

Chapitre II

Microscopie en champ proche optique

xII-1 : Rappel de la théorie de l'électromagnétisme

L'étude des guides d'ondes diélectriques (tel que, les guides d'ondes plans ou canaux les fibres optiques, les structures photoniques ...) requière une bonne connaissance de la théorie des ondes électromagnétiques .Le but de ce chapitre est de rappeler les concepts fondamentaux de cette théorie.

Nous considérons d'une part, les aspects essentiels de la propagation des ondes dans un milieu diélectrique infini et d'autre part, l'analyse des phénomènes de la réflexion et de la réfraction à l'interface de deux milieux diélectriques différents nous prépareront à l'étude ultérieure des guides d'ondes. Une attention particulière sera aussi portée au phénomène de réflexion totale interne, vue l'importance capitale qu'elle joue pour l'étude en champ proche optique d'une structure guidante.

Pour commencer notre discussion, nous rappellerons les équations de Maxwell. Celles-ci nous permettront d'obtenir l'équation de la propagation des ondes pour un milieu diélectrique infini. L'onde progressive plane, qui est une solution de cette équation, sera ensuite examinée en détail. Après avoir défini les principaux paramètres relatifs aux ondes, nous examinerons les conséquences d'une discontinuité dans le milieu de propagation : ceci nous permettra d'obtenir les différentes lois qui gouvernent les phénomènes de la réflexion et de la réfraction à l'interface de deux milieux diélectriques .Les concepts de la réflexion totale interne et de champ évanescent seront analysés, vu leur importance dans la compréhension des guides d'ondes.

II-1-1 : Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell¹ (Tableau II-1) contiennent des dérivées partielles couplées par rapport aux variables de l'espace et du temps des champs vectoriels \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} et \vec{B} de la densité de charge ρ et de la densité de courant \vec{J} . Ce sont les quatre équations fondamentales de la théorie de l'électromagnétisme. Elles s'appliquent partout où la distribution de courant et de charge est continue. La théorie des guides d'ondes repose sur elles.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.1})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II.2})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{II.4})$$

\vec{E} : Champ électrique (V/m)

\vec{B} : Densité du flux magnétique (tesla)

\vec{D} : Densité du déplacement électrique (C/m²)

\vec{H} : Champ magnétique (A/m)

\vec{j} : Densité du courant (A/m²)

ρ : Densité de charge électrique (C/m³)

Tableau II-1: les équations de Maxwell.

Les relations de constitution caractérisant un milieu nous permettent d'exprimer la densité de champ et la densité de courant \vec{D} , \vec{B} et \vec{j} en fonction des champs \vec{E} et \vec{H} sont :

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$$

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{H}) \quad (\text{II.5})$$

$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{E}, \vec{H})$$

La forme spécifique de ces relations dépend de la nature du milieu. Ainsi, pour un milieu homogène¹, isotrope², et linéaire³, les relations (II.5) peuvent alors se réécrire comme :

$$\vec{D} = \underline{\underline{\epsilon}} \vec{E}$$

$$\vec{B} = \underline{\underline{\mu}} \vec{H} \quad (\text{II.6})$$

De plus, si le milieu obéit à la Loi des d'hom , nous avons

$$\vec{J} = \underline{\sigma} \vec{E} \quad (\text{II.7})$$

Où $\underline{\epsilon}$, $\underline{\mu}$ et $\underline{\sigma}$ sont des constantes indépendantes de \vec{E} et \vec{H} . Les milieux diélectriques isotropes et sans pertes, que nous considérons lorsque nous étudierons les guides d'ondes, ont les caractéristiques suivantes :

$$\sigma = 0 \text{ (Milieu non- conducteur)}$$

$$\mu_r = \mu/\mu_0 \text{ (Pour les milieux non-magnétiques } \mu = \mu_0 \Rightarrow \mu_r = 1)$$

$$\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 = n^2 \text{ (} n \text{=indice de réfraction du milieu)}$$

Où ϵ_r est la permittivité relative et μ_r la perméabilité relative. Plus généralement, les relations de constitution sont des équations tensorielles où

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Et

$$D_x = \epsilon_{11}E_x + \epsilon_{12}E_y + \epsilon_{13}E_z$$

$$D_y = \epsilon_{21}E_x + \epsilon_{22}E_y + \epsilon_{23}E_z$$

$$D_z = \epsilon_{31}E_x + \epsilon_{32}E_y + \epsilon_{33}E_z$$

C'est ce type de relation qui prévaut pour des milieux cristallins qui sont généralement anisotropiques. De plus, si le milieu est inhomogène, la permittivité ou l'indice de réfraction. Sera une fonction des coordonnées de l'espace $\epsilon(x, y, z)$. Un exemple important d'un tel milieu est la fibre optique à gradient d'indice .Si l'intensité du champ magnétique et celle du champ électrique sont grandes des effets non linéaires peuvent se manifester. On doit alors modéliser ces effets en incluant des termes non linéaires dans les relations de

constitution. Par exemple, aux fréquences optiques, le verre possède un non linéarité cubique (effet Kerr optique), qui peut être écrite comme :

$$\vec{D} = \underline{\epsilon}\vec{E} + \underline{\epsilon}_2|\vec{E}|^2\vec{E} \quad (\text{II.8})$$

Bien que la constante ϵ_2 soit très petite, l'utilisation d'impulsions très courtes et le confinement du champ sur une très faible surface (e. g. fibre optique monomode) fait que ce terme non linéaire, devient suffisamment important en optique guidée. Nous verrons plus loin une manifestation spectaculaire de cet effet (le soliton). Dans ce qui suit, nous considérons uniquement les milieux diélectriques isotropes sans charge sans perte et non magnétique. Les équations de Maxwell et les relations de constitution applicables pour de tels milieux sont résumées au Tableau II-2.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.9})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II.10})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II.11})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (\text{II.12})$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (\text{II.13})$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 n^2 \vec{E} \quad (\text{II.14})$$

Tableau II-2: Equations de Maxwell et relation de constitution pour un milieu diélectrique isotrope sans charges et sans pertes.

Les équations de Maxwell sont les équations différentielles auxquelles les champs \vec{E} et \vec{H} , doivent obéir lors de la propagation dans un milieu. Les solutions particulières de ces équations, pour un problème physique donné, sont trouvées à partir des conditions aux limites. Les conditions limites générales pour différentes quantités électromagnétiques sont données dans le Tableau II-3.

Continuité de la composante normale du courant de déplacement électrique :

$$\vec{s} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \quad (\text{II.15})$$

Continuité de la composante tangentielle du champ électrique :

$$\vec{s} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (\text{II.16})$$

Continuité de la composante normale de la densité de flux magnétique :

$$\vec{s} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (\text{II.17})$$

Continuité de la composante tangentielle du champ magnétique :

$$\vec{s} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \quad (\text{II.18})$$

Tableau II-3: Continuité des composantes des champs électromagnétiques à l'interface de deux milieux d'indice n_1 et n_2 . Le vecteur unitaire \vec{s} est la normale à l'interface.

