



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCCEN

# THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Pour l'obtention du diplôme de :

**DOCTORAT EN SCIENCES**

Spécialité : Physique Electronique et Modélisation

Par :

**Mme Bensenane Meryem**

Sur le thème

---

## **Modélisation des Systèmes Physiques Multi-échelles et Multi-physiques-Applications-**

---

Soutenue publiquement le

devant le jury composé de :

**Président** Mr Ghouali Noureddine Professeur à l'Université de Tlemcen

**Directeur de Thèse** Mr Benouaz Tayeb Professeur à l'Université de Tlemcen

**Co-Directeur de Thèse** Mr Auger Pierre Professeur à l'IRD- Bondy-France

**Examineur** Mr Khaladi Mohammed Professeur à l'Université de Marrakech

**Examineur** Mr Bekhechi Smaine Professeur à l'Université de Tlemcen

**Examineur** Mr Chikhaoui Abdelhak MC « A » à l'Université de Tlemcen

*Laboratoire Automatique Tlemcen (LAT)  
Année Universitaire 2016/2017*

# Dédicaces

A ma famille, ma belle famille  
A mon cher et adorable mari !

# *Remerciements*

Les travaux présentés dans cette thèse sont le fruit d'une collaboration très fructueuse avec l'équipe UMMISCO de l'institut de Recherche pour le développement (IRD-Bondy) en France.

Je remercie vivement mon directeur de thèse Monsieur **Tayeb Benouaz**, Professeur à l'université de Tlemcen qui a accepté de prendre cette responsabilité et qui a su m'orienter et me remotiver lors de mes nombreuses périodes de doute. Sa confiance en moi, sa patience, sa gentillesse et **SURTOUT SES QUALITES HUMAINES** me donnaient plus de force et de courage pour finaliser ce travail. Qu'il trouve dans cette thèse une grande reconnaissance de ma part pour tout ce qu'il a fait pour moi.

Je remercie particulièrement mon co-directeur de thèse Monsieur **Pierre AUGER** directeur de Recherche à l'IRD qui est à l'origine de ce projet, Il m'a apporté une grande aide par son savoir et son esprit rigoureux en m'orientant vers les bonnes pistes quand il le fallait pour me faire avancer. Il a toujours trouvé les moyens de me remotiver dans mes périodes critiques.

Je remercie vivement Monsieur **Noureddine Ghouali**, Professeur à l'Université de Tlemcen, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence du jury.

Je tiens également à exprimer mes remerciements à Monsieur **Smaine Bekhchi** Professeur à l'Université de Tlemcen pour l'honneur qu'il me fait d'examiner ces travaux.

Je suis sensible à l'honneur que me fait Monsieur Mohamed Khaladi, Professeur en Mathématiques à l'Université Cadi Ayyad-Marrakech (Maroc), en acceptant de juger ce travail de thèse.

J'exprime aussi ma vive connaissance à Monsieur **Abdelhak Chikhaoui**, Maître de Conférences à l'Université de Tlemcen *d'avoir accepté* de participer à ce *Jury*.

J'adresse une pensée particulière à ma famille pour l'affectation et le soutien qu'ils m'ont apporté tout au long de mes études, et pour la confiance accordée et les encouragements.



# Table des Matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
0.1 Introduction . . . . .	5
0.2 Modélisation Multi-échelles . . . . .	6
0.3 Problématique . . . . .	7
0.4 Contribution . . . . .	8
<b>1 Modélisation multi-physique et multi-échelle</b>	<b>12</b>
1.1 Introduction . . . . .	12
1.2 la modélisation multi-physique et multi-échelle [4]: . . . . .	13
1.3 Choix d'un modèle . . . . .	14
1.3.1 Formulation du modèle . . . . .	14
1.3.2 Méthodes de modélisation : . . . . .	17
1.4 Approches multi-plex 3 . . . . .	20
1.4.1 Mono-niveau ou multi-niveau . . . . .	20
1.4.2 Approche systémique : multi-physique et multi-composant . . . . .	21
1.4.3 Multi-échelle . . . . .	22
1.5 Illustration . . . . .	24
1.6 Conclusion . . . . .	26
<b>2 Utilisation de la modélisation Multi-échelle en Physique. Applications</b>	<b>28</b>
2.1 Introduction . . . . .	28
2.2 Modélisation multi-échelle appliquée aux matériaux . . . . .	29

2.2.1	Présentation . . . . .	29
2.2.2	Exemple concernant les matériaux à base cimentaire . . . . .	30
2.2.3	Etude des matériaux nucléaires . . . . .	30
2.3	Modélisation multi-échelle appliquée aux écoulements fluide/particules . . . . .	31
2.4	Modélisation multi-échelles appliquée en mécanique . . . . .	35
2.4.1	Calcul sur plusieurs grilles et homogénéisation . . . . .	36
2.5	Modélisation multi-échelle relative aux effets nanoscopiques et relation nanostructure-propriétés . . . . .	40
2.6	Conclusion . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Autres Applications</b>	<b>43</b>
3.1	Introduction . . . . .	43
3.2	Partie réservée à clarifier l'utilité de la Modélisation Multi Echelle en relation avec la Physique . . . . .	44
3.2.1	Cas de la neutronique . . . . .	44
3.2.2	Cas des polymères . . . . .	45
3.2.3	Informations en relation avec la physique dans le cas de nos exemples en halieutique . . . . .	46
3.3	Interpretation . . . . .	50
3.4	Formulation du Problème . . . . .	52
3.5	Sur la taille optimale des réserves marines . . . . .	52
3.5.1	pré-réserve . . . . .	53
3.5.2	Pêche avec une réserve marine . . . . .	54
3.5.3	Taille optimale d'une réserve marine . . . . .	58
3.5.4	Variation de capture en fonction de la taille de MPA . . . . .	59
3.5.5	Discussion . . . . .	60
3.6	Sur la taille optimale et le nombre optimal de réserves dans un modèle de pêche multisites . . . . .	63
3.6.1	Présentation du modèle sans réserve . . . . .	64

3.6.2	Réserves marines . . . . .	65
3.6.3	Modèle agrégé . . . . .	68
3.6.4	Taille optimale et nombre de réserves marines . . . . .	73
3.6.5	Discussion . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Annexe</b>	<b>80</b>
4.1	Les méthodes d'agrégation des variables . . . . .	80
4.1.1	Agrégation parfaite . . . . .	80
4.1.2	Méthodes d'agrégation des modèles en temps continu . . . . .	82

# **Introduction générale**

## Concepts de la Modélisation des Systèmes Physiques



# Introduction générale

## 0.1 Introduction

Le développement des méthodes de simulations numériques a permis de modéliser des systèmes physiques de plus en plus complexes et de les étudier à des échelles de taille et de temps importantes en appliquant une démarche multi-échelle. La modélisation multi-échelle apparaît dans de très nombreux domaines des sciences la matière. L'aspect " multi-échelle" est parfois un couplage entre échelles, ou plus souvent un chaînage entre échelles dans lequel le modèle de l'échelle inférieure fournit les données d'entrée du modèle à l'échelle supérieure. La modélisation multi-échelle vise à donner une description des phénomènes physiques à différentes échelles. Ce type de modélisation est en pleine expansion depuis une dizaine d'années pour l'étude de nombreuses propriétés (électroniques, optoélectroniques, structurales, énergétiques, dynamiques, mécaniques,...) de systèmes tant du monde du vivant que celui des matériaux. Ces modèles permettent d'appréhender l'étude de propriétés du nano- au micromètre, voire au delà, sur des temps phénoménologiques de la femto-à la microseconde, voire au delà. Sur le plan physique, elle prend en compte les couplages entre phénomènes élémentaires de nature différente. Dans le domaine de la physique des réacteurs, on couple par exemple la mécanique des structures, la neutronique et la thermohydraulique. Dans le domaine des matériaux par exemple, il s'agira de déduire les propriétés macroscopiques d'un matériau à partir de sa description à l'échelle la plus microscopique (l'atome), via des niveaux de description emboîtés (la dynamique moléculaire, le Monte Carlo...).

Tout le problème est de lier ces différents niveaux de description en utilisant la bonne information pour passer d'une échelle à l'autre. Enfin, le multi-échelle raccorde, par des techniques

de superposition, des modèles numériques à des échelles différentes. Cela permet, pour conserver l'exemple des matériaux, d'effectuer des "zooms" sur des zones particulièrement sensibles aux contraintes comme des fissures, des soudures ou des supports.

Tout ce qui précède vise à développer des outils qui permettent de décrire des phénomènes physiques réalistes en dépit de leur complexité afin de rendre compte autant que possible de la réalité expérimentale, voire industrielle. Le but recherché est de relier les différentes méthodes de simulation afin d'arriver à une modélisation prédictive des technologies.

Une telle modélisation prédictive est associée à l'idée que l'on puisse remplacer, à plus ou moins long terme, tout ou partie de l'effort expérimental par des simulations fiables, à la fois moins coûteuses et plus rapides à mettre en œuvre. **L'utilisation d'un modèle unique ne pouvant jamais répondre à cet objectif, le recours à une approche multi échelle s'impose.**

## 0.2 Modélisation Multi-échelles

Dans le cadre de l'étude de matériaux complexes tels que les matériaux nucléaires, l'utilisation des approches multi échelles est devenue une véritable nécessité (IRSN, CEA). Si l'on veut pouvoir comprendre et expliquer les phénomènes et comportements à l'échelle macroscopique de ces matériaux, voire prédire l'évolution de leurs propriétés, il est fondamental de partir de données à l'échelle microscopique et de remonter des informations à l'échelle mésoscopique puis macroscopique. Une étude à l'échelle atomique permet non seulement d'identifier les mécanismes prépondérants à considérer à l'échelle supérieure, mais également d'alimenter les modèles en paramètres très difficiles à obtenir expérimentalement. En effet, les codes de simulation du comportement du combustible nucléaire deviennent de plus en plus précis et prédictifs car ils reposent sur une modélisation de plus en plus mécaniste des phénomènes à considérer, mais suppose par là même la connaissance et la validation de plus en plus de paramètres. D'un point de vue scientifique, la gageure est donc multiple : il s'agit d'une part de maîtriser la description des systèmes à l'échelle atomique, mais aussi d'être capable de discuter avec les personnes à l'échelle mésoscopique et macroscopique, d'identifier les paramètres pertinents pour eux, et de raccorder les échelles, en s'assurant de ne pas tenir compte des phénomènes physiques plusieurs

fois (une fois de manière effective masquée dans l'approche mésoscopique, et une seconde par un terme additif provenant directement des approches atomistiques). Ainsi, la modélisation des dégâts d'irradiation dans les matériaux combustibles nucléaires font ils l'objet de modélisations atomistiques (DFT et semi empiriques) tandis que des modèles multi échelles sont développés afin d'établir des prédictions théoriques aux échelles macroscopiques, plus conformes aux expériences conventionnelles, lorsqu'il s'agit par exemple de comprendre le vieillissement des matériaux de structure utilisés dans les centrales nucléaires.

Ainsi, que ce soit dans le domaine des nanotechnologies, du nucléaire, de l'aéronautique ou des matériaux cimentaires, un enjeu important est donc applicatif voire économique car si la prédiction est suffisamment fiable elle permettra d'éviter un grand nombre d'expériences ou de compenser l'impossibilité de certaines expériences comme c'est le cas dans le nucléaire.

Schématiquement, devant un problème présentant diverses échelles de temps ou d'espace, on dispose des stratégies suivantes :

1. **Stratégie 1** : attaquer directement le système tel quel en le simulant avec des techniques très efficaces (mais peut-être coûteuses).

2. **Stratégie 2** : effectuer un prétraitement du système visant à faire disparaître les petites échelles pour ne laisser à simuler que les grandes ; un exemple est la théorie et la pratique de l'homogénéisation, **la méthode d'agrégation de variables**, un autre celui de la dynamique adiabatique pour les systèmes moléculaires (lié à la réduction de systèmes dynamiques).

3. **Stratégie 3** : choisir de gérer conjointement, mais de façons différentes, les petites et les grandes échelles dans le système; il en va ainsi de la mécanique pour les matériaux à microstructure, qu'ils soient solides ou fluides.

### 0.3 Problématique

La modélisation multi-physique et multi-échelle est une approche relativement récente née de la nécessité de prendre en compte, dans la modélisation d'un système dont on cherche à prédire le comportement, tous les phénomènes, dans la pratique couplés entre eux, agissant sur (ou

présents dans) ce système. C'est la forme la plus complète de modélisation d'un enchaînement de phénomènes divers et d'ordres de grandeur très différents puisqu'il en intègre toute la connaissance, théorique comme empirique, et ce à différentes échelles, dans des briques élémentaires qu'il s'agit d'assembler. Sur le plan physique, elle prend en compte les couplages entre phénomènes élémentaires de nature différente. Dans le domaine de la physique des réacteurs, on couple par exemple la mécanique des structures, la neutronique et la thermo-hydraulique.

Ce qui motive le choix d'une stratégie est comme d'habitude un compromis. Mais, encore schématiquement, on pourrait dire que c'est aussi la disproportion entre les échelles petites et grandes qui contribue grandement à la décision. Pour un problème où les échelles sont franchement séparées, de plusieurs ordres de grandeur au besoin, tout plaide pour la **stratégie 2**, mais la **stratégie 3** peut aussi convenir. La première **stratégie 1** n'est pas conseillée. Pour les problèmes où la disproportion n'est pas si grande, l'approche 1 est possible, mais les approches 2 et 3 pourront aussi être envisagées.

Notre travail va permettre la mise en valeur de la **stratégie 2** ( qui vise à effectuer un prétraitement du système visant à faire disparaître les petites échelles pour ne laisser à simuler que les grandes ).

Nous allons présenter le traitement de divers exemples de modèles multi-échelles appliqués à des domaines tout aussi important que les matériaux, la mécanique, les fluides et enfin la biologie. Nous allons étudier en détail deux modèles multi-échelles dans lesquels nous avons utilisé pour simplifier l'étude une méthode de réduction des variables qui s'appelle la méthode d'agrégation de variables : **Strategie 2** ( voir appendice). Cette méthode permet de réduire la dimension d'un système multi-échelle qui contient un grand nombre de variables d'état et de paramètres à un système de dimension réduit, l'analyse du modèle réduit est plus simple et permet d'avoir des informations sur le comportement du modèle complet a partir de celui du modèle réduit.

## 0.4 Contribution

Dans le premier chapitre sont présentées les concepts de la modélisation multi-physique et multi-échelle. Ainsi, une façon d'obtenir une réponse macroscopique d'un système à partir d'une

description microscopique du comportement est d'utiliser une technique d'homogénéisation. Ce sont souvent des approches analytiques. Ce type de modélisation vise aussi à donner une description des phénomènes physiques à différentes échelles.

Le deuxième chapitre est dédié à la présentation d'exemples dans le domaine:

**Physique des Matériaux**, un des défis actuels est de caractériser les matériaux sur une gamme d'échelles très étendue, du nanométrique au millimétrique, et dans des conditions proches du fonctionnement. L'étude des matériaux « réels » demeure un véritable défi. On passe de l'étude de systèmes modèles à des systèmes réels où plusieurs échelles entrent en jeu: atomique, défauts, taille du grain, etc. Les études in-situ offrent la possibilité d'étudier de manière fine l'influence de cette structuration multi-échelle sur les propriétés physiques pour un matériau en cours d'usage.

**Fluides**: Les écoulements fluide-particules peuvent être étudiés et modélisés en se plaçant à différentes échelles spatiales, à savoir micro, méso et macro. Nous présentons dans cet exemple, ces trois principales échelles de longueur communément employées pour décrire les systèmes diphasiques.

**Mécanique**: Les problèmes de la mécanique introduisent des entités aux échelles très diverses telles que : atome, molécule, grain, inclusion, fibre, outil et pièce. Pour une majorité de problèmes une analyse considérant un comportement moyenné sur l'ensemble du système isolé à l'échelle du système est suffisante. Cependant, certains problèmes soulevés par les avancées dans la technologie de l'élaboration des matériaux, ou bien de façon plus classique dans le domaine des procédés de fabrication, nécessitent une analyse plus fine avec une prise en compte du couplage fort entre le comportement des entités à l'échelle inférieure et la réponse globale du système.

Le troisième chapitre s'intéresse à un autre domaine qui est la biologie. Le travail présenté ici se veut une contribution à la modélisation multi-échelle et multi-physique aux modèles comprenant deux échelles de temps, un rapide associé aux mouvements rapides des poissons entre les sites et un lent correspondant à la croissance de la population de poissons et le changement de la taille de la flotte. Nous tirons part de l'existence de ces deux échelles de temps pour construire un modèle réduit, en appliquant les méthodes d'agrégation de variables **Stratégie 2**, (Iwasa et al. 1987, 1989; Auger et Poggiale 1996, 1998; Auger et al. 2008, 2012).

Le modèle réduit, appelé aussi modèle agrégé, décrit la dynamique du stock de poisson total et l'effort de pêche global. L'étude de ce modèle agrégé, nous permet de montrer qu'il existe une taille optimale de la réserve marine qui maximise les captures totales à l'équilibre.

Une conclusion termine notre travail.

