ملخص:

نظرا لأهمية الدور الذي يلعبه مبدأ النقطة الثابتة في مجال تطبيقات حيث أنه يتدخل في حل العديد من المعادلات التفاضلية الغير خطية خاصة في المسائل المتعلقة في لإيجاد الحلول الوحيدة.

في هذه المذكرة نتناول البعض من تطبيقاته المتعددة كما أننا ندرس بعض التعميمات لهذا المبدأ والتي تساعدنا على إيجاد الحلول للمعادلات من النوع $Ax + x_0 = x$. نتطرق بالخصوص إلى نظرية النقطة الثابتة لكراسنوسيلسكي والأخرى التي تخص التطبيقات المحدبة.

الكلمات المفتاحية: النقطة الثابتة، التطبيقات المنكمشة، التطبيقات المحدبة.

Abstract :

The fixed point principle plays a crucial role in the large domain of applications. It gives us the main tool for a more advanced study of different non linear differential equations, particularly for problems of existence and unicity.

In this memory, we consider different applications of this principle and some ones of its extensions and generalizations which are implied in the resolution of equations of the form $Ax + x_0 = x$. In particular, the fixed point theorem of Karsnosel'skii and the one for the concave operator.

Key words : Fixed point, contractions, concave operators.

Résumé :

Le principe du point fixe joue un rôle crucial dans le domaine des applications. Il intervient dans la résolution de plusieurs équations différentielles non linéaires en particulier, pour les problèmes d'existence et d'unicité.

Dans ce mémoire on aborde différentes applications de ce principe ainsi que quelques unes de ses extensions et généralisations qui s'impliquent dans la résolution des équations du type : $Ax + x_0 = x$. En particulier le théorème du point fixe de Krasnosel'skii et celui qui concerne les opérateurs concaves.

Mots clé : Point fixe, contractions, opérateurs concaves.

Table des matières :

Introduction générale

Le principe de l'application contractante est l'un des rares théorèmes constructifs de l'analyse mathématique.

Il constitue un outil de grande importance vue l'étendue de son champs d'applications à priori, dans l'étude des équations non linéaires qui jouent un rôle crucial aussi bien en mathématiques qu'en sciences appliquées.

Le principe est le théorème du point fixe de Banach ou celui de Picard qui assure l'existence d'un unique point fixe pour une application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même. Le point fixe est la limite d'un procédé itératif défini à partir d'une répétition d'image par cette application contractante d'un point initial arbitraire dans cet espace.

Ce concept a été prouvé en premier lieu, par Banach en 1922 puis développé par plusieurs mathématiciens dont nous citons Brouwer et Schauder en 1930 ainsi que Krasnosel'skii en 1955.

Le théorème du point fixe de Schauder, qui est au fait, une extension de celui de Brouwer en dimension infinie est plus topologique que celui de Banach et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe qui n'est pas nécessairement, unique. Il n'est donc pas nécessaire d'établir des estimées sur la fonction mais simplement sa continuité.

Néanmoins, la mise en branle des méthodes variationnelles a focalisé ces dernières décennies, en majeur partie l'intérêt des mathématiciens au détriment des méthodes topologiques. En effet, ces méthodes variationnelles puisent leur efficacité dans leur orientation vers les applications. Leur atout majeur est le fait qu'ils fassent intervenir des fonctions généralisées et des espaces de Sobolev réflexifs qui constituent une chaine de liaison entre les solutions faibles et les solutions classiques. Cependant il y a des situations où les méthodes variationnelles s'avèrent laborieuses voire inopérantes. Et là encore, les méthodes topologiques seront de rigueur d'où leur importance fondamentale.

Le théorème du point fixe de Krasnosel'skii appuie par ses grandes mesures le domaine très actif des applications. Il apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité des solutions pour des opérateurs non linéaires qui sont étroitement, liés aux équations différentielles non linéaires et équations intégrales qui ont fait l'objet d'études intensives ces dernières décennies.

Beaucoup d'auteurs se sont aussi, intéressés aux problèmes d'existence et d'unicité des solutions positives pour l'équation d'opérateur du type $x = Ax + x_0$ dans un espace de Banach ordonné où A est un opérateur monotone. Les résultats concernant cette équation avec opérateur général α -concave sont encore peu nombreux d'où la nécessité de s'y attarder.

L'approche que nous développons dans ce mémoire se base particulièrement, sur celle développée dans le livre intitulé « *Fixed point theory and applications* » de R.P.Agarwal, et al.

Ce travail est réparti en quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré aux préliminaires. Dans le deuxième chapitre on trouve des définitions et propriétés de base concernant le principe de l'application contractante ainsi que quelques résultats fondamentaux. Le troisième chapitre s'étend aux applications du principe de l'application contractante. On se penche, particulièrement, sur les résultats d'existence pour les inégalités variationnelles définies par des formes bilinéaires sur un espace de Banach et dans lesquelles le principe de l'application contractante est applicable.

Dans le quatrième chapitre, on étudie différentes extensions du principe de l'application contractante. A fortiori, pour les applications non expansives. On déduit les conditions pour lesquelles le principe reste applicable. Par suite, on exhibe quelques théorèmes techniques permettant de généraliser ce concept. On étudie aussi l'alternative de Leray-Schauder dont la preuve fait appel au principe du point fixe et dont dérive une multitude d'applications. Nous en étudierons quelques unes. Nous y abordons quelques applications où le théorème du point fixe du type Krasnosel'skii s'implique pour établir l'existence et l'unicité des solutions. Enfin on étudie le théorème du point fixe pour les opérateurs généraux α -concaves.

Préliminaires

On commence par donner des définitions, ainsi que quelques résultats connus qui nous seront utiles dans la suite de notre travail.

I.1 Définitions

Soit E un espace de Banach réel.

Un sous ensemble convexe P de E est dit un cône s'il satisfait :

$x \in P$ et $\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in P$

$x \in P$ et $-x \in P \Rightarrow x = \theta$ où θ est l'élément nul de E.

Posons $\overset{\circ}{P} = \{x \in P / x \text{ est point intérieur de P}\}$.

P est dit cône solide si $\overset{\circ}{P}$ est non vide.

P est dit cône normal s'il existe une constante $N > 0$ telle que pour tout $x, y \in P$ $\theta \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq N\|y\|$. N est dite constante de normalité de P. On dit que E est partiellement ordonné par le cône P si : $x \leq y$ si et seulement si $y - x \in P$.

Si $x_1, x_2 \in E$, l'ensemble $\{x_1, x_2\} = \{x \in E / x_1 \leq x \leq x_2\}$ est dit intervalle ordonné entre x_1 et x_2.

On dit qu'un opérateur $A: E \to E$ est croissant (décroissant) si $x \leq y \Rightarrow Ax \leq Ay$ $(Ax \geq Ay)$.

Pour tout $x, y \in E$, la notation $x \sim y$ montre qu'ils existent $\lambda > 0, \mu > 0$ telles que $\lambda x \leq y \leq \mu x$. $\sim$ est une relation d'équivalence.

Soit donné $h > \theta$ (ie $h \geq \theta$ et $h \neq \theta$). On note par P_h l'ensemble :

$P_h = \{x \in E / \exists \lambda(x), \mu(x) > 0 \text{ tels que } \lambda(x)h \leq x \leq \mu(x)h\}$. Il est clair que $P_h \subset P$.

Soit $D \subset E$, un opérateur $A: D \to E$ est dit compact si pour tout ensemble S borné dans D, $A(S)$ est relativement compact. De plus A est dit complètement continu s'il est continu et compact.

I.2 Résultat principal

On étudie l'existence et l'unicité des solutions positives de l'équation $x = Ax + x_0$ (1) avec opérateur α-concave ou homogène. On suppose toujours, que E est un espace de Banach réel avec un ordre partiel introduit par le cône normal P de E. on prend $h \in E,\ h > \theta$.

P_h est défini comme précédemment. Le lemme suivant sera utile pour démontrer le résultat principal.

Lemme 1 [36]

Supposons que *A* satisfait les conditions suivantes :
(H_1) $A : P_h \to P_h$ est croissant dans P_h.
(H_2) $\forall x \in P_h$ et $t \in (0,1)$, il existe $\alpha(t) \in (0,1)$ tel que : $A(tx) \geq t^{\alpha(t)} Ax$. (*A* est dit général α-concave).
Alors il existe $u_0, v_0 \in P_h$ tel que $u_0 < v_0$, $u_0 \leq Au_0 \leq Av_0 \leq v_0$.

Soit l'hypothèse (H_3) : il existe une constante $l \geq 0$ telle que $x_0 \in [\theta, lh]$.

Le théorème suivant, est le résultat principal de cette partie.

Théorème 1

Supposons que l'opérateur *A* satisfait (H_1), (H_2), et (H_3). Alors l'équation opérateur (1) admet une solution unique dans P_h.

Preuve

$Ax \in P_h$ pour tout $x \in P_h$

Alors ils existent $\lambda, \mu > 0$ telles que $\lambda h \leq Ax \leq \mu h$. On obtient donc :

$\lambda h \leq Ax + x_0 \leq \mu h + lh = (\mu + l) h$. Alors $Ax + x_0 \in P_h, \forall x \in P_h$.

Définissons un opérateur *C* par : $Cx = Ax + x_0, \forall x \in P_h$

$C : P_h \to P_h$ est croissant. Donc, pour tout $x \in P_h$ et $t \in (0,1)$ on sait que $C(tx) = A(tx) + x_0 \geq t^{\alpha(t)} Ax + x_0 \geq t^{\alpha(t)} (Ax + x_0) \geq t^{\alpha(t)} Cx$

Le lemme1 implique l'existence de $u_0, v_0 \in P_h$ tels que $u_0 < v_0$, $u_0 \leq Cu_0 \leq Cv_0 \leq v_0$ (*). Construisons, successivement, la suite :

$u_n = Cu_{n-1}, v_n = Cv_{n-1}, n = 1, 2, \ldots$. *C* étant croissant, on a : $u_1 = Cu_0 \leq Cv_0 = v_1$. Et en général, on obtient $u_n \leq v_n, n = 1, 2, \ldots$

On obtient de (*) et la monotonie de C : $u_0 \leq u_1 \ldots < u_n \leq \ldots \leq v_n \leq \ldots \leq v_1 \leq v_0$ (**).

Soit $t_n = \sup\{t > 0 / u_n \geq t v_n\}$ Alors $u_n \geq t_n v_n, n = 1, 2, \ldots$

$u_{n+1} \geq u_n \geq t_n v_n \geq t_n v_{n+1}, n = 1, 2, \ldots$ or on a $u_{n+1} \geq t_{n+1} v_{n+1}, n = 1, 2, \ldots$ avec

$t_{n+1} = \sup\{t > 0 / u_{n+1} \geq t v_{n+1}\}$ donc $t_{n+1} \geq t_n \Rightarrow (t_n)_n$ est croissante et puisque $(t_n)_n \subset [0,1]$ (ie bornée) elle est donc convergente. Supposons que $t_n \to t^*$ alors $t^* = 1$. Sinon $0 < t^* < 1$.

Si $0 < t^* < 1$, on distingue deux cas :

1. Il existe un entier *N* tel que $t_N = t^*$. Dans ce cas, on sait que $t_n = t^*$ pour tout $n \geq N$.

   Donc pour $n \geq N$ on a :

   $u_{n+1} = Cu_n \geq C(t^* v_n) \geq t^{*\alpha(t^*)} Cv_n = t^{*\alpha(t^*)} v_{n+1}$

on a $t_{n+1} = t^*$ (car $t_n = t^*$ pour tout $n \geq N$)

$t_{n+1} = t^* \geq t^{*\alpha(t^*)} > t^*$ d'où la contradiction.

2. Pour tout entier n, $t_n < t^*$. On obtient :

$$u_{n+1} = Cu_n \geq C\left(t_n v_n\right) = C\left(\frac{t_n}{t^*} t^* v_n\right)$$

$$\geq \left(\frac{t_n}{t^*}\right)^{\alpha\left(\frac{t_n}{t^*}\right)} C\left(t^* v_n\right) \geq \left(\frac{t_n}{t^*}\right)^{\alpha\left(\frac{t_n}{t^*}\right)} t^{*\alpha(t^*)} C\left(v_n\right)$$

$$\geq \frac{t_n}{t^*} t^{*\alpha(t^*)} v_{n+1} \geq t_n \left[t^{*\alpha(t^*)-1}\right] v_{n+1}$$

Par définition de t_n, $t_{n+1} \geq t_n \left[t^{*\alpha(t^*)-1}\right]$.

Quand $n \to \infty$, on aura : $t^* \geq t^{*\alpha(t^*)} > t^*$ d'où la contradiction donc $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 1$.

Pour tout entier p on a :

$\theta \leq u_{n+p} - u_n \leq v_n - u_n \leq v_n - t_n v_n \leq \left(1 - t_n\right) v_n \leq \left(1 - t_n\right) v_0$

$\theta \leq v_n - v_{n+p} \leq v_n - u_n \leq \left(1 - t_n\right) v_0$

Puisque P est normal de constante N, on aura :

$\left\| u_{n+p} - u_n \right\| \leq N\left(1 - t_n\right)\left\| v_0 \right\| \to 0$ quand $n \to \infty$ (car $t_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$)

$\left\| v_n - v_{n+p} \right\| \leq N\left(1 - t_n\right)\left\| v_0 \right\| \to 0$ quand $n \to \infty$

Donc $\left(u_n\right)_n$ et $\left(v_n\right)_n$ sont des suites de Cauchy dans E qui est complet. Alors ils existent u^*, v^* tels que $u_n \to u^*$ et $v_n \to v^*$ quand $n \to \infty$

D'après (**) on a : $u_n \leq u^* \leq v^* \leq v_n$ avec $u^*, v^* \in P_h$ et $\theta \leq v^* - u^* \leq v_n - u_n \leq \left(1 - t_n\right) v_0$ et donc $\left\| v^* - u^* \right\| \leq N\left(1 - t_n\right)\left\| v_0 \right\| \to 0$ quand $n \to \infty$.

Donc $u^* = v^*$. Soit $x^* := u^* = v^*$, on obtient $u_{n+1} = Cu_n \leq Cx^* \leq Cv_n = v_{n+1}$.

Quand $n \to +\infty$, on aura $x^* = Cx^*$, x^* est donc un point fixe de C dans P_h.

Dans ce qui suit, on va prouver que x^* est l'unique point fixe de C dans P_h.

Soit $t_1 = \sup\left\{t > 0 / \overline{x} \geq t x^*\right\}$ $\overline{x}$ étant un quelconque point fixe de C dans P_h $0 < t_1 < \infty$ et $\overline{x} \geq t_1 x^*$. On doit prouver que $t_1 \geq 1$.

Si $0 < t_1 < 1$ alors : $\overline{x} = C\overline{x} \geq C\left(t_1 x^*\right) \geq t_1^{\alpha(t_1)} Cx^* = t_1^{\alpha(t_1)} x^*$. Puisque $t_1^{\alpha(t_1)} > t_1$, ceci contredit la définition de t_1. Alors $t_1 \geq 1$, et donc $\overline{x} \geq t_1 x^* \geq x^*$ et de façon similaire on prouve que $x^* \leq \overline{x}$ ce qui implique que $x^* = \overline{x}$. Donc C possède un point fixe x^* dans P_h. On en déduit que l'équation (1) possède une solution unique dans P_h. Et nous avons le corollaire et les théorèmes suivants : [36]

Corollaire

Supposons que A satisfait (H_1) et (H_2) et $x_0 \in P_h$. Alors l'équation (1) admet une solution unique dans P_h.

Théorème 2

Soit $A: P \to P_h$ un opérateur croissant, supposons (H_3) satisfaite. Et pour $t \in (0,1)$, il existe $0 < \eta(t) < 1$ tel que $A(tx) \geq t(1+\eta(t))Ax, \forall x \in P_h, t \in (0,1)$ alors l'équation (1) admet une solution unique dans P_h.

Théorème 3

Soit P un cône solide et $x_0 \in \overset{o}{P}$. Supposons que A satisfait :

(H_4) $A: \overset{o}{P} \to \overset{o}{P}$ est croissant et homogène (ie $A(\lambda x) = \lambda Ax$ pour tout $x \in \overset{o}{P}$ et $\lambda > 0$).
(H_5) A est complètement continu.
(H_6) il existe $v_0 \in \overset{o}{P}$ tel que $Av_0 \leq v_0 - x_0$
Alors l'équation (1) possède une solution unique.