Les équations de Maxwell que nous venons de voir ne sont pas faciles à résoudre puisqu'elles forment un système d'équations couplées. Cependant à partir de ces dernières, nous pouvons développer un nouveau système d'équations (appelé équation d'onde – voir Annexe 1) qui est plus aisé à analyser. Le principal intérêt réside dans le fait que les équations d'onde sont découplées, c'est-à-dire que chacune d'elles ne fait intervenir qu'un champ (\vec{E} ou \vec{H}). Elles sont donc très utiles pour résoudre des problèmes de conditions aux limites.

Dans la section suivante, nous étudierons une solution particulière de l'équation d'onde homogène : l'onde progressive.

II-1-2: Propagation d'ondes planes électromagnétiques

Dans les prochaines sections, nous utiliserons principalement les champs \vec{E} et \vec{H} qui sont des fonctions sinusoïdales du temps de la forme suivante :

$$\vec{A} = \text{Re}(\vec{A} e^{j\omega t})$$

Où \vec{A} est le vecteur complexe (phaseur) qui ne dépend que des coordonnées de l'espace. Dans ce cas particulier, nous pouvons remplacer les dérivées par rapport au temps par le facteur $j\omega$. Dans le Tableau II-4, nous retrouvons les équations de Maxwell écrites particulièrement pour des champs à variation temporelle sinusoïdale.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} = -jk_0 \eta_0 \vec{H} \quad (\text{II.19})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_0 n^2 \vec{E} = j \frac{n^2}{\eta_0} k \vec{E} \quad (\text{II.20})$$

Tableau II-4 : Equations de Maxwell pour un milieu diélectrique d'indice de réfraction. Notez que $\eta_0 \vec{H}$ possède les mêmes unités que \vec{E} .

En utilisant la même technique que nous avons utilisée à la section précédente. Nous obtenons les équations d'onde pour les phaseurs \vec{E} et \vec{H} en prenant les rotationnels des équations (II.19) et (II.20) :

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (\text{II.21})$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

Où nous avons introduit le nombre d'onde k défini comme :

$$K = n \frac{\omega}{c} = nk_0 \quad (\text{II.22})$$

Où $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ est la vitesse de la lumière dans le vide. Notez¹ aussi que $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide. Les équations (II.21), obtenues pour les phaseurs \vec{E} et \vec{H} . Portent le nom d'équations de Helmholtz. Une solution élémentaire de ces équations est l'onde plane uniforme :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 e^{-j\vec{k}\vec{r}} \quad (\text{II.23})$$

$$\vec{H} = \vec{H}_1 e^{-j\vec{k}\vec{r}} \quad (\text{II.24})$$

\vec{E} et \vec{H} sont deux vecteurs contenus dans un plan normal à la direction propagation \vec{l} et \vec{k} , est le vecteur d'onde orienté dans la direction de propagation \vec{l} ($\vec{k} = k\vec{l}$). L'application directe des équations de Maxwell sur cette onde nous conduit à la relation d'impédance qui relie le champ électrique au champ magnétique.

$$\vec{H}_1 = \left(\frac{1}{\eta}\right) \vec{l} \times \vec{E}_1 \quad (\text{II.25})$$

C'est-à-dire

$$\eta = \left| \frac{E_1}{H_1} \right| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (\text{II.26})$$

\vec{E} et \vec{H} sont deux vecteurs constants, qui ne dépendent pas des variables x, y, z . Notez que $\eta = (\eta_0/n)$ où η_0 est l'impédance du vide (377Ω) et n est l'indice de réfraction du milieu diélectrique.

II -1-3: Réflexions et réfractions à l'interface de deux milieux

L'onde plane uniforme est une solution très simple des équations de Maxwell. Cependant, cette solution est fort importante parce qu'elle est la solution élémentaire qui permet au moyen de la théorie du spectre angulaire des ondes planes d'analyser la propagation d'un faisceau quelconque. C'est pourquoi, en optique, la première approximation pour une solution est obtenue en posant comme hypothèse que l'onde est plane, uniforme et incidente. Par exemple ici, nous examinerons les conséquences de la discontinuité dans le milieu de propagation d'une onde plane uniforme. De telles discontinuités existent, par exemple à la frontière cœur-substrat d'un guide optique à saut d'indice. Imaginons une interface, telle que celle illustrée à la Figure II-1, infinie

et plane entre deux milieux diélectriques linéaires homogènes et isotropes. On suppose une onde plane uniforme incidente de direction de propagation \vec{l}_i . Dans le milieu 2, on sait que l'onde plane uniforme est une solution des équations de

Maxwell. On suppose aussi qu'une telle onde sera excitée par l'onde incidente, et que sa direction de propagation sera définie par \vec{l}_t .

L'application des conditions aux limites devrait nous permettre de trouver les paramètres de cette onde transmise dans le milieu 2, **si cette hypothèse est valide**. On peut vérifier que ceci n'est pas possible.

Il faut supposer que l'onde incidente produit aussi une onde réfléchie dans la direction \vec{l}_r . Alors, les conditions aux limites de continuité des champs électrique et magnétique permettent de déterminer uniquement les paramètres de ces deux ondes planes uniformes excitées. Le problème consiste maintenant à trouver les relations reliant les trois vecteurs \vec{E}_{0i} , \vec{E}_{0r} et \vec{E}_{0t} . De façon générale, toute onde incidente est décomposable en deux polarisations : une dont le vecteur \vec{E} est **normal** au plan d'incidence et l'autre dont le vecteur \vec{E} est **parallèle à** ce dernier. Nous donnons au Tableau II-5 les différentes façons utilisées pour nommer chacune de ces conditions.

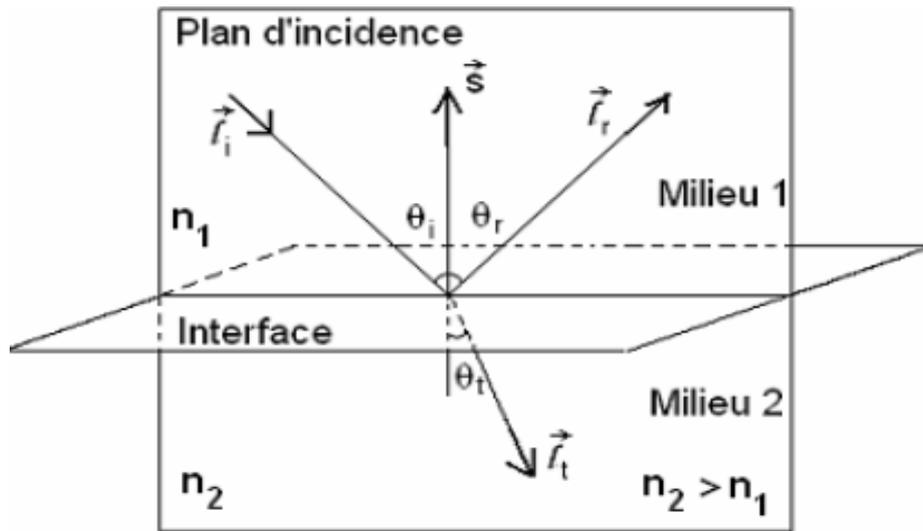


Figure II-1: Onde électromagnétique incidente à une interface entre deux milieux. Les vecteurs unitaires \vec{l}_i , \vec{l}_r , \vec{l}_t pointent dans la direction de propagation. Les angles θ_i , θ_r et θ_t sont respectivement l'angle d'incidence, de réflexion et de transmission. Le vecteur \vec{s} est la normale à l'interface.