Enfin, la thèse a fait l'objet de la publication de deux articles :

1. **M. Bensenane**, A. Moussaoui, P. Auger, «On the Optimal Size of Marine Reserves» Acta Biotheor (2013): 109-118. DOI10.1007/S104460136917369. Cet article met en valeur l'étude d'un modèle de pêcherie avec une zone protégée, la question était de savoir qu'elle est la taille optimale de la zone protégée qui maximise les captures tout en évitant la disparition des espèces, dans ce travail, nous avons démontré par modélisation mathématique qu'il existe une taille optimale de la zone protégée qui maximise les captures à l'équilibre.

2. Ali Moussaoui, **M. Bensenane**, P. Auger, Alassane Bah, "on the optimal size and number of reserves in a multi-site fishery model" Journal of Biological Systems, Vol. 23, No. 1 (2015) 31–47, World Scientific Publishing Company DOI: 10.1142/S0218339015500023. Cet article a permis de montrer qu'il existe une relation entre la taille et le nombre des réserves (zones protégées) qui maximise les captures à l'équilibre.

# Chapitre 1

## Modélisation multi-physique et multi-échelle

# Chapitre 1

## Modélisation multi-physique et multi-échelle

### 1.1 Introduction

Les méthodes multi-échelles ont fait leur apparition au cours des années 1990 dans plusieurs domaines reliés au calcul scientifique. Néanmoins, le mot “multi-échelle” recouvre des réalités très variées, à la fois sur le plan des échelles en jeu (qui peuvent être d’espace et ou de temps), des motivations pour de telles approches, des modèles considérés et des techniques mathématiques et numériques utilisées.

De façon générale, l’apparition de ces méthodes est motivée par la volonté (et la nécessité) de mieux comprendre l’impact, à l’échelle macroscopique, de phénomènes dont la description relève d’une échelle microscopique. Par ailleurs, le développement de la puissance de calcul des ordinateurs permet aujourd’hui de mettre en œuvre de telles méthodes, qui conduisent pour la plupart à des calculs lourds.

De nombreux problèmes pratiques peuvent se ramener à la minimisation (ou maximisation) d’une fonctionnelle (une fonction à valeurs réelles). On en trouve de très nombreux exemples en physique, en économie, en automatique et robotique, etc. [30]



## 1.2 la modélisation multi-physique et multi-échelle [4]:

Ce type de modélisation vise aussi à donner une description des phénomènes à différentes échelles. Dans le domaine de la physique des matériaux, il s'agira par exemple de déduire les propriétés macroscopiques d'un matériau poly-cristallin à partir de sa description à l'échelle la plus microscopique (l'atome), via des niveaux de description emboîtés (la dynamique moléculaire, la dynamique des dislocations). Tout le problème est de lier ces différents niveaux de description en utilisant la bonne information pour passer d'une échelle à l'autre sans discontinuité, de manipuler de façon modulaire ces lois de comportement valables à diverses échelles (Fig. I.1). C'est donc un calcul numérique composite, selon l'échelle spatiale considérée, qui fait "tourner" le modèle d'ensemble.

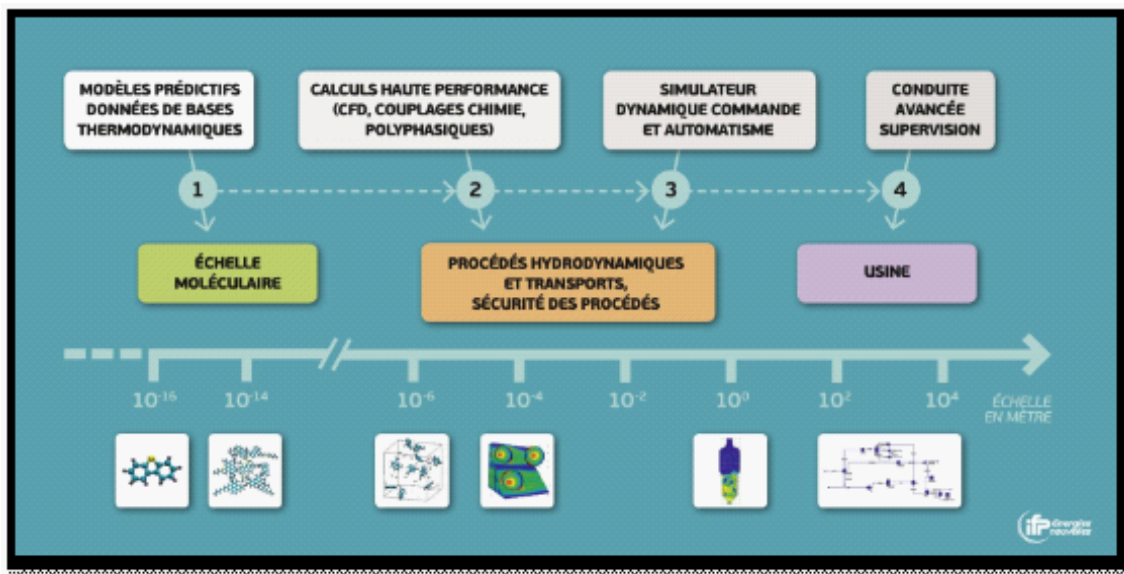


Figure I.1: Différents échelles

D'autant plus composite que les chercheurs sont amenés à "enchaîner" des modèles déterministes et des modèles probabilistes, soit parce qu'ils n'ont pas la connaissance exhaustive des mécanismes élémentaires en jeu, soit parce que la résolution numérique des équations déterministes du système serait difficile ou trop lourde. D'où le recours à des méthodes comme celle de Monte Carlo, en particulier.

Enfin, la multi-échelle raccorde, par des techniques de superposition, des modèles numériques à des échelles différentes. Cela permet, pour conserver l'exemple des matériaux, d'effectuer des "zooms" sur des zones particulièrement sensibles aux contraintes comme des fissures, des soudures ou des supports. La modélisation multi-physique et multi-échelle pose donc de façon aiguë le problème de la compatibilité et de la cohérence des codes de calcul qui constituent les briques élémentaires de la description. Mais les résultats sont à la hauteur de la difficulté.

Si la physique constitue évidemment le premier niveau de ce type de modélisation, les deux autres sont mathématique et numérique, dans la mesure où il s'agit de raccorder entre eux des résultats de mesures ou de calculs valables à des échelles différentes, puis de mettre en œuvre les algorithmes élaborés. La modélisation multi-physique et multi-échelle n'est donc rendue possible que par la conjonction de deux progrès parallèles : celui de la connaissance des phénomènes élémentaires et celui de la puissance de calcul informatique

## **1.3 Choix d'un modèle**

### **1.3.1 Formulation du modèle**

Tout modèle physique dépend profondément de ses objectifs, c'est à dire des attentes de son utilisateur. Entre autres, un modèle sera en effet très différent selon que l'objectif est l'étude quantitative du comportement d'un objet ou bien la conception de cet objet. Ces modèles doivent donc être différenciés et nous appellerons le premier modèle « modèle de comportement » et le second « modèle de conception » [23].

#### **Modèle de comportement :**

Le modèle de comportement a pour but de décrire au mieux le comportement et les performances d'un système en un temps défini sachant que toutes les données décrivant les caractéristiques physiques du système sont connues. Il peut donc être vu comme la solution d'un problème direct et résolu en une seule étape. En génie électrique, ces problèmes sont très fréquents dans les activités liées à la commande et à l'étude des performances. Le temps total retenu est toujours un compromis entre la précision souhaitée et le temps qu'il est possible d'y consacrer.

Ce modèle de comportement peut nécessiter des itérations dues à la non-linéarité de cer-

tains éléments, aux interactions multi-physiques, ou à la prise en compte des convertisseurs de puissance, etc., qui font exploser le temps de calcul. C'est un point important à surveiller, tout particulièrement dans le monde de l'entreprise où l'immobilisation de ressources, d'ordinateurs et de personnes a un coût non négligeable. De manière générale, pour réaliser un modèle de comportement avec un bon compromis temps de calcul et précision, il est nécessaire de bien connaître le dispositif à modéliser et effectuer un certain nombre de choix de modélisation.

Pour savoir ce qu'il doit considérer dans son modèle, l'utilisateur a besoin de bien connaître le fonctionnement du système et la physique qui lui est associée. C'est une tâche relativement complexe qui nécessite une bonne connaissance dans tous les domaines des sciences de l'ingénieur. L'utilisateur doit décider s'il est nécessaire de prendre en compte les interactions de la structure étudiée avec le système qui l'emploi ou bien encore quels phénomènes physiques et quelles interactions sont à considérer ou bien à négliger.

Il doit également décider du degré de finesse ou de granularité avec lequel les différents phénomènes sont pris en compte dans son ou ses modèles. Mais clairement, le choix de la modélisation réside essentiellement dans le compromis entre le temps de calcul possible et la précision acceptée. L'accroissement de la précision du modèle entraîne inévitablement une hausse du temps du calcul. Des sacrifices sont donc souvent à faire pour respecter des temps de résolution convenables. La création de modèles de substitution ou d'approximation et leur utilisation au sein même des algorithmes peut aussi être envisagée et donne lieu à des techniques d'optimisation telle que le « Space -Mapping » [19][20], et permettent en définitive d'assurer le compromis entre le temps de calcul et la précision.

### **Modèle de conception :**

Dans une démarche de création d'une nouvelle structure ou d'un nouvel objet, le concepteur se confronte à un problème de nature fondamentalement inverse. Il doit en effet trouver quelle structure répondra aux différentes spécifications imposées par le cahier des charges. Cependant, dans une démarche de conception optimale, deux voies sont alors possibles. L'une est basée sur une formulation directe, l'autre sur une formulation inverse.

Suivant le principe de causalité, on définit le problème par une formulation directe quand celui-ci s'oriente de la cause vers l'effet, tandis que le problème inverse s'oriente lui de l'effet

vers la cause. Un modèle de conception optimale peut se baser sur une formulation directe, c'est-à-dire sur un modèle de comportement fournissant les performances du système. Cette formulation directe n'est pas contradictoire, car l'ensemble du processus est vu comme un problème inverse.

En effet, les entrées du modèle de comportement (les sorties du modèle de conception) ne sont plus imposées en tant que valeurs fixes, mais évoluent sur une plage de variation. Les sorties sont soumises aux contraintes imposées par le concepteur. Le concepteur spécifie la valeur de ces contraintes, c'est pourquoi elles constituent les données d'entrées du problème inverse. Le modèle de comportement combiné à un algorithme d'optimisation est un modèle de conception et se comporte bien comme un modèle inverse.

On peut également exprimer le problème de conception directement en orientant les modèles dans le sens de la conception, appelée formulation inverse. Le travail d'inversion des modèles doit être fait au préalable par le concepteur et n'est par conséquent plus réalisé par l'algorithme d'optimisation à chaque lancement du calcul. Le processus de conception est ainsi rendu plus rapide et moins volumineux. Le nombre des contraintes et de variables de conception est diminué. Toutefois, dans la pratique, il est très important de noter que même si la formulation inverse semble idéale, elle est la plupart du temps impossible à mettre en œuvre. De plus, elle ne peut pas être mise en œuvre pour des modèles numériques ou semi-numériques.

La formulation inverse donne donc un modèle de conception capable de fournir en une seule évaluation l'objet recherché, sans technique d'optimisation. On obtient une solution unique qui, quand c'est possible, répond aux performances souhaitées. Cependant, la résolution du problème inverse fournit une solution alors que l'unicité de la solution n'est pas garantie, puisque par essence il s'agit de sélectionner une solution parmi un ensemble de possibles. On doit donc distinguer ici le « modèle de conception » du « modèle de conception optimale », car le premier ne se préoccupe pas des critères optimaux. La structure trouvée n'est pas nécessairement la meilleure réponse.

L'optimisation nécessite des degrés de liberté et un espace de solutions infini. Le modèle de conception optimale nécessite donc que l'on associe à ce modèle inverse un algorithme d'optimisation. Dans la pratique, le modèle de conception est idéal, mais n'est applicable que dans certains problèmes de dimensionnement relativement simple, sinon, la plupart du temps

il est impossible à mettre en œuvre.

### 1.3.2 Méthodes de modélisation :

Nous distinguerons trois familles de méthodes de modélisation : les méthodes analytiques, les méthodes semi-numériques ou semi-analytiques et les méthodes numériques (Fig. I.2).

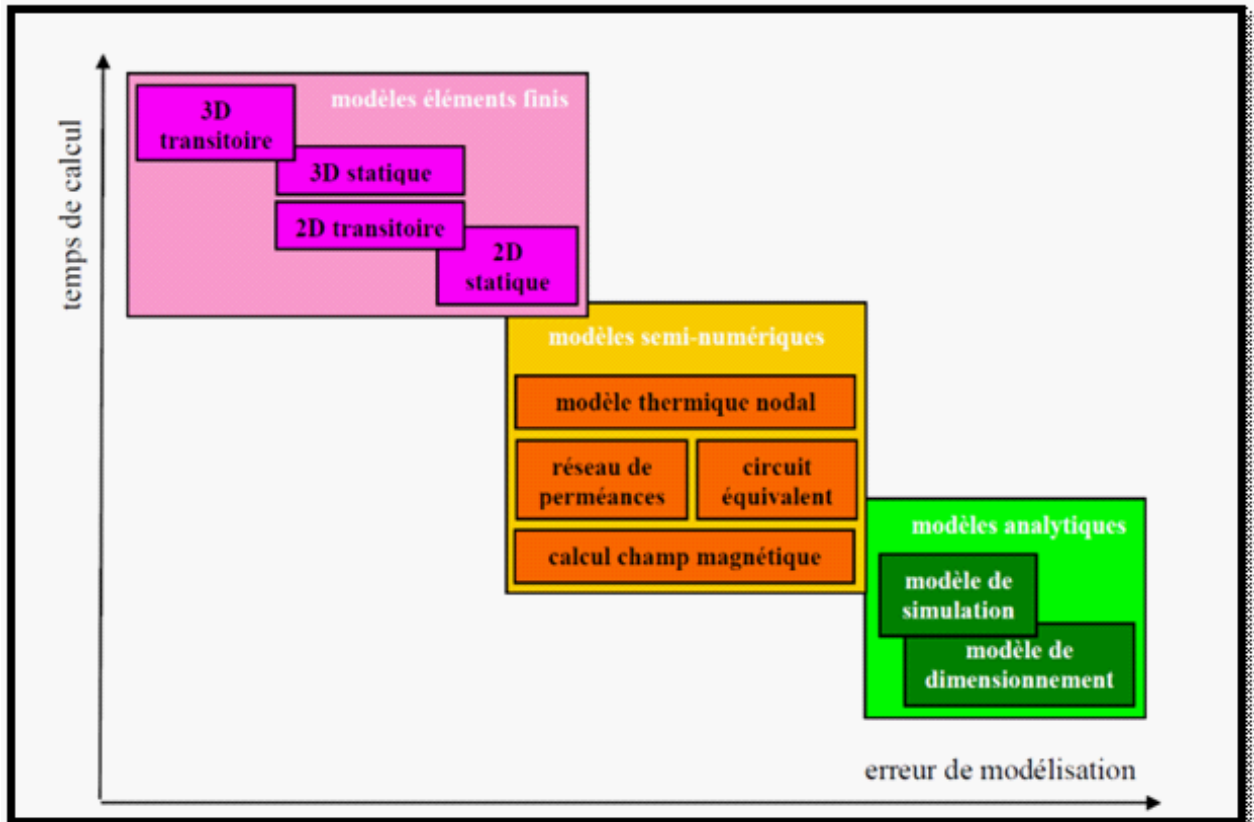


Figure I.2 : Différents approches de modélisation

#### Méthodes analytiques

Les méthodes analytiques reposent sur une formulation explicite des grandeurs caractérisant le système. Les équations relient les grandeurs fonctionnelles du système, encore appelées performances, aux grandeurs descriptives : grandeurs géométriques, caractéristiques des matériaux,

etc. Ces équations physiques du système peuvent être écrites en faisant de nombreuses hypothèses simplificatrices sur les grandeurs descriptives du système [?].

Ces modèles analytiques sont utilisés depuis très longtemps, et ça bien avant l'apparition des premiers ordinateurs. Les liens explicites entre toutes les grandeurs aident le concepteur à interpréter au moyen de son modèle, le comportement du système. Cela est d'autant plus vrai lors de modélisation de certains phénomènes couplés.

Toutefois, cette simplicité peut engendrer une perte irrémédiable de certaines informations. Même si les modèles analytiques peuvent donc retranscrire de façon tout à fait convenable le comportement d'un système, mais souvent au détriment d'hypothèses fortes : milieu linéaire, hypothèse au sens du 1er harmonique, etc.

### **Modèle semi-analytique/semi-numérique**

Les méthodes de modélisation semi-analytique/semi-numérique du type : modèles à constantes localisées ou réparties, peuvent être considérés comme une méthode hybride. En effet, la formulation des éléments du réseau se fait de façon analytique, mais la résolution du système d'équations est numérique. Cette méthode est dite semi-analytique ou semi-numérique. La mise en équation sous forme matricielle est relativement aisée, notamment au moyen des lois de Kirchhoff. Le paramétrage est possible pour des configurations relativement proches. La géométrie peut ainsi varier, ce qui est très pratique pour des phases de conception. De plus, il est possible d'obtenir la dérivée formelle des grandeurs, ce qui est un réel avantage [26].