On aborde les applications suivantes pour illustrer les résultats précédents :

Application 1

Soit $E = C_\beta(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions bornées et continues sur $\mathbb{R}^N$ muni de la norme $\|x\| = \sup|x(t)|$. E est un espace de Banach réel. L'ensemble $P = C_\beta^+(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions non négatives dans $C_\beta(\mathbb{R}^N)$ est un cône normal et solide dans $C_\beta(\mathbb{R}^N)$. On note $h \equiv 1$ et on considère l'équation intégrale : $x(t) = x_0(t) + \int_{\mathbb{R}} K(t,s)\, f(x(s))\,ds$ (1)

où $x_0 \in P$, $f: P_h \to P_h$ croissante et pour $0 < \lambda < 1$, il existe $0 < \alpha(\lambda) < 1$ tel que $f(\lambda x) \geq \lambda^{\alpha(\lambda)} f(x),\ \forall x \in P_h$ (*).

Conclusion

Supposons $K: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ est continue et non négative. Alors l'équation (1) admet une solution unique dans P_h.

Preuve

Il est claire que $x_0 \in [0, \|x_0\| h]$.
Définissons un opérateur A par : $Ax(t) = \int_{\mathbb{R}^N} K(t,s)\, f(x(s))\,ds$.

Notons que $K(t,s) \geq 0$, f est croissante, on déduit que : $A: P_h \to P_h$ est croissant pour $\lambda \in (0,1)$ et $x \in P_h$, on a d'après (*) :

$$A(\lambda x(t)) = \int_{\mathbb{R}^N} K(t,s)\, f(\lambda x(s))\,ds \geq \int_{\mathbb{R}^N} K(t,s)\, \lambda^{\alpha(\lambda)} f(x(s))\,ds$$

$$\geq \lambda^{\alpha(\lambda)} \int_{\mathbb{R}^N} K(t,s)\, f(x(s))\,ds \geq \lambda^{\alpha(\lambda)} Ax(t)$$

Donc les hypothèses (H_1) – (H_2) et (H_3) du théorème1 sont vérifiées et par conséquent, l'équation (1) admet une solution unique dans P_h.

Application 2

Soit $E = C[0,1]$, $P = \{x \in E \,/\, x(t) \geq 0,\ t \in [0,1]\}$ et $h(t) = \int_0^1 K(t,s)\,ds$. On suppose que $K(t,s):[0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^+$ est continue.

Conclusion

Soit $x_0 \in \overset{\circ}{P}$ et $x_0(t) + h(t) \leq 1, t \in [0,1]$. Alors l'équation $x(t) = x_0(t) + \int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds$ (1) admet une solution unique dans $\overset{\circ}{P}$.

Preuve

Il est facile d'établir que $\overset{\circ}{P} = \{x \in E \,/\, x(t) > 0, t \in [0,1]\}$.
P est un cône normal de constante égale à 1.

Pour $x \in E$, définissons l'opérateur : $Ax(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds$

Evidemment : $A : \overset{\circ}{P} \to \overset{\circ}{P}$ est croissant. $K(t,s)$ est continu donc A est complètement continue. De plus $A(\lambda x(t)) = \int_{\mathbb{R}^N} K(t,s)\lambda x(s)\,ds = \lambda Ax(t),\ \lambda > 0 \Rightarrow A$ est homogène.

On a pour $v_0(t) = 1 \forall t \in (0,1)\ Av_0(t) + x_0(t) = \int_0^1 K(t,s)\,ds + x_0(t) = h(t) + x_0(t) \leq 1$. Alors $Av_0 \leq v_0 - x_0$ (pour $v_0 \equiv 1$). Donc toutes les conditions du théorème 3 sont vérifiées, l'équation (1) admet une solution unique dans $\overset{\circ}{P}$.

I.3 Fonction de Green

La résolution de certaines équations différentielles fait appel aux fonctions de Green. Dans cette partie on va voir comment intervient cette fonction dans la résolution d'une équation pour un opérateur du type Sturm-Liouville en dimension 1.

Soit (a,b) un intervalle fini, $q:(a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue. On considère l'équation : $(Lf)(x) \equiv -f''(x) + q(x)\,f(x) = h(x)$ (1)

où h est une fonction donnée supposée continue par morceau et $L = -\dfrac{d^2}{dx^2} + q(x)$ (2)

est l'opérateur différentiel du type Sturm-Liouville, avec les conditions aux limites suivantes :

$\alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0$ (3)

$\alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0$ (4)

où α_i, β_i sont des constantes données.

Dans le cas où $\alpha_i = 0$ on a des conditions de Neumann.

Dans le cas où $\beta_i = 0$ on a des conditions de Dirichlet.

La méthode de Green consiste à résoudre pour chaque y fixé dans (a,b) l'équation différentielle : $\left[-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)\right]G(x,y)=\delta(x-y)$ (5)

où la fonction de Green doit satisfaire les mêmes conditions aux limites en $x=a$ et $x=b$ que la solution *f* de (1).

Si on arrive à déterminer *G*, la solution *f* de (1) s'obtient :

$$f(x)=\int_a^b G(x,y)h(y)dy \qquad (6)$$

δ étant une distribution, l'équation (5) s'interprète dans un sens distributionnel par : $L_x G=\delta(x-y)$.

Détermination de la fonction de Green

Pour $y\in(a,b)$ fixé, on détermine $G(x,y)$ en tant que fonction de x par les conditions suivantes :

Elle doit satisfaire l'équation différentielle $L_x G=0$ sur (a,y) et (y,b).

Elle doit satisfaire les conditions aux limites (3) et (4) en $x=a$ et $x=b$.

Elle doit être continue au point $x=y$.

La dérivée doit avoir une discontinuité de -1 au point $x=y$ ie la deuxième dérivée de *G* au point $x=y$ est égale à $-\delta(x-y)$.

Désignons par g_a une solution de $LG=0$ qui satisfait la condition (3) et par g_b une solution de $LG=0$ qui satisfait la condition (4). g_a et g_b sont déterminées à des coefficients multiplicatifs près.

On suppose qu'on peut les choisir linéairement indépendantes sur (a,b) ie $\lambda g_a+\mu g_b=0 \Rightarrow \lambda=\mu=0$ (g_a n'est pas proportionnelle à g_b).

Alors pour y fixé, ils existent des constantes γ et k qu'on peut déterminer à partir des conditions iii) et iv) et qui peuvent dépendre de y telles que :

$$G(x,y)=\begin{cases}\gamma g_a(x) & \text{si } x<y\\ k g_b(x) & \text{si } x>y\end{cases}$$

On détermine γ et k à partir de iii) et iv) au point $x=y$, on obtient

$$G(x,y)=\frac{-1}{W(y)}\begin{cases}g_a(x)g_b(y) & \text{si } x<y\\ g_a(y)g_b(x) & \text{si } x>y\end{cases}$$

où $W(y)=g_a(y)g_b'(y)-g_a'(y)g_b(y)$ est le Wronskien de g_a, g_b.

I.4 Quelques inégalités utiles

Inégalité de Hölder

Soit $1 \leq p \leq \infty$, p' l'exposant conjugué de p ie $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

Soit $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ alors $f \cdot g \in L^1$ et $\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$

Inégalité de Young

Soit $1 < p < \infty$ alors $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}, \forall a \geq 0, \forall b \geq 0$.

Inégalité de Poincaré

$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ où λ_1 est la plus petite valeur propre de $-\Delta$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $x, y \in E$ ($(E, \|\cdot\|)$ est un espace préhilbertien) alors : $|(x \mid y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ où $(\cdot \mid \cdot)$ est le produit scalaire dans *E*.

Résultats fondamentaux du principe de l'application contractante

Ce chapitre est consacré à rappeler quelques concepts de base de l'application contractante, dont nous avons essentiellement besoin. On y trouve des définitions, des propriétés ainsi que les principaux théorèmes du principe de l'application contractante.

II.1 Application contractante

Soit (M,d) un espace métrique complet et $T: M \to M$ une application. On dit que T est Lipschitzienne de constante $k \geq 0$ si : $d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$

Remarques

- Une application Lipschitzienne est nécessairement, continue.
- La composition de deux applications Lipschitziennes est une application Lipschitzienne.
- Si T est une application Lipschitzienne, T^n, la composition n fois de T avec elle-même est aussi Lipschitzienne.
- On dit que *T* est non expansive si $0 \leq k \leq 1$.
- On dit que *T* est une contraction si $0 \leq k < 1$. Dans ce cas la constante de Lipschitz est dite constante de contraction.

Le principe de l'application contractante

Dans ce qui suit, on étudiera le principe de l'application contractante qui est dit aussi : *principe du point fixe de Banach*. Nous énonçons le théorème suivant qui est la base du principe du point fixe.

Théorème1

Soit (M,d) un espace métrique complet et $T: M \to M$ une contraction de constante *k*. Alors *T* possède un unique point fixe $x \in M$.

En plus si $y \in M$ est arbitrairement choisi, alors les itérations $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ données par :

$x_0 = y, \quad x_n = T(x_{n-1}), \quad n \geq 1$ possèdent la propriété $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

Démonstration

Soit $y \in M$ un point arbitraire.

Considérons la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ donnée par : $x_0 = y, \quad x_n = T(x_{n-1}), \quad n \geq 1$.

On doit prouver que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans *M*.

Pour $m < n$, on utilise l'inégalité triangulaire :

$$d\left(x_m, x_n\right) \le d\left(x_m, x_{m+1}\right) + d\left(x_{m+1}, x_{m+2}\right) + \cdots + d\left(x_{n-1}, x_n\right)$$

Puisque *T* est une contraction, on a : $d\left(x_p, x_{p+1}\right) = d\left(T\left(x_{p-1}\right), T\left(x_p\right)\right) \le kd\left(x_{p-1}, x_p\right),\ p \ge 1$

En répétant cette inégalité on obtient : $d\left(x_m, x_n\right) \le \left(k^m + k^{m+1} + \cdots + k^{n-1}\right) d\left(x_0, x_1\right)$

i.e $d\left(x_m, x_n\right) \le \dfrac{k^m}{1-k} d\left(x_0, x_1\right), m < n$

On déduit que $\left(x_n\right)_n$ est de Cauchy dans *M* qui est complet, donc $\left(x_n\right)_n$ converge vers *x* dans *M*.

Par ailleurs, puisque *T* est continue, on a : $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} T\left(x_{n-1}\right) = T\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = T\left(x\right)$

Donc *x* est bien un point fixe de *T*.

<u>L'unicité de x</u> : soient x, z deux points fixes de *T*.

$$d\left(x, z\right) = d\left(T\left(x\right), T\left(z\right)\right) \le kd(x, z)$$

Puisque $k < 1$, on doit avoir $d\left(x, z\right) = 0 \Rightarrow x = z$

Remarque

Il se peut que *T* ne soit pas une contraction sur tout l'espace *M* mais juste au voisinage d'un point donné. Dans ce cas, on a le résultat suivant :

Théorème 2

Soit $\left(M, d\right)$ un espace métrique complet et :

$$B = \left\{x \in M, d\left(x, z\right) < \varepsilon,\ z \in M \text{ et } \varepsilon > 0\right\}$$

Soit $T : B \to M$ telle que $d\left(T\left(y\right), T\left(x\right)\right) \le kd\left(y, x\right)\text{)},\ \forall x, y \in B$ et $k < 1$

On suppose, en plus que : $d\left(z, T\left(z\right)\right) < \varepsilon\left(1-k\right)$. Alors *T* possède un unique point fixe $x \in B$.

Démonstration

Il n'est pas dit que *T* soit définie sur $\overline{B}$ (la fermeture de *B*).

La continuité uniforme de *T* nous permet de définir *T* par prolongement sur $\overline{B}$ où *T* sera encore une contraction de même constante k. On aura pour $x \in \overline{B}$:

$$d\left(z, T\left(x\right)\right) \le d\left(z, T\left(z\right)\right) + d\left(T\left(z\right), T\left(x\right)\right) \le \varepsilon\left(1-k\right) + \varepsilon k = \varepsilon$$

Et donc : $T : \overline{B} \to B$, $\overline{B}$ étant fermé dans un espace métrique complet, $\overline{B}$ est un sous espace métrique complet et donc on peut appliquer le théorème 1. *T* possède un unique point fixe $x = T\left(x\right)$ dans $\overline{B}$. Et par le calcul précédent, on a : $d\left(z, x\right) = d\left(z, T\left(x\right)\right) \le \varepsilon$ d'où $x \in B$.

II.2 Quelques extensions

Exemple 1

Considérons $M = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 1\}$ muni de la métrique $d(x, y) = |x - y|$, pour tout $x, y \in M$.

Soit $T : M \to M$ telle que $T(x) = x + \frac{1}{x}, \ x \neq 0$

$$d\left(T(x), T(y)\right) = \left|T(x) - T(y)\right| = \left|x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y}\right| = |x - y|\frac{xy - 1}{xy} < |x - y| = d(x, y)$$

donc $d\left(T(x), T(y)\right) < d(x, y)$ c'est-à-dire $\nexists k < 1$ tel que

$d\left(T(x), T(y)\right) \leq kd(x, y), \ \forall x, y \in M$.

On vérifie, aisément, que *T* ne possède aucun point fixe, en effet :

$T(x) = x \Rightarrow x + \frac{1}{x} = x \Rightarrow \frac{1}{x} = 0$ ce qui est impossible.

Le résultat suivant est dû à Eldelstein (voir [8] et [9]).

Théorème 3

Soit (M, d) un espace métrique complet et $T : M \to M$ une application telle que : $d\left(T(x), T(y)\right) < d(x, y), \ \forall x, y \in M$ et $x \neq y$

Supposons qu'il existe $z \in M$ tel que les itérations $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ données par

$x_0 = z, \ \ x_n = T(x_{n-1}), \ \ n \geq 1$

possèdent une sous suite $\left\{x_{n_j}\right\}_{j=0}^{\infty}$ convergente avec $\lim_{j \to \infty} x_{n_j} = y \in M$. Alors y est un unique point fixe de *T*.

Démonstration

on peut écrire $x_n = T^n(x_0)$ où $T^n = T \circ \cdots \circ T$ *n* fois.

Supposons que *T* ne possède aucun point fixe dans *M*. alors la fonction :

$$f : M \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{d\left(T^2(x), T(x)\right)}{d\left(T(x), x\right)}$$

est bien définie car $T(x) \neq x$ et est continue.

Puisque $y_j = x_{n_j}$ converge vers *y*, l'ensemble donné par : $K = \left\{y_j\right\}_j \cup \{y\}$ est compact. Son image par *f* est compacte. Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} f(x) \cdot d\left(T(x), x\right) &= d\left(T^2(x), T(x)\right), \ \forall x \in M \\ &< d\left(T(x), x\right) \end{aligned}$$

Donc $f(x) < 1, \ \forall x \in M$ et puisque *K* est compact, il est existe $0 \leq k < 1$ tq $f(x) \leq k, \forall x \in K$

D'autre part, on a pour tout entier $m \in \mathbb{N}$:

$d\left(T^{m+1}(z), T^m(z)\right) = \left(\prod_{i=0}^{m-1} f\left(T^i(z)\right)\right) d\left(T(z), z\right)$ (Ceci découle de la définition de *f*)

Pour $m = nj$ on a :

$$d\left(T\left(T^{nj}(z)\right), T^{nj}(z)\right) = \left(\prod_{i=0}^{nj-1} f\left(T^i(z)\right)\right) d\left(T(z), z\right)$$

et puisque $f\left(T^i(z)\right) \le k < 1$, on obtient :

$$d\left(T(y_j) - y_j\right) \le k^{j-1} d\left(T(z) - z\right)$$

Comme $y_j \underset{j\to\infty}{\rightarrow} y$, $T(y_j) \underset{j\to\infty}{\rightarrow} T(y)$ et $k^{j-1} \underset{j\to\infty}{\rightarrow} 0$ (car $k < 1$)

Donc $d\left(T(y), y\right) = 0$ d'où la contradiction avec l'hypothèse : *T* ne possède aucun point fixe.