Onde polarisée dont \vec{E} est normal au plan d'incidence	Onde polarisée dont \vec{E} est parallèle au plan d'incidence
$\perp(N)$	$\parallel(P)$
horizontal	vertical
TE	TM
S	p

Tableau II-5: Façons équivalentes de qualifier chacune des deux conditions de polarisation. En optique, les conventions réfèrent habituellement au champ électrique.

Dans l'Annexe 2 nous traiterons en détail le premier cas, soit celui où l'onde incidente polarisée a son vecteur \vec{E} normal au plan d'incidence. Bien que nous n'effectuerons pas le processus mathématique complet, nous énoncerons aussi les résultats propres au deuxième cas (\vec{E} parallèle au plan d'incidence).

II-1-4: Réflexion totale interne : champ évanescent

Nous allons maintenant considérer le phénomène de réflexion totale interne qui est primordial à la compréhension des guides d'ondes diélectriques.

Si $n_1 > n_2$ et si θ_i est assez grand, la loi Snell-Descartes, qui s'écrit

$$\sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin\theta_i \quad (\text{II.27})$$

Conduit à un résultat assez étrange, soit $\sin\theta_t > 1$. En fait, cela définit pour $\sin\theta_t = 1$ et $\theta_t = 90^\circ$, un angle critique

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{II.28})$$

Lorsque θ est plus grand que θ_c , l'angle θ_t prend des valeurs imaginaires puisque le sinus de cet angle devient plus grand que 1. Alors, on doit se rappeler qu'on utilise la notation de phaseur et par conséquent une quantité imaginaire peut correspondre à un phénomène physique.

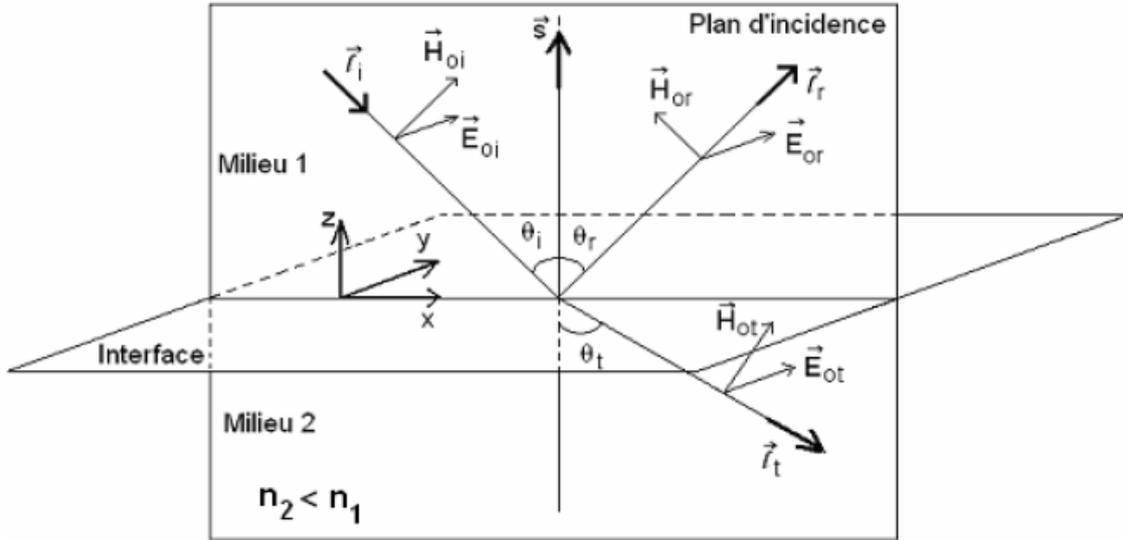


Figure II-2: Pour des angles d'incidence θ_i égaux ou supérieurs à l'angle critique θ_c , l'onde est réfléchie totalement à l'intérieur du premier milieu.

Examinons donc le champ transmis au fur et à mesure que θ_i tend vers θ_c ($\theta_i \rightarrow \theta_c$) selon la relation (A-3.10) (voir Annexe 3), qui est :

$$\vec{E}_T = \vec{E}_{0t} e^{-jk_2(x \sin \theta_t - z \cos \theta_t)} \tag{II.29}$$

Où \vec{E}_{0t} dépend de l'état de polarisation. En utilisant l'identité suivante

$$\cos \theta_t [1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i]^{1/2} \tag{II.30}$$

Nous pouvons réécrire l'équation (II.29) comme une fonction de θ_i , soit

$$\vec{E}_T = \vec{E}_{0t} e^{-jk_2[(n_1/n_2)x \sin \theta_i - z \sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i}]} \tag{II.31}$$

Lorsque θ_i varie de 0 à θ_c , le champ transmis a une composante qui se propage dans la direction des z négatives et une dans la direction des x positifs. Lorsque $\theta_i = \theta_c$, $\sin^2 \theta_c = (n_1/n_2)^2$ et le terme $[1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_c]^{1/2}$ est nul :

$$\sqrt{1 - \left\{\frac{n_1}{n_2}\right\}^2 \left\{\frac{n_2}{n_1}\right\}^2} = 0$$

Alors l'équation (II.31) devient :

$$\vec{E}_T = \vec{E}_{0t} e^{-jk_2x}$$

Donc le champ se propage parallèlement à l'interface (x positifs).

Regardons maintenant le vecteur de poynting pour l'onde transmise

$$\langle \vec{S}_t \rangle = \text{Re} \left(\frac{n_2}{2\eta_0} |E_{0t}|^2 \vec{l}_t \right)$$

Où
$$\vec{l}_t = \sin\theta_t \vec{a}_x - \cos\theta_t \vec{a}_z$$

Et $\cos\theta_t = 0$ et $\sin\theta_t = 1$. On obtient :

$$\langle \vec{S}_t \rangle = \text{Re} \left(\frac{n_2}{2\eta_0} |E_{0t}|^2 \vec{a}_x \right) \quad (\text{II.32})$$

L'équation (II.32) nous confirme que le flux d'énergie est nul dans le milieu 2 et qu'il se propage seulement dans la direction des x positifs (parallèlement à l'interface). Lorsque θ_i devient supérieur à θ_c , on observe que $\sin^2\theta_i > (n_1/n_2)^2$ et que $[1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2\theta_i]^{1/2}$ devient une quantité imaginaire. On peut alors écrire que :

$$\sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2\theta_i} = -j\sqrt{(n_1/n_2)^2 \sin^2\theta_i - 1}$$