Les modèles à constantes réparties permettent de décrire la structure non plus comme l'association discrète d'éléments (éléments à constantes localisées), mais comme l'association d'éléments infinitésimaux en discrétisant le réseau associé à un élément en un nombre fini de plus petits éléments comportant chacun une partie du réseau. Cela implique le calcul d'une nouvelle dérivée par rapport à l'espace, mais donne davantage de nœuds.

Les modèles à constantes localisées, comme un réseau de perméances pour le circuit magnétique ou un réseau nodal pour une modélisation thermique présentent l'avantage de reposer sur les lois de Kirchhoff ainsi que les différents théorèmes associés. Comme le modèle numérique, la rapidité et la précision du modèle dépendront en grande partie de sa granularité. Des éléments peuvent également être ajoutés afin de prendre en compte : les interactions multi-physiques,

les phénomènes transitoires et les non-linéarités [61].

### Méthodes numériques

Les méthodes numériques sont nombreuses : éléments finis (« FEM »), différences finies (« FDM »), intégrales aux frontières (« BEM »), éléments discrets (« DEM »), technique d'intégration finie (« FIT »), etc. Toutes ces méthodes peuvent modéliser de très nombreuses structures avec une bonne précision. Le temps de calcul qui peut être assez long est constamment réduit du fait de la rapidité toujours plus grande des ordinateurs.

Ce système d'équations décrit le comportement physique du système et repose sur un faible niveau d'hypothèses. La résolution du système d'équations repose sur des méthodes numériques et fournit par exemple la valeur des potentiels en tout point de la structure, et ce dans des domaines physiques aussi divers que la mécanique, la thermique, le magnétisme, etc. Les valeurs des grandeurs macroscopiques sont ensuite calculées à partir de la valeur de ces potentiels. La méthode des différences finies et la méthode des éléments finis sont très souvent utilisées. Ces méthodes reposent en général sur une discrétisation spatiale de la structure en petites surfaces triangulaires ou rectangulaires pour un espace bidimensionnel ou bien en petits volumes tétraédriques ou hexaédriques dans un espace tridimensionnel. Les sommets des formes géométriques sont appelés les nœuds et constituent le nombre d'inconnus du système. La précision du maillage est par conséquent directement liée aux nombres d'inconnus.

Après avoir défini les caractéristiques de chaque matériau et les conditions aux limites du problème (Neumann, Dirichlet, etc.), on résout numériquement les équations aux dérivées partielles qui peuvent être non-linéaires. On calcule ainsi assez précisément la valeur du potentiel aux nœuds et par interpolation, sur le reste de la géométrie définie.

On a ainsi accès aux cartes de champ sur l'ensemble de la géométrie, ce qui offre ainsi la possibilité de remonter aux performances globales de la machine. En résumé, c'est une méthode qui permet de prendre en compte les phénomènes microscopiques et macroscopiques, statiques ou dynamiques, bidimensionnels ou tridimensionnels. Ces différentes approches se présentent la plupart du temps sous forme de logiciels génériques.

Le travail d'un utilisateur consiste alors à décrire la géométrie de la structure, à renseigner les caractéristiques des matériaux ce qui peut être relativement complexe au vu de l'assemblage

des tôles par exemple et enfin, à réaliser un maillage de la géométrie qui peut demander un temps de préparation important. La lourdeur des calculs mis en œuvre est relative à la taille des matrices, liées à la densité du maillage, et leurs inverses. On peut noter que le couplage entre différents domaines physiques reste complexe, particulièrement du fait du caractère non explicite des équations. Dans le cas d'un couplage multi-physique qui repose sur des calculs simultanés, on parle de : couplage fort. Quand ceux-ci sont successifs, on parle alors : couplage faible. Cette dernière méthode est plus simple à mettre en œuvre, mais est plus gourmande en temps de calcul.

Dans une phase de conception, ces méthodes servent surtout dans la validation technique des solutions proposées. De plus, le couplage avec des algorithmes d'optimisation, surtout dans le cas d'une étude multi-physique, n'est en général pas exploitable. Toutefois, celles-ci restent envisageables pour un faible nombre de paramètres couplé à des méthodes d'optimisation adaptées reposant par exemple sur des modèles de substitution [42].

## 1.4 Approches multi-plex 3

L'approche « multi-plex » est une approche qui regroupe l'ensemble des « multi- » qui enrichissent la modélisation, mais qui la rend complexe. Pour les modèles de comportement, on parle de modélisation multi-physique, multi-échelle, multi-composant, etc., et pour les modèles de conception, on parle d'optimisation multi objectif, multi-disciplinaire, etc.

### 1.4.1 Mono-niveau ou multi-niveau

Deux visions pour une démarche multi-niveau sont possibles. L'une part du choix de l'architecture puis affine les modèles jusqu'au dimensionnement, au risque de négliger certains effets. C'est la démarche « top-down ». À l'inverse, on peut partir des phénomènes microscopiques et remonter au problème dans sa globalité. C'est la démarche « bottom-up ». Le second niveau repose sur le choix des composants ainsi que des matériaux qui constituent le système. C'est une étape essentielle dans l'obtention des performances. Cette étape doit toujours respecter les contraintes externes, mais en introduit également de nouvelles. Ce sont des contraintes internes au système. Par exemple, le choix d'un semi-conducteur en fonction de la fréquence.



Dans une optimisation multi-niveau, le passage des objectifs et contraintes d'un niveau à l'autre se réalise au moyen des algorithmes d'optimisation multi-disciplinaire (MDO) multi-niveaux. Les mono-niveaux seront quant à eux abordés dans la partie couplage de ce chapitre. Les algorithmes MDO multi-niveaux sont couramment utilisés dans le domaine de l'aéronautique et l'automobile [36]. Les méthodes multi-niveaux couramment employées sont les méthodes : « Analytic Target Cascading » (ATC) [37], « Collaborative Optimization » (CO) [37], « Bi-Level Integrated System Synthesis » (BLISS).

#### **1.4.2 Approche systémique : multi-physique et multi-composant**

Ingénument, la méthode habituelle pour résoudre un problème de conception est d'appréhender successivement les composants de ce système, de les assembler, pour examiner les performances globales. Une autre approche plus astucieuse est de concevoir le système en prenant en compte de la totalité des composants et leurs interactions physiques, dans une approche de conception simultanée : l'approche systémique.

L'approche systémique est une approche qui a été initialisée dans les sciences humaines et les sciences naturelles. Dans l'étude d'une population, on ne peut pas considérer le groupe comme la somme d'individualités, mais doit être considéré dans sa globalité du fait des interactions multiples et variées au sein même de la population. La complexité des êtres vivants et leurs caractères sociaux ont rendu nécessaire cette approche systémique. Dans le domaine des sciences de l'ingénieur, certaines réalisations assez complexes s'inspirent de la méthode, notamment dans le domaine du transport [25].

En effet, dans ce domaine, les contraintes extérieures peuvent être nombreuses et de plusieurs natures : les contraintes environnementales (niveau de bruit acoustique, compatibilité électromagnétique, etc.), les contraintes économiques (coût de revient, coût d'entretien, etc.), les contraintes écologiques (utilisation de matériaux recyclables, émission de gaz à effet de serre, etc.), etc. On voit donc apparaître en plus des contraintes internes propres au système, des contraintes externes liées à l'environnement du système. Un véhicule est constitué de plusieurs composants de natures différentes. Ils sont en interaction les uns avec les autres, ainsi qu'avec leur environnement. Leur conception nécessite donc la prise en compte l'ensemble des composants et de leurs interactions dans une approche simultanée, globale : une approche systémique.

Dans une approche systémique, deux aspects prédominent : les aspects structuraux et les aspects fonctionnels. Les aspects structuraux s'intéressent à l'organisation des composants dans l'espace, tandis que les aspects fonctionnels se focalisent sur les phénomènes d'échanges énergétiques dans le temps. La vision systémique consiste donc en une vision multi-composant et une vision multi-physique. Un modèle systémique est donc complexe à mettre en place, car chaque composant à son modèle et chaque modèle est composé de sous-modèles qui rendent compte des phénomènes physiques mis en jeu, en interaction entre eux afin de garder cette approche simultanée et globale.

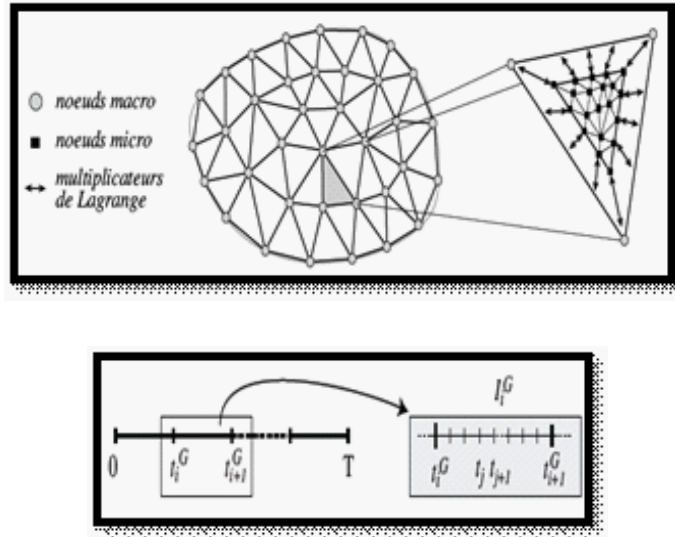
### 1.4.3 Multi-échelle

L'approche multi-échelle pour la modélisation de système prend tout son sens dans la problématique d'une modélisation systémique, c'est-à-dire multi-composant et multi-physique. L'approche multi-échelle permet ainsi d'aboutir à des temps de simulation plus convenables.

L'approche multi-composant est confrontée à différentes échelles spatiales. La modélisation doit assimiler des phénomènes microscopiques dans un système qui peut être de l'ordre du mètre. De plus, chaque composant n'a pas forcément besoin d'être modélisé avec la même précision, avec la même granularité, etc. C'est donc pour pallier les problèmes de différence de taille dans un modèle ou entre les modèles que l'on introduit l'approche multi-échelle spatiale (Fig.I.2-a).

L'approche multi-physique : induit différentes échelles temporelles. L'utilisateur doit faire l'amalgame des grands écarts de constantes de temps existant entre les différents systèmes physiques. Alors que les semi-conducteurs des convertisseurs commutent en quelques microsecondes, le temps pour stabiliser en température une machine électrique peut s'effectuer dans un temps proche de l'heure. De la même façon que pour le modèle multi-composants, c'est pour pallier aux différences de constantes de temps au sein d'un modèle ou entre les modèles que

l'on introduit l'approche multi- échelle temporelle (Fig.I.2-b).



a/ Multi-échelle spatiale b/ Multi-échelle temporelle

**Figure I.3** : Représentations des modélisations multi-échelles spatiale et temporelle [44]

### Multi-échelle temporelle

L'approche multi-échelle temporelle se justifie du fait que les phénomènes intervenants au sein des machines électriques opèrent à des constantes de temps très différentes (Tab.I.1).

**Tab.I.1** Échelles de temps pour phénomènes physiques

Domaine physique	Ordre de grandeur de la constante de temps du système
Électronique	$\mu\text{s}$
Électrique	ms
Électrique	ms
Magnétique	s
Thermique	h

## Multi-échelle spatiale

Dans la notion de multi-échelle, on y distingue généralement deux échelles : l'échelle macroscopique et l'échelle microscopique. L'échelle macroscopique est par définition l'échelle où les actions peuvent être observées par un utilisateur au moyen de la vue. Il s'oppose donc à l'échelle microscopique, qui est l'échelle où les actions ne peuvent être observées uniquement au moyen d'un outil tel que : une loupe, un microscope, etc. En génie électrique, on peut définir les phénomènes macroscopiques comme étant les phénomènes quantifiables par un instrument de mesure.

Les phénomènes tels que : courant, flux magnétique, température, couple, niveau de bruit, etc. seront ainsi qualifiés de grandeurs macroscopiques. Les phénomènes microscopiques sont eux trop locaux pour être mesurés. Pour illustrer cette dissemblance, on peut citer les phénomènes tels que : la non-homogénéité du courant dans les câbles dû à l'effet pelliculaire, les saturations locales dans les matériaux magnétiques, la magnétostriction, les points chauds, etc. Ils sont difficiles à prendre en compte dans le cadre d'une modélisation. Il nécessite de discrétiser la modélisation du système de façon très fine. Les modèles numériques permettent pour la plupart d'accéder à ce type d'informations, au prix de calculs plus complexes, plus lourds, plus longs. Les modèles par constantes localisées ou réparties permettent de s'approcher de l'échelle microscopique, suffisamment pour avoir la possibilité considérer certains phénomènes locaux (saturations locales, courants induits, etc.). La prise en compte de l'échelle microscopique pourra être prise en compte qu'à travers la discrétisation du réseau et de sa précision dépendra évidemment de la finesse de la granularité du système. Les modèles analytiques se basent essentiellement sur les phénomènes macroscopiques dans une approche systémique.

Cette perte d'informations permet aux modèles analytiques d'acquérir leurs avantages de rapidité, de simplicité, d'écriture explicite. On voit apparaître deux notions importantes : le choix du modèle et sa granularité.

## 1.5 Illustration

Commençons par un exemple simple issu de la science des matériaux. Les matériaux peuvent être décrits à différentes échelles d'espace. L'approche traditionnelle est celle du continuum, à

l'échelle macroscopique [41]. C'est le domaine de la mécanique : la déformation de la matière et les contraintes sont modélisées par des champs. Cependant, de nombreux phénomènes ne peuvent être décrits par une telle approche, qui devient discutable lorsqu'on cherche à prendre en compte des phénomènes très localisés. Illustrons ceci par deux exemples.

Un premier exemple est celui de la propagation de fractures dans des matériaux cristallins (comme les métaux). Dans certaines conditions, un métal peut être correctement modélisé par un ensemble de particules discrètes (les atomes) agencées de façon relativement ordonnée (sur un réseau périodique, pour simplifier). Cette approximation est raisonnable dès lors que le matériau est soumis à des sollicitations faibles. Elle est justifiée par le fait que les dimensions caractéristiques des déformations sont bien supérieures à l'échelle atomique, et permet de dériver un modèle macroscopique à partir de l'échelle microscopique. Cependant, il en va autrement lorsqu'on s'intéresse à la propagation de fractures. En effet, au niveau de la pointe de la fracture, des liaisons atomiques se cassent, et sur les lèvres de la fracture, le réseau atomique est fortement distordu. Dans ce cas particulier où la déformation subie par le matériau possède des dimensions caractéristiques proches des dimensions atomiques, une approche purement macroscopique ne décrira pas correctement les phénomènes que l'on désire modéliser.

Notre deuxième exemple (à une échelle complètement différente) est celui des matériaux granulaires, lorsqu'ils sont soumis à des chargements importants. C'est le cas du ballast des voies ferrées, soumis au poids d'un train : une approche fondée sur une description en terme de continuum donne des résultats très imprécis sur la déformation du matériau dans la zone d'application de la charge. Il est donc important de conserver, au moins sous le point d'application de la charge, une description en terme de granulats.

Dans les deux cas cités ci-dessus, une stratégie numérique possible consiste à utiliser une approche multi-échelle, ou deux modèles écrits à des échelles d'espaces différentes, l'un continu et l'autre discret, sont couplés. Cette approche est basée sur une décomposition de domaine : dans une zone critique, on décide de faire appel au modèle précis et coûteux (le modèle discret), tandis que dans le reste du domaine de calcul, on utilise le modèle grossier et efficace (le modèle de continuum).

Dans d'autres situations, l'identification même d'un modèle à l'échelle macroscopique n'est pas simple. C'est le cas par exemple de matériaux soumis à des conditions extrêmes de tem-

pérature et ou de pression. On s'attend à sortir complètement d'un régime de comportement linéaire, et il devient bien difficile de postuler (et de tester expérimentalement !) des lois de comportement à l'échelle macroscopique. Une idée consiste alors à utiliser le modèle à l'échelle microscopique pour calculer numériquement la loi de comportement macroscopique. Ceci peut être par exemple réalisé en s'appuyant sur des méthodes de mécanique et de physique statistiques : en utilisant le fait que le matériau est composé d'un très grand nombre de particules, on peut déduire des lois macroscopiques à partir du comportement microscopique.

## 1.6 Conclusion

De nombreux problèmes en physique, mécanique, sciences de l'ingénieur, . . . etc., font apparaître plusieurs échelles d'espace ou de temps. Le traitement numérique efficace de tels problèmes nécessite une approche spécifique.

Les simulations fonctionnelles utilisées à ce jour sont des moyens efficaces pour valider des systèmes dans des conditions (simulées) opérationnelles nominales mais sont souvent limitées dès lors que l'on souhaite valider dans des conditions dégradées. L'une des raisons est la difficulté à intégrer la modélisation des comportements physiques dans un contexte d'exécution de la simulation en temps réel.

## **Chapitre 2**

### Utilisation de la modélisation Multi-échelle en Physique. Applications

## Chapitre 2

# Utilisation de la modélisation Multi-échelle en Physique. Applications

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va passer en revue différentes stratégies destinées au calcul multi-échelles et utilisées dans des applications de la physique. Un grand nombre de méthodes reprennent la philosophie des techniques classiques d'homogénéisation tandis que d'autres radicalement différentes tentent d'améliorer les techniques de modélisation classiques pour qu'elles prennent en compte les effets à plusieurs échelles. Chacune des méthodes présentées est bien adaptée à une classe de problèmes. Celles qui se veulent plus généralistes souffrent souvent d'un coût de calcul élevé, partiellement compensé par leurs aptitudes au parallélisme. Des exemples appartenant à la très grande famille des problèmes issus de la physique au sens large tels que les matériaux, les fluides, la mécanique ...qui présentent pour leur modélisation et leur simulation cette difficulté essentielle de comporter en leur sein des échelles de temps ou d'espace très différentes seront présentés.