Remarque

Il découle du résultat précédent une très importante conséquence qu'est :

Théorème 4

Soit (M, d) un espace métrique complet et $T : M \to M$ une application telle que : $d\left(T(x), T(y)\right) < d(x, y)$, $\forall x, y \in M$ et $x \ne y$

Supposons, en plus, que : $T : M \to K$ où K est un sous ensemble compact de *M*. Alors *T* possède un unique point fixe dans *M*.

Démonstration

Puisque K est compact, pour tout $z \in M$ la suite $\left\{T^n(z)\right\}_n$ possède une sous suite convergente et donc on peut appliquer le théorème 3, et on a le résultat qu'on peut, aussi, obtenir par la façon suivante :

On a par hypothèse la fonction $x \mapsto d\left(T(x), x\right)$ est continue sur *K* (compact), elle atteint son minimum au point $y \in K$

Si $T(y) \ne y$ alors $d\left(T^2(y), T(y)\right) < d\left(T(y), y\right)$. Ceci contredit le fait que $d\left(T(y), y\right)$ soit une valeur minimum de la fonction sur *K*.

Remarque

Il y'a des cas où *T* est Lipschitzienne sans être une contraction. Cependant, une puissance de *T*, $\left(T^n\right) = T \circ T \circ \cdots \circ T$ *n* fois pour un certain *n* peut être une contraction. D'où le résultat suivant : (voir [32])

Théorème 5

Soit (M, d) un espace métrique complet et $T : M \to M$ une application telle que :

$d\left(T^m(x), T^m(y)\right) \le kd(x, y)$, $\forall x, y \in M$ pour un certain $m \ge 1$ et $0 \le k < 1$. Alors *T* possède un unique point fixe.

Démonstration

D'après le théorème 1 T^m possède un unique point fixe $z \in M$,

$T^m(z) = z \Rightarrow T(z) = T(T^m(z)) = T^m(T(z))$

Donc $T(z)$ est aussi un point fixe de T^m et puisqu'il est unique $T(z) = z$ donc *z* est un point fixe de *T*.

Exemple 2

Soit l'espace métrique *M* donné par : $M = C([a,b])$. L'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[a,b]$. *M* est un espace de Banach par rapport à la norme du max ie $\|u\| = \max_{t \in [a,b]} |u(t)|, u \in M$

On définit : $T : M \to M$ par $Tu(t) = \int_a^b u(s)\,ds$ alors :

$\|T(u) - T(v)\| \leq (b-a)\|u-v\|$. $(b-a)$ est la meilleure constante de Lipschitz pour *T*.

D'autre part, on a : $T^2(u)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s u(\tau)\,d\tau \right) ds = \int_a^t (t-s)u(s)\,ds$

et par induction : $T^m u(t) = \dfrac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-s)^{m-1} u(s)\,ds$

Il s'en suit : $\|T^m(u) - T^m(v)\| \leq \dfrac{(b-a)^m}{m!} \|u-v\|$

T^m serait une contraction si $\dfrac{(b-a)^m}{m!} < 1$

II.3. Dépendance continue aux paramètres

C'est souvent le cas dans les applications qu'une contraction dépende d'autres variables (paramètres).

Si cette dépendance est continue, alors le point fixe va dépendre continûment, de ces paramètres. Voici le résultat qui va le montrer.

Théorème 6

Soit (Λ, p) un espace métrique et (M, d) un espace métrique complet. $T : \Lambda \times M \to M$ une famille de contractions de constante uniforme $k < 1$ c'est-à-dire

$d(T(\lambda, x), T(\lambda, y)) \leq kd(x,y), \forall x, y \in M, \forall \lambda \in \Lambda$

Supposons, en plus, que pour tout $x \in M$, l'application $\lambda \mapsto T(\lambda, x)$ est continue de Λ dans *M*. Alors pour tout $\lambda \in \Lambda$, $T(\lambda, \cdot)$ possède un unique point fixe et l'application : $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est continue de Λ dans *M*. $\left(x(\lambda) = T(x(\lambda))\ x \text{ est le point fixe de } T \right)$

Démonstration

Le principe de l'application contractante s'applique pour tout $\lambda \in \Lambda$ donc l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est bien définie.

La continuité : pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, on a :

$$d\left(x(\lambda_1), x(\lambda_2)\right) = d\left(T\left(\lambda_1, x(\lambda_1)\right), T\left(\lambda_2, x(\lambda_2)\right)\right)$$
$$\leq d\left(T\left(\lambda_1, x(\lambda_1)\right), T\left(\lambda_2, x(\lambda_1)\right)\right) + d\left(T\left(\lambda_2, x(\lambda_1)\right), T\left(\lambda_2, x(\lambda_2)\right)\right)$$
$$\leq d\left(T\left(\lambda_1, x(\lambda_1)\right), T\left(\lambda_2, x(\lambda_1)\right)\right) + kd\left(x(\lambda_1), x(\lambda_2)\right)$$

Alors : $(1-k)d\left(x(\lambda_1), x(\lambda_2)\right) \leq d\left(T\left(\lambda_1, x(\lambda_1)\right), T\left(\lambda_2, x(\lambda_1)\right)\right)$

T étant continue par rapport à λ, on déduit la continuité de l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$

II.4. Applications Lipschitziennes monotones

Dans cette partie, on supposera M un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ de norme $\|\cdot\|$ définie par le produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ donné par : $\|u\|^2 = (u,u), \forall u \in M$. Pour plus de détails, voir [27], [28].

Définition

On dit que T est une application monotone si $\mathfrak{Re}\left(T(u) - T(v), u - v\right) \geq 0, \forall u, v \in M$, où $\mathfrak{Re}(c)$ est la partie réelle du nombre complexe c.

Le résultat suivant assure l'existence d'un unique point fixe pour les applications dites *perturbations Lipschitziennes monotones* de l'identité sous l'hypothèse qu'elles soient des contractions.

Théorème 7

Soit M un espace de Hilbert et $T : M \to M$ une application monotone telle que pour un certain $\beta > 0$, $\|T(u) - T(v)\| \leq \beta \|u - v\|, \forall u, v \in M$. Alors pour tout $\omega \in M$, l'équation $u + T(u) = \omega$ possède une unique solution $u = u(\omega)$ et l'application $\omega \mapsto u(\omega)$ est continue.

Démonstration

Si $\beta < 1$, alors l'application $u \mapsto \omega - T(u)$ est une contraction et le résultat s'obtient du principe de l'application contractante.

Si $\beta \geq 1$: Notons que pour $\lambda \neq 0$, u est une solution de :

$u = (1-\lambda)u - \lambda T(u) + \lambda\omega$ si et seulement si u est solution de $u + T(u) = \omega$.

Posons : $T_\lambda(u) = (1-\lambda)u - \lambda T(u) + \lambda\omega$.

Usant des propriétés du produit scalaire, on obtient :

$$T_\lambda(u) - T_\lambda(v) = (1-\lambda)(u-v) - \lambda\left(T(u) - T(v)\right)$$

$$\|T_\lambda(u) - T_\lambda(v)\|^2 \leq \lambda^2\beta^2 \|u-v\|^2 - 2\mathfrak{Re}\left(\lambda(1-\lambda)\left(T(u) - T(v), u - v\right)\right) + (1-\lambda)^2 \|u-v\|^2$$

Si $0 < \lambda < 1$ et puisque T est *monotone*, on aura : $\left\|T_\lambda(u) - T_\lambda(v)\right\|^2 \leq \left(\lambda^2\beta^2 + (1-\lambda)^2\right)\|u-v\|^2$

En choisissant $\lambda = \dfrac{1}{\beta^2+1}$, T_λ serait Lipschitzienne de constante k donnée par : $k^2 = \dfrac{\beta^2}{\beta^2+1} < 1$ est donc T_λ serait une contraction, d'où le résultat.

D'autre part : si u et v sont deux solutions de $u + T(u) = w$ respectivement, pour w_1 , w_2 c'est-à-dire : $u + T(u) = w_1$ et $v + T(v) = w_2$

$$\begin{aligned}
\left\|u + T(u) - v - T(v)\right\|^2 &= \left\|u - v - \big(T(u) - T(v)\big)\right\|^2 \\
&= \|u-v\|^2 + 2\mathfrak{Re}\big(T(u) - T(v), u - v\big) + \left\|T(u) - T(v)\right\|^2 \\
&= \|w_1 - w_2\|^2
\end{aligned}$$

T étant monotone, on aura $\|u-v\|^2 + \left\|T(u) - T(v)\right\|^2 \leq \|w_1 - w_2\|^2$ d'où la continuité de l'application $\omega \mapsto u(\omega)$

Applications du principe de l'application contractante

Dans cette partie, on discutera les résultats d'existence des solutions pour les inégalités variationnelles définies par des formes bilinéaires sur un espace de Banach.

Le résultat le plus important est un résultat du type Lax-Milgram. Voir [17], [21].

III.1 Les formes bilinéaires symétriques

Soit E un espace de Banach réel, réflexif dont la norme est $\|\cdot\|$ et une forme $a : E \times E \to \mathbb{R}$ continue (ie $|a(u,v)| \le c_1 \|u\|\|v\|$) coercive ($a(u,v) \ge c_2 \|u\|^2$) et symétrique ($a(u,v) = a(v,u)$), c_1, c_2 des constantes positives.

a est aussi linéaire par rapport à chacune de ses variables séparément.

E^* l'espace dual de *E*. Pour $b \in E^*$, on note par $\langle b,u \rangle$ la valeur de la fonctionnelle linéaire et continue *b* au point *u* dans la dualité (E^*, E). La norme dans E^* est notée : $\|\cdot\|_*$.

On va introduire la notion de topologie faible. Pour plus de détails, consulter [26], [31] et [33].

Pour $b \in E^*$ fixé, et K un ensemble faiblement fermé, on considère la fonctionnelle :

$$f(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - \langle b,u \rangle \tag{1}$$

Un calcul simple nous donne $f(u) \ge \frac{c_2}{2}\|u\|^2 - \|b\|_* \|u\|$.

$f(u) \to \infty$ quand $\|u\| \to \infty$ donc f est coercive et elle est bornée inférieurement sur *E*. Alors $\alpha = \inf_{v \in K} f(v) > -\infty$

Choisissons une suite $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dans K minimisante telle que $f(u_n) \to \alpha$. Puisque f est coercive, $(u_n)_n$ est bornée, et *E* est réflexif, alors $(u_n)_n$ possède une sous suite qui converge faiblement vers *u*. on notera encore cette sous suite $(u_n)_n$.

$u_n \rightharpoonup$ u (faiblement) $\Leftrightarrow \langle h,u_n \rangle \to \langle h,u \rangle, \forall h \in E^*$

Puisque *K* est faiblement fermé, $u \in K$.

a est bilinéaire et coercive (non négative) alors : $a(u_n,u_n) \ge a(u_n,u) + a(u,u_n) - a(u,u)$

En effet on a : $a(u_n - u, u_n - u) = a(u_n,u_n) - a(u_n,u) - a(u,u_n) + a(u,u) \ge 0$ (car a est coercive)

Donc $a(u_n,u_n) \geq a(u_n,u) + a(u,u_n) - a(u,u)$ et en passant à la limite inf on obtient :

$$\underline{\lim}\, a(u_n,u_n) \geq \underline{\lim}\, a(u_n,u) + \underline{\lim}\, a(u,u_n) - a(u,u)$$

$$\geq a(u,u) + a(u,u) - a(u,u)$$

$\underline{\lim}\, a(u_n,u_n) \geq a(u,u)$ (*a* est faiblement semi-continue inférieurement) donc :

$$f(u) \geq \alpha \geq \underline{\lim}\, f(u_n) = \frac{1}{2}\underline{\lim}\, a(u_n,u_n) - \langle b,u\rangle$$

$$\geq \frac{1}{2}\, a(u,u) - \langle b,u\rangle = f(u)$$

alors $f(u) = \min_{v \in K} f(v)$

Supposons que *K* est aussi convexe il serait donc fermé puisque les ensembles convexes sont fermés si et seulement si ils sont faiblement fermés.

Et donc pour tout $v \in K$ et $0 \leq t \leq 1$ on aura :
$f(u) \leq f(u + t(v-u))$ car ($u \in K, v \in K, K$ convexe $\Rightarrow tv + (1-t)u = u + t(v-u) \in K$).
Calculons $f(u+t(v-u)) - f(u)$ en utilisant les propriétés de *a* :

$$0 \leq ta(u,v-u) - t\langle b,v-u\rangle + t^2 a(v-u,v-u), \quad 0 \leq t \leq 1, \ \forall v \in K$$

En divisant par *t* et en faisant tendre *t* vers 0, on aura :

Il existe $u \in K$ tel que $f(u) = \min_{v \in K} f(v)$ (1) ou $a(u,v-u) \geq \langle b,v-u\rangle, \ \forall v \in K$ (2).

Si $b_1, b_2 \in E^*$ sont donnés et $u_1, u_2 \in K$ sont les solutions de (1) ou (2) alors, en posant : $Tb_i = u_i, i = 1,2$, on a :

$$a(u_1,v-u_1) \geq \langle b_1,v-u_1\rangle, \forall v \in K \quad \text{et} \quad a(u_2,v-u_2) \geq \langle b_2,v-u_2\rangle, \forall v \in K$$

En sommant, on obtient :

$$c_2 \|u_1-u_2\|^2 \leq a(u_1-u_2,u_1-u_2) \leq \langle b_1-b_2,u_1-u_2\rangle \leq \|b_1-b_2\|_* \|u_1-u_2\|$$

D'après la coercivité de *a* et l'inégalité de Cauchy-Schwartz (c_2 la constante de coercivité de *a*) et donc $\|u_1-u_2\| = \|Tb_1 - Tb_2\| \leq \frac{1}{c_2}\|b_1-b_2\|_*$ (3)

Alors (1) et (2) possèdent une solution unique pour tout $b \in E^*$. Et on a le théorème suivant :

Théorème 1

Soit $a : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, symétrique coercive et continue et *K* un sous ensemble convexe et fermé de *E*. Alors pour tout $b \in E^*$, l'inégalité variationnelle :
$a(u,v-u) \geq \langle b,v-u\rangle$ (2), $\forall v \in K$ possède une solution unique $u \in K$, et définit une application solution :

$$T : E^* \to K$$
$$b \mapsto Tb = u$$

qui est Lipschitzienne de constante $\frac{1}{c_2}$.

Remarque

D'après la discussion précédente, on constate que si a satisfait toutes les conditions du théorème 1 sauf la symétrie et si l'inégalité (2) possède une solution pour tout $b \in E^*$, alors l'application solution T est bien définie et satisfait la condition de Lipschitz (3) ; et on a le résultat suivant :

III.2 Les formes bilinéaires continues

Soit $a : E \times E \to \mathbb{R}$ continue, coercive et bilinéaire, $b \in E^*$ et K un convexe fermé de E.
Problème : prouver l'existence de $u \in K$ vérifiant : $a(u, v-u) \geq \langle b, v-u \rangle, \forall v \in K$.

Dans le cas où a est symétrique, le théorème 1 répond parfaitement à la question.

On va voir que le théorème reste vrai pour les formes qui ne sont pas nécessairement, symétriques. Voir [17] et [21].

Unicité de la solution : usant des propriétés des formes bilinéaires, on conclut que pour $b \in E^*$, le problème (2) admet au plus une solution. Et si $b_1, b_2 \in E^*$ et $u_1, u_2 \in K$ existent alors : $\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{c_2}\|b_1 - b_2\|_*$

Existence de la solution : posons $a = a_e + a_0$ où $a_e(u,v) := \frac{1}{2}\big(a(u,v) + a(v,u)\big)$ et

$a_0(u,v) := \frac{1}{2}\big(a(u,v) - a(v,u)\big)$. a_e est une forme bilinéaire, continue, coercive et symétrique et a_0 est une forme bilinéaire et continue.

Considérons la famille des problèmes : $a_e(u, v-u) + t a_0(u, v-u) \geq \langle b, v-u \rangle, \forall v \in K, 0 \leq t \leq 1$

Notons : $a_t = a_e + t a_0$

Lemme

Soit $t \in [0, \infty)$ tel que le problème :

$a_t(u, v-u) \geq \langle b, v-u \rangle,\ \forall v \in K$ possède une unique solution pour tout $b \in E^*$

Alors il existe une constante $c > 0$ qui dépend uniquement des constantes de coercivité et de continuité de a telle que le problème $a_{t+\tau}(u, v-u) \geq \langle b, v-u \rangle, \forall v \in K$ (3) admet une unique solution pour tout $b \in E^*$ et $0 \leq \tau \leq c$.