Le choix du signe négatif provient de la condition limite sur l'énergie lorsque z tend vers moins l'infini, En remplaçant cette dernière équation dans l'équation (II.31) on obtient l'expression suivante pour le champ transmis dans le milieu 2, pour le cas où $\theta_i > \theta_c$

$$E_T = E_{0t} e^{+\alpha z} e^{-j\beta x} \quad (\text{II.33})$$

Où

$$\alpha = k_2 \sqrt{(n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i - 1} = n_1 k_0 \sqrt{\sin^2 \theta_i - \sin^2 \theta_c}$$

$$\beta = \frac{k_2 n_1}{n_2} \sin \theta_i = n_1 k_0 \sin^2 \theta_i$$

L'onde transmise donnée par l'équation (II.33) a un comportement particulier. Elle se déplace dans une direction parallèle à l'interface avec une constante de propagation β et elle s'atténue exponentiellement avec une constante d'atténuation α dans la direction perpendiculaire². Le flux d'énergie total traversant à surface est nul. Pour mettre en évidence ce fait, nous allons le calculer explicitement :

$$\vec{a}_z \cdot \langle S_t \rangle = \text{Re} \left(\frac{n_2}{2\eta_0} |E_{0t}|^2 \vec{a}_z \cdot \vec{l}_t \right) = \text{Re} \left(\frac{-n_2}{2\eta_0} |E_{0t}|^2 \cos \theta_t \right)$$

Pour $\theta_i > \theta_c$, $\cos \theta_t$ est imaginaire (équation (II.27)) ce qui implique que la puissance moyenne transmise est nulle. Il n'y a donc pas de transport d'énergie dans le milieu 2 même s'il existe une onde évanescente.

Cette situation nous conduit à nous interroger sur le principe de la conservation de l'énergie, puisque localement nous avons une onde incidente d'amplitude unitaire une onde transmise, qui est aussi d'amplitude unitaire.

Mais en fait, l'onde plane uniforme (*TEM*) possède déjà une énergie infinie. Si on veut analyser le principe de la conservation de l'énergie, on doit d'abord considérer la situation d'un faisceau qui contient une énergie finie.

II -1-5: Guide diélectrique symétrique à trois couches : analyse globale

Les ouvrages présentant la théorie des guides d'onde étant nombreux, ce chapitre a pour seul objectif d'en présenter les bases élémentaires permettant de maîtriser les interprétations des résultats expérimentaux. Ces guides sont non seulement des outils pédagogiques importants mais aussi des structures essentielles pour la technologie de l'optique intégrée [1]. Un guide optique déjà bien connu, est bien évidemment la fibre optique, laquelle présente très souvent une section efficace circulaire. Cependant les guides à grand intérêt technologique sont très souvent de structure planaire ou canal.

L'analyse des guides diélectriques symétriques à trois couches ("slab wave guide") a l'avantage de présenter des solutions mathématiques simples et faciles à comprendre (voir Figure II-3).

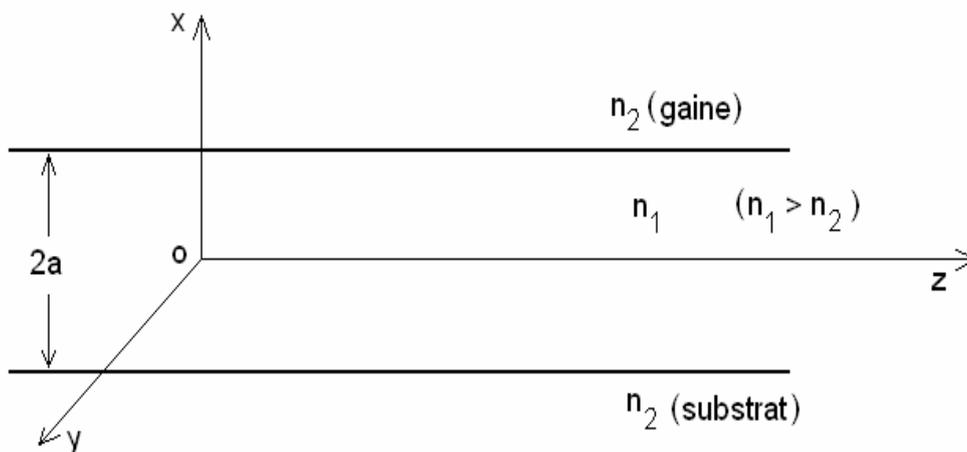


Figure II-3 : Géométrie d'un guide diélectrique à trois couches.

L'étude d'un guide diélectrique est un problème aux conditions limites [2]. En effet, pour obtenir les expressions complètes des modes de propagation, on résout l'équation d'onde soumise à des conditions frontalières [3]. L'une de ces conditions fixe l'amplitude relative des champs à l'intérieur et à l'extérieur du guide [4], l'autre résulte en une équation aux valeurs propres permettant le calcul de la constante de propagation du mode guidé [5].

Pour simplifier notre analyse, nous allons séparer les modes guidés en mode TE et TM . Les guides diélectriques ont été le sujet de plusieurs ouvrages [1-5] auxquels nous conseillons de se référer pour une plus riche et plus complète compréhension des guides.

Un guide à trois couches est un guide bidimensionnel (selon les directions x et z) et infiniment étendu dans la direction des y (voir Figure II-3). Afin de simplifier notre première analyse, nous supposons que la couche du substrat possède le même indice de réfraction n_2 que la couche de la gaine. Le problème consiste donc à trouver les modes de propagation possibles dans un guide donné où les valeurs de n_1 , n_2 , k_0 et a sont connues. Cela revient à dire qu'il faut trouver chacune des composantes des champs électriques et magnétiques et évaluer leurs constantes de propagation dans cette structure. Les étapes que nous suivrons afin de résoudre ce problème de conditions aux limites du guide plan sont résumées ci contre :

- ❖ Modèle mathématique du guide plan à saut d'indice utilisant l'équation d'onde et de Maxwell en coordonnées cartésiennes.
- ❖ Identification des deux familles de mode TE et TM .
- ❖ Sélection de la forme appropriée de la solution de l'équation d'onde dans les régions d'indice n_1 et n_2 à partir des considérations physique de guidage.
- ❖ Applications des conditions aux limites à l'interface n_1/n_2 et obtention de l'équation caractéristique et des solutions modales correspondantes.

II-1-5-1: Modèle mathématique (étape 1)

La solution d'un guide d'onde consiste à chercher des solutions des équations de Maxwell qui satisfont les conditions aux limites et qui propagent l'énergie selon une direction définie. Nous savons déjà que les équations de Maxwell consistent en fait en six équations différentielles scalaires couplées (équation (II.21)). On anticipe que la solution de ce problème peut être très lourde. Cependant, une analyse mathématique des équations de Maxwell qui tient compte de la géométrie du problème physique permet de simplifier passablement l'analyse et la compréhension du guidage des modes. Les guides intéressants pour les applications possédant toujours une symétrie élémentaire reliée d'abord au processus de fabrications (e.g. plan cylindrique...). Ici nous considérons un guide plan infini selon la direction y et qui contient l'énergie dans le plan x tout en la propageant selon la direction $+z$.