## 2.2 Modélisation multi-échelle appliquée aux matériaux

### 2.2.1 Présentation

Les recherches dans le domaine des matériaux requièrent de plus en plus d'études fines des propriétés structurales, dynamique et électroniques pour lesquelles une augmentation de la résolution spatiale, temporelle et énergétique est nécessaire. Un des défis actuels est de caractériser les matériaux sur une gamme d'échelles très étendue, du nanométrique au millimétrique, et dans des conditions proches du fonctionnement. L'étude des matériaux « réels » demeure un véritable défi. On passe de l'étude de systèmes modèles à des systèmes réels où plusieurs échelles entrent en jeu : atomique, défauts, taille du grain, etc. Les études in-situ offrent la possibilité d'étudier de manière fine l'influence de cette structuration multi-échelle sur les propriétés physiques pour un matériau en cours d'usage. Nous citerons ici trois exemples de cette modélisation prédictive des technologies dans trois cas mettent en jeu des échelles très différentes : les nanotechnologies, les matériaux à base cimentaire et le nucléaire.

Le terme « nano » est utilisé en référence à l'échelle du nanomètre, et plus largement pour les dimensions nettement submicroniques. Aux très petites échelles, de nouveaux phénomènes apparaissent (effets de taille, effets quantiques, etc.). Les nanotechnologies sont un moteur d'innovation transversal aux secteurs aéronautique, défense, électronique, ... Un des défis est de disposer d'outil permettant d'explorer la matière dans un volume centimétrique avec une résolution du nanomètre (multi-échelle). Dans [35], afin de déterminer des chemins réactionnels, les auteurs utilisent une technique de Monte Carlo Cinétique, pour la simulation, à l'échelle atomique, des systèmes de dimension assez grandes et sur des durées d'expérience plus longues d'une part et font appel d'autre part à des modélisations mésoscopiques (fondées sur les équations de la Cinétique Chimique passant de l'échelle atomique vers des grandeurs physiques continues, ou introduisant la mécanique des fluides à l'échelle du réacteur). De telles approches multi-échelles ouvrent quatre champs d'application : les matériaux de l'industrie microélectronique, les interfaces organique/inorganique pour la fonctionnalisation des surfaces en microfluidiques, les molécules biologiques pour l'étude de leurs propriétés de flexibilité et de repliements et les matériaux énergétiques nanostructurés.

### **2.2.2 Exemple concernant les matériaux à base cimentaire**

à l'échelle macroscopique, il est évidemment complexe et les modèles phénoménologiques mis sur pied de plus en plus spécifiques et délicats à identifier. Cette complexité croissante des modèles macroscopiques conduit donc à se poser la question du choix des échelles. Pour les matériaux cimentaires, comme pour de nombreux autres, il apparaît clairement que les phénomènes de dégradation ou les évolutions mécaniques comme par exemple la fissuration et le fluage observés à l'échelle de la structure, trouvent leur origine à de petites (voire très petites) échelles. Ainsi la question de l'identification et de la modélisation des mécanismes locaux de dégradation les plus essentiels est cruciale pour comprendre et construire, à l'échelle plus grande, des modèles prédictifs et robustes. La modélisation multi-échelles prend alors tout son sens, aussi bien dans cette étape de compréhension et de sélection des phénomènes pertinents que dans le transfert d'informations des petites échelles vers les plus grandes.

Pour les matériaux cimentaires, de nombreux phénomènes prennent naissance à des échelles très fines-micro voire nanométriques, une autre démarche prend en compte une échelle intermédiaire, que nous nommerons mesoscopique. A cette échelle les matériaux cimentaires comme le béton sont déjà clairement hétérogènes. La prise en compte explicite de cette hétérogénéité constitue à la fois une difficulté pour le modélisateur et l'opportunité de pouvoir représenter des mécanismes de dégradation clairement établis, dans chacune des phases ou bien aux différentes interfaces. Ces dernières ayant un rôle important dans les phénomènes observés, les avantages d'une approche non homogénéisée sont donc clairs. Donc la clé de la compréhension de la structure, des mécanismes de formation et des propriétés des matériaux à des échelles différentes réside en une description de la structure dont le niveau de précision dépend du problème abordé.

### **2.2.3 Etude des matériaux nucléaires**

L'utilisation des approches multi-échelle est devenue un fort enjeu. Si l'on veut par exemple comprendre et maîtriser les phénomènes et comportements à l'échelle macroscopique de ces matériaux, voire prédire l'évolution de leurs propriétés, il est nécessaire de partir de données à l'échelle microscopique et de remonter des informations à l'échelle mésoscopique puis macroscopique. Une étude à l'échelle atomique permet non seulement d'identifier les mécanismes

prépondérants à considérer à l'échelle supérieure, mais également d'alimenter les modèles en paramètres très difficiles à obtenir expérimentalement.

D'une manière plus générale, modéliser et expliquer le vieillissement est une étape compliquée du point de vue technologique, pour une grande variété de matériau et pas seulement ceux du nucléaire. Deux exemples peuvent l'illustrer. Le premier est celui des analyses multi-échelles développées pour analyser les effets du vieillissement sur la tenue mécanique des composites à matrice organique (e.g. à fibre de carbone et résine époxy) utilisés dans des applications aéronautiques à longue durée de vie. Le second concerne les matériaux cimentaires, dont une vertu essentielle est la durabilité, et dont la microstructure présente par nature un caractère multi-échelle. Maîtriser l'évolution temporelle de cette microstructure et la façon dont elle est corrélée aux performances mécaniques nécessite donc la mise en œuvre de modélisations multi-échelles.

Ainsi, la modélisation multi-échelle a pour objectif de formuler des modèles pertinents pour décrire cette interaction entre échelle atomique, micro ou nanostructure et comportement macroscopique, et d'étudier ces modèles de manière numérique. Elle joue un rôle fondamentale voire économique car si la prédiction est suffisamment fiable elle permettra d'éviter un grand nombre d'expériences ou de compenser l'impossibilité de certaines expériences comme c'est le cas dans le nucléaire.

## **2.3 Modélisation multi-échelle appliquée aux écoulements fluide/particules**

Les écoulements fluide-particules peuvent être étudiés et modélisés en se plaçant à différentes échelles spatiales, à savoir micro, méso et macro. Nous présentons dans cette partie ces trois principales échelles de longueur communément employées pour décrire les systèmes diphasiques. Puis nous présentons un exemple d'un modèle pour les écoulements fluide-particules denses à une échelle de longueur intermédiaire entre (i) une résolution fine de l'écoulement autour de chaque élément de la phase solide et (ii) une résolution moyennée spatialement des phases solide et fluide, Ce type de modèle utilise une description lagrangienne de la phase solide et une description eulérienne localement moyennée du fluide, ces modèles sont de ce fait fréquemment

qualifiés de “Euler-Lagrange”, “micro-macro” ou méso, la description lagrangienne est l’une des deux techniques qui permettent de caractériser un écoulement. Elle consiste à suivre dans le temps les particules fluides le long de leurs trajectoires : c’est une description intuitive de leur mouvement. Néanmoins la description eulérienne qui repose sur le champ des vitesses est souvent préférée.

Les figures I et II illustrent le changement d’échelle qui est opéré lors de l’utilisation des différents modèles.

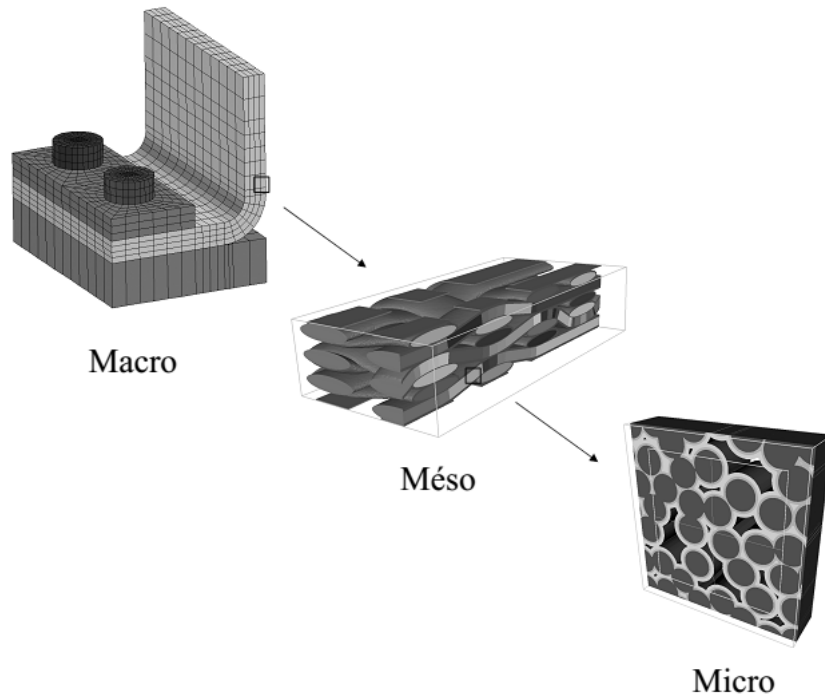


Figure 1. Schémas représentatif de multi-échelles.

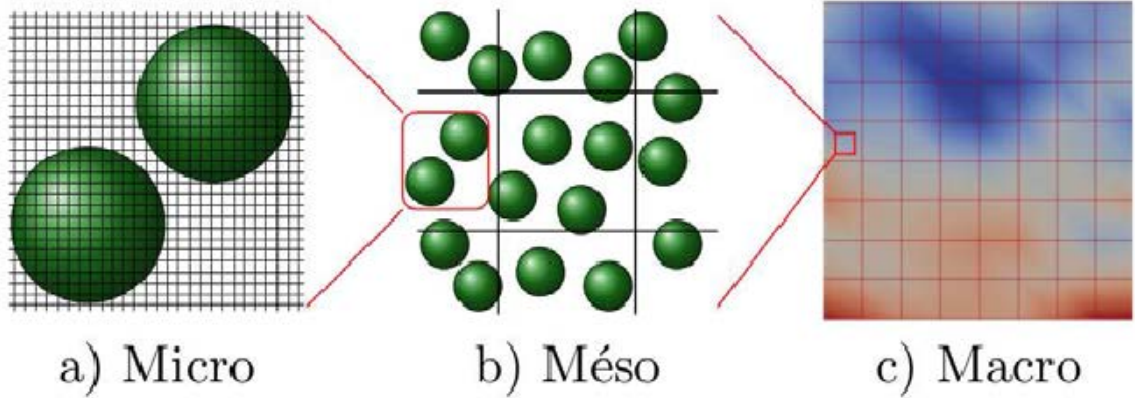


Figure 2 . Echelles de modélisation : (a) échelle microscopique, (b) échelle mésoscopique (V.E.R.), (c) échelle macroscopique .

à la plus petite échelle « **Echelle Micro** », Les systèmes fluide-particules peuvent être décrits en résolvant directement les équations de Navier Stokes pour le fluide tandis que la trajectoire des particules est calculée individuellement. Le jeu d'équations de Navier-Stokes régissant la phase fluide est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \ell_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\ell_f u_f) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f \ell_f u_f) + \nabla \cdot (\rho_f \ell_f u_f \otimes u_f) = \nabla \cdot \sigma_f - F_{pf} + \ell_f \rho_f g \end{array} \right.$$

Où  $F_{pf}$  représente l'action des particules sur le fluide. Les trajectoires des particules sont quant à elles décrites individuellement à l'aide de la seconde loi de Newton, c'est à dire le principe fondamental de la dynamique.

Pour mettre en place ce type de méthode où l'écoulement est résolu de façon précise autour de chaque particule, il est possible d'effectuer des simulations numériques directes de suivi d'interfaces. Ces simulations permettent d'obtenir des informations locales très précises sur la structure de l'écoulement et l'interaction entre les phases. En contrepartie, ces méthodes nécessitent des maillages très raffinés, donc des temps de calcul importants, ce qui limite fortement le domaine de simulations.

Afin de s’affranchir des contraintes engendrées par l’utilisation de maillages adaptatifs, à savoir le temps passé remailler l’espace occupé par le fluide lorsque les particules se sont déplacées, de nouvelles méthodes utilisant un maillage fixe ont été introduites. Les méthodes à maillage fixe sont également appelées méthodes de domaine fictif car elles sont basées sur l’utilisation d’un maillage occupant tout le domaine, y compris celui occupé par les particules. La vitesse du fluide calculée aux noeuds recouverts par les particules est alors totalement fictive ou égale à la vitesse des particules selon la méthode employée.

Le coeur de ces méthodes est de faire en sorte que le fluide “voit” les particules, et que les quantités de mouvement s’échangent entre les phases fluide et solide. Parmi les différentes techniques utilisées pour contraindre la vitesse du fluide aux noeuds concernés, citons par exemple Les méthodes de frontières immergées (en anglais “Immersed Boundary Method (IBM)”), qui furent initialement proposées par Peskin [45],[46] pour modéliser les écoulements sanguins dans des coeurs humains. Les méthodes de multiplicateurs de Lagrange distribués (en anglais “Distributed Lagrange Multiplier/Fictitious Domain (DLM-FD)”). Cette approche fut introduite par Glowinski et al. [31],[32],[33] pour des objets indéformables et fut ensuite étendue aux solides déformables par Yu [34]. Elle consiste à imposer la condition de corps rigide au sein de la particule en imposant la condition d’égalité des vitesses fluide et solide à l’aide de multiplicateurs de Lagrange; pour plus de détails sur ces techniques voir [these].

### **Echelle macroscopique (Modèles Euler-Euler)**

La simulation numérique des écoulements fluide-particules peut également être basée sur une approche purement eulérienne des phases. Elle est considérée comme continues et s’interpénétrant entièrement. Pour chacune des phases; les équations de continuité et de quantité de mouvement s’écrivent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\ell_1 \rho_1) + \nabla \cdot (\ell_1 \rho_1 u_1) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\ell_1 \rho_1 u_1) + \nabla \cdot (\ell_1 \rho_1 u_1 u_1) = -\ell_1 \nabla P_T + \ell_1 \rho_1 g + \nabla \tau_1 + T_1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\ell_2 \rho_2) + \nabla \cdot (\ell_2 \rho_2 u_2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\ell_2 \rho_2 u_2) + \nabla \cdot (\ell_2 \rho_2 u_2 u_2) = -\ell_2 \nabla P_T + \ell_2 \rho_2 g + \nabla \tau_2 + T_2 \end{array} \right.$$

où  $\rho_k(t, x) \geq 0$  est la densité de la phase  $k$ ,  $k \in \{1, 2\}$ , dont le champ de vitesse est  $u_k(t, x) \in R^n$ , D'autre part,  $\tau_k$  et  $0 \leq \ell_k(t, x) \leq 1$  sont le tenseur des contraintes effectives et la fraction volumique de la phase  $k$ , respectivement.  $T_k$  représente l'échange de quantité de mouvement entre les deux phases diminué de la contribution de la pression moyenne du fluide. Cette approche permet de modéliser des systèmes aux dimensions bien plus étendues que l'approche DNS (Direct Numerical Simulation). Ce type de modèle est très utilisé dans des codes de calcul industriels. En revanche, l'utilisation d'une grille fluide large ainsi que l'assimilation du solide à une phase continue impliquent une perte d'information sur le comportement des particules et du fluide. Pour y remédier, il est nécessaire de mettre en oeuvre des modèles de fermeture dans le cas d'écoulements turbulents ainsi que des lois de comportement modélisant le comportement et l'action de la phase solide dans le cas d'écoulements fluide-particules

### **Echelle mésoscopique (Modèles Euler-Lagrange)**

Les modèles d'Euler-Lagrange consiste à décrire la phase continue (liquide ou gazeuse) de façon eulérienne et à assurer un suivi lagrangien des particules, l'écoulement du fluide est modélisé en générale par deux équations : une équation de conservation de la masse et une équation de bilan de quantité de mouvement qui tiennent compte la fraction volumique du fluide. Dans [Gidaspow], l'auteur présente un exemple de modèle à deux fluides (Two Fluid Model (TFM)), où l'effet des particules sur le fluide est considéré comme un terme source dans l'équation de quantité de mouvement tandis que l'action du fluide sur les particules est modélisé par une force hydrodynamique. A l'inverse de l'approche DNS, le diamètre des particules est plus petit que la taille des cellules du maillage fluide (voir figure II-(b)).

## **2.4 Modélisation multi-échelles appliquée en mécanique**

Les problèmes de la mécanique introduisent des entités aux échelles très diverses telles que : atome, molécule, grain, inclusion, fibre, outil et pièce. Pour une majorité de problèmes une analyse considérant un comportement moyenné sur l'ensemble du système isolé à l'échelle du système est suffisante. Cependant, certains problèmes soulevés par les avancées dans la technologie de l'élaboration des matériaux, ou bien de façon plus classique dans le domaine des procédés de fabrication, nécessitent une analyse plus fine avec une prise en compte du couplage

fort entre le comportement des entités à l'échelle inférieure et la réponse globale du système.