Preuve

Pour $w \in K, t \geq 0$, considérons : $a_t(u, v-u) \geq \langle b, v-u \rangle - \tau a_0(w, v-u)$ (4) . Posons pour w fixé dans K $b_w := b - \tau a_0(w, \cdot) \in E^*$. Alors il existe un unique $u = Tw$ qui est solution de (4) et : $\|Tw_1 - Tw_2\| \leq \frac{1}{c_2}\|b_{w_1} - b_{w_2}\|_*$.

Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned}\|b_{w_1} - b_{w_2}\|_* &= \sup_{\|u\|=1} \tau \left|a_0(w_1, u) - a_0(w_2, u)\right| \\ &\leq \tau c_1 \|w_1 - w_2\|\end{aligned}$$

Et donc : $\|Tw_1 - Tw_2\| \le \tau \dfrac{c_1}{c_2}\|w_1 - w_2\|$

Et $T : K \to K$ est une contraction si $\tau \dfrac{c_1}{c_2} < 1$. Alors il existe une unique solution de (3) si $\tau < \dfrac{c_2}{c_1}$. On peut donc choisir $c = \dfrac{c_2}{2c_1}$ par exemple.

On peut appliquer ce lemme pour $t = 0$, $a_0 = a_e\left(\text{car } a_t = a_e + ta_0\right)$ et puisque a_e est symétrique, on obtient : $a_t\left(u, v-u\right) \ge \left\langle d, v-u\right\rangle \ \ \forall v \in K$ (5) possède une solution unique pour tout $d \in E^*$ et $0 \le t \le c$. Et encore par lemme précédent, on déduit que (5) possède une solution unique pour $0 \le t \le 2c$

En répétant le même raisonnement, on déduit que (5) possède une unique solution pour $t \in \left[0, \infty\right)$. Et en particulier pour $t = 1$ le problème (2) possède une solution unique. Et on aura donc le théorème suivant :

Théorème 2

Soit $a : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, coercive et continue et K un convexe fermé de E. Alors pour tout $b \in E^*$ l'inégalité variationnelle : $a\left(u, v-u\right) \ge \left\langle b, v-u\right\rangle \forall v \in K$ possède une unique solution. Et cette inégalité définit une application solution :

$T : E^* \to K$

$\quad b \mapsto Tb = u$

qui est Lipschitzienne de constante $\dfrac{1}{c_2}$ (c_2 est la constante de coercivité de a).

Usant de ce résultat, on peut immédiatement, trouver un résultat d'existence de solutions des inégalités variationnelles linéairement perturbées de la forme :

$a\left(u, v-u\right) \ge \left\langle F\left(u\right), v-u\right\rangle, \ \forall v \in K$ (6)

Où $F : E \to E^*$ est Lipschitzienne ie $\left\|F\left(u_1\right) - F\left(u_2\right)\right\|_* \le k\left\|u_1 - u_2\right\|$ et nous avons le résultat suivant :

Théorème 3

Soient a, K et F définis comme précédemment. Alors l'inégalité variationnelle (6) possède une unique solution si $k < c_2$ où k est la constante de Lipschitz de F et c_2 est la constante de coercivité de a.

Preuve

Il suit du théorème 2 que l'inégalité variationnelle (6) est équivalente au problème du point fixe $u = T\left(F\left(u\right)\right)$ puisque : $TF : K \to K$ K fermé convexe de E donc un espace métrique complet. On peut appliquer le principe de l'application contractante et le théorème 2.

Alors pour tout $u_1, u_2 \in K$ $\left\|T\left(F\left(u_1\right)\right) - T\left(F\left(u_2\right)\right)\right\| \le \dfrac{1}{c_2}\left\|F\left(u_1\right) - F\left(u_2\right)\right\|_* \le \dfrac{k}{c_2}\left\|u_1 - u_2\right\|$ donc $\dfrac{k}{c_2} < 1 \Rightarrow k < c_2$

Pour illustrer ce qui a été énoncé, voici quelques exemples :

III.3 Quelques applications

Problème d'obstacle

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $E = L^2(\Omega)$. Soit $\psi(x) \in E$ donnée et :

$K := \{u \in E, u(x) \geq \psi(x) \text{ p.p sur } \Omega\}$.

Vérifions les hypothèses du théorème 1 :

K est-il convexe ?

Soient $u_1, u_2 \in K$ et $\lambda \in [0,1]$, $\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in K$?

$u_1 \in K \Rightarrow u_1(x) \geq \psi(x)$ p.p sur $\Omega \Rightarrow \lambda u_1(x) \geq \lambda \psi(x)(1)$

$u_2 \in K \Rightarrow u_2(x) \geq \psi(x)$ p.p sur $\Omega \Rightarrow (1-\lambda)u_2(x) \geq (1-\lambda)\psi(x)(2)$

De (1) et (2), on obtient : $\lambda u_1(x) + (1-\lambda)u_2(x) \geq \psi(x)$ p.p sur Ω donc *K* est convexe.

K est fermé ?

Soit $(u_n)_n \subset K$ telle que $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$, $u \in K$?

On a : $u_n(x) \geq \psi(x)$ p.p sur Ω $\forall n$, et $\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ donc il existe une sous suite $(u_{n_k})_k$ de u_n telle que $u_{n_k}(x) \underset{k\to\infty}{\to} u(x)$ p.p sur Ω. Voir [6] .Et

$u_{n_k}(x) \geq \psi(x)$ p.p sur Ω $\forall k \Rightarrow \lim_{k\to\infty} u_{n_k} = u(x) \geq \psi(x)$p.p sur Ω

Donc $u \in K$ ce qui implique que *K* est fermé.

Soit $a : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par : $a(u,v) := \int_\Omega uv dx = \langle u, v\rangle$

$\|u\|^2 = a(u,u)$ où $\|\cdot\|$ est la norme dans E

a est continue. En effet : $|a(u,v)| \leq \int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|\|v\|$

a est coercive. En effet : $a(u,u) = \|u\|^2$

a est symétrique et bilinéaire (évident).

Soit $b \in E$ (car $E = L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^* = E^*$). Définissons $f : E \to \mathbb{R}$ telle que

$f(u) := \frac{1}{2}a(u,u) - \langle b, u\rangle = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \langle b, u\rangle$

Toutes les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées donc : il existe un unique $u \in K$ tel que : $f(u) = \min_{v\in K} f(v)$ c'est-à-dire *u* est solution de l'inégalité variationnelle :

$a(u, v-u) \geq \langle b, v-u\rangle, \forall v \in K$ donc $\int_\Omega (u-b)(v-u)dx \geq 0, \forall v \in K$ (*) admet une unique solution.

$u = \max(\psi, b)$ vérifie (*) (pour le voir, il suffit de remplacer dans (*)), elle est donc solution unique.

Problème à valeur sur le bord du second ordre

Dans cette partie, on aborde une équation différentielle du second ordre à valeur sur le bord sur l'intervalle $(0,\infty)$ qu'on peut résoudre par la méthode décrite précédemment. On verra un exemple où la forme quadratique n'est pas symétrique.

- Soit $E = H_0^1(0,\infty)$ (la fermeture de l'espace $C_0^\infty(0,\infty)$ dans l'espace de Sobolev des fonctions $u:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ qui sont et leurs dérivées premières distributionnelles des fonctions carré-intégrables sur $(0,\infty)$

  la norme dans *E* est donnée par :

  $$\|u\|^2 := \int_0^\infty u^2 dx + \int_0^\infty (u')^2\, dx = \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2$$

  soit *a* une forme quadratique donnée par :

  $$a(u,v) = \int_0^\infty u'v'dx + \int_0^\infty uv'dx + \int_0^\infty uvdx, \forall v \in E$$

- *a* est continue : en effet

  $$\begin{aligned} |a(u,v)| &\le \|u'\|_{L^2(\Omega)}\|v'\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v'\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le c\|u\|\|v\| \end{aligned}$$

- *a* est coercive : en effet $a(u,u) = \int_0^\infty u'^2 + \int_0^\infty uu' + \int_0^\infty u^2 = \|u\|^2 + \int_0^\infty uu'$

  $$\int_0^\infty uu' \le \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(u^2 + u'^2\right) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \quad \left(a^2 + b^2 \ge 2ab \text{ d'après l'inégalité de Young}\right)$$

  donc $a(u,u) \ge \|u\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2 = \frac{1}{2}\|u\|^2$

  donc *a* est coercive et sa constante de coercivité c'est $\frac{1}{2}$.

- *a* bilinéaire.
- *a* est non symétrique.

Notre convexe fermé et tout l'espace *E*. D'après le théorème 2, l'inégalité variationnelle $a(u, v-u) \ge \langle b, v-u\rangle, \forall v \in E$ et $b \in L^2(0,\infty) \subset E^*$ admet une unique solution dans *E*.

Et puisqu'il s'agit de tout l'espace *E*, l'équation $a(u,v) = \langle b, v\rangle,\ \forall v \in E$ admet une solution unique d'après le lemme de Lax-Milgram i.e il existe un unique $u \in E$ tel que :

$$a(u,v) = \int_0^\infty u'v'dx + \int_0^\infty uv'dx + \int_0^\infty uvdx = \int_0^\infty bvdx \quad \forall v \in E \ (*)$$

Puisque $C_0^\infty(0,\infty)$ est dense dans *E*, on peut interpréter (*) dans un sens distributionnel, on obtient :

$-\partial^2 u(v) - \partial u(v) + \int_0^\infty uv = \int_0^\infty bv, \forall v \in C_0^\infty(0,\infty)$ et donc : $-\partial^2 u - \partial u + u = b$

admet une unique solution $u \in E$ pour tout $b \in L^2(0,\infty)$.

$\partial^2 u$ et ∂u sont respectivement la seconde et la première dérivée distributionnelles de *u*.

Problème elliptique à valeurs sur le bord

Soit Ω un ouvert borné de frontière régulière dans $\mathbb{R}^N$. Soit $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^N \subset L^\infty(\Omega)$ satisfaisant :

$\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq c_0 |\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall x \in \Omega, c_0 > 0$ constante. Où $|\cdot|$ est la norme dans $\mathbb{R}^N$.

Soit $E := H_0^1(\Omega)$ avec $\|u\|^2 = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$. C'est une norme équivalente à la norme dans H^1.

Soit $a(u,v) := \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij}(x) \partial_i u \partial_j v dx = \int_\Omega A \nabla u \nabla v dx$

où A est $N \times N$ matrice dont l'élément ij est a_{ij} et $\partial_i u, i = 1, \ldots, N$ les dérivées partielles distributionnelles de *u* et ∇ est le gradient distributionnel.

Alors $|a(u,v)| \leq c_1 \|u\|\|v\|$, $c_1 = \max_{i,j} \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}$

$|a(u,u)| \geq c_0 \|u\|^2$, c_0 est la constante d'ellipticité.

Soit $b \in L^2(\Omega) \subset \left(H_0^1(\Omega)\right)^*$. On obtient l'existence d'un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $a(u, v-u) \geq \int_\Omega b(v-u) \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$

et $a(u,v) = \int_\Omega bv \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$ admet aussi une solution unique d'après le lemme de Lax-Milgram.

Ceci est en particulier, vrai pour tout $v \in C_0^\infty(\Omega)$ (l'espace des fonctions test).

On aura donc : l'équation différentielle partielle : $-\sum \partial_j \left(a_{ij} \partial_i u\right) = b$ possède une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ dans un sens distributionnel. Voir [6], [10], [12] et [20].

<u>Cas particulier :</u> si les a_{ij} sont des constantes, on aura $-\Delta u = b$ possède, dans un sens distributionnel, une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $b \in L^2(\Omega)$ et $\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega b^2 dx$

où λ_1 est la première valeur propre (la plus petite) de $-\Delta$.

Pour plus de détails et plus d'exemples sur cette étude on peut consulter les références suivantes : [17] et [20].

III.4 Equations semi linéaires elliptiques

Dans ce qui suit, nous allons voir comment s'utilise le principe de l'application contractante pour déduire l'existence des solutions des problèmes de Dirichlet pour les E.D.P semi linéaires elliptiques. voir [16], [23] et [25]

Problème à valeurs sur le bord

Soit Ω un ouvert borné de frontière régulière dans $\mathbb{R}^N$. $f:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ une fonction continue qui satisfait la condition de Lipschitz suivante :

$$\left|f\left(x,u_1,v_1\right)-f\left(x,u_2,v_2\right)\right|\le L_1\left|u_1-u_2\right|+L_2\left|v_1-v_2\right| \ , \ \forall\left(x,u_1,v_1\right),\left(x,u_2,v_2\right)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \quad (1).$$

On suppose que $f\left(\cdot,0,0\right)\in L^2\left(\Omega\right)$

On considère le problème à valeurs sur le bord suivant : (dans un sens distributionnel)

$$-\Delta u = f\left(x,u,\nabla u\right), \ \ u\in H_0^1\left(\Omega\right) \qquad \text{(P)}$$

Si $u\in H^1\left(\Omega\right)$ alors : $\left|f\left(x,u,\nabla u\right)\right|\le\left|f\left(x,0,0\right)\right|+L_1\left|u\right|+L_2\left|\nabla u\right|$

Par conséquent, on peut considérer *f* comme suit : $f:H^1\left(\Omega\right)\to L^2\left(\Omega\right)$, *f* est continue à cause de la condition de Lipschitz (1).

Notons *T* l'opérateur solution défini par :

$$\begin{aligned} T:L^2\left(\Omega\right)&\to H_0^1\left(\Omega\right)\\ w&\mapsto T\left(w\right)=u \end{aligned} \qquad (2)$$

Où *u* est solution de $-\Delta u = w$ et $u\in H_0^1\left(\Omega\right)$.

On multiplie par $\varphi\in H_0^1\left(\Omega\right)$ et on intègre, on aura : $\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi=\int_\Omega w\varphi, \forall\varphi\in H_0^1\left(\Omega\right)$

Pour $u=\varphi$ et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2=\int_\Omega\left|\nabla u\right|^2=\int_\Omega wu\le\|w\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Et d'après l'inégalité de Poincaré on a (voir [10]) :

$\forall u\in H_0^1\left(\Omega\right),\|u\|_{L^2(\Omega)}\le\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ où λ_1 est la plus petite valeur propre de $-\Delta u$ dans $H_0^1\left(\Omega\right)$. En remplaçant, on obtient :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2\le\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|w\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\Rightarrow\ \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\le\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|w\|_{L^2(\Omega)}$$

Le problème (P) est équivalent à trouver un point fixe dans $L^2\left(\Omega\right)$ de :

$$w=f\left(\cdot,T\left(w\right),\nabla T\left(w\right)\right) \qquad (3).$$

Définissons l'opérateur :

$$S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$
$$w \mapsto S(w) = f(\cdot, T(w), \nabla T(w)) \tag{4}$$

S étant une application de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ étant un espace de Banach, il suffit de prouver que S est une contraction pour déduire qu'elle possède un unique point fixe $w = S(w)$.