Afin de bien identifier ces conditions, nous écrivons le champ électrique et magnétique de la façon suivante.

$$\vec{E} = \text{Re}[\vec{E}^0(x)e^{-j\beta z} e^{j\omega t}] \quad (\text{II.34})$$

$$\vec{H} = \text{Re}[\vec{H}^0(x)e^{-j\beta z} e^{j\omega t}] \quad (\text{II.35})$$

C'est-à-dire que nous cherchons une solution monochromatique de pulsation ω qui propage l'énergie selon la direction $+z$ avec une constante de propagation β^1 . De plus, cette onde aura une distribution d'amplitude selon l'axe x , nous cherchons avant tout les solutions dont l'amplitude est importante dans la région $-a < x < a$. Enfin, nous supposons que cette distribution de l'amplitude sera uniforme selon l'axe y , c'est-à-dire que les champs \vec{E}^0 et \vec{H}^0 ne sont pas en fonctions de la position y (voir également l'Annexe3).

D'autre part, on sait (équations (II.21)) que chacune des composantes des champs obéit à l'équation d'onde scalaire. Ici, on choisira naturellement d'écrire l'équation d'onde seulement pour les composantes longitudinales des champs soit :

$$\frac{\partial^2 E_z^0}{\partial x^2} + \gamma^2 E_z^0 = 0 \quad (\text{II.36a})$$

$$\frac{\partial^2 H_z^0}{\partial x^2} + \gamma^2 H_z^0 = 0 \quad (\text{II.36b})$$

La solution des modes du guide est maintenant ramenée à la solution de ces équations d'onde (II.36) qui permettront par la suite, le calcul des composantes transverses (voir Annexe3) dans les deux régions d'indice n_1 et n_2 .

II-1-5-2: Modes TE et TM (étape 2)

La solution de l'équation d'onde (II.36a) amènera pour le champ E_z deux constantes arbitraires d'intégration l'une reliée à l'amplitude dans la région 1 et l'autre à l'amplitude du champ dans la région 2. De même, la

solution du champ H_z donnera deux autres constantes. L'application des conditions aux limites sur les champs tangentiels à l'interface n_1/n_2 reliera les quatre constantes (E_y, H_y et E_z, H_z) sous la forme de quatre équations. Ce

système de quatre équations à quatre inconnues pourrait être solutionné globalement. Cependant, l'analyse des équations (A-3.5) et (A-3.6) en Annexe 3 nous indique que l'application des conditions aux limites sur H_y et E_z reliera les constantes d'intégration du champ E_z des régions 1 et 2 alors qu'indépendamment l'application des conditions aux limites sur E_y et H_z reliera les deux constantes du champ H_z . Il s'ensuit que le système de quatre équations à quatre inconnues sera formé de deux groupes de deux équations à deux inconnues complètement indépendants.

Il est d'usage d'étudier indépendamment ces deux groupes en supposant d'abord que les constantes du champ E_z sont nulles, i.e. que le champ $E_z \equiv 0$. On obtient l'ensemble des champs indiqués au Tableau II-6. Ce groupe correspond

Mode TE	
$E_z^0 \equiv 0$ $E_x^0 = 0$ $E_y^0 = j \frac{\eta_0 k_0}{\gamma^2} \frac{dH_z^0}{dx}$	$\frac{\partial^2 H_z^0}{\partial x^2} + \gamma^2 H_z^0 = 0$ $H_x^0 = -j \frac{\beta}{\gamma^2} \frac{dH_z^0}{dx}$ $H_y^0 = 0$
où $\gamma^2 = n^2 k_0^2 - \beta^2$ N.B. $n = n_1$ dans le cœur et $n = n_2$ dans la partie gaine	

Tableau II-6: Composantes des champs pour le mode TE.

à la famille des modes que l'on qualifie *TE* puisque la seule composante du champ électrique non nulle se situe dans le plan transverse (E_y). L'autre groupe s'obtient en supposant que le champ axial $H_z \equiv 0$. On a alors la famille des modes *TM*, puisque le champ magnétique a seulement une composante transverse. Le Tableau II-7 nous indique les diverses composantes des modes *TM*.

Mode TM	
$\frac{\partial^2 E_z^0}{\partial x^2} + \gamma^2 E_z^0$ $E_x^0 = -j \frac{\beta}{\gamma^2} \frac{dE_z^0}{dx}$ $E_y^0 = 0$	$H_z^0 \equiv 0$ $H_x^0 = 0$ $H_y^0 = -j \frac{n^2 k_0}{\eta_0 \gamma^2} \frac{dE_z^0}{dx}$
où $\gamma^2 = n^2 k_0^2 - \beta^2$ N.B. $n = n_1$ dans le cœur et $n = n_2$ dans la partie gaine	

Tableau II-7: Composantes des champs pour le mode TM .

Il suffit maintenant de trouver la solution de l'équation d'onde (II.36) pour le champ longitudinal dans les deux milieux, pour ensuite au moyen des deux tableaux (Tableau II-6 et II-7), calculer explicitement les diverses composantes des modes TE et TM . Cependant, nous savons déjà que l'équation d'onde possède plusieurs types de solutions (e.g. onde progressive, Stationnaire, évanescente ...). Il est important de bien choisir le type de solutions pour rapidement identifier les solutions guidées.

II-1-5-3 : Sélection de la forme appropriée de la solution (étape 3)

Nous cherchons maintenant une forme mathématique qui est solution de l'équation d'onde modifiée (équation (II.36)) ayant les caractéristiques d'une onde qui se propage dans le centre d'indice n_1 de la structure du guide et y est contenue de préférence. Notre connaissance des différentielles ainsi que les notions élémentaires de l'électromagnétisme nous amènent à choisir pour le milieu d'indice n_2 des solutions mathématiques de forme $e^{-w|x|}$ c'est-à-dire des champs qui décroissent exponentiellement (champs évanescents) en s'éloignant du centre ($x \rightarrow \pm\infty$). Sous ces conditions particulières, on aura une composante E_z^0 pour les modes TM ou une composante H_z^0 pour les modes TE de la forme

$$\left. \begin{matrix} E_z^0 \\ H_z^0 \end{matrix} \right\} = A e^{-w|x|} \quad A = \text{cet.} \quad (\text{II.37})$$

Pour que cette forme soit solution des équations d'onde modifiée (équation A-3.7), il faut que

$$w^2 \equiv -\gamma^2 \quad (n = n_1)$$

Dans le milieu d'indice n_2 ce qui revient à dire que

$$w^2 \equiv \beta^2 - n_2^2 k_0^2 \quad (\text{II.38})$$

Dans le cœur de la structure (indice n_1), les solutions de l'équation d'onde peuvent être des exponentielles complexes (ondes progressives). Cependant, nous anticipons que ces ondes progressives seront réfléchies à l'interface n_1/n_2 et changeront de ce fait de direction (complexe conjugué), pour être par la suite réfléchi une seconde fois à l'autre interface du guide. La symétrie de structure laisse entrevoir que, selon la direction de l'axe x , ces ondes formeront des ondes stationnaires, nous avons donc tout intérêt à choisir pour solution, dans le milieu n_1 des fonctions trigonométrique ($\sin ux$ ou $\cos ux$) afin de simplifier au maximum notre analyse. Nous écrivons donc, pour le milieu n_1 , les composantes E_z^0 et H_z^0 de la façon suivante :

$$\left. \begin{array}{l} E_z^0 \\ H_z^0 \end{array} \right\} = B \cos(ux) + C \sin(ux) \quad (\text{II.39})$$

Pour que cette forme mathématique soit solution des équations d'onde modifiées (A-3.7), il faut que

$$w^2 \equiv \gamma^2 \quad (n = n_1)$$

C'est-à-dire que

$$u^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta^2 \quad (\text{II.40})$$

En résumé, nous avons choisi une forme mathématique d'onde évanescente dans le milieu n_2 et une forme d'onde stationnaire selon la direction de l'axe x dans le milieu n_1 afin de pouvoir discuter simplement des modes guidés dans le cœur de cette structure planaire. La suite de notre étude nous indiquera si ce choix est judicieux, s'il nous conduit à trouver des solutions réelles pour la constante de propagation guidée β , nous avons vu juste ! Nous avons introduit deux nouveaux paramètres w (II.38) et u (II.40) afin d'éviter une confusion de notation avec le paramètre γ du milieu 1 et 2.