La première étape dans la modélisation multi-échelles est d'identifier les propriétés du problème posé, à partir desquelles on pourrait tirer profit pour concevoir des stratégies adaptées. Ainsi, il est utile de trouver une classification des problèmes introduisant la notion de multi-échelles selon leurs propriétés communes. On rencontre dans la littérature la classification suivante :

**Problèmes de type A** : Ce sont les problèmes qui contiennent des défauts ou des singularités isolées tels que des fissures, dislocations, chocs ou lignes de contact. Pour ces problèmes, un modèle macroscopique adéquat est suffisant dans la majeure partie du domaine, le modèle microscopique est seulement nécessaire dans le voisinage des défauts ou des singularités.

**Problèmes de type B** : Ce sont les problèmes pour lesquels un modèle macroscopique approprié existe pour un ensemble de variables macroscopiques correctement choisis, mais ce modèle macroscopique n'est pas assez explicite pour être directement employé de façon efficace. Un exemple est le problème d'homogénéisation pour des équations du type : (un problème de conduction thermique par exemple).

**Problèmes de type C** : Ce sont les problèmes qui ont des propriétés du type A et du type B.

#### 2.4.1 Calcul sur plusieurs grilles et homogénéisation

Une première catégorie de méthodes est dédiée à l'étude de structures constituées de matériaux composites fortement hétérogènes. Pour ces méthodes, typiquement deux échelles sont considérées : celle macroscopique de la structure, et celle microscopique des détails du matériau. Ces approches proposent de représenter ces échelles par plusieurs grilles éléments finis indépendantes, et de les coupler 'à l'aide d'un opérateur permettant le transfert des informations d'une grille à l'autre. Pour construire cet opérateur, ces méthodes reprennent, sous diverses formes, les principes de l'homogénéisation.

#### Approches analytiques basées sur la théorie de l'homogénéisation 2

Les approches analytiques sont historiquement les plus anciennes, les formulations utilisées considèrent un comportement élastique linéaire. L'extension des formulations au domaine non



linéaire n'est pas triviale et reste un domaine ouvert à la recherche. Globalement les approches analytiques de la théorie de l'homogénéisation se divisent en deux grandes familles :

### **Théorie du champ moyen**

Cette approche s'applique aux milieux hétérogènes aléatoires, on trouve une bonne présentation et un état de l'art récent dans [4]. Cette approche s'appuie sur 3 étapes majeures : Représentation, Localisation, Homogénéisation.

Représentation :

Travailler sur des milieux hétérogènes impose d'avoir une représentation d'une certaine forme de base de ces derniers, on définit alors un volume d'homogénéisation, le VER ou Volume Élémentaire Représentatif. Dans le cas idéal, le VER devrait être choisi pour être un volume élémentaire approprié, c'est un volume secondaire statistiquement représentatif de la géométrie microscopique du matériau.

Localisation :

Le fait que le VER soit une image statistique et incomplète de la microstructure considérée nous interdit d'affecter à coup sûr des caractéristiques mécaniques précises à tout point du VER, de ce fait la détermination des champs locaux n'a pas de solution unique. De plus le problème est mal posé dans le sens où on doit résoudre un problème de structure sans véritables conditions aux limites, on a la place des conditions de moyenne sur les variables locales.

Homogénéisation :

Cette étape vise à trouver l'expression du comportement du milieu homogène équivalent. Ceci s'effectue en exprimant, grâce à la loi de comportement locale et aux conditions aux limites homogènes sur le contour, les champs localisés fonction de la variable microscopique  $x$ .

### **Approche asymptotique**

L'approche asymptotique consiste essentiellement en l'étude de l'influence de petits paramètres sur la solution du problème global. Dans ce type d'approche on fait l'hypothèse que le milieu est parfaitement périodique et que les échelles sont infiniment séparées. Ceci se traduit en pratique par des coefficients caractéristiques du matériau (conduction thermique, tenseur d'élasticité, ...).

## **Méthode EF**

La méthode EF a été proposée pour la simulation du comportement mécanique de structures faites-en des matériaux composites fibreux périodiques. La difficulté du calcul provient de la prise en compte du phénomène non linéaire de décohésion entre les fibres et la matrice, qui à la fois, exige la connaissance de la distribution des efforts à l'échelle du matériau et influence notablement le comportement macroscopique de la solution. Étant donnée cette dualité, les auteurs choisissent de mener les simulations simultanément à l'échelle globale de la structure et à l'échelle fine du matériau.

Pour ce faire, l'idée consiste à définir la relation non linéaire du comportement macroscopique du matériau, non pas à l'aide d'équations choisies a priori et homogénéisées, mais à partir de calculs 'éléments finis réalisés directement au niveau de la microstructure. Pour passer d'une échelle à l'autre, les auteurs s'inspirent de la méthodologie de l'homogénéisation, et associent à chacun des points servant à l'intégration du travail virtuel des efforts internes, une grille éléments finis maillant le motif de périodicité du matériau.

## **Méthode multi grille pour des milieux hétérogènes périodiques**

La méthode multi grille correspond à une stratégie de calcul itératif particulièrement efficace, propose initialement pour la résolution de problèmes elliptiques linéaires discrétisés sur des grilles régulières raffinées . Cette approche s'appuie sur les méthodes itératives de relaxation et part du constat que ces dernières captent rapidement les composantes hautes fréquences de la solution et peinent à obtenir les autres.

L'idée consiste alors à transporter le calcul sur une hiérarchie de grilles plus grossières que celle initiale, et à y saisir rapidement, via les méthodes de relaxation, toutes les composantes fréquentielles de la solution discrète. Le transport d'une grille à l'autre se fait par des opérateurs de restriction et de prolongement, qui sont transposés l'un par rapport à l'autre, et qui correspondent classiquement à des interpolations linéaires. En outre, les itérations du calcul s'organisent suivant des cycles (en  $V$ , en  $W$  ...) qui alternent le passage entre les grilles fines et

grossières.

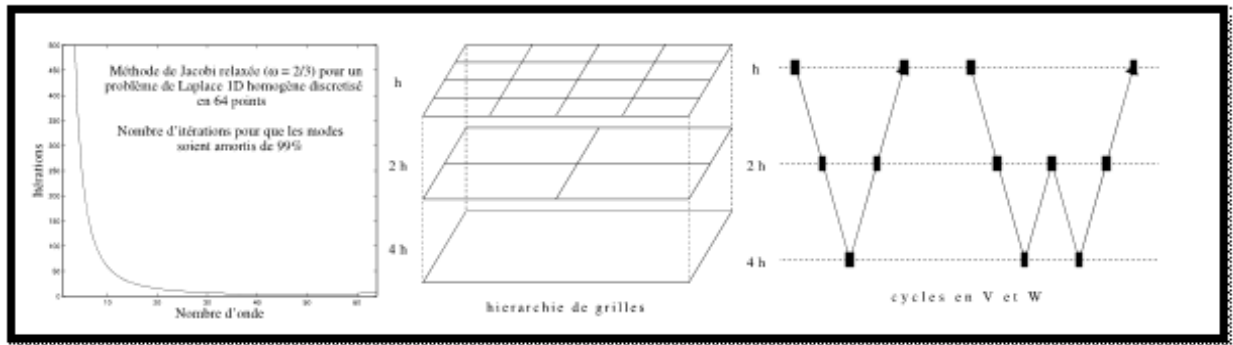
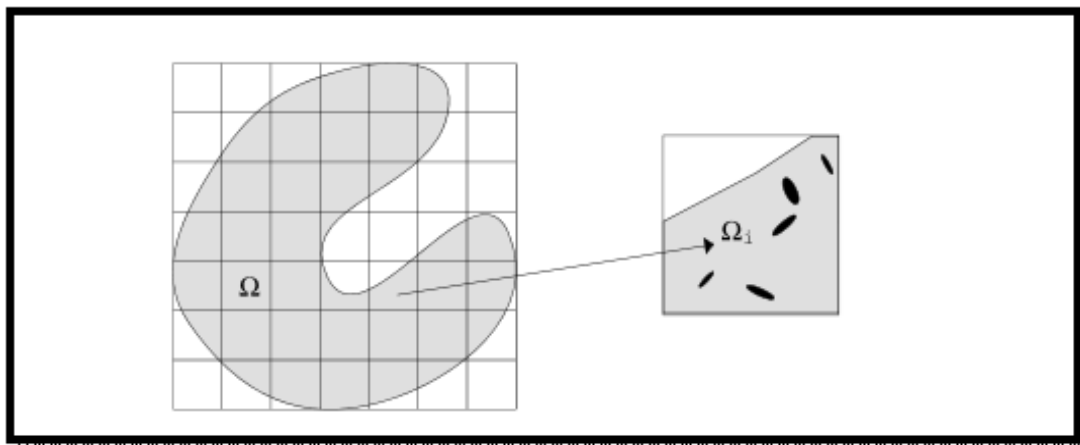


Figure 3 : Méthode multi grille [3] .

### Méthode de projection de Dirichlet hiérarchique

La méthode de projection de Dirichlet hiérarchique a été proposée pour calculer la réponse, en élasticité linéaire, de pièces mécaniques constituées de matériaux fortement hétérogènes. Cette méthode considère deux échelles de calcul. La première, macroscopique, correspond à un modèle homogénéisé du matériau et à un maillage éléments finis relativement grossier de la structure. La seconde, microscopique, est obtenue en décomposant le domaine d'étude  $\Omega$  suivant une grille régulière. Les différentes cellules ainsi formées sont notées  $(\Omega_i)$ , et des maillages éléments finis, raffinés et indépendants permettent d'y reproduire les détails et le comportement hétérogène du matériau (Figure 4).



## 2.5 Modélisation multi-échelle relative aux effets nanoscopiques et relation nanostructure-propriétés

Aujourd'hui l'avenir et l'applicabilité de tous les matériaux, a fortiori de structure, passent par l'aptitude du concepteur à prédire la tenue mécanique des pièces et donc le comportement du matériau lui-même. Les nanocomposites n'échappent pas à ce besoin et, de plus, représentent un champ de développement très attractif du point de vue scientifique. Ces matériaux offrent en effet un champ d'application tentant pour les modélisations multi-échelles et méthodes d'homogénéisation par champs moyens et par champs locaux. Pour autant, ils placent le modélisateur aux limites de l'application de la mécanique des milieux continus de même qu'aux limites de la connaissance des matériaux.

En effet, bien que les approches standard d'homogénéisation aient démontré de grandes capacités prédictives pour des propriétés et comportements variés de matériaux composites classiques, elles ne sont pas en mesure de prédire les effets de taille de renforts qui caractérisent les nanocomposites. Les propriétés spectaculaires qu'exhibent ces derniers sont généralement attribuées au rapport surface/volume, ou plus exactement à l'énergie de surface et aux contraintes interfaciales qui deviennent prédominantes du fait de la très petite taille des particules. Quelques tentatives récentes non encore entièrement abouties et visant à rendre compte de ces effets de taille, ont consisté à étendre le cadre des méthodes de transition d'échelle au contexte des nanocomposites, en considérant des énergies de surface à l'interface matrice-renforts. À titre d'exemple, dans le cas des propriétés élastiques, la démarche suivie par de nombreux auteurs est de proposer une modélisation par technique d'homogénéisation dans laquelle on a recours pour l'interface imparfaite cohérente à la théorie de l'élasticité surfacique de Gurtin-Murdoch (1975) . Les résultats de ces travaux incluent aussi bien des estimations que des bornes de propriétés macroscopiques. Malgré ce succès relatif, tous ces nouveaux développements sont de manière générale limités à des nanoparticules sphériques, laissant ainsi de côté les cas de nanoplaquettes ou de nanorenforts fibreux.

Au-delà des difficultés théoriques, la validation expérimentale des modèles reste aussi un

sujet de questionnement. L'état de distribution et de dispersion des nanocharges n'est pas simple à contrôler et le plus souvent les techniques traditionnelles de transformation conduisent irrémédiablement à des éprouvettes non uniformes. L'expérimentateur est donc lui-même face à un défi : comment offrir au modélisateur des données issues d'éprouvettes et/ou de modes de chargements susceptibles d'autoriser une validation sans ambiguïté.

En amont de la validation se pose la question de l'identification des paramètres constitutifs dont certains doivent rendre compte de phénomènes se déroulant à de très petites échelles, notamment dans les zones interfaciales . Un effort coordonné des théoriciens, des expérimentateurs et des physico-chimistes semblent donc nécessaire pour une meilleure compréhension et un développement significatif de la modélisation du comportement mécanique des nanocomposites.

## 2.6 Conclusion

Dans tout ce qui a été présenté dans ce chapitre, il ressort que la modélisation multi-échelle a pris beaucoup de place dans la prise en charge de phénomènes complexes permettant ainsi l'intégration de diverses informations concernant les systèmes étudiés . Qu'il s'agisse de physique ( matériaux, fluides, ), mathématique , mécanique..., elle a permis le couplage de divers domaines. Dans la physique des réacteurs par exemple, on couple la mécanique des structures, la neutronique et la thermo-hydraulique.

Dans le chapitre suivant, d'autres applications issues d'autres domaines tout aussi importants que la biologie seront présentés comme une autre application de la modélisation multi-échelle.

# Chapitre 3

## Autres Applications

## Chapitre 3

# Autres Applications

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter une clarification de la modélisation multi-échelle en relation avec la physique.

Elle sera suivi par des exemples des modèles multi-échelles en biologie, la première application est une étude dans laquelle nous avons étudié un modèle de pêche avec une zone protégée, la question était de savoir qu'elle est la taille optimale de la zone protégée qui maximise les captures tout en évitant la disparition des espèces, dans ce travail, nous avons démontré par modélisation mathématique qu'il existe une taille optimale de la zone protégée qui maximise les captures à l'équilibre.

La deuxième application est une étude dans laquelle nous avons démontré qu'il existe une relation entre la taille et le nombre des réserves (zones protégées) qui maximise les captures à l'équilibre. les modèles présentés dans ces deux exemples sont des modèles à multi-échelles dans lesquels nous avons utilisé pour simplifier l'étude une méthode de réduction des variables qui s'appelle la méthode d'agrégation de variables (voir Appendice), cette méthode permet de réduire la dimension d'un système multi-échelle qui contient un grand nombre de variables d'état et de paramètres à un système de dimension réduit, l'analyse du modèle réduit est plus simple et permet d'avoir des informations sur le comportement du modèle complet à partir de celui du modèle réduit.

## **3.2 Partie réservée à clarifier l'utilité de la Modélisation Multi Echelle en relation avec la Physique**

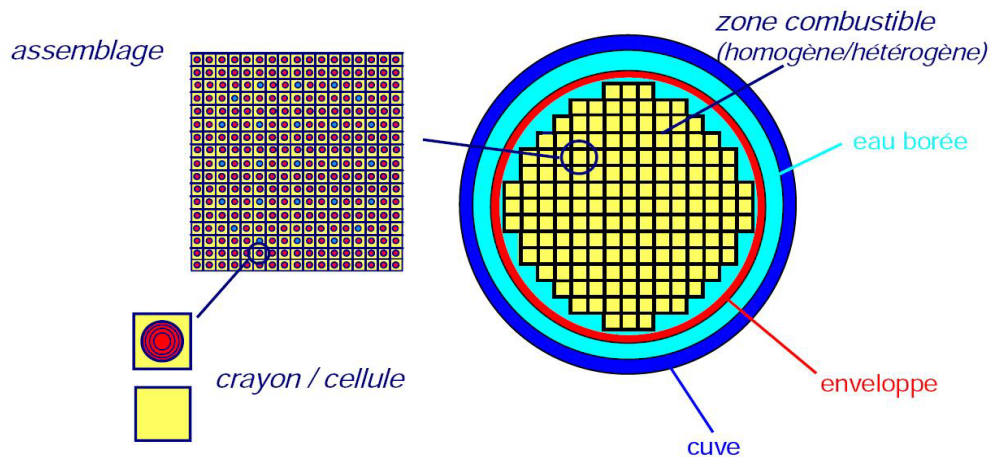
Afin de structurer davantage les différents types de modèles , il faut encore distinguer entre les modèles descriptifs et les modèles explicatifs d'une part et les modèles basés sur des mesures ou sur des entités d'autre part. Les modèles descriptifs ont pour vocation de saisir un invariant observé d'un système, par exemple la trajectoire d'une planète ou l'évolution d'une population. Il n'est alors pas nécessaire de savoir pourquoi il y a cette trajectoire ou cette évolution mais seulement comment. Les modèles explicatifs ont pour vocation de rendre compte d'un mécanisme ou processus génératif dont le résultat peut être entre, entre autres, une trajectoire ou une évolution déterminée si tant est que les conditions initiales et les valeurs des paramètres du modèle produise effectivement un tel invariant. On citera, par exemple, le jeu des forces gravifiques pour la trajectoire d'une planète ou les comportements de reproduction pour l'évolution d'une population. Dans les modèles basés sur les mesures, l'état s'exprime comme un ensemble de variables représentant des grandeurs mesurables du système que l'on modélise (position, nombre d'individus dans une population). Dans les modèles basés sur les entités, l'état s'exprime comme un ensemble structuré, éventuellement variable, d'objets dont non seulement les états mais aussi les relations et le nombre peuvent changer au cours du temps. Le schéma synoptique de la modélisation est universel , valable pour tous les domaines !