En effet, en utilisant la condition de Lipschitz (1) on aura :

$$\left|S(w_1(x)) - S(w_2(x))\right| \leq L_1 \left|T(w_1(x)) - T(w_2(x))\right| + L_2 \left|\nabla T(w_1(x)) - \nabla T(w_2(x))\right| \tag{5}$$

Usant de l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ et en posant :

$f = \left|S(w_1(x)) - S(w_2(x))\right|$,

$g = L_1 \left|T(w_1(x)) - T(w_2(x))\right|$

et $h = L_2 \left|\nabla T(w_1(x)) - \nabla T(w_2(x))\right|$

(5) $\Leftrightarrow\ f \leq g + h \Rightarrow \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|g + h\|_{L^2(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Omega)}$

En appliquant ce résultat, on aura :

$$\|g\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega L_1^2 \left|T(w_1(x)) - T(w_2(x))\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = L_1 \left\|T(w_1) - T(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)}$$

et $\|h\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega L_2^2 \left|\nabla T(w_1(x)) - \nabla T(w_2(x))\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = L_2 \left\|\nabla T(w_1) - \nabla T(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)}$

(5) $\Leftrightarrow \left\|S(w_1) - S(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq L_1 \left\|T(w_1) - T(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)} + L_2 \left\|\nabla T(w_1) - \nabla T(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)}$

Par ailleurs, on a : $\left(T(w_1) = u_1, T(w_2) = u_2\right)$

$$\begin{aligned}\left\|T(w_1) - T(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)} &= \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} = \left\|T(w_1 - w_2)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1} \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\left\|\nabla T(w_1) - \nabla T(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \left\langle \nabla T(w_1) - \nabla T(w_2), \nabla T(w_1) - \nabla T(w_2)\right\rangle \\ &= \left\langle -\Delta(u_1 - u_2), T(w_1) - T(w_2)\right\rangle = \left\langle w_1 - w_2, T(w_1) - T(w_2)\right\rangle \\ &\leq \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Omega)} \left\|T(w_1) - T(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1} \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Omega)}^2\end{aligned}$$

$$\left\|\nabla T(w_1) - \nabla T(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Omega)}$$

En remplaçant dans (5), on obtient :

$$\left\|S(w_1)-S(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\frac{L_1}{\lambda_1}+\frac{L_2}{\sqrt{\lambda_1}}\right)\left\|w_1-w_2\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{6}$$

S est une contraction si $\frac{L_1}{\lambda_1}+\frac{L_2}{\sqrt{\lambda_1}}<1$

Et par conséquent, S possède un unique point fixe $w=f\left(\cdot,T(w),\nabla T(w)\right)$ et la solution u de notre problème (P) s'obtient en posant : $u=T(w)$

Dans ce qui suit, nous allons tenter d'étendre les résultats précédents à un autre opérateur qu'est le bilaplacien.

Soit le problème à valeurs sur le bord (au sens distributionnel) suivant :

$$(p):\begin{cases}\Delta^2 u = f(x,u,\nabla u,\Delta u)\\ u\in H_0^2(\Omega) \quad (\text{ie } u=\nabla u=0 \text{ sur } \partial\Omega)\end{cases}$$

On impose la condition de Lipschitz suivante sur f :

$$\left|f(x,u_1,v_1,w_1)-f(x,u_2,v_2,w_2)\right|\leq L_1\left|u_1-u_2\right|+L_2\left|v_1-v_2\right|+L_3\left|w_1-w_2\right| \quad (1)$$

$$\forall (x,u_1,v_1,w_1),(x,u_2,v_2,w_2)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$$

On suppose que $f(\cdot,0,0,0)\in L^2(\Omega)$

Si $u\in H_0^2(\Omega)$, on a $\|u\|_{H_0^2(\Omega)}^2=\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2$

$$\left|f(x,u,\nabla u,\Delta u)\right|\leq\left|f(x,0,0,0)\right|+L_1|u|+L_2|\nabla u|+L_3|\Delta u|$$

Et donc, on peut considérer *f* comme :

$$f:H^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$$

f est continue d'après la condition de Lipschitz (1).

Soit T l'opérateur solution donné par :

$$\begin{aligned}T:L^2(\Omega)&\to H_0^2(\Omega)\\ w&\mapsto T(w)=u\end{aligned}$$

où $u\in H_0^2(\Omega)$ est solution de $\Delta^2 u=w$

on multiplie par $\varphi\in H_0^2(\Omega)$ et on intègre on aura :

$\int_\Omega \Delta^2 u\varphi=\int_\Omega w\varphi \Rightarrow \int_\Omega \Delta u\Delta\varphi=\int_\Omega w\varphi$ on prend $u=\varphi$, on aura :

$$\|u\|_{H_0^2(\Omega)}^2=\int_\Omega|\Delta u|^2\leq\|w\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Rappelons l'inégalité de Poincaré :

$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1}\|u\|_{H_0^2(\Omega)}$, pour tout $u \in H_0^2(\Omega)$ λ_1 est la plus petite valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^2(\Omega)$.

Donc $\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1}\|w\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H_0^2(\Omega)}$, $\|u\|_{H_0^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1}\|w\|_{L^2(\Omega)}$

Le problème (P) est équivalent à trouver un point fixe dans $L^2(\Omega)$ de :

$$w = f\left(\cdot, T(w), \nabla T(w), \Delta T(w)\right) \qquad (2)$$

On définit l'opérateur

$$S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$
$$w \mapsto S(w) = f\left(\cdot, T(w), \nabla T(w), \Delta T(w)\right)$$

La condition de Lipschitz (1) implique :

$$\left|S(w_1(x)) - S(w_2(x))\right| \leq L_1\left|T(w_1(x)) - T(w_2(x))\right| + L_2\left|\nabla T(w_1(x)) - \nabla T(w_2(x))\right|$$
$$+L_3\left|\Delta T(w_1(x)) - \Delta T(w_2(x))\right|$$

Et comme précédemment, faisant usage de l'inégalité triangulaire de la norme dans $L^2(\Omega)$, on aura :

$$\left\|S(w_1) - S(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq L_1\left\|T(w_1) - T(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)} + L_2\left\|\nabla T(w_1) - \nabla T(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)}$$
$$+L_3\left\|\Delta T(w_1) - \Delta T(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)}$$

Par ailleurs, on a :

$$\left\|T(w_1) - T(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)} = \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} = \left\|T(w_1 - w_2)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1}\|u_1 - u_2\|_{H_0^2(\Omega)}$$
$$\leq \frac{1}{\lambda_1^2}\|w_1 - w_2\|_{L^2(\Omega)}$$

donc : $\left\|T(w_1) - T(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1^2}\|w_1 - w_2\|_{L^2(\Omega)}$

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta T(w_1) - \Delta T(w_2)\right\|^2_{L^2(\Omega)} &= \left\langle \Delta T(w_1) - \Delta T(w_2), \Delta T(w_1) - \Delta T(w_2)\right\rangle \\
&= \left\langle \Delta\left(T(w_1) - T(w_2)\right), \Delta\left(T(w_1) - T(w_2)\right)\right\rangle \\
&= \left\langle \Delta^2\left(T(w_1) - T(w_2)\right), T(w_1) - T(w_2)\right\rangle \\
&= \left\langle \Delta^2(u_1 - u_2), T(w_1) - T(w_2)\right\rangle \\
&= \left\langle w_1 - w_2, T(w_1) - T(w_2)\right\rangle \\
&\leq \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Omega)}\left\|T(w_1) - T(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{\lambda_1^2}\|w_1 - w_2\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

donc : $\left\|\Delta T\left(w_1\right)-\Delta T\left(w_2\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1}\left\|w_1-w_2\right\|_{L^2(\Omega)}$

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla T\left(w_1\right)-\nabla T\left(w_2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 &=\left\langle\nabla T\left(w_1\right)-\nabla T\left(w_2\right), \nabla T\left(w_1\right)-\nabla T\left(w_2\right)\right\rangle \\
&=\left\langle\nabla\left(T\left(w_1\right)-T\left(w_2\right)\right), \nabla\left(T\left(w_1\right)-T\left(w_2\right)\right)\right\rangle \\
&=-\left\langle\Delta\left(T\left(w_1\right)-T\left(w_2\right), T\left(w_1\right)-T\left(w_2\right)\right)\right\rangle \\
&\leq\left\|\Delta\left(u_1-u_2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|T\left(w_1\right)-T\left(w_2\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{\lambda_1^2}\left\|u_1-u_2\right\|_{H_0^2(\Omega)}\left\|w_1-w_2\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{\lambda_1^3}\left\|w_1-w_2\right\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

$$\left\|\nabla T\left(w_1\right)-\nabla T\left(w_2\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1 \sqrt{\lambda_1}}\left\|w_1-w_2\right\|_{L^2(\Omega)}$$

En remplaçant on obtient :

$$\left\|S\left(w_1\right)-S\left(w_2\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq\left(\frac{L_1}{\lambda_1^2}+\frac{L_2}{\lambda_1 \sqrt{\lambda_1}}+\frac{L_3}{\lambda_1}\right)\left\|w_1-w_2\right\|_{L^2(\Omega)}$$

Donc S est une contraction si $\frac{L_1}{\lambda_1^2}+\frac{L_2}{\lambda_1 \sqrt{\lambda_1}}+\frac{L_3}{\lambda_1}<1$ et par conséquent S possède un unique point fixe $w=S(w)$ et la solution $u \in H_0^2(\Omega)$ de notre problème (P) s'obtient en posant $u=T(w)$.

Extension et généralisation du principe de l'application contractante

Dans cette partie, on étudie quelques extensions du principe de l'application contractante, à priori les applications non expansives. On y aborde aussi quelques outils et résultats de généralisations de ce principe, comme l'alternative de Leray-Schauder ainsi que différentes applications.

IV.1 Extensions du principe de l'application contractante

Il est inévitable que toute discussion sur les applications contractantes aboutisse sur le problème des applications non expansives. Ce pourquoi, la question qu'on se pose concernant le problème à valeurs sur le bord traité au chapitre précédent est :

Que se passe-t-il si : $\frac{L_1}{\lambda_1}+\frac{L_2}{\sqrt{\lambda_1}}=1$?

Revenons à l'inégalité (6) du chapitre III. En effet, on avait :

$$\left\|S(w_1)-S(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)}=\left\|f\left(\cdot,T(w_1),\nabla T(w_1)\right)-f\left(\cdot,T(w_2),\nabla T(w_2)\right)\right\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq\left(\frac{L_1}{\lambda_1}+\frac{L_2}{\sqrt{\lambda_1}}\right)\left\|w_1-w_2\right\|_{L^2(\Omega)}$$

Et si $\frac{L_1}{\lambda_1}+\frac{L_2}{\sqrt{\lambda_1}}=1$, on aura : $\left\|S(w_1)-S(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)}\leq\left\|w_1-w_2\right\|_{L^2(\Omega)}$ (7)

S est alors non expansive.

Ainsi la condition (7) n'est plus suffisante pour assurer l'existence d'un point fixe de *S* car *S* n'est plus une contraction.

Avant d'aborder les éventuelles extensions du principe de l'application contractante aux applications non expansives, commençons par considérer le cas stricte ; c'est-à-dire $\left\|S(w_1)-S(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)}<\left\|w_1-w_2\right\|_{L^2(\Omega)}, \forall w_1,w_2\in L^2(\Omega), w_1\neq w_2$

Dans cette optique, Eldeistein a prouvé en rajoutant d'autres hypothèses l'existence et l'unicité du point fixe de *S*.

Nous avons, en l'occurrence, les théorèmes 3 et 4 du chapitre II. Ainsi pour : $(M,d)=\left(L^2(\Omega),\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}\right)$, $S:L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ vérifiant $\left\|S(w_1)-S(w_2)\right\|_{L^2(\Omega)}<\left\|w_1-w_2\right\|_{L^2(\Omega)}$

(on prend $d(u,v)=\|u-v\|_{L^2(\Omega)}$). S'il existe $w_0 \in L^2(\Omega)$ tel que les itérations $\{w_n\}_{n\geq 1}$ données par : $w_1 = w_0$, $w_n = S(w_{n-1}), n \geq 2$

Possèdent une sous suite $\{w_{n_j}\}_{j=0}^{\infty}$ convergente avec $\lim\limits_{j\to\infty} w_{n_j} = w$ alors S possède un unique point fixe w.

ou alors, conformément au théorème 4 du chapitre II, il suffit de s'assurer que *S* est une application relativement compact, c'est-à-dire que *S* envoie $L^2(\Omega)$ dans un compact *K* de $L^2(\Omega)$ et on aura immédiatement l'existence et l'unicité du point fixe de *S*.

IV.2 Applications non expansives

On commence par donner le théorème de Schauder pour les applications non expansives. Cette approche est développée dans [13], [14] et [29].

Théorème 1

Soit *C* un convexe fermé non vide de l'espace vectoriel normé *E*, $F: C \to C$ une application non expansive et $\overline{F(C)}$ est un compact de *C*. Alors *F* possède un point fixe.

Démonstration

Soit $x_0 \in C$, pour $n = 2,3,\ldots$ définissons $F_n := \left(1-\frac{1}{n}\right)F + \frac{1}{n}x_0$

Puisque *C* est un convexe et $x_0 \in C$ donc $F_n : C \to C$

F_n <u>est une contraction ?</u>

$$d\left(F_n(x), F_n(y)\right) = d\left(\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)F(x) + \frac{1}{n}x_0\right), \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)F(y) + \frac{1}{n}x_0\right)\right)$$
$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)d\left(F(x), F(y)\right) \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)d(x,y)$$

$1-\frac{1}{n} < 1 \Rightarrow F_n$ est une contraction.

D'après le principe de l'application contractante F_n possède un unique point fixe x_n dans *C*, c'est-à-dire $x_n = F_n(x_n) = \left(1-\frac{1}{n}\right)F(x_n) + \frac{1}{n}x_0$

Puisque $F(C)$ est inclus dans un compact de *C*, il existe une sous suite x_{n_j} et $u \in C$ tels que : $F\left(x_{n_j}\right) \to u$ quand $j \to \infty$

Alors $x_{n_j} = F_{n_j}\left(x_{n_j}\right) = \left(1-\frac{1}{n_j}\right)F\left(x_{n_j}\right) + \frac{1}{n_j}x_0 \to u$ quand $j \to \infty$ et par l'unicité de la limite $u = F(u)$.

Le plus important dans ce contexte, est le théorème suivant prouvé indépendamment par : Browder, Göhde et Kirk en 1965.

Théorème 2 [2]

Soit C un sous ensemble fermé, borné convexe non vide de H un espace de Hilbert réel. Alors toute application non expansive $F : C \to C$ possède au moins un point fixe.

IV.3 Généralisations du principe de l'application contractante

A travers les cinquante dernières années, plusieurs auteurs ont donné des généralisations du principe de l'application contractante dont les preuves reposent essentiellement sur les résultats techniques suivants : (voir [7], [13] et [34]).

Théorème 3

Soit (X,d) un espace métrique complet et $F : X \to X$ une application (non nécessairement continue). Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $d(x,F(x)) < \delta(\varepsilon)$ alors $F(B(x,\varepsilon)) \subseteq B(x,\varepsilon)$ où $B(x,\varepsilon) := \{y \in X, d(x,y) < \varepsilon\}$

Si pour un certain $u \in X$, on a :

$\lim\limits_{n\to\infty} d(F^n(u), F^{n+1}(u)) = 0$ (2)

Alors la suite $\{F^n(u)\}$ converge vers un point fixe de *F*.

Preuve

Soit *u* définie comme dans (2) et soit $u_n = F^n(u)$

$(u_n)_n$ est une suite de Cauchy ?

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Choisissons $\delta(\varepsilon)$ comme dans la condition (1). On peut choisir N suffisamment grand tel que $d(u_n, u_{n+1}) < \delta(\varepsilon)$ pour tout $n \geq N$.
Puisque $d(u_N, F(u_N)) < \delta(\varepsilon)$, alors d'après la condition (1) on a : $F(B(u_N,\varepsilon)) \subseteq B(u_N,\varepsilon)$
donc $F(u_N) = u_{N+1} \in B(u_N,\varepsilon)$

et par induction $F^k(u_N) = u_{N+k} \in B(u_N,\varepsilon)$ pour tout $k \in \{0,1,\ldots\}$

Alors $d(u_k,u_l) \leq d(u_k,u_N) + d(u_N,u_l) < 2\varepsilon$ pour tout $k,l \geq N$.

Donc $\{u_n\}$ est de Cauchy, comme (X,d) est complet, alors il existe $y \in X$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = y$

Prouvons que *y* est un point fixe de *F* :

Supposons le contraire, c'est-à-dire $F(y) \neq y \Rightarrow d(y,F(y)) = \gamma > 0$.

On peut fixer un $u_n \in B\left(y,\frac{\gamma}{3}\right)$ avec $d(u_n,u_{n+1}) < \delta\left(\frac{\gamma}{3}\right)$

La condition (1) nous donne : $F\left(B\left(u_n,\frac{\gamma}{3}\right)\right)\subseteq B\left(u_n,\frac{\gamma}{3}\right)$ et par conséquent $F(y)\in B\left(u_n,\frac{\gamma}{3}\right)$

Ceci contredit le fait :

$$\begin{aligned} d\left(F(y),u_n\right) &\geq d\left(F(y),y\right)-d\left(u_n,y\right) \\ &\geq \gamma-\frac{\gamma}{3}=\frac{2\gamma}{3} \end{aligned}$$

et puisque $F(y)\in B\left(u_n,\frac{\gamma}{3}\right)$ on a $d\left(F(y),u_n\right)<\frac{\gamma}{3}$ d'où la contradiction. Donc *y* est un point fixe de *F*.