Cependant il faut bien réaliser ici que seule la constante de propagation β est l'inconnue à déterminer et que u et w sont des paramètres intermédiaires qui cachent cette constante de propagation.

II-1-5-4 : Calcul du mode TE pair (étape 4)

Dans cette section, la constante de propagation β sera déterminée en appliquant les conditions aux limites imposées par la structure guidante aux diverses composantes des champs électriques et magnétiques (voir Tableau II-6 et II-7). Il nous faut maintenant calculer la constante de propagation β en respectant les conditions aux limites à l'interface n_1/n_2 . Nous savons que ces conditions exigent la continuité des composantes tangentielles (dans notre cas, ce sont les composantes en z et en y) des champs électriques et magnétiques.

On étudiera de façon indépendante les modes TE et TM car les constantes de propagation sont différentes pour chacun de ces modes. De plus le choix du champ axial en $\cos(ux)$ ou $\sin(ux)$ conduit à des solutions différentes pour β , les modes pairs et impairs seront donc considérés séparément lors de l'étude des modes TE et TM . Pour le mode TE pair, on choisit $H_z^0 = C \sin ux$ et les composantes du mode se calculent en utilisant les composantes données au Tableau II-6. Dans le cœur où $n = n_1$, on obtient :

Dans le cœur	Mode TE pair ²
$E_z^0 \equiv 0$ $E_x^0 = 0$ $E_y^0 = j \frac{\eta_0 k_0 c}{u} \cos(ux)$	$H_z^0 = c \sin(ux)$ $H_x^0 = -j \frac{\beta c}{u} \cos(ux)$ $H_y^0 = 0$
<p>Où $u^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta^2$</p>	

Tableau II-8 : Composantes des champs pour le mode TE pair dans le Cœur.

Dans la partie gaine	Mode TE pair
$E_z^0 = 0$ $E_x^0 = 0$ $E_y^0 = j \frac{\eta_0 k_0 c}{u} A e^{-w x }$	$H_z^0 = A e^{-w x }$ $H_x^0 = -j \frac{\beta}{w} A e^{-w x }$ $H_y^0 = 0$
<p>où $w^2 = \beta^2 - n_2^2 k_0^2$</p>	

Tableau II-9 : Composantes des champs pour le mode TE pair dans la gaine.

L'application des conditions aux limites sur les composantes tangentielles ainsi que l'équation caractéristique du mode TE pair sont données dans l'Annexe 4.

II-1-6 : Guide à deux dimensions. Méthode des indices effectifs

Les guides diélectriques à deux dimensions ou comme on les appelle couramment en littérature, guides d'ondes canaux sont des structures que nous trouvons de plus en plus souvent dans des circuits d'optique intégrée. Malheureusement il n'y a pas de solution analytique exacte au problème de propagations à travers d'une structure à deux dimensions. Comme en général les différences d'indices relatives sont faibles ($< 5\%$), on peut simplifier le traitement en supposant que la polarisation de la lumière est identique à celle d'un guide plan. Cette approximation permet de considérer le problème vectoriel à l'aide d'une équation scalaire.

Une des méthodes les plus utilisées pour analyser les guides à deux dimensions est la méthode dite des indices effectifs. Le principe illustré sur la figure (II-4) à, consiste à ramener le problème à deux dimensions à la résolution de deux problèmes à une dimension. Supposons que $n_1 > n_2 \gg n_3$. On commence par calculer l'indice effectif du guide plan d'épaisseur b égale à celle du guide ruban, on peut connaître exactement la valeur de l'indice effectif n_{eff} dans le cas des deux polarisations qui sont alors purement TE ou TM . On calcule ensuite les constantes de propagation du guide plan d'épaisseur a égale à celle du guide ruban et d'indice égal à n_{eff} . La constante de propagation de la lumière dans le guide ruban est supposée égale à celle du guide plan équivalent ainsi obtenu.

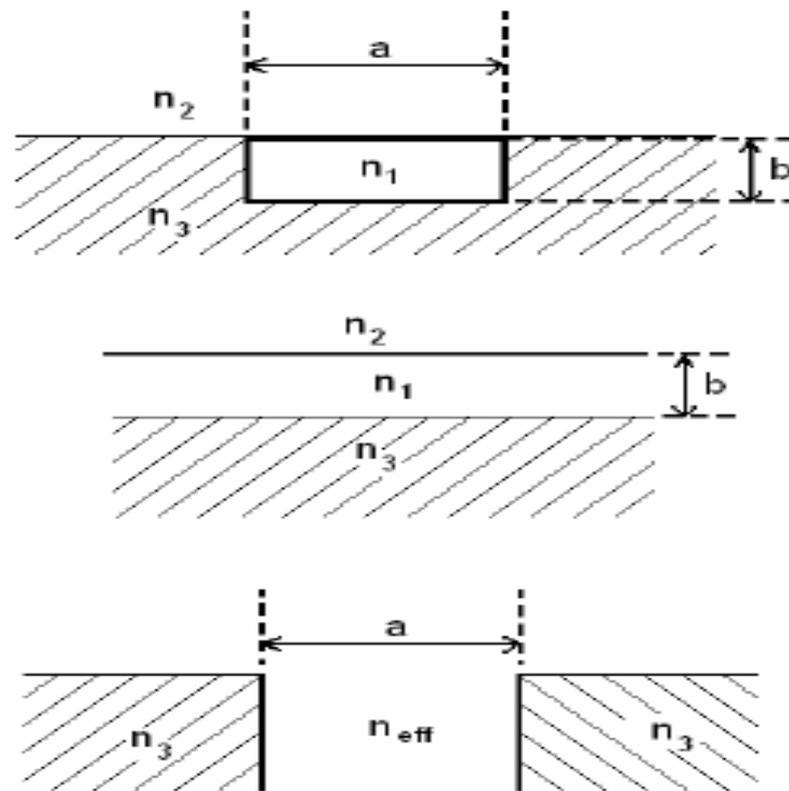


Figure II-4 : Guide d'onde

II-2 : Microscopie en champ proche optique

Les années 1980 ont vu la naissance et le développement de la microscopie en champ proche, encore appelée *microscopie à sonde locale*, avec notamment les succès du microscope à effet tunnel, à force atomique et depuis quelques années du microscope en champ proche optique. Avec ces nouveaux instruments, l'objet est analysé point par point par balayage d'une sonde locale, une pointe très effilée, placée à quelques distances atomiques de sa surface. L'image obtenue est une cartographie d'une grandeur physique caractéristique de l'objet sondé. Ces nouveaux microscopes sont caractérisés par l'absence d'une optique de transmission, ils échappent donc aux limitations inhérentes à ces composants optiques. En configuration de champ proche optique, l'amplitude de la grandeur physique détectée décroît fortement quand la sonde en s'éloigne de l'échantillon. L'analyse locale permet d'échapper au critère de Rayleigh lié, lui, à la propagation, et de percevoir ainsi des détails de dimension bien inférieure