La multidisciplinarité a permis de faire un pas important dans la modélisation multi - échelle .De plus, il est nécessaire que ces développements s'adaptent aux nouvelles architectures informatiques. Le calcul parallèle, ou l'on découple la charge de calcul sur plusieurs processeurs ou ordinateurs, en est le meilleur exemple.

### **3.2.1 Cas de la neutronique**

Afin de modéliser le comportement neutronique du cœur, on introduit la notion de flux de neutrons et voir les équations qui régissent ce flux. Nous traitons mathématiquement ses variables et on étudie plus précisément le modèle de la diffusion qui nous intéresse. Comme le montre le schéma ci dessous, l'utilisation des méthodes multi-échelles est nécessaire pour la résolution. Le flux neutronique est modélisé comme population de neutrons, ces travaux ont fait l'objet d'une





thèse de Doctorat "Méthode multi-échelle pour la résolution des équations de la cinétique neutronique" Steve Chauvet.

Dans le cœur, une couche de réflecteur ou enveloppe est disposée à la périphérie radiale et aux extrémités axiales. Son but est de renvoyer les neutrons à l'intérieur du cœur de façon à diminuer les fuites vers l'extérieur de la géométrie. Ce réflecteur représente donc une certaine économie de neutrons. La figure ci dessus représente la **Géométrie radiale multi- échelle d'un cœur d'un réacteur.**

On a défini une décomposition du flux multi-échelle, quasi-statique et mixte. De la factorisation, nous avons déduit deux problèmes symétriques sur des échelles distinctes et opposées. Nous avons étudié les propriétés de ces deux problèmes et avons posé les bases théoriques de leur traitement numérique. Chacun a en effet une stratégie de résolution très différente.

### 3.2.2 Cas des polymères

Les simulations moléculaires et les simulations macroscopiques laissent ainsi une zone libre, conséquence des limitations de chaque méthode. Les systèmes à la fois trop grand et dont la complexité interne échappe aux simulations macroscopiques, sont alors étudiés à l'aide de méthodes mésoscopiques. À cette échelle intermédiaire, la Dynamique des Particules Dissipatives (DPD) constitue une bonne alternative pour simuler des systèmes comportant un grand

nombre de particules sur des temps de l'ordre de la microseconde. Cette approche présente néanmoins le défaut de faire abstraction de toute « réalité chimique » dans son formalisme originel. Des questions se posent comme la possibilité de différencier deux familles de polymères de structures microscopiques proches ou encore la capacité qu'ont ces méthodes à reproduire correctement le comportement de systèmes polymères complexes. Un compromis apparaît entre taille du système, temps simulé et précision de la méthode. Compte tenu des moyens de calcul actuels, l'étude complète d'un matériau polymère n'est pas envisageable en se limitant à une seule description de la matière. **Le développement d'une stratégie multi-échelle et/ou multi-technique est donc indispensable. L'intérêt d'une telle approche est de réduire le nombre de degrés de liberté du système, tout en conservant les informations obtenues aux échelles inférieures** [Thèse de Doctorat "Simulations multi-echelles de matériaux polymères" Gaetan Maurel ]

Contrairement aux méthodes mésoscopiques classiques, cela permet le maintien de la spécificité chimique apportée par la structure moléculaire de chaque espèce. Pour cela, les données obtenues par une simulation détaillée, de type DM, sont utilisées comme paramètres d'entrée d'une simulation utilisant un niveau de théorie plus grossier, la DPD.

**L'approche multi-échelle a été mise à l'épreuve en modifiant différents paramètres de simulation.** Les potentiels mésoscopiques sont dépendants des conditions dans lesquelles leur développement a été effectué . **La démarche multi-échelle ayant été validée par la détermination de diverses propriétés statiques et dynamiques,** la méthode est ensuite utilisée pour l'étude des propriétés mécaniques des fondus. Ces propriétés sont particulièrement intéressantes dans le cadre de polymères formant un réseau.

### **3.2.3 Informations en relation avec la physique dans le cas de nos exemples en halieutique**

Dans les exemples présentés en Halieutique, il y a lieu de noter l'utilisation de la notion de systèmes dynamiques, qui utilise la notion d'état du système. Ce sont des modèles explicatifs qui ont pour vocation de rendre compte d'un mécanisme ou processus génératif dont le résultat peut être entre autres, une trajectoire ou une évolution déterminée si tant est que les conditions initiales et les valeurs des paramètres du modèle produise effectivement un tel invariant

Quand on parle de mouvement lent ou rapide, de taille , d'échelle de temps, de stock, d'effort, d'équation logistique..., on est en train de faire de la physique car toutes les équations qui caractérisent nos systèmes sont déduits à partir de l'application des Lois de la Physique. Qu'est ce que l'équation logistique ? Que les équations sont Lotka-Volterra? Ce sont souvent des relations reliées aux équations de Réaction-Diffusion.

### Paramètres utilisés dans les exemples en relation avec l'halieutique.

Il y a lieu de préciser que les paramètres utilisés pour définir un état dans le cas des exemples présentés ici , sont:

**Population:** ici, c'est le poisson. Mais, cela peut être **des neutrons, des électrons, .....**

**Biomasse:** Le terme de biomasse regroupe l'ensemble des matières organiques d'origine végétale ou animale pouvant devenir des sources **d'énergie**

**Taille des poissons:** est reliée à une notion de **longueur**

**Stock :** ( Optimal) il s'agit de la population ou de **[la masse totale]** d'une communauté de poisson. Ces stocks sont généralement identifiés en fonction de leur localisation.

**Reserves:** une réserve désigne une **quantité** (le contenu ou par extension le contenant) mis de côté à titre de sécurité,

**Effort de pêche:** ( optimal) **Mesure de l'intensité** de la pêche. La façon de définir l'effort dépend du type de pêcherie (engin), et souvent du type d'information disponible.

Toutes ces variables physiques sont utilisées par un système dynamique ( équations différentielles) pour rendre compte de l'évolution de l'état de celui ci en interaction avec tout ses paramètres.

### Le premier exemple, Explications

Cet exemple met en évidence la contribution potentielle des **réserves** marines protégées à l'amélioration de la pêche à travers le développement d'un modèle **stock-effort**. L'objectif est d'examiner les effets de la **taille** des réserves marines sur le **stock** de poissons et les **captures** à le long terme.

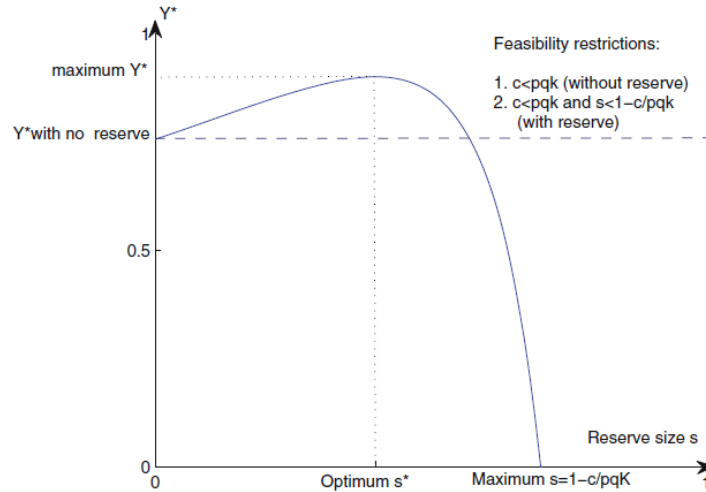
$$\frac{dn}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{K}\right) - QnE$$

$$\frac{dE}{dt} = (-c + pQn) E$$

où  $n(t) = n_1(t) + n_2(t)$  est la **population totale** de poissons, et  $Q$  (paramètre global de capturabilité) est donnée par  $Q = q(1 - s)$

Le système (7) est équivalent au modèle pré-réserve, sauf que la proportion constante  $s$  apparaît dans les équations via le paramètre  $Q$ . Une application directe des résultats obtenus pour le modèle pré-réserve entraîne donc les résultats suivants : Le modèle agrégé a un équilibre non trivial;  $(n^*, E^*)$  tels que

$$\begin{cases} n^* = \frac{c}{pQ} = \frac{c}{pq(1-s)} \\ E^* = \frac{r}{Q} \left(1 - \frac{c}{pQK}\right) = \frac{r}{q(1-s)} \left(1 - \frac{c}{pq(1-s)K}\right) \end{cases}$$



La Figure montre la relation entre la récolte et la **taille** de réserve en utilisant le système réduit. Les capture augmente avec la **taille** de l'AMP pour atteindre

$$1, q = 0,5, K = 4,$$

**Taille optimale d'une réserve marine** L'objectif de cette partie est de déterminer la **taille optimale** de la zone de réserve qui **maximise** la valeur de la pêche à l'équilibre, la taille de réserve est une variable de contrôle supplémentaire. Le système ci-dessus (7) est étudié uniquement en équilibre écologique. La capture par unité de temps à l'équilibre est donnée par

$$Y^* = rn^* \left( 1 - \frac{n^*}{K} \right) = \frac{rc}{pq(1-s)} \left( 1 - \frac{c}{pq(1-s)K} \right) \quad (11)$$

Nous cherchons la taille  $s$  de la réserve marine qui maximise la capture à l'équilibre, l'équation. (11) donne la récolte ayant lieu dans la zone non-protégée en fonction de la taille de la zone protégée. Pour trouver la taille optimale, en gardant tous les paramètres constants, sauf  $s$ , la valeur optimale pour le paramètre  $s$  qui maximise les rendements  $Y^*$  est donnée par

$$s^* = 1 - \frac{2c}{pqK} \quad (12)$$

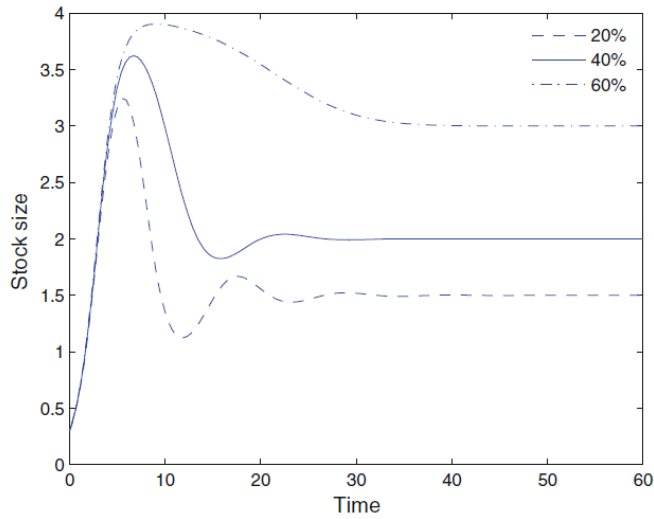
la dérivée seconde de  $Y^*$  par rapport à  $s$  est négative autour  $s^*$

$$\frac{d^2Y^*}{ds^2} = \frac{2rc}{pq(1-s)^3} \left( 1 - \frac{3c}{pqK(1-s)} \right) < 0$$

Ainsi,  $s^*$  satisfait la condition de second ordre et maximise  $Y^*$ :

La taille optimale de réserve  $s$  tel que calculé dans l'équation. (12) est évidemment inférieur à  $s_{max}$ . En d'autres termes,  $s$  est économiquement réalisable (fig. 2). Nous pouvons également noter que pour  $s = s^*$ , nous avons  $n^* = K/2$  et  $Y^* = rK/4$ :

Notez que la taille qui maximise le rendement à l'équilibre augmente avec le prix, mais diminue avec le coût de l'effort de pêche.



La réponse de la capture à l'équilibre à différentes tailles d'AMP a été simulée à l'aide de l'équation (11) ( Voir détaillée à la suite). La figure 2 montre la relation entre les niveaux d'équilibre de capture, zone de réserve et de la capture: Les formes des courbes permettent de conclure que la capture avec la réserve peut dépasser les captures dans le cas sans réserve. Sur la partie gauche de la courbe, les rendements augmentent avec la taille de la réserve.

### 3.3 Interpretation

Dans cette première partie , la question était de savoir qu'elle est la taille optimale de la zone protégée qui maximise les captures tout en évitant la disparition des espèces. Dans cet exemple, nous avons démontré par modélisation mathématique Multi-échelle qu'il existe une taille optimale de la zone protégée qui maximise les captures à l'équilibre.

La deuxième application est une étude dans laquelle nous avons démontré qu'il existe une relation entre la taille et le nombre des réserves (zones protégées) qui maximise les captures à l'équilibre. les modèles présentés dans ces deux exemples sont des modèles à multi-échelles dans lesquels nous avons utilisé pour simplifier l'étude une méthode de réduction des variables qui s'appelle la méthode d'agrégation de variables ( Modélisation multi échelle).

Les variables qui ont été utilisées sont tous des paramètres en relation avec la physique des populations ici, c'est les poissons, d'autres populations existent ( neutrons, électrons,...)

**Biomasse:** Le terme de biomasse regroupe l'ensemble des matières organiques d'origine végétale ou animale pouvant devenir des sources **d'énergie**

**Population:** ici, c'est le poisson. Mais, cela peut être **des neutrons, des électrons, .....**

**Taille des poissons:** est reliée à une notion de **longueur**

**Stock :** ( Optimal) il s'agit de la population ou de [**la masse totale**] d'une communauté de poisson. Ces stocks sont généralement identifiés en fonction de leur localisation.

**Reserves:** une réserve désigne une **quantité** (le contenu ou par extension le contenant) mis de côté à titre de sécurité,

**Effort de pêche:** ( optimal) **Mesure de l'intensité** de la pêche. La façon de définir l'effort dépend du type de pêcherie (engin), et souvent du type d'information disponible.

### 3.4 Formulation du Problème

Ce travail est organisé comme suit: dans la section suivante, nous étudions la dynamique d'un modèle dans le cas sans réserve. Nous généralisons ensuite au cas d'une réserve marine. Le modèle comprend deux échelles de temps, un rapide associé aux mouvements rapides des poissons entre les sites et un lent correspondant à la croissance de la population de poissons et le changement de la taille de la flotte. Nous tirons part de l'existence de ces deux échelles de temps pour construire un modèle réduit, en appliquant les méthodes d'agrégation de variables (Iwasa et al. 1987, 1989; Auger et Poggiale 1996, 1998; Auger et al. 2008, 2012). Le modèle réduit, appelé aussi modèle agrégé, décrit la dynamique du stock de poisson total et l'effort de pêche global. L'étude de ce modèle agrégé, nous permet de montrer qu'il existe une taille optimale de la réserve marine qui maximise les captures totales à l'équilibre.

### 3.5 Sur la taille optimale des réserves marines

Les Aires marines protégées (AMP), sont définies comme des zones où la pêche est interdite, elles ont été suggérées comme un outil de gestion pour la protection de la diversité marine, habitat aquatique, et les stocks de poissons (Dugan et Davis 1993; Agardy 1994; Hollande et Brazeo 1996; Allison et al 1998;. Chance et al 1998;. Bonocoeur et al 2002;. Anderson 2002; Rodwell et al. 2002; Neubert 2003; Hilborn et al. 2006). Cet intérêt croissant pour les AMP peut être expliqué d'abord par les divers avantages attendus de la création d'AMP. Ces avantages peuvent être classés en trois types:

1. la préservation des écosystèmes, gestion des pêches et le développement des activités de pêche.
2. les AMP sont souvent présentés comme un nouvel outil pour contrôler la surexploitation des ressources marines, qui est un problème mondial sérieux.
3. Une autre motivation est que de nombreuses AMP ont déjà été installé partout dans le monde. Chance et al. (1998); affirment que les AMP peuvent être envisagées comme une sorte d'assurance contre les évaluations ou l'efficacité des erreurs de régulation incertitude.



Cet exemple met en évidence la contribution potentielle des réserves marines protégées à l'amélioration de la pêche à travers le développement d'un modèle stock-effort. L'objectif est d'examiner les effets de la taille des réserves marines sur le stock de poissons et les captures à le long terme.

### 3.5.1 pré-réserve

Pour commencer, examinons une pêche côtière, supposons que toute la côte peut être représenté comme un seul site. Soit  $n(t)$  la densité de poissons et  $E(t)$  l'effort de pêche, à l'instant  $t$ . Le système suivant décrit l'évolution temporelle du stock exploité:

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{K}\right) - qnE \\ \frac{dE}{dt} = (-c + pqn) E \end{cases}$$

Dans ce modèle, on suppose que la population de poissons se développe selon une équation logistique,  $r$  le taux de croissance de la population et  $K$  la capacité limite. On suppose également que la capture est proportionnelle à la densité de poissons et de l'effort de pêche.  $q \in [0, \infty[$  est un paramètre de capturabilité,  $c$  représente le coût par unité d'effort de pêche, et  $p$  est le prix unitaire.