Théorème 4

Soit (X,d) un espace métrique complet et $d\left(F(x),F(y)\right)\leq\phi\left(d(x,y)\right)$ pour tout $x,y\in X$ où $\phi:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ est une fonction monotone non décroissante (non nécessairement continue) avec $\lim_{n\to\infty}\phi^n(t)=0$ pour tout $t>0$ fixé. Alors F possède un unique point fixe $u\in X$ avec $\lim_{n\to\infty}F^n(x)=u$ pour tout $x\in X$.

Démonstration

Supposons $t\leq\phi(t)$ pour un certain $t>0$. Alors $\phi(t)\leq\phi(\phi(t))$ et donc
$t\leq\phi^2(t)$ et par induction $t\leq\phi^n(t)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ ceci contredit le fait que $\lim_{n\to\infty}\phi^n(t)=0$.

Alors $\phi(t)<t$ pour tout $t>0$.

De plus, on a :
$d\left(F^n(x),F^{n+1}(x)\right)\leq\phi^n\left(d\left(x,F(x)\right)\right),\forall x\in X$ et donc $\lim_{n\to\infty}d\left(F^n(x),F^{n+1}(x)\right)=0,\forall x\in X$

Soit $\varepsilon>0$, choisissons $\delta(\varepsilon)=\varepsilon-\phi(\varepsilon)$ si $d\left(x,F(x)\right)<\delta(\varepsilon)$. Alors pour tout $z\in B(x,\varepsilon)$ on a :

$$\begin{aligned} d\left(F(z),x\right) &\leq d\left(F(z),F(x)\right)+d\left(F(x),x\right) \\ &\leq\phi\left(d(z,x)\right)+d\left(F(x),x\right) \\ &\leq\phi\left(d(z,x)\right)+\delta(\varepsilon) \\ &\leq\phi(\varepsilon)+\left(\varepsilon-\phi(\varepsilon)\right) \end{aligned}$$

Donc le théorème 3 garantit l'existence d'un point fixe *u* de *F* avec $\lim_{n\to\infty}F^n(x)=u,\forall x\in X$.

Etudions l'unicité du point fixe de *F* :

Supposons u_1,u_2 deux points fixes de *F* i.e : $F(u_1)=u_1$ et $F(u_2)=u_2$

On a : $d(u_1,u_2)=d\left(F(u_1),F(u_2)\right)\leq\phi\left(d(u_1,u_2)\right)$ contredit le fait que $\phi(t)<t,\forall t>0$, donc $d(u_1u_2)=0\Rightarrow u_1=u_2$.

IV.4 Méthode de continuation des applications contractantes et non expansives

Dans ce qui suit, on supposera que X est un espace de Banach. Nous présenterons une alternative non linéaire du type Leray-Schauder pour les contractions. Voir [11], [14], [19] et [24].

Théorème 1 [2]

Soit U un ouvert de l'espace de Banach X, $0 \in U$ et $F : \bar{U} \to X$ une contraction avec $F(\bar{U})$ borné. Alors on a l'alternative suivante : ou

A1) F possède un point fixe dans $\bar{U}$, ou

A2) il existe $\lambda \in (0,1)$ et $u \in \partial U$ avec $u = \lambda F(u)$

Il est naturel de se poser la question de pouvoir appliquer le théorème précédent aux applications non expansives. Le théorème suivant nous suggère :

Théorème 2 [2]

Soit U un ouvert borné connexe de l'espace de Banach uniformément convexe X, avec $0 \in U$ et $F : \bar{U} \to X$ une application non expansive.

Alors on a l'alternative suivante : ou

A1) F possède un point fixe dans $\bar{U}$, ou

A2) il existe $\lambda \in (0,1)$ et $u \in \partial U$ avec $u = \lambda F(u)$

Application

Pour illustrer la manière dont s'utilisent les résultats précédents, abordons le problème homogène du second ordre de Dirichlet suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} y'' = f(t, y, y') & \text{pour } t \in [a,b] \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

où $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue.

On associe au problème (P), la famille des problèmes suivants :

$$(P)_\lambda \quad \begin{cases} y'' = \lambda f(t, y, y') & \text{pour } t \in [a,b] \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \qquad \text{Pour } \lambda \in (0,1)$$

Définissons l'opérateur : $F : C^1[a,b] \to C^1[a,b]$ par : $Fy(t) := \int_a^b G(t,s)\, f(s, y(s), y'(s))\, ds$

où la fonction de Green $G(t,s)$ est donnée par :

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{-(t-a)(b-s)}{b-a}, & a \le t \le s \le b \\ \dfrac{-(s-a)(b-t)}{b-a}, & a \le s \le t \le b \end{cases}$$

Les points fixes de F sont les solutions classiques de (P).

- Pour une certaine condition de Lipschitz locale imposée sur *f*, on utilise l'alternative du théorème 1 pour établir que *F* restreinte à l'adhérence d'un certain ouvert $U \subseteq C^1[a,b]$ est contractante et donc possède un point fixe (qui est en fait, unique) dans $\bar{U}$.
  A cet effet, supposons que *f* vérifie la condition de Lipschitz locale suivante :

$$(*)\begin{cases} \exists D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ et deux constantes } k_0, k_1 \text{ tels que} \\ f \text{ restreinte à } [a,b]\times D \text{ vérifie} \\ \left| f(t,y,y') - f(t,z,z') \right| \le k_0 |y-z| + k_1 |y'-z'| \end{cases}$$

- La norme sur $C^1[a,b]$ est donnée par :

$$\|f\|_{C^1[a,b]} = |f|_0 + |f|_1 \text{ où } |f|_0 = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \text{ et } |f|_1 = \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)| = |f'|_0$$

- Définissons une norme du maximum modifiée sur $C^1[a,b]$ par :

$$\|f\| = k_0 |f|_0 + k_1 |f|_1 = k_0 |f|_0 + k_1 |f'|_0 .$$

  C'est effectivement une norme équivalente à la précédente. En effet :

$$Min(k_0,k_1)\left(|f|_0 + |f|_1\right) \le \|f\| = k_0 |f|_0 + k_1 |f|_1 \le Max(k_0,k_1)\left(|f|_0 + |f|_1\right)$$

$$c_2 \|f\|_{C^1[a,b]} \le \|f\| \le c_1 \|f\|_{C^1[a,b]} \text{ où } c_1 = Max(k_0,k_1), c_2 = Min(k_0,k_1)$$

- Pour des fonctions *y*, *z*, dont les valeurs et les valeurs de leurs dérivées sont dans le domaine *D* où la fonction *f* est localement Lipschitzienne, on a :

$$\left|(Fy - Fz)(t)\right| = \left| \int_a^b G(t,s)\left[f(s,y(s),y'(s)) - f(s,z(s),z'(s)) \right] ds \right| \le \frac{(b-a)^2}{8} \|y-z\|$$

En effet, on a :

$$\left|(Fy - Fz)(t)\right| \le \left| \int_a^b G(t,s)\left[k_0 |y-z| + k_1 |y-z|_0 \right] ds \right|$$

$$\le \|y-z\| \int_a^b |G(t,s)| ds$$

$$\int_a^b |G(t,s)| ds \le \int_a^t \frac{(s-a)(b-t)}{b-a} ds + \int_t^b \frac{(t-a)(b-s)}{b-a} ds$$

$$= \frac{(b-t)}{b-a} \int_a^t (s-a) ds + \frac{(t-a)}{b-a} \int_t^b (b-s) ds$$

$$= \frac{(b-t)}{b-a} \left[\frac{s^2}{2} - as \right]_a^t + \frac{(t-a)}{b-a} \left[bs - \frac{s^2}{2} \right]_t^b$$

$$= \frac{(b-t)}{b-a} \left[\frac{t^2}{2} - at - \frac{a^2}{2} + a^2 \right] + \frac{(t-a)}{b-a} \left[b^2 - \frac{b^2}{2} - bt + \frac{t^2}{2} \right]$$

$$= \frac{(b-t)}{b-a} \frac{(t-a)^2}{2} + \frac{(t-a)}{b-a} \frac{(t-b)^2}{2}$$

$$= \frac{(t-a)(t-b)}{2(b-a)} [a - t + t - b] = \frac{(t-a)(b-t)}{2}$$

$$\max_{t\in[a,b]}\int_a^b \left|G(t,s)\right|ds \le \max_{t\in[a,b]}\frac{(b-t)(t-a)}{2}=\frac{(b-a)^2}{8}$$

et donc $\left|(Fy-Fz)(t)\right|_0 \le \frac{(b-a)^2}{8}\|y-z\|$

Et pour les mêmes fonctions *y*, *z*, on a :

$\left|(Fy-Fz)'(t)\right|_0 \le \frac{b-a}{2}\|y-z\|$. En effet :

$$\int_a^b \left|G_t(t,s)\right|ds \le \int_a^t \frac{s-a}{b-a}ds+\int_t^b \frac{b-s}{b-a}ds=\frac{1}{b-a}\left[\frac{s^2}{2}-as\right]_a^t+\frac{1}{b-a}\left[bs-\frac{s^2}{2}\right]_t^b$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[\frac{(t-a)^2}{2}\right]+\frac{1}{b-a}\left[\frac{(b-t)^2}{2}\right]=\frac{(b-t)^2+(t-a)^2}{2(b-a)}$$

et $\max_{t\in[a,b]}\int_a^b \left|G(t,s)\right|ds \le \max_{t\in[a,b]}\frac{(b-t)^2+(t-a)^2}{2(b-a)}=\frac{b-a}{2}$

et par conséquent, on a :

$$\|Fy-Fz\| \le \left[k_0\frac{(b-a)^2}{8}+k_1\frac{b-a}{2}\right]\|y-z\|$$

Cette inégalité et le théorème 1 nous permettent d'établir le principe d'existence et de l'unicité suivant :

Théorème 3

Soit $f:[a,b]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continue et vérifiant la condition de Lipschitz (*) dans un ensemble *D* avec des constantes k_0, k_1 telles que la condition :

$k_0\frac{(b-a)^2}{8}+k_1\frac{b-a}{2}<1$ soit vérifiée. (3.1)

Supposons qu'il existe un ouvert borné $U\subseteq C^1[a,b]$ avec $0\in U$ tel que $u\in\bar{U}\Rightarrow(u(t),u'(t))\in D$ pour tout $t\in[a,b]$ (3.2).

Et *y* résout $(P)_\lambda$ pour tout $\lambda\in(0,1)\Rightarrow y\notin\partial U$ (3.3).

Alors le problème (P) admet une solution unique dans $\bar{U}$.

Démonstration

La condition (3.1) affirme que *F* est une contraction, donc on peut appliquer le théorème 1. La condition (3.3) exclut l'alternative (A2) et donc (A1) a lieu ce qui prouve que *F* admet un unique point fixe dans $\bar{U}$ (l'unicité vient de la contraction) et par conséquent (P) possède une solution unique dans $\bar{U}$.

Remarque

Dans différentes applications, on considère souvent des fonctions *f* qui ne dépendent pas de y' c'est-à-dire $f = f(t, y)$. Le même raisonnement nous permet de voir l'opérateur F comme : $F : C[a,b] \to C[a,b]$.Ceci nous ramène à un cas du théorème 3 pour $D \subset \mathbb{R}$ et où on abandonne tout ce qui se réfère à y', z' dans la condition (*) et $U \subseteq C[a,b]$.

Exemple : Le problème à valeur sur le bord

$$\begin{cases} y''(t) = -e^{y(t)} & t \in [0,1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Possède une solution de norme au plus égale à 1. Pour le voir, on applique le théorème 3 et la remarque précédente pour $f(t, y) = -e^{y(t)}$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous donne :

$$|y| \le 1, |z| \le 1 \Rightarrow \left|e^y - e^z\right| \le e^{\max\{y,z\}} |y - z| \le e|y - z|$$

On prend : $D = [-1,1]$, et $U = \left\{ y \in C[0,1], |y|_0 = \sup\limits_{t \in [0,1]} |y(t)| < 1 \right\}$

Alors $\dfrac{k_0}{8} = \dfrac{e}{8}$ $\qquad (b - a = 1)$

Supposons que *y* résout : $\begin{cases} y''(t) = -\lambda e^{y(t)} & t \in [0,1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$

Pour un certain $\lambda \in (0,1)$. Alors :

$y(t) = -\lambda \int_0^1 G(t,s) e^{y(s)} ds$ donc $|y(t)| \le \dfrac{1}{8} e^{|y|_0}$ pour $t \in [0,1]$.

Ce qui implique que $|y|_0 \le \dfrac{1}{8} e^{|y|_0}$. Ceci exclut le cas $|y|_0 = 1$ car il n'est pas possible que $1 \le \dfrac{e}{8}$.

Donc $|y|_0 \ne 1 \Rightarrow y \notin \partial U$.

Le théorème 3 implique que le problème à valeur sur le bord précédent admet une unique solution de norme au plus égale à 1 dans $\bar{U}$.

VI.5 Approche numérique du théorème du point fixe

Dans ce qui suit, on étudie une application du théorème du point fixe en faisant appel à une méthode itérative convergente.

Soit $f : S \to \mathbb{K}^n, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}$ compact

$$x(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S \mapsto f(x) = \left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\right)$$

On impose les conditions suivantes sur *S* et *f* :

S est un ensemble fermé de $\mathbb{K}^n$.

f est une application contractante sur *S* :

$\exists 0 \le \theta \le 1$ tel que $\forall x, y \in S, \left\| f(x) - f(y) \right\| \le \theta \left\| x - y \right\|$, $\|\cdot\|$ est une norme quelconque dans $\mathbb{K}^n$

S est stable par f : $f(S) \subset S$

Théorème

Soit S une partie fermé de $\mathbb{K}^n$, et f une application définie sur S et à valeur dans S, contractante sur S, telle que $x \in S \to f(x) \in S$. Alors

f admet un unique point fixe x^* dans S.

ce point fixe est calculable comme limite de la suite des approximations successives $(x_l)_{l \ge 0}$:

$$\begin{cases} x_0 \in S \text{ quelconque} \\ x_{l+1} = f(x_l), l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

pour tout indice $l \in \mathbb{N}^*$, on a les inégalités de majoration d'erreur suivantes :

$$\begin{cases} \left\| x_l - x^* \right\| \le \dfrac{\theta^l}{1-\theta} \left\| x_1 - x_0 \right\| \\ \left\| x_l - x^* \right\| \le \dfrac{1}{1-\theta} \left\| x_l - x_{l+1} \right\| \end{cases}$$

Remarque

Ce théorème reste vrai dans le cadre général d'un espace vectoriel quelconque (de dimension infinie) à condition qu'il soit complet pour la norme en question.

