dx.$$

Par défintion on sait que $S_{p^*} \geq S$. D'autre part on a

$$\begin{aligned} S_{p^*} &\leq \inf_{\varphi\in C_c^\infty\left(I\!R^N\right)} \frac{\int\limits_{I\!R^N} \left|\varphi_\mu(x)\right|^p dx + \int\limits_{I\!R^N} \left|\nabla\varphi_\mu(x)\right|^p dx}{\left(\int\limits_{I\!R^N} \left|\varphi_\mu(x)\right|^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}}} \\ &\leq \inf_{\varphi\in C_c^\infty\left(I\!R^N\right)} \frac{\mu^p \int\limits_{I\!R^N} |\varphi(x)|^p\, dx + \int\limits_{I\!R^N} |\nabla\varphi(x)|^p\, dx}{\left(\int\limits_{I\!R^N} |\varphi(x)|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}}} \end{aligned}$$

Passant à la limite quand $\mu \to 0$ , on trouve que

$$S_{p^*} \leq \inf_{\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi(x)|^p \, dx}{\left( \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x)|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{p}{p^*}}} = S \tag{3.4}$$

Donc on a démontré que $S_{p^*} = S$, d'où l'affirmation I.

**Affirmation II** Montrons que la constante $S_{p^*}$ n'est jamais atteinte. Par l'absurde, on suppose que la constante $S_{p^*}$ est atteinte. Donc il existe une solution positive $v_0$ de l'équation d'Euler , c.à.d, $v_0$ vérifiant

$$\begin{cases} -\triangle_p v_0 + v_0^{p-1} = S_p v_0^{p^*-1} \\ v_0 \in W^{1,p}\left(I\!R^N\right) \end{cases}$$

Soit la fonctionnelle d'énergie suivante

$$J\left(v\right) = \frac{1}{p} \int\limits_{I\!R^N} |\nabla v|^p \, dx + \frac{1}{p} \int\limits_{I\!R^N} |v|^p \, dx - \frac{S_p}{p^*} \int\limits_{I\!R^N} |v|^{p^*} \, dx.$$

Il est clair que $v_0$ est un point critique de $J$.
On pose $f\left(\lambda\right) = J\left(v_0\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)$ avec $\lambda > 0$, donc

$$f'\left(\lambda\right) = \langle v_0, J'\left(v_0\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)\rangle \text{ et } f'\left(1\right) = \langle v_0, J'\left(v_0\left(x\right)\right)\rangle = 0$$

car $v_0$ est un point critique.
Donc

$$\int\limits_{I\!R^N} |\nabla v_0|^p \, dx + \int\limits_{I\!R^N} |v_0|^p \, dx = S_p \int\limits_{I\!R^N} |v_0|^{p^*} \, dx$$

et

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{1}{p} \int\limits_{I\!R^N} \left|\nabla v_0\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|^p dx + \frac{1}{p} \int\limits_{I\!R^N} \left|v_0\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|^p dx - \frac{S_p}{p^*} \int\limits_{I\!R^N} \left|v_0\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|^{p^*} dx \\ &= \frac{\lambda^{N-p}}{p} \int\limits_{I\!R^N} |\nabla v_0\left(x\right)|^p \, dx + \frac{\lambda^N}{p} \int\limits_{I\!R^N} |v_0\left(x\right)|^p \, dx - \frac{\lambda^N S_p}{p^*} \int\limits_{I\!R^N} |v_0\left(x\right)|^{p^*} \, dx. \end{aligned}$$

Par dérivation, on obtient

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{N-p}{p} \int\limits_{I\!R^N} |\nabla v_0\left(x\right)|^p \, dx + \frac{N}{p} \int\limits_{I\!R^N} |v_0\left(x\right)|^p \, dx - \frac{N S_p}{p^*} \int\limits_{I\!R^N} |v_0\left(x\right)|^{p^*} \, dx \\ &= \frac{N-p}{p} \left[ \int\limits_{I\!R^N} |\nabla v_0\left(x\right)|^p \, dx + \int\limits_{I\!R^N} |v_0\left(x\right)|^p \, dx \right] + \int\limits_{I\!R^N} |v_0\left(x\right)|^p \, dx - \frac{N-p}{p} S_p \int\limits_{I\!R^N} |v_0\left(x\right)|^{p^*} \, dx. \end{aligned}$$

Donc

$$f'(1) = 0 \Rightarrow \int\limits_{I\!R^N} |v_0\left(x\right)|^p \, dx = 0.$$

Contradiction avec l'hypothèse sur $v_0$. D'où l'affirmation II.

# Conclusion

La symétrisation de Schwarz, consiste à effectuer des transformations fonctionnelles à une fonction quelconque tout en préservant sa norme dans l'espace $L^p$ et en faisant diminuer sa normes dans les espaces de Sobolev, afin d'obtenir une fonction radiale décroissante.

Cette technique, permet de démontrer que certaines fonctionnelles définies dans l'espace de Sobolev admettent leur minimum en des fonctions symétriques.

Cela à aussi permis de montrer que la constante de Sobolev n'est atteinte que dans $\mathbb{R}^N$.

# Bibliographie


[1] **B.Abdellaoui - V.Felli - I.Peral,***Existence and Nonexistence Results for Quasilinear Elliptic Equations Involving the p-Laplacian,* (8) 9-B(2006), 445-484

[2] **Haim Brezis**, *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Edition Dunod, paris ,1999

[3] **H.Berestycki, T.Lachand-Robert,** *Some applications of the monotone rearrangement to elliptic equations in cylinders,* April 2000,p1-26

[4] **Jean.Michel Rakotoson**, *Mathématiques and Application*, Edition : Springer, 2008.

[5] **Michael Struwe**,*Variational Methods , Application to Nonlinear partial Differential Equations and Hamiltonian Systems,* Edition:Springer, 2008

[6] **M.Bouchakif** , *Analyse fonctionnelle*, Support de cours , Master 1 en mathématiques et application 2009-2010

[7] **Nicolas Dreyfuss-Titus Lupu,** *Exposé de maîtrise : minimisation des valeurs propres de laplacien et réarrangements,* sous la direction de Grégoire Nadin, juin 2009.

[8] **Otared kavian**, *Introduction à la théorie des points critique*, Edition : Springer, France, paris 1993

[9] **P.L.Lions,** *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires,* Edition: DUNOD ,1969

[10] **P.L.Lions,***Une approche élémentaire de quelques résultats de symétrisation , Séminaire équations aux dérivées partielles(école Polytechnique), 1986-1987,exp.*$n^0$13,p.17.

[11] **S.Kesaven**, *symetrization and applications.*Series Editor: Professor Roderick Wong, City University of Hong Kong, Hong Kong, China

[12] **Todd Arbogast and Jerry Bona**, *Methods of Applied Mathematics*, Edition : Fall and Springer Semesters 1999-2001