Ce système est bien connu car il ressemble au modèle prédateur-proie de Lotka-Volterra avec une croissance logistique des proies (Clark 1976, 1985, 1990). Il admet trois équilibres,  $(0, 0)$ ,  $(K, 0)$ , qui est un équilibre "sans pêche" (FFE), et un équilibre positif (FE)  $(n^*, E^*)$ , avec

$$\begin{cases} n^* = \frac{c}{pq} \\ E^* = \frac{r}{q} \left(1 - \frac{c}{pqK}\right) \end{cases}$$

Cet équilibre est positif lorsque  $pqK > c$ . En utilisant l'analyse de stabilité linéaire, on peut montrer que l'origine  $(0, 0)$  est toujours un équilibre instable (point selle) et que les deux cas suivants se produisent:

- Si  $pqK < c$ , le FE; n'est pas positif, et le FFE  $(K, 0)$  est globalement asymptotiquement

stable. La pêche n'est pas viable, à savoir, le modèle prédit l'extinction de la pêche.

- Si  $pqK > c$ , le FE est positif et est globalement asymptotiquement stable, et le FFE est instable (point selle).

La pêche est viable et la capture par unité de temps à l'équilibre est donnée par

$$Y^* = qn^*E^* = \frac{rc}{pq} \left( 1 - \frac{c}{pqK} \right)$$

Considérons tous les paramètres constants, sauf le paramètre de capturabilité  $q$ , on voit de l'équation. (3),  $Y^*$  est une fonction de  $q$ .  $Y^*$  atteint la valeur maximale pour  $q = \frac{2c}{pK}$ , pour cette valeur de  $q$ , la capture optimale à l'équilibre est  $rK/4$ .

### 3.5.2 Pêche avec une réserve marine

Pour protéger la population et l'environnement écologique, la région est divisée en deux patchs. La population est spatialement réparti de façon homogène dans une zone de capacité limite  $K$ . Cette zone est divisée en deux patchs, chacun ayant une capacité proportionnelle à sa taille: zone 1 (NF) où la pêche est interdite et la zone 2 où la pêche (F) est autorisée de capacité limite égale  $sK$  et  $(1-s)K$ ; respectivement. où  $0 < s < 1$ , Si  $s = 0$ , alors il n'y a pas de réserve, (voir Fig. 1).

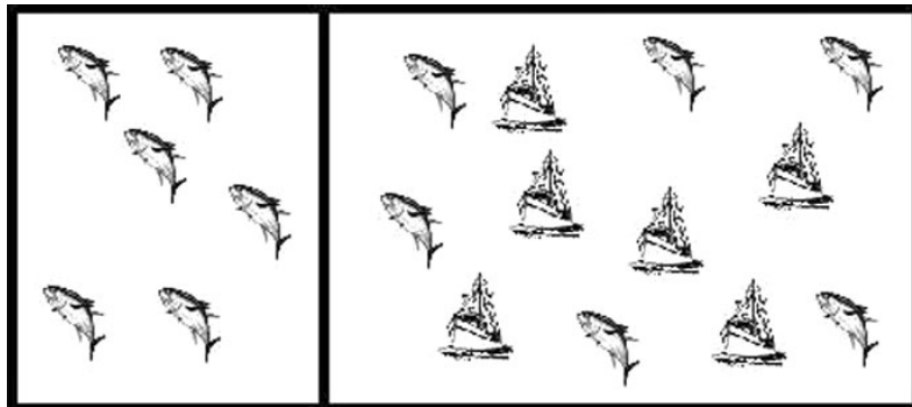


Figure. 1 schéma conceptuel du modèle avec refuge. La ligne verticale représente la limite du refuge.

Nous supposons que les mouvements des poissons se produisent à un échelle de temps rapide  $\tau$ , tandis que la croissance des poissons et la dynamique de la pêche se produisent à un temps lent  $\varepsilon\tau$ ; avec  $\varepsilon \ll 1$  étant un petit paramètre sans dimension. Il est raisonnable de supposer que les taux de déplacement des poissons sont inversement proportionnelles à la capacité limite du site (Auger et al. 2010; Moussaoui et al. 2011):

$$m_i = \frac{\sigma}{K_i}, \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

où  $\sigma$  est une constante positive qui représente le taux de migration lorsque la capacité limite du site de départ est égale à 1. Ainsi, selon l'équation (4), les poissons ont tendance de rester sur des sites offrant de grandes capacités limite, à savoir, sur les sites où la ressource est abondante. Sinon, nous faisons les mêmes hypothèses que dans le modèle de réserve préalable à la prise de poisson et de la dynamique de la pêche, en utilisant les mêmes paramètres  $R$ ,  $Q$ ,  $c$ , et  $p$  (Nous supposons que les poissons ont les mêmes prix sur le site de pêche et sur le site de la réserve).

Soit  $n_1(t)$  la densité de poissons du site de réserve à l'instant  $t$ ,  $n_2(t)$  la densité de poissons sur le site de pêche à l'instant  $t$ , et, soit  $E(t)$  l'effort de pêche sur le site de pêche au temps  $t$ . Le système suivant décrit l'évolution temporelle du stock exploité:

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{d\tau} = (m_2n_2 - m_1n_1) + \varepsilon rn_1 \left(1 - \frac{n_1}{sK}\right) \\ \frac{dn_2}{d\tau} = (m_1n_1 - m_2n_2) + \varepsilon \left( rn_2 \left(1 - \frac{n_2}{(1-s)K}\right) - qn_2E \right) \\ \frac{dE}{d\tau} = \varepsilon (-c + pqn_2) E \end{cases} \quad (5)$$

### Equilibre rapide

En supposant que les poissons se déplacent à une échelle de temps rapide en comparaison avec la croissance des poissons et de la dynamique de la pêche, nous examinons d'abord le système rapide en supposant  $\varepsilon = 0$  dans l'équation (5). À l'échelle de temps rapide, les densité totale de poisson  $n(t) = n_1(t) + n_2(t)$  reste constant. Il est facile de vérifier qu'il ya un équilibre rapide

positive et stable unique pour les densités de poissons:

$$\begin{cases} n_1^* = sn \\ n_2^* = (1 - s)n \end{cases} \quad (6)$$

### Modèle agrégé

Les Méthodes d'agrégation de variables profitent de l'existence de deux échelles de temps pour obtenir, à partir d'un modèle complet, un modèle réduit qui décrit l'évolution temporelle des variables globales à l'échelle de temps lente. Comme variables globales on choisit la densité totale de poisson et de l'effort de pêche global obtenu le long de la chaîne de sites. Pour les méthodes d'agrégation, nous nous référons à Auger et Bravo de la Parra (2000), Auger et Poggiale (1996, 1998), Auger et Roussarie (1994), Auger et al. (2008). Le modèle agrégé est obtenu en faisant une approximation. Cette approximation consiste à supposer que les variables rapides sont à l'équilibre rapide. Elle est valable lorsque  $\epsilon$  est assez petit et quand le modèle agrégé est structurellement stable. Le modèle agrégé est obtenu par la substitution de l'équilibre rapide et stable pour les poissons (. Eq 6) dans le système complet (Eq. 5) et en ajoutant les deux équations de poisson. Cela conduit au modèle suivant:

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{K}\right) - QnE \\ \frac{dE}{dt} = (-c + pQn) E \end{cases} \quad (7)$$

où  $n(t) = n_1(t) + n_2(t)$  est la population totale de poissons, et  $Q$  (paramètre global de capturabilité) est donnée par  $Q = q(1 - s)$

Le système (7) est équivalent au modèle pré-réserve (1), sauf que la proportion constante  $s$  apparaît dans les équations via le paramètre  $Q$ . Une application directe des résultats obtenus pour le modèle pré-réserve entraîne donc les résultats suivants : Le modèle agrégé (7) a un

équilibre non trivial;  $(n^*, E^*)$  tels que

$$\begin{cases} n^* = \frac{c}{pQ} = \frac{c}{pq(1-s)} \\ E^* = \frac{r}{Q} \left(1 - \frac{c}{pQK}\right) = \frac{r}{q(1-s)} \left(1 - \frac{c}{pq(1-s)K}\right) \end{cases} \quad (9)$$

Cet équilibre est positif lorsque

$$s < 1 - \frac{c}{pqK} = s_{\max} \quad (10)$$

Pour l'analyse de la stabilité, les deux cas suivants se produisent:

- Si  $s > 1 - c/pqK$  l'équilibre non trivial est négatif, et le FFE  $(K, 0)$  est globalement asymptotiquement stable.
- Si  $s < 1 - c/pqK$ ; le FE est positif et globalement asymptotiquement stable, et la FFE est instable (point selle).

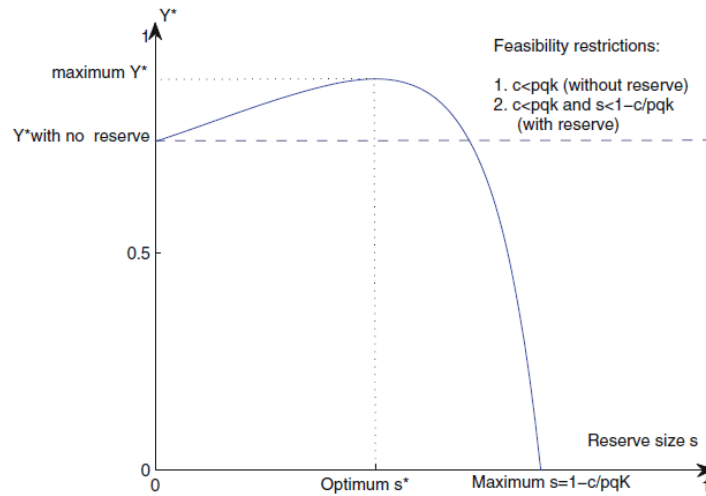


Figure. 2 La relation entre la récolte et la taille de réserve en utilisant le système réduit. Les capture augmente avec la taille de l'AMP pour atteindre un maximum. Les valeurs des paramètres sont les suivantes:  $r = 0,9, c = 0,6, p = 1, q = 0,5, K = 4,$

### 3.5.3 Taille optimale d'une réserve marine

L'objectif de cette partie est de déterminer la taille optimale de la zone de réserve qui maximise la valeur de la pêche à l'équilibre, la taille de réserve est une variable de contrôle supplémentaire. Le système ci-dessus (7) est étudié uniquement en équilibre écologique. La capture par unité de temps à l'équilibre est donnée par

$$Y^* = rn^* \left(1 - \frac{n^*}{K}\right) = \frac{rc}{pq(1-s)} \left(1 - \frac{c}{pq(1-s)K}\right) \quad (11)$$

Nous cherchons la taille  $s$  de la réserve marine qui maximise la capture à l'équilibre, l'équation. (11) donne la récolte ayant lieu dans la zone non-protégée en fonction de la taille de la zone protégée. Pour trouver la taille optimale, en gardant tous les paramètres constants, sauf  $s$ , la valeur optimale pour le paramètre  $s$  qui maximise les rendements  $Y^*$  est donnée par

$$s^* = 1 - \frac{2c}{pqK} \quad (12)$$

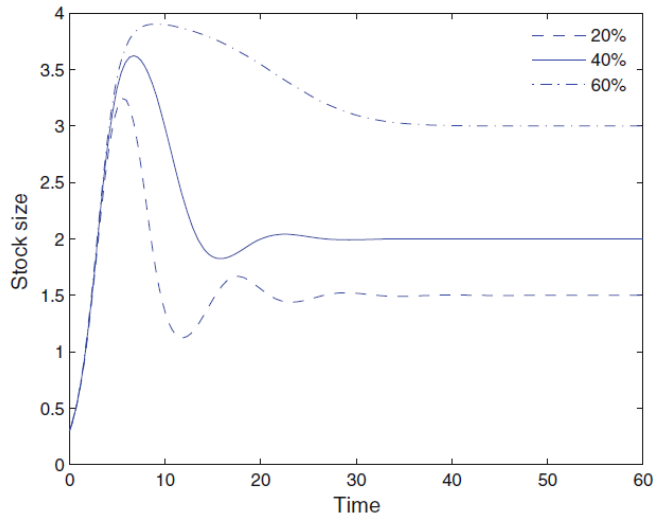
la dérivée seconde de  $Y^*$  par rapport à  $s$  est négative autour  $s^*$

$$\frac{d^2Y^*}{ds^2} = \frac{2rc}{pq(1-s)^3} \left(1 - \frac{3c}{pqK(1-s)}\right) < 0$$

Ainsi,  $s^*$  satisfait la condition de second ordre et maximise  $Y^*$ :

La taille optimale de réserve  $s$  tel que calculé dans l'équation. (12) est évidemment inférieur à  $s_{max}$ . En d'autres termes,  $s$  est économiquement réalisable (fig. 2). Nous pouvons également noter que pour  $s = s^*$ , nous avons  $n^* = K/2$  et  $Y^* = rK/4$ :

Notez que la taille qui maximise le rendement à l'équilibre augmente avec le prix, mais diminue avec le coût de l'effort de pêche.



### 3.5.4 Variation de capture en fonction de la taille de MPA

La réponse de la capture à l'équilibre à différentes tailles d'AMP a été simulée à l'aide de l'équation (11). La figure 2 montre la relation entre les niveaux d'équilibre de capture, zone de réserve et de la capture: Les formes des courbes permettent de conclure que la capture avec la réserve peut dépasser les captures dans le cas sans réserve. Sur la partie gauche de la courbe, les rendements augmentent avec la taille de la réserve. Ce phénomène est probablement lié à une meilleure survie des poissons dans la APM, tout en permettant un rendement de pêche par la diffusion d'individus hors la zone protégée. Sur la partie droite de la courbe, les prises diminuent si nous choisissons  $s$  plus grand que  $s^*$ . Dans cette configuration, on suppose que le MPA a une grande capacité limite, cette dernière diminue indirectement le niveau de capture. Si l'objectif de gestion est de maximiser les niveaux de capture. Pour les paramètres choisis, la solution optimale peut être trouvée lorsque la taille de la réserve est de 40%: Les simulations ont été effectuées pour 60 unités de temps, ce qui était toujours assez longtemps pour atteindre l'équilibre. Toutes les équilibres se sont révélés être stables pour les mêmes paramètres choisis ci-dessus.  $t = 0$  représente la période de temps pendant laquelle la réserve a été établie. La figure 3 illustre simplement les niveaux de biomasse de poissons d'équilibre pour diverses dimensions de la zone de réserve. Figure 3 indique clairement que des réserves assez grandes augmentent toujours la biomasse. La variation des captures avec la taille de l'AMP à long terme a été

simulé. Il semble que la taille optimale de l'AMP existe (Fig. 4). Pour le même ensemble de valeurs de paramètres choisis ci-dessus, la taille relative optimale serait égale à 40%.

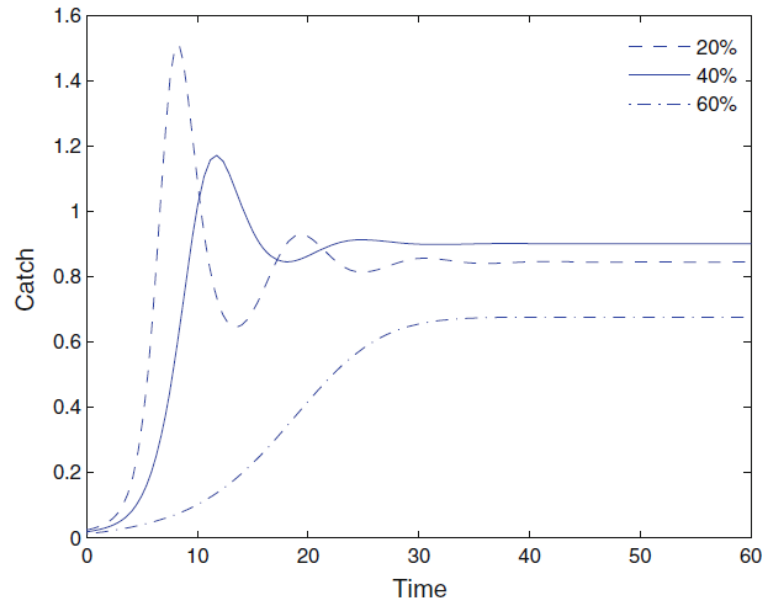


Figure. 4 Effet sur les captures de la variation de la taille des réserves  $s$ . Les paramètres choisis sont les mêmes que dans la Fig. 2.

### 3.5.5 Discussion

La mise en œuvre de réserves marines est considérablement augmentée, l'objectif est de protéger la biodiversité et l'habitat tout en maintenant ou améliorant la production de la pêche. Une enquête plus approfondie est nécessaire pour fournir plus d'informations sur la conception optimale des réserves et de déterminer si les réserves seront utile pour la gestion des pêches sélectionnés. Cette partie offre de nouvelles considérations sur la façon d'intégrer les AMP comme un outil pour la pêche gestion. Nous avons examiné les effets de la taille des réserves marines sur les captures à l'équilibre. Nos résultats sont clairement limitées aux hypothèses retenues. Il y a une taille optimale de l'AMP en termes de rendement de la pêche à long terme, la relation entre les captures et la taille de la réserve est en effet non linéaire (Fig. 2). Lorsque la taille de la MPA est petit, il est bénéfique pour augmenter sa taille, car elle permet de mieux protéger la ressource qui à son tour augmente la capture. Lorsque la taille de la MPA est



grande, il est important de réduire sa taille afin d'avoir d'avantage accès à la ressource pour et à augmenter la capture. Entre les deux, il existe une valeur maximum de la Taille de MPA pour laquelle la capture totale est maximale.