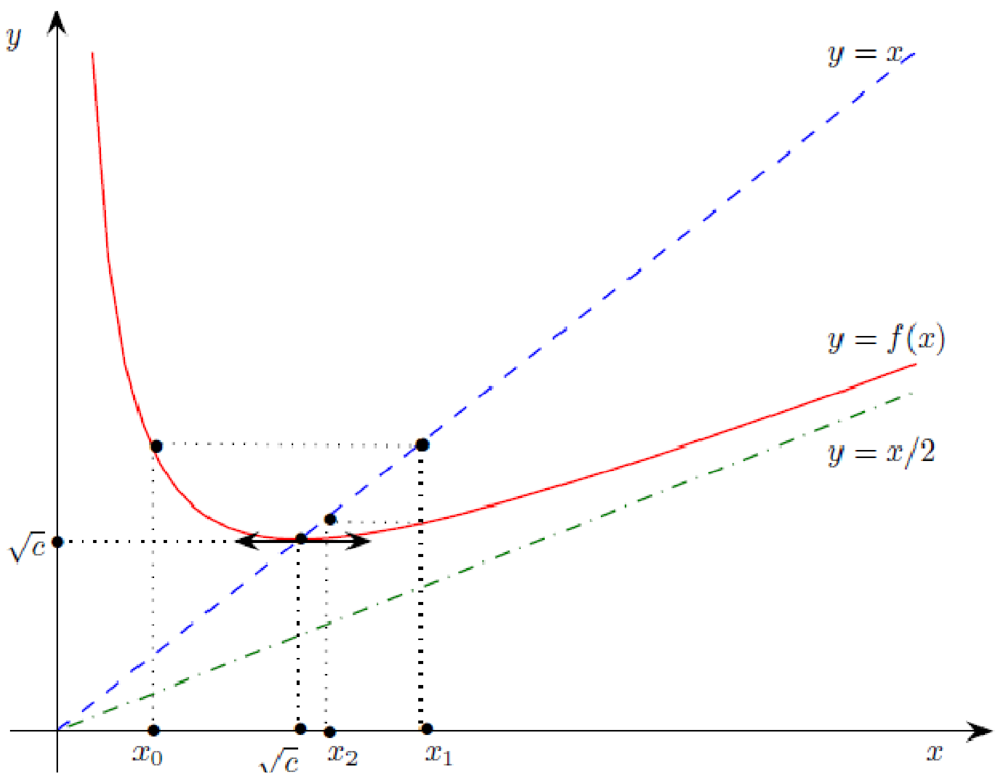
Voici un exemple où est mis en œuvre le procédé itératif précédent :

Exemple1 : calcul de la racine carrée d'un nombre positif

Soit $c \in \mathbb{R}^{*+}$ un nombre positif. le théorème du point fixe précédent va nous permettre de développer une méthode de calcul de $\sqrt{c}$ et justifier sa convergence. Pour $x \in \mathbb{R}^{*+}$ soit $f(x) := \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x} \right)$. Calculons sa dérivée première : $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{c}{2x^2} = \frac{1}{2}\frac{x^2 - c}{x^2}$ et seconde : $f''(x) = \frac{c}{x^3}$. On déduit que f' s'annule au seul point $\sqrt{c}$, que $f'(x)$ est négative sur $\left]0, \sqrt{c}\right[$, positive sur $]\sqrt{c}, \infty)$, avec décroissance de f sur $\left]0, \sqrt{c}\right]$ puis croissance sur $\left[\sqrt{c}, \infty\right)$. Par ailleurs on remarque que $\sqrt{c}$ est point fixe de f : $f\left(\sqrt{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{c} + \frac{c}{\sqrt{c}} \right) = \sqrt{c}$.

Sur $I := \left[\sqrt{c}, \infty\right)$ la dérivée vérifie $0 \le f'(x) \le \frac{1}{2}$; il en découle que f est contractante sur l'intervalle $\left[\sqrt{c}, \infty\right)$ de constante $\theta = \frac{1}{2}$. En effet $\forall x_1, x_2 \in I$ on a $\left| f(x_1) - f(x_2) \right| = \left| (x_1 - x_2) f'(\xi) \right|$ avec $\xi \in \left]x_1, x_2\right[$ selon le théorème des accroissements finis.

D'où l'inégalité : $\left| f(x_1) - f(x_2) \right| \le \frac{1}{2}\left| x_1 - x_2 \right| \forall x_1, x_2 \in I$.



D'après le graphe de *f* on a l'inclusion $f(]0,\infty)) \subset I$. On peut donc appliquer le théorème du point fixe sur l'intervalle fermé *I* : il existe un unique point fixe sur *I* pour *f* (c'est $\sqrt{c}$) qu'on peut déterminer par :

$$y_l \text{ quelconque } \in I, y_{l+1} = f(y_l) = \frac{1}{2}\left(y_l + \frac{c}{y_l}\right), l \geq 1$$

De plus pour $l \geq 2$ on a l'inégalité $\left|y_l - \sqrt{c}\right| \leq \frac{(0.5)^{l-1}}{1-0.5}\left|y_2 - y_1\right| = (0.5)^{l-2}\left|y_2 - y_1\right|$. Par ailleurs si on prend x_0 quelconque dans $]0,\infty)$ alors les termes $x_{l+1} = f(x_l)$ pour $l \geq 0$ restent dans *I* et la suite $(x_l)_{l\geq 0}$ converge vers $\sqrt{c}$ d'après ce qui précède et l'inégalité de majoration d'erreur s'écrit alors, toujours pour $l \geq 2$, $\left|x_l - \sqrt{c}\right| \leq 0.5^{l-2}\left|x_2 - x_1\right|$. Par exemple pour $c = 2$ on a, en partant de $x_0 = 1$:

$x_1 = 1.5$
$x_2 = 1.4166\ldots$
$x_3 = 1.414215686274\ldots$
$x_4 = 1.414213562374\ldots$
$x_5 = 1.414213562373\ldots$

On constate que la convergence vers $\sqrt{2} = 1.4142135623731\ldots$ est très rapide et on vérifie bien l'inégalité de majoration d'erreur donnée plus haut :

$$\left|x_5 - \sqrt{2}\right| \simeq 10^{-13} \leq 0.5^3\left|x_2 - x_1\right| \simeq 0.01$$

Remarque

La touche $\sqrt{\ }$ d'une calculette utilise ce même procédé itératif convergeant pour déterminer la racine carrée d'un nombre positif quelque soit le point de départ dans $\mathbb{R}^{*+}$.

IV.6 Théorème du point fixe de krasnosel'skii

Dans le paragraphe suivant, nous aborderons le problème d'existence de point fixe concernant les applications de la forme $T = U + C$ où C est continue et compact et U est une contraction. Le résultat principal est le théorème suivant :

Théorème de krasnosel'skii [18]

Soit X un espace de Banach et D un ensemble non vide de X fermé borné et convexe.
U, C deux applications de D dans X telles que :
U est une contraction (de constante k)
C est compact et continue.

$Ux + Cy \in D, \forall x, y \in D$
Alors il existe $x \in D$ tel que $Ux + Cx = x$.

Remarque

Le théorème peut être formulé sous différentes façons et ses extensions consistent à remplacer la contraction par ses généralisées. Voir [18] et [30]

Application 1

On se propose d'étudier le problème à valeur sur le bord de Neumann suivant :

$$\begin{cases} -u'' + m^2 u = \lambda f(t,u) + g(t,u), \ 0<t<1 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où m est une constante positive.
$\lambda > 0$ est un paramètre, $f : (0,1) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ et $g : (0,1) \times [0,\infty) \to (-\infty,\infty)$ sont continues.

On va prouver l'existence d'une solution positive du problème (1) sous certaines hypothèses sur f et g et pour un paramètre λ suffisamment petit. L'approche est basée sur le théorème du point fixe de krasnosel'skii. On considère le problème dans l'espace de Banach $E = C[0,1]$ muni de la norme : $\|u\| = \sup_{t \in [0,1]} |u(t)|$.

Soit $G(t,s)$ la fonction de Green pour le problème à valeur sur le bord de Neumann :

$$\begin{cases} -u'' + m^2 u = 0, \ 0<t<1 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Alors :

$$G(t,s) = \frac{1}{\rho} \begin{cases} \varphi(s)\varphi(1-t), & 0 \le s \le t \le 1 \\ \varphi(t)\varphi(1-s), & 0 \le t \le s \le 1 \end{cases}$$

où $\rho = \frac{1}{2} m\left(e^m - e^{-m}\right)$, $\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(e^{mt} + e^{-mt}\right)$

$\varphi(t)$ est croissante sur $[0,1]$ et $G(s,t) \leq G(s,s)$, $0 \leq s,t \leq 1$.

Nous énonçons les deux lemmes suivants qui nous seront utiles : (voir [30])

Lemme 1

Soit $G(t,s)$ la fonction de Green associée au problème (2).

Supposons que $0 < \theta < \dfrac{1}{2}$, alors : $G(t,s) \geq M_\theta G(s,s)$, $\theta \leq t \leq 1\text{-}\theta$, $0 \leq s \leq 1$ où

$$M_\theta = \frac{e^{m\theta} + e^{-m\theta}}{e^m + e^{-m}}$$

$$G(t,s) \geq C\varphi(t)\varphi(1-t)G(t_0,s), \qquad t, t_0, s \in [0,1]$$

où $C = \dfrac{1}{\varphi^2(1)}$

Lemme 2

Soit $y \in C((0,1),[0,\infty))$, $0 < \int_0^1 y(s)ds < \infty$ alors le problème à valeur sur le bord de Neumann :

$$\begin{cases} -\omega'' + m^2\omega = y(t), \ 0<t<1 \\ \omega'(0) = \omega'(1) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

admet une solution unique ω et il existe une constante C_y telle que :

$C\|\omega\|\varphi(t)\varphi(1-t) \leq \omega(t) \leq C_y\varphi(t)\varphi(1-t)$ avec $C_y = \dfrac{1}{\rho}\int_0^1 y(s)ds$

Remarque

On déduit du lemme 2 que si $y(t) \equiv M$ alors $C_y = C_M = \dfrac{M}{\rho}$.

On impose les hypothèses suivantes :

(H_1) $f(t,u) \leq p(t)q(u)$ où $p:(0,1) \to [0,+\infty)$ et $q:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ sont continues.

(H_2) $|g(t,u)| \leq M$, $M > 0$ est une constante.

(H_3) $0 < \int_0^1 G(s,s)p(s)ds < +\infty$

(H_4) $\lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{f(t,u)}{u} = +\infty$ uniformément sur tout sous intervalle compact de $[0,1]$.

Soit $C^+[0,1] = \{u \in [0,1], u(t) \geq 0, 0 \leq t \leq 1\}$, $K = \left\{u \in C^+[0,1], \min\limits_{\theta\leq t\leq 1-\theta} u(t) \geq M_\theta \|u\|\right\}$.

On vérifie, aisément, que $C^+[0,1]$ et K sont deux cônes de E.

Soit $v(t)$ la solution du problème à valeur sur le bord :

$$\begin{cases} -v'' + m^2 v = M, \ 0<t<1 \\ v'(0) = v'(1) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

D'après le lemme (2) $v(t) \leq C_M\varphi(t)\varphi(1-t) = \dfrac{M}{\rho}\varphi(t)\varphi(1-t)$.

Posons : $\left[y(t)\right]^{*} = \begin{cases} y(t), & y(t) \geq 0 \\ 0 & y(t) < 0 \end{cases} \quad 0<t<1$

et $F(\lambda,t,u) = \lambda f\left(t,[u-v]^{*}\right) + g\left(t,[u-v]^{*}\right) + M,\ 0 \leq t \leq 1.$

Considérons le problème à valeur sur le bord :

$$\begin{cases} -u'' + m^2 u = F(\lambda,t,u) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Il n'est pas difficile de prouver que $u = u_0 - v$ est une solution positive du problème (1) si et seulement si u_0 est une solution positive du problème (5), v est la solution du problème (4) et $u_0(t) > v(t),\ \ 0 < t < 1.$

Définissons l'opérateur $T_\lambda : C^{+}[0,1] \to C^{+}[0,1]$ par $(T_\lambda u)(t) = \int_0^1 G(t,s) F\left(\lambda, s, u(s)\right) ds$.

Lemme 3

Supposons que les hypothèse (H_1)–(H_3) sont vérifiées. Alors : $T_\lambda : K \to K$ est complètement continu (ie continu et compact).

Le théorème du point fixe de krasnosel'skii dans un cône va jouer un role important pour prouver le résultat cherché.

Théorème 1 [18]

Soit E un espace de Banach et $K \subset E$ un cône. Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts de E avec $0 \in \Omega_1$ et $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$.

Soit $T : K \cap \left(\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1\right) \to K$ un opérateur complètement continu tel que :

$\|Tu\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$, et $\|Tu\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$

$\|Tu\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$, et $\|Tu\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$

Alors T possède un point fixe dans $K \cap \left(\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1\right)$.

On enchaine avec le résultat principal qu'est :

Théorème 2

Supposons que (H_1)–(H_4) sont satisfaites. Alors le problème (1) admet au moins une solution positive $u \in \left(C^2(0,1) \cap C[0,1]\right)$ si $0 < \lambda \leq \left[\max\limits_{0 \leq \tau \leq r} q(\tau) \int_0^1 G(s,s)\, p(s)\, ds\right]^{-1}$ où

$$r = \max\left\{1 + 2M \int_0^1 G(s,s)\, ds, \frac{M}{\rho C}\right\}$$

Démonstration

D'après le lemme 3, T_λ est complètement continu.

Soit $\Omega_1 = \left\{u \in C[0,1], \|u\| < r\right\}$.

Pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$, $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
(T_\lambda u)(t) &= \int_0^1 G(t,s) F(\lambda, s, u(s)) \\
&= \int_0^1 G(t,s)\left(\lambda f\left(s,[u(s)-x(s)]^*\right)+g\left(s,[u(s)-x(s)]^*\right)+M\right)ds \\
&\le \int_0^1 G(t,s)\lambda p(s) q\left([u(s)-x(s)]^*\right)ds + 2M\int_0^1 G(s,s)ds \\
&\le \lambda \max_{0\le\tau\le r} q(\tau)\int_0^1 p(s)G(s,s)ds + 2M\int_0^1 G(s,s)ds \\
&\le 1 + 2M\int_0^1 G(s,s)ds \le r = \|u\|
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\|T_\lambda u\| \le \|u\|$ pour $u \in K \cap \partial\Omega_1$. Par ailleurs, choisissons N assez grand tel que : $\frac{1}{2}\lambda M_\theta N C\varphi^2(\theta)\int_\theta^{1-\theta} G(s,s)\,ds \ge 1$

D'après (H_4), il existe une constante $B > 0$ telle que :

$\frac{f(s,u)}{u} > N$ pour $(s,u) \in [\theta, 1-\theta] \times [B, \infty)$

Posons : $\Omega_2 = \{u \in C[0,1], \|u\| < R\}$ où $R = \max\left\{2r, \frac{2M}{\rho C}, \frac{2B}{C\varphi^2(\theta)}\right\}$

Pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$, $s \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
u(s)-v(s) &\ge u(s) - C_M\varphi(s)\varphi(1-s) \ge u(s) - \frac{M}{\rho}\varphi(s)\varphi(1-s) \\
&\ge u(s) - \frac{M}{\rho C R} C\|u\|\varphi(s)\varphi(1-s) \\
&\ge u(s) - \frac{1}{2}u(s) \\
&\ge \frac{1}{2}u(s) \ge 0
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\min_{\theta\le s\le 1-\theta}\left(u(s)-v(s)\right) &\ge \min_{\theta\le s\le 1-\theta}\frac{1}{2}u(s) \ge \min_{\theta\le s\le 1-\theta}\frac{C}{2}\|u\|\varphi(s)\varphi(1-s) \\
&\ge \frac{CR}{2}\varphi^2(\theta) \ge B
\end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in [\theta, 1-\theta]$,

$$\begin{aligned}(T_\lambda u)(t) &= \int_0^1 G(t,s)F(\lambda,s,u(s)) \\ &= \int_0^1 G(t,s)\left(\lambda f\left(s,\left[u(s)-v(s)\right]^*\right)+g\left(s,\left[u(s)-v(s)\right]^*\right)+M\right)ds \\ &\geq \int_\theta^{1-\theta} G(t,s)\lambda f\left(s,\left[u(s)-v(s)\right]^*\right)ds \\ &\geq \lambda M_\theta \int_\theta^{1-\theta} G(s,s)N\left(u(s)-v(s)\right)ds \\ &\geq \lambda M_\theta \int_\theta^{1-\theta} G(s,s)N\frac{u(s)}{2}ds \\ &\geq \lambda M_\theta \int_\theta^{1-\theta} G(s,s)\frac{NC}{2}\|u\|\varphi(s)\varphi(1-s)ds \\ &\geq \frac{1}{2}\lambda M_\theta NC\varphi^2(\theta)\int_\theta^{1-\theta} G(s,s)\|u\|ds \geq \|u\|\end{aligned}$$

Ceci implique que $\|T_\lambda u\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$. En appliquant (B) du théorème 1, on déduit que T_λ possède un point fixe u_0 avec $r \leq \|u_0\| \leq R$. Du lemme 1, on a :

$$\begin{aligned}u_0(t) &\geq C\|u_0\|\varphi(t)\varphi(1-t) \\ &\geq Cr\varphi(t)\varphi(1-t) \\ &\geq \frac{C\rho r}{M}\frac{M}{\rho}\varphi(t)\varphi(1-t) \\ &\geq \frac{M}{\rho}\varphi(t)\varphi(1-t) = v(t)\end{aligned}$$

Et $u(t) = u_0(t) - v(t)$, $u(t) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$ est une solution positive du problème (1).