à la longueur d'onde du rayonnement utilisé. L'image possède donc une très haute résolution, car la détection s'effectue très près du lieu d'émission, et c'est la taille utile de la sonde locale qui fixe la résolution. L'image peut ainsi révéler, selon l'interaction choisie, soit une topographie de la surface, soit une cartographie électronique chimique, magnétique ou optique. L'effet tunnel est une conséquence de la dualité onde corpuscule. Il se manifeste lorsqu'une particule doit traverser une région de l'espace, appelée barrière de potentiel, ou son énergie totale est inférieure à son énergie potentielle.

La traversée par effet tunnel de cette région, interdite au sens de la mécanique classique, est possible si la fonction d'onde associée à la particule s'étend sur des dimensions comparables à celles de la barrière à franchir. Dans le cas du microscope fondé sur ce principe, la barrière est l'espace vide (de quelques dixièmes de nanomètre) qui existe entre l'échantillon conducteur et une pointe métallique. L'effet tunnel se traduit alors par le passage d'un courant I qui dépend exponentiellement de la distance de la pointe à la surface lorsqu'on applique une tension V (différence de potentiel) entre les deux électrodes. L'interaction de champ proche est ici le couplage par effet tunnel entre la pointe (sonde métallique) et la surface d'un échantillon conducteur. Le courant résulte de ce couplage. L'image est obtenue en enregistrant le mouvement de cette pointe sonde lorsqu'on impose un courant constant lors du balayage de la surface. C'est le mode d'imagerie le plus pratiqué. Le mouvement ainsi contrôlé de la pointe lors du balayage permet d'accéder aux propriétés topographiques ou électroniques locales de la surface. Le premier microscope dérivé du microscope à effet tunnel est le microscope à force atomique. Celui-ci utilise l'effet de proximité de la pointe et de l'échantillon et non le contrôle du courant tunnel. Ce type de microscopie peut donc permettre l'analyse de tous les matériaux, même ceux qui ne sont pas conducteurs. C'est par une pointe installée à l'extrémité d'un levier très sensible que l'on obtient une cartographie de haute résolution des forces qui s'exercent entre les atomes à l'apex de la pointe et ceux de la surface. On réalise ainsi une profilométrie¹ à l'échelle nanométrique. Le levier sert à amplifier le mouvement de la pointe, et l'on enregistre optiquement ses déplacements verticaux lors du balayage. L'avantage de cette instrumentation, fondée sur une cartographie de forces entre atomes, est d'ouvrir l'analyse pour tous les types de matériaux et d'accéder à la mesure locale de forces magnétiques ou électrostatiques.

Elle permet en outre des caractérisations à l'air ou en atmosphère contrôlée. Le microscope à force atomique est analogue à un profilomètre très performant qui donne

accès à des mesures précises de la rugosité d'une surface à des échelles allant de la centaine de micromètres jusqu'au nanomètre. Ces possibilités remarquables sont déjà exploitées dans des programmes de caractérisation de Surfaces d'échantillons à vocation technologique, dans les domaines de l'optique et de la micro-électronique.

Plus généralement, toutes les sondes locales dérivées du microscope à effet tunnel fonctionnent dans des régimes d'interaction où la distance entre la sonde et la surface est minimisée de façon à obtenir la meilleure résolution possible. Ce sont des microscopes de champ proche. Ils permettent d'étudier les variations locales d'une propriété ou d'un paramètre physique à la surface d'un échantillon. Ainsi, le microscope à force magnétique permet d'étudier et d'imager des propriétés magnétiques d'un échantillon en utilisant une pointe-sonde magnétique (cobalt ou nickel). Il a été développé pour analyser finement des matériaux magnétiques tels que les têtes et les supports d'enregistrement magnétique.

L'apparition d'une nouvelle technique et la naissance d'un nouvel outil d'observation ont souvent permis des progrès significatifs dans la compréhension de processus biologiques.

Dans ce contexte, l'intérêt des biologistes pour les microscopies de champ proche est lié aux nombreux avantages et potentialités de ces nouvelles méthodes de caractérisation. La très haute résolution et les possibilités d'identification spectroscopique sont certainement d'importants facteurs. Mais la possibilité d'observer les échantillons dans des conditions proches de celles *in vivo* a séduit les biologistes. L'utilisation de cette nouvelle microscopie en biologie se développe et les premiers résultats sont encourageants.

Dans le cas de la microscopie SNOM (sigle anglais pour *scanning near-field optical microscopy*), on utilise les propriétés qu'un champ électromagnétique augmente localement sur les parties courbes d'une surface. Le but des microscopies en champ proche optique est d'obtenir de meilleures (quelques nanomètres) résolutions latérales que celles des microscopes classiques, par la détection d'ondes évanescentes.

Pour pouvoir s'imposer comme des techniques viables dans le monde scientifique, ces microscopies doivent être plus performantes (permettre d'obtenir une

résolution latérale meilleure) que les microscopes confocaux qui sont moins difficiles à mettre en œuvre [6,7].

La microscopie optique de champ proche est une illustration de la possibilité d'atteindre des résolutions meilleures que celles qui sont imposées par le critère de Rayleigh. Celui-ci limite à approximativement $\lambda/2$ la résolution théorique d'un microscope traditionnel en utilisant des radiations de longueur d'onde λ . Cependant, ce critère, qui est une formulation des relations d'incertitude de Heisenberg, s'applique à la détection d'ondes progressives. Dans la configuration de champ proche où l'on détecte une onde évanescente, on échappe à cette restriction, des microscopes qui permettent d'obtenir des images d'objets tests avec des résolutions de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres ont donc été mis au point.

Mais l'interprétation de telles images pose un problème fondamental de résolution des équations de Maxwell dans une géométrie bien définie, et nécessite aussi une connaissance de la forme des objets.

A cet égard, le couplage d'un microscope de champ proche optique avec des microscopes donnant la topographie de l'échantillon (microscope à force atomique, par exemple) permet de mieux cerner la relation entre les propriétés structurales et les propriétés optiques. Quoique sa résolution ne soit pas aussi bonne que celle d'un microscope tunnel, ce type de microscope est très utile pour étudier non seulement la topographie de surfaces (réseaux optiques, surfaces et interfaces.....) mais aussi les interactions et les phénomènes optiques à l'échelle du nanomètre.

II-2-1 : Au-delà de la limite de la diffraction – le champ proche optique.