Application 2

On se propose d'étudier l'existence, la symétrie et l'unicité des solutions positives du problème suivant. Les résultats suivants figurent avec preuves dans [4].

$$(P_p)\begin{cases} Lu = -u'' + m^2u = |u|^p f(x), & x \in]a,b[\\ u'(a) = 0 = u'(b) \end{cases}$$

où $p > 1$, $m > 0$, $0 \leq a < b \leq \pi$, f est une fonction continue positive et symétrique sur $[a,b]$

On considère l'espace de Banach $E = C([a,b])$ muni de la norme $\|\cdot\|_0$ où $\|u\|_0 = \sup\{|u(x)|, x \in [a,b]\}$

La fonction de Green $G(x,y)$ pour l'opérateur L avec les conditions de Neumann précédentes est une fonction positive continue sur $[a,b]\times[a,b]$.

Le problème (P_p) peut être considéré comme un problème du point fixe :

$$u(x) = \int_a^b G(x,y)|u(y)|^p f(y)dy = Au(x)$$

Définissons :

$\alpha = \min\{f(x), a \le x \le b\}$, $\beta = \max\{f(x), a \le x \le b\}$, $l = b - a$

α, β et l sont positives

Résultat d'existence

La preuve de l'existence des solutions positives de (P_p) est basée sur le théorème 1 de Krasnosel'skii qui apparait dans l'application 1. Il va nous assurer le résultat suivant :

Théorème 1

Supposons que f est une fonction positive et continue sur $[a,b]$. Alors le problème (P_p) admet au moins une solution positive pour tout $m > 0$ et $p > 1$.

La symétrie des solutions positives

On commence par donner le théorème suivant qui va affirmer que toute solution positive de (P_p) est uniformément bornée.

Théorème 2

supposons que f est continue et positive sur $[a,b]$. Alors il existe une constante C_m telle que $C_m := \left(\frac{m^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(1+(ml)^2\right)$ telle que toute solution positive de (P_p) vérifie : $u(x) \le C_m, \ \forall x \in [a,b]$.

Cette constante C_m va intervenir pour prouver la symétrie des solutions positives. Et nous avons le théorème suivant :

Théorème 3

Supposons que f est continue, positive et symétrique sur $[a,b]$ et le paramètre m satisfait l'inégalité suivante : $p\beta\frac{m^2}{\alpha}\left(1+m^2l^2\right)^{p-1} < 1+m^2$.

Alors toute solution positive de (P_p) est symétrique.

Résultat d'unicité de la solution positive

Soit λ_1 la première valeur propre positive du problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u \quad & x \in]a,b[\\ u'(a) = u'(b) = 0 \end{cases}$$

Théorème 4

Pour les mêmes hypothèses sur f et si le paramètre positif m satisfait la relation suivante $\lambda_1 + m^2 - p\frac{\beta}{\alpha}m^2\left(1+m^2l^2\right)^{p-1} > 0$

Alors le problème (P_p) admet une unique solution positive.

Remarque

On a la caractérisation suivante de λ_1 si $I=[a,b]$,

$$\lambda_1=\inf\left\{\int_I (v'(x))^2\,dx:\ v\in H^1(I), v'(a)=0 \text{ et } \int_I (v(x))^2\,dx=1\right\}$$

Au fait $\lambda_1=\dfrac{\pi^2}{l^2}$ et elle est atteinte par la fonction v_1 : $v_1(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cos\left(\dfrac{\pi}{l}(x-a)\right)$.

Exemple

Pour le cas particulier : $p=2,\quad f(x)=1+\sin x,\quad (a,b)=(0,\pi)$

Alors $\alpha=1,\ \beta=2,\ l=\pi$ et $\lambda_1=1$.

D'après le théorème 4 ce problème admet une unique solution positive et symétrique si :

$4\pi^2m^4+3m^2-1<0$ ce qui implique que $m\in]0,0.354446\ldots[$.

IV.7 Théorème du point fixe pour les opérateurs généraux α -concaves

On se propose d'étudier l'existence et l'unicité des solutions pour les deux problèmes à valeurs sur le bord suivants : (voir [30],[35], [36])

$$(P\pm)\ \begin{cases}\pm u''(t)+m^2u(t)=f(t,u(t))+g(t), & 0<t<1\\ u'(0)=u'(1)=0\end{cases}$$

où *m* est une constante positive, $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ et $g:[0,1]\to[0,\infty)$ sont continues.

Soit *E* un espace de Banach réel, *P* un cône dans E et θ l'élément nul de *P*. Soit donnée $h>\theta$, on définit $P_h=\{x\in P/\exists\lambda(x),\mu(x)>0E \text{ telles que } \lambda(x)h\le x\le\mu(x)h\}$.

Le théorème suivant est un théorème du point fixe pour des opérateurs généraux α -concaves (qu'on va définir). Il nous sera très utile pour établir l'existence et l'unicité des solutions pour (P_-) et (P_+). (Voir résultat principal dans préliminaires)

Théorème 1

Supposons que le cône *P* est normal et que *A* satisfait les conditions suivantes :

(B_1) $A:P_h\to P_h$ est croissant dans P_h.

(B_2) $\forall x\in P_h$ et $t\in(0,1)$, il existe $\alpha(t)\in(0,1)$ tel que $A(tx)\ge t^{\alpha(t)}Ax$. *A* est alors dit opérateur général $\alpha-$concave.

(B_3) il existe une constante $l\ge0$ telle que $x_0\in[\theta,lh]$

Alors l'équation $x=Ax+x_0$ admet une solution unique dans P_h.

On applique le théorème 1 pour déduire l'existence et l'unicité des solutions positives pour (P_-) et (P_+) dans P_h. On impose les hypothèses suivantes :

(H_1) $f(t,x)$ est croissante en *x* pour *t* fixé et $g\not\equiv0$.

(H_2) Pour tout $\gamma \in (0,1)$ et $x \geq 0$, il existe $\varphi(\gamma) \in (\gamma,1]$ tel que $f(t,\gamma x) \geq \varphi(\gamma) f(t,x)$, pour $t \in [0,1]$.

(H_3) pour tout $t \in [0,1]$, $f(t,a) > 0$ où $a = \frac{1}{4}(e^m + e^{-m} + 2)$.

Dans ce qui suit $E = C[0,1]$ est l'espace de Banach dont la norme est : $\|u\| = \sup_{t\in[0,1]} |u(t)|$ et $P = \{x \in C([0,1]) / x(t) \geq 0, t \in [0,1]\}$ P est un cône normal de constante de normalité égale à 1.

Etudions le problème (P_-) :

Soit $G(t,s)$ la fonction de Green pour le problème à valeur sur le bord :

$$\begin{cases} -u''(t) + m^2 u(t) = 0, & 0 < t < 1 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Alors $G(t,s) = \frac{1}{\rho}\begin{cases} \psi(s)\psi(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \psi(t)\psi(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$

où $\rho = \frac{1}{2} m (e^m - e^{-m}) =$ et $\psi(t) = \frac{1}{2}(e^{mt} + e^{-mt})$

Le théorème suivant va affirmer que sous les hypothèses (H_1)–(H_3) les conditions(B_1), (B_2) et (B_3) sont vérifiée.

Théorème 2

Sous les hypothèses (H_1)–(H_3) le problème (P_-) admet une solution positive unique u^* dans P_h où $h(t) = \psi(t)\psi(1-t)$, $t \in [0,1]$. Et nous avons la remarque suivante qui est très importante :

Remarque 1

Soit $b = \frac{1}{2} m(e^m + e^{-m})$. Alors il est facile de vérifier que $a = \min\{h(t), t \in [0,1]\}$ et $b = \max\{h(t), t \in [0,1]\}$ (a donnée dans (H_3)).

Exemple 1

Considérions le problème à valeur sur le bord :

$$(1)\begin{cases} -u''(t) + (\ln 2)^2 u(t) = u^\beta(t) + q(t) + t^2 & 0<t<1 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

où $\beta \in (0,1)$, $q : [0,1] \to [0,\infty)$ continue.

On doit vérifier les hypothèses (H_1)–(H_3) pour appliquer le théorème 2 et déduire que le problème (1) admet une unique solution positive dans P_h.

On a :

$m = \ln 2$

$f(t,x) = x^{\beta} + q(t)$ et $g(t) = t^2$

$$a = \frac{1}{4}\left(e^{\ln 2} + e^{-\ln 2} + 2\right) = \frac{1}{4}\left(2 + \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{9}{8} \Rightarrow a = \frac{9}{8}$$

$$b = \frac{1}{2}\left(e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} \Rightarrow b = \frac{10}{8}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\left(e^{t\ln 2} + e^{-t\ln 2}\right)$$

$$\psi(1-t) = \frac{1}{2}\left(e^{(1-t)\ln 2} + e^{-(1-t)\ln 2}\right)$$

$$h(t) = \psi(t)\psi(1-t) = \frac{1}{4}\left(e^{\ln 2} + e^{-\ln 2} + 2^{1-2t} + 2^{2t-1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2 + \frac{1}{2} + 2^{1-2t} + 2^{2t-1}\right)$$

$$= \frac{5}{8} + \frac{1}{4}\left(2^{1-2t} + 2^{2t-1}\right), \quad t \in [0,1]$$

Pour t fixé, il est claire que $f(t,x)$ est croissante en x et $g \not\equiv 0$.

$$f(t,a) = f\left(t, \frac{9}{8}\right) = \left(\frac{9}{8}\right)^{\beta} + q(t) > 0$$

Posons $\varphi(\gamma) = \gamma^{\beta}, \quad \beta \in (0,1)$

$$f(t,\gamma x) = (\gamma x)^{\beta} + q(t) = \gamma^{\beta} x^{\beta} + q(t) \geq \gamma^{\beta}\left(x^{\beta} + q(t)\right) \geq \varphi(\gamma)\, f(t,x)$$

Ainsi le théorème 2 est applicable et le problème (P_-) admet une unique solution positive dans P_h.

<u>Etudions le problème</u> (P_+) <u>avec</u> $m \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

Soit $G(t,s)$ la fonction de Green pour le problème :

$$\begin{cases} u''(t) + m^2 u(t) = 0, \ 0<t<1 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Alors $G(t,s) = \dfrac{1}{m \sin m} \begin{cases} \cos ms \cos m(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \cos mt \cos m(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$

Le théorème suivant va assurer l'existence et l'unicité de la solution de P_+ dans P_h.

Théorème 3

Supposons que (H_1) et (H_2) sont satisfaites et $f\left(t, \cos^2 m\right) > 0$ pour $t \in [0,1]$. Alors le problème P_+ admet une unique solution positive dans P_h avec

$h(t) = \cos m(1-t)\cos mt,\ \ t \in [0,1]$

Exemple 2

Considérions le problème à valeur sur le bord :

$$(2)\begin{cases} u''(t) + \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^2 u(t) = u^{\frac{1}{3}}(t) + q(t) + t^3,\ 0<t<1 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

où $q:[0,1] \to [0,+\infty)$ est continue.

On a : $m = \dfrac{\pi}{3} \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $h(t) = \cos\dfrac{\pi}{3}t\cos\dfrac{\pi}{3}(1-t),\ t \in [0,1]$

$f(t,x) = x^{\frac{1}{3}} + q(t),\ \ g(t) = t^3$

Pour *t* fixé, il est évident que $f(t,x)$ soit croissante pour $x \geq 0$ et $g \not\equiv 0$

$$\begin{aligned} f\left(t, \cos^2\frac{\pi}{3}\right) &= \left(\cos^2\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + q(t) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} + q(t) > 0 \end{aligned}$$

Posons : $\varphi(\gamma) = \gamma^{\frac{1}{3}},\ \ \gamma \in (0,1)$ alors :

$$\begin{aligned} f(t,\gamma x) &= (\gamma x)^{\frac{1}{3}} + q(t) = \gamma^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} + +q(t) \\ &\geq \gamma^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}} + +q(t)\right) \geq \varphi(\gamma)\, f(t,x) \end{aligned}$$

Toutes les conditions du théorème 3 sont vérifiées, par conséquent le problème 2 possède une unique solution positive dans P_h.

Références :

[1] R. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] R.P. Agarwal, M. Mechan et D. O’regan, Fixed point theory and applications, Cambridge university press.

[3] R.P. Agarwal, D. O’regan, D.R.Sahu, Fixed point theory for Lipschitzian type mappings with applications, Springer.

[4] A. Bensedik, et M. Bouchekif, Symmetry and uniqueness of positive solution for a Neumann boundary value problem, App-Math-Lett 20(2007) 419-426.

[5] C. Bessaga, On the converse of the Banach fixed – point principle, colloq.Math.,7 (1959), pp. 41-43.

[6] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Masson, Paris, 1983.

[7] J. Dugundji and A. Granas, Fixed point theory, Monographic mathematyczne, vol 16, Polish Scientific Publisher, 1982.

[8] M. Edelstein, An extension of Banach’s contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc, 12 (1961), pp. 7-10.

[9] M. Edelstein, On fixed and periodic points under contraction mappings, J. London Math Society, 37 (1962), pp. 74-79.

[10] L.CV. Evans, Partial differential equations, American Math. Soc., Providence, 1988.

[11] M. Frigon, On continuation methods for contractive and non expansive mappings, Recent advance in metric fixed point theory, Sevilla 1995 (T. Dominiguez Benarrides ed), Universidad de Sevilla 1996, 19-30.

[12] D.Gilbarg and N.Trudinger, Elliptic partial differential equations od second order, Springer Verlag, Berlin, 1983.

[13] K. Goebel and W.A. Kirk, Topics in metric fixed point theory, Cambridge univ. Press, 1990.

[14] A. Granas, Continuation methods for contractive maps, Methods nonlinear anal, 3(1994 375-379.

[15] D.J. Guo, V.Lakshmikantham, Nolinear problems in abstract cones, Academic Press, Inc, Boston, New York, 1988, p.2.

[16] D. Hai and K. Schmitt, Existence and uniqueness results for non linear boundary value problems, Rocky Mtn. J. Math., 24(1994), pp. 77-91.

[17] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, An introduction to variational inequalities, Acad. Press, New York, 1980.

[18] M.A. Krasnosel'skii, Positive solutions of operator equations, Noordhoff, Groningen, 1964.

[19] J.W. Lee and D. O'Regan, Existence principles in differential equations and systems of equations, to topological methods in differential equations and inclusions (A. Granas and M. Fregon, eds) NATO ASI Series C, Klumers Acad. Publ. 1995 (239-289).

[20] J.L. Lions and E. Magenes, Non homogenous boundary value problems and applications, Springer, Berlin, 1972.

[21] J. L. Lions and G. Stampacchia, Variational inequalities, Comm. Pure Appl. Math., 20 (1967), pp. 493–519.

[22] J. Mawhin, Contractive mappings and periodically perturbed conservative systems, Arch. Math.2, Brno, 12 (1976), pp. 67–74.

[23] J. Mawhin, Two point boundary value problems for nonlinear second order differential equations in Hilbert space, Tohoku Math. J., 32 (1980), pp. 225–233.

[24] D. O'regan, Fixed point theorem for non linear operators, J.Math Anal. Appl. 202 (1996). 413-432.

[25] M. E. Picard, Leçons sur quelques problêmes aux limites de la théorie des équations différentielles, Gauthiers-Villars, Paris, 1930.

[26] H. L. Royden, Real Analysis, 3rd ed., Macmillan Publishing Co., New York, 1988.

[27] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw Hill, New York, 1966.

[28] M. Schechter, Principles of Functional Analysis, Academic Press, New York, 1971.

[29] D.R. SMART, Fixed point theorems, Cambridge univ Press, 1974.

[30] Y.P. Sun, Y. Sun, Positive solutions for singular semi positive Neumann boundary value problems, Electronic journal of differential equations, vol 2004 (2004) N°133, pp1-8 ISSN 1072-6691.

[31] A. Taylor, Introduction to Functional Analysis, Wiley and Sons, New York, 1972.

[32] J. Weissinger, Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens, Math. Nachrichten, 8 (1952), pp. 193–212.

[33] K. Yosida, Functional Analysis, 6th ed., Springer, New York, 1995.

[34] E. Zeidler, Non linear functional analysis and its applications, Fixed point theorem, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo.

[35] C.B Zhaï, X.M Cao, Fixed point theorems for singular comp-Maths-app 59 (2010).

[36] C.B. Zhaï, C. Yang, C.M Guo, positive solutions of operator equations on ordered Banach spaces and applications comp-Maths-App-56 (2008).