Historiquement, comme nous l'avons déjà signalé dans la partie Introduction, il faut remonter en 1928 pour voir apparaître les premières idées sur les techniques de microscopie optique en champ proche. En effet, le physicien irlandais E.H.Synge proposa d'utiliser une méthode qui consiste en l'irradiation locale d'un échantillon avec une source lumineuse d'intensité constante à travers d'un trou (de dimensions petites que la longueur d'onde de la lumière) effectué dans un écran parfaitement opaque. Le trou se déplaçant au-dessus de la surface de l'échantillon on collecte des

informations point par point sur les propriétés de l'échantillon en analysant la lumière transmise, à travers ce dernier, grâce à un photo détecteur, comme nous le montre la Figure II-5.

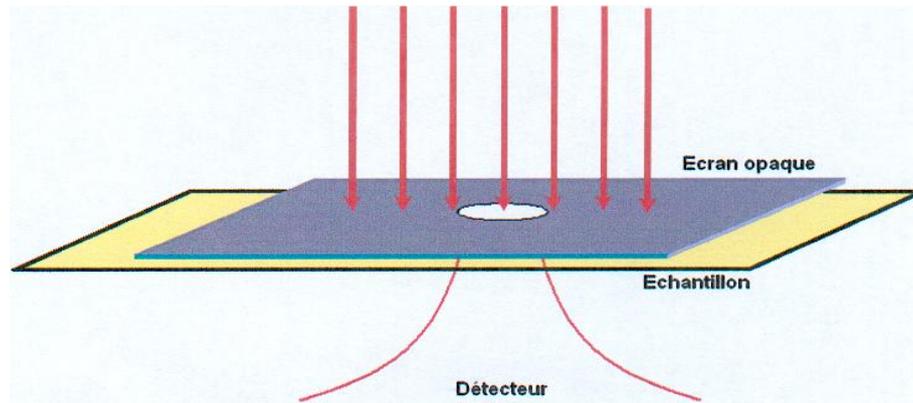


Figure II-5 : Représentation schématique du principe d'une nano-source optique proposée par Synge.

En s'affranchissant ainsi des limitations en résolution spatiale dues à la diffraction de la lumière, cette méthode de caractérisation rend obsolètes le critère de résolution tel qu'il est défini en optique classique, introduisant intuitivement la dimension de la sonde et la distance sonde-échantillon comme nouveaux facteurs limitatifs¹. Cette idée de source locale de taille bien plus petite que la longueur d'onde est mise en pratique pour la première fois par E.A.Ash et G.Nicholls en 1972 [8] dans le domaine de micro-ondes². Dans le domaine de l'optique, c'est D.W.Phol [9] qui annonce pour la première fois, en 1984, la mise au point d'un SNOM capable d'atteindre une résolution d'environ 25 nm. Actuellement, il existe de nombreuses variétés de SNOM utilisant des sondes de nature différente, travaillant en transmission ou en réflexion, on éclairage en champ lointain ou évanescent. Cette grande diversité des configurations, que nous présentons dans ce chapitre, tend à montrer l'inexistence d'une configuration universelle valable pour toutes les applications.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de suivre le raisonnement de Synge, c'est-à-dire d'évoquer les raisons qui l'ont amené à envisager une telle expérience, surtout de comprendre pourquoi il attachait tant d'importance aux dimensions des éléments de son expérience.

II-2-2 : Diffraction de la lumière au passage d'une ouverture

Pour mieux comprendre d'où provient la perte d'information lors de l'observation d'un objet Par des techniques d'imagerie classiques, on se propose de regarder

l'évolution de la figure de diffraction, sur un écran, d'une onde plane monochromatique éclairant en incidence normale une fente lorsque l'on diminue la largeur w de cette dernière [10].

Lorsque la fente est grande ouverte, la lumière n'est pratiquement pas diffractée : les rayons lumineux se propagent au-delà de la fente sans subir de déviation. Dans l'espace des fréquences spatiales, cela signifie que la direction du vecteur d'onde de la lumière n'est pas modifiée à la traversée de la fente, Figure II-6-a).

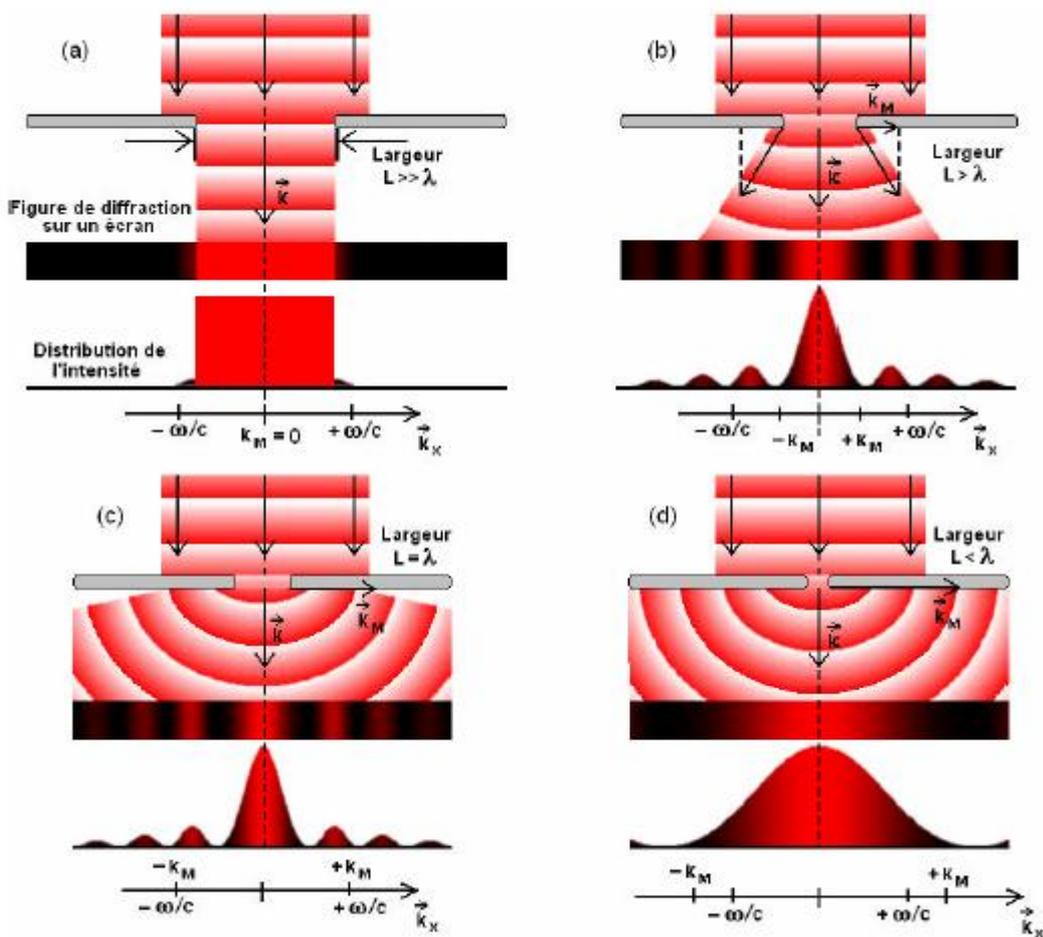


Figure II-6 : Evolution de la figure de diffraction de la lumière par une fente quand la largeur w de cette dernière diminue.