Dans le modèle agrégé, les paramètres peuvent dépendre de la taille totale des sites de réserve  $s$ . Par exemple, le paramètre global de capturabilité  $Q$  est proportionnelle à  $(1 - s)$  (Eq. 8). Notre calcul a également montré que la densité totale de poissons à l'équilibre  $n$  est inversement proportionnelle à  $(1 - s)$  (Eq 9), ce qui est logique. En effet, de grande taille des sites de réserves devraient conduire à une population totale de poisson plus grande. Lorsque la taille des AMP est petite,  $s < s^*$ ; il est rentable d'augmenter la taille totale de la réserve. Cela offre plus de ressources pour les poissons et favorise l'activité de la pêche totale. Toutefois, lorsque la taille de la réserve est trop grande,  $s > s^*$ ; une augmentation de la taille totale de la réserve marine conduit à une diminution de l'activité de pêche totale suite d'un refuge du stock.

Nos simulations sont limitées sur les effets de la taille de l'AMP, les résultats montrent que ce paramètre est vraiment à être pris en considération si l'objectif de gestion est la maximisation des captures à long terme. Les simulations suggèrent que la mise en œuvre des AMP, peut théoriquement être un compromis entre les deux objectifs de maximisation du rendement et de la protection de la biodiversité marine.

L'utilisation de la méthodes d'agrégation de variables nous a permis de simplifier l'analyse du modèle complet, un système de trois équations, à un simple modèle de deux dimensions appelé modèle agrégé. Cette simplification était possible parce que nous avons supposé qu'il y a deux échelles de temps, un rapide pour les mouvements de poissons et de bateaux entre les sites, et un lent pour la croissance des poissons. Dans la pratique, il a été montré sur des exemples numériques que dès que  $\epsilon = 10^{-1}$  ou  $10^{-2}$ , la méthode d'agrégation de variables peut s'appliquer, et les trajectoires obtenues avec le modèle agrégé restent proches à celle obtenus

avec le modèle complet (voir Fig. 5).

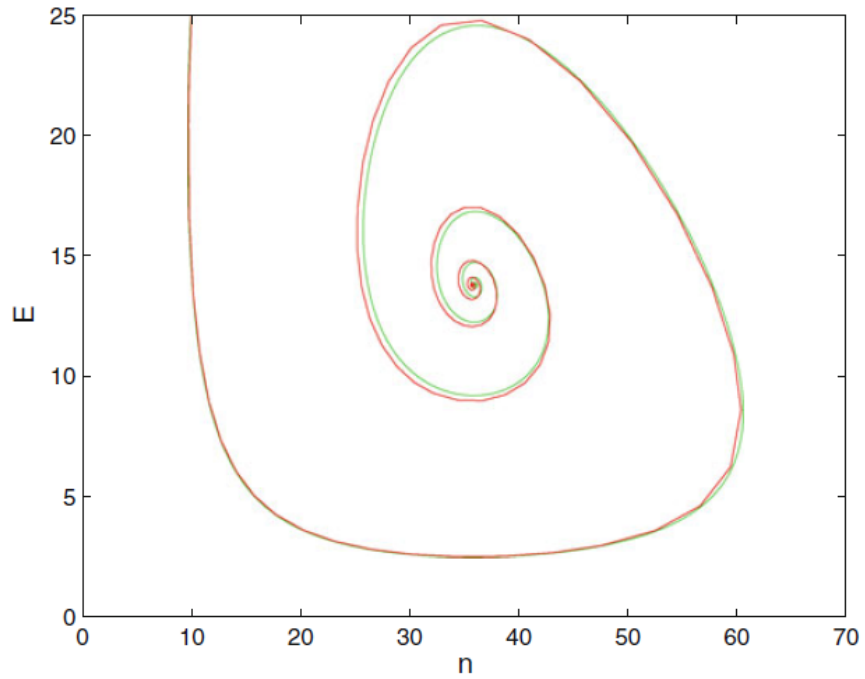


Figure. 5 Comparaison entre la dynamique de  $n$  et  $E$  donnée par l'ensemble du système (5) et celle obtenue avec le système à deux dimensions (7). On remarque sur cette figure que la solution de système réduit est proche à celle du modèle complet. Les valeurs des paramètres utilisés pour la simulation sont les suivants:  $r = 0,6, k = 100, s = 0,6, q = 0,07, p = 1, c = 1, k = 100, r = 1, \epsilon = 0,0005$ .

### 3.6 Sur la taille optimale et le nombre optimal de réserves dans un modèle de pêche multisites

L'idée que les aires marines protégées (AMP), à savoir, l'exclusion de certaines zones de pêche, peuvent servir d'outil pour atténuer le problème de la pêche a attiré beaucoup d'attention ces dernières années. Les AMP sont principalement situés autour des parcs et des réserves jusqu'à 0,25% de la mer est actuellement alloué aux AMP de divers types, la surexploitation des espèces commerciales et changements globaux de biomasse ont motivé la création de MPAs, Il ya trois principaux objectifs des AMP:

- (1) Pour préserver la biodiversité et les habitats, et limiter l'exploitation de la populations de poisson.
- (2) Afin de maintenir une pêcherie durable avec une augmentation de la biomasse de poisson ainsi que les captures.
- (3) Pour promouvoir les activités touristiques.

Même si les services publics d'AMP sont principalement reconnus par les communautés locales et les autorités gouvernementales, il ya encore de nombreux problèmes ouverts sur la création d'AMP, en particulier, l'emplacement, la taille, devrait-il être un grand un ou plusieurs petits, et interaction avec le réseau d'aires marines protégées déjà établies. En outre, certaines analyses révèlent difficultés sur la gouvernance et la gestion des AMP.

La conception des systèmes de réserves naturelles pour la conservation de la diversité biologique a reçu une attention considérable des économistes au cours de la dernière décennie. Une des questions les plus fondamentales qui a été débattu est la relation entre le nombre de réserves et la taille des réserves, ce qui dans la littérature est connu comme le débat d'une seule grande ou plusieurs petits (SLOSS). Dans cette section, nous étudions cette question dans un contexte économique en prenant en compte les bénéfices de réserves et leur opportunité. Nous démontrons que le nombre optimal de réserves ne peut pas, en général, être déterminée indépendamment de la taille totale optimale de réserve. Nous nous étudions sur un simple cas d'une pêcherie côtière représentée comme une chaîne linéaire de sites. Nous considérons une population de poisson exploitée se déplaçant entre les sites. Parmi les facteurs écologiques, nous soulignons l'importance de plusieurs réserves. cette section est organisée comme suit. Dans la

Sec. 2, nous avons mis notre modèle de base de la pêche dans le cas sans réserve. Dans le Sec. 3, nous ajoutons des réserves marines au modèle. Afin d'analyser l'effets de la zone de protection sur la conservation des ressources de la population, nous étudions la dynamique d'un modèle dans le cas de plusieurs sites (chaîne des sites de pêche avec  $L$  zones réserves et  $L$  zones de pêche). Pour effectuer l'analyse de ce modèle, nous construisons un modèle réduit, appelé le modèle agrégé, qui décrit la dynamique du stock totale et l'effort de pêche global. En étudiant ce modèle agrégé, nous trouvons que le nombre optimal de réserves qui maximise la capture totale de poisson à l'équilibre dépend de la taille des réserves.

### 3.6.1 Présentation du modèle sans réserve

Dans cette section, nous résumons certaines propriétés essentielles du modèle sans réserve. Cela servira comme une référence pratique pour évaluer l'impact des réserves marines dans les sections suivantes. Considérons une zone de pêche de taille constante  $K$ . Soit  $n(t)$  la biomasse de poisson et  $E(t)$  l'effort de pêche, à l'instant  $t$ . Nous supposons que la population évolue en fonction d'une loi logistique. Le système suivant décrit l'évolution temporelle de la pêcherie :

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = rn\left(1 - \frac{n}{K}\right) - qnE \\ \frac{dE}{dt} = \varphi(-c + pqn)E \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $r$  est le taux de croissance de la ressource et  $K$  sa capacité limite. On suppose également que la capture est proportionnelle à la biomasse de poisson et à l'effort de pêche.  $q > 0$  est un paramètre de capturabilité,  $c$  représente le coût par unité d'effort de pêche, et  $p$  est le prix par unité de biomasse,  $\varphi$  est un paramètre positif. Ce système est bien connu car il est équivalent à un modèle de prédateur-proie, le Lotka-Volterra avec une croissance logistique pour proie. Il admet trois équilibres,  $(0, 0)$ ,  $(K, 0)$ , qui est un équilibre sans pêche (FFE), et un équilibre positif (FE)  $(n^*, E^*)$  avec

$$\begin{cases} n^* = \frac{c}{pq} \\ E^* = \frac{r}{q} \left(1 - \frac{c}{pqK}\right) \end{cases} \quad (2.2)$$

Cet équilibre est positif lorsque  $pqK > c$ . En utilisant l'analyse de stabilité linéaire, on peut montrer que l'origine  $(0, 0)$  est toujours un équilibre instable (point selle) et que les deux cas suivants se produisent:

(I) Si  $pqK < c$ , le FE  $(n^*, E^*)$  n'est pas positifs, et la FFE  $(K, 0)$  est globalement asymptotiquement stable. La pêche n'est pas viable, à savoir, le modèle prédit l'extinction de la pêche.

(II) Si  $pqK > c$ , le FE est positif et globalement asymptotiquement stable, et la FFE est instable (point selle).

La pêche  $Y^*$  est viable et la capture par unité de temps est à l'équilibre

$$Y^* = qn^*E^* = \frac{rc}{pq} \left( 1 - \frac{c}{pqK} \right) \quad (2.3)$$

Garder tous les paramètres constants, sauf le paramètre de capturabilité  $q$ , on voit partir Eq. (2.3)  $Y^*$  est une fonction de  $q$ .  $Y^*$  est positif lorsque  $q \in ]c/pq, \infty[$  et atteint une valeur maximale pour  $q = 2c$ . Pour cette valeur de  $q$ , la capture optimale à l'équilibre est le rendement maximal durable (RMD), et est égale à  $rK/4$ .

### 3.6.2 Réserves marines

Nous nous tournons maintenant notre attention sur les réserves marines. Notre objectif dans cette section est de répondre à quelques questions générales sur les possibles effets de multiples AMP sur l'activité de pêche. Nous allons considérer que les réserves marines excluent une partie de la superficie totale de la pêche de l'activité de pêche. Référons-nous à cette partie comme une fraction de la superficie totale de la pêche noté  $s$ . De toute évidence, étant  $s \in [0, 1]$ ,  $s = 0$  représente pas de réserves marines et  $s = 1$  indique que toute la zone de pêche est une réserve. Afin d'étudier les effets de partitionnement de l'espace dans l'efficacité des AMP, nous avons décidé de construire et analyser un modèle de pêche spatialement explicite et l'utiliser pour déterminer la taille idéale et le nombre de réserves marines qui maximise les captures à l'équilibre. Notre modèle suppose un réseau linéaire de zones  $2L$  telles que pourrait se produire le long d'une coastline. Les hypothèses sous-jacentes sont (voir la figure 1):

(1) Il ya  $2L$  patches sur une ligne droite ( $L$  est le nombre de zones de pêche ainsi que le

nombre de zones marines protégées).  $2L$  caractérise la longueur totale de la chaîne.

(2) Nous supposons que entre deux sites de pêche consécutives, il ya toujours un MPA ou de réserve (R), où la pêche est interditz. Aussi pour simplifier, on suppose que la chaîne commence toujours avec un site de pêche (F) à gauche et se termine avec une réserve (R) sur la droite.

(3) Chaque patch est relativement isolé, mais il est supposé que le poisson peut migrer entre toute paire de sites adjacentes ainsi que les bateaux peuvent se déplacer entre toute paire de sites de pêche. Nous supposons que les mouvements des poissons et les déplacements des bateaux se produisent sur une échelle de temps rapide  $\tau$ , alors que la croissance de poisson et la dynamique de la pêche se produisent sur une echelle de temps lent  $t = \epsilon\tau$ , avec  $\epsilon \ll 1$  étant un petit paramètre sans dimension. Il est logique de supposer que le taux de déplacement des bateaux entre deux sites voisins dépend de la distance entre ces sites. Par conséquent, nous supposons que les taux de mouvements symétriques pour les bateaux:

$$\beta_{2i-1,2i+1} = \beta_{2i+1,2i-1} \quad (3.1)$$

pour  $i \in [1, L - 1]$ . Le taux de déplacement des poissons sont inversement proportionnelles à la capacité limite du site qu'ils quittent:

$$m_i = \frac{\sigma}{K_i}, \quad (3.2)$$

pour tout  $i \in [1, 2L]$  où  $\sigma$  est une constante positive qui représente le taux de migration lorsque la capacité limite du site de départ est égal à 1. Ainsi, selon l'équation. (3.2), les poisson sont plus susceptibles de rester sur les sites de grandes capacités, à savoir, sur les sites où la ressource est abondante. La dernière hypothèse signifie que les poissons devraient distribuer entre les parcelles selon la distribution libre idéale, (IFD) .

(4) Nous supposons que chaque site de réserve ( $i = 1, \dots, L$ ) a une capacité  $k_i = s_i K (s_i < 1)$  et la taille totale de ces sites de réserves égales à  $sK$  où

$$\sum_{i=1}^L s_i < 1$$

représente la fraction de la capacité totale de MPA.

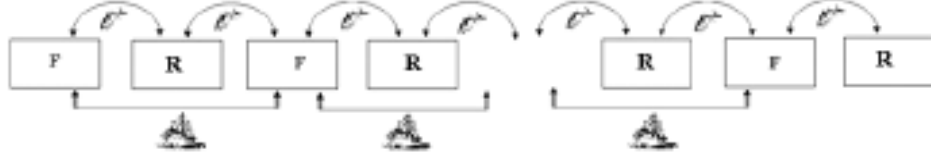


Figure. 1. Représentation schématique d'une pêcherie multi-site avec plusieurs AMP.

Soit  $n_i(t)$  la biomasse de poissons dans le site  $i$  au temps  $t$ . Soit  $E_i(t)$  l'effort de pêche, à savoir, sur le site  $i$  au temps  $t$ . En supposant que les paramètres suivants  $r, Q, c$  et  $p$  sont indépendants, le prochain système que nous appelons le système complet décrit l'évolution temporelle de la pêcherie au site  $i$  à l'échelle de temps rapide:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dn_i}{d\tau} = m_{i-1}n_{i-1} + m_{i+1}n_{i+1} - 2m_in_i + \varepsilon \left( rn_i \left( 1 - \frac{n_i}{k_i} \right) - qn_i E_i \right) \\ \quad \text{si le site } i \text{ n'est pas une réserve} \\ \frac{dn_i}{d\tau} = m_{i-1}n_{i-1} + m_{i+1}n_{i+1} - 2m_in_i + \varepsilon rn_s \left( 1 - \frac{n_i}{k_s} \right) \\ \quad \text{si } i \text{ est une réserve} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

pour  $i \in [2, L - 1]$

Pour le premier et le dernier sites:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dn_1}{d\tau} = m_2n_2 - 2m_1n_1 + \varepsilon \left( rn_1 \left( 1 - \frac{n_1}{k_1} \right) - qn_1 E_1 \right) \\ \frac{dn_{2L}}{d\tau} = m_{2L-1}n_{2L-1} - 2m_{2L}n_{2L} + \varepsilon rn_{2L} \left( 1 - \frac{n_{2L}}{k_{2L}} \right) \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Le système suivant décrit l'évolution temporelle de l'effort de pêche le long de la chaîne à l'échelle de temps rapide:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE_i}{d\tau} = (\beta_{i,i-2}E_{i-2} + \beta_{i,i+2}E_{i+2} - (\beta_{i-2,i} + \beta_{i+2,i}) E_i) \\ \quad + \varepsilon (-c + pqn_i) E_i \text{ si le site } i \text{ n'est pas une réserve} \\ \frac{dE_i}{d\tau} = 0 \text{ si } i \text{ est une réserve} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

pour  $i \in [3, 2L - 3]$ .

Pour le premier patch et le patch  $2L - 1$ , nous avons:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE_1}{d\tau} = (\beta_{1,3}E_3 - \beta_{3,1}E_1) + \varepsilon(-c + pqn_1) E_1 \\ \frac{dE_{2L-1}}{d\tau} = (\beta_{2L-1,2L-3}E_{2L-3} - \beta_{2L-3,2L-1}E_{2L-1}) + \varepsilon(-c + pqn_{2L-1}) E_{2L-1} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

### 3.6.3 Modèle agrégé

Maintenant, nous allons profiter de la méthode d'agrégation de variables pour construire un modèle réduit. La première étape consiste à prendre  $\varepsilon = 0$  dans le modèle complet précédente et à regarder l'existence et la stabilité d'un équilibre rapide qui est comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} n_i^* = v_i^* n = \frac{k_i}{K} n \\ E_i^* = \mu_i^* E = \frac{1}{L} E \text{ si le site } i \text{ n'est pas une réserve} \\ E_i^* = 0 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

En substituant l'équilibre rapide dans le modèle complet conduit après un certain calcul linéaire au modèle agrégé qui se lit comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dn}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{K}\right) - QnE \\ \frac{dE}{dt} = (-c + pQn) E \end{array} \right. \quad (3.8)$$

où

$$n = \sum_{i=1}^{2L} n_i$$

est la population totale et

$$E = \sum_{i=1}^L n_{2i-1}$$

est l'effort de pêche global.



et  $Q$  (paramètre global de capturabilité) est donné par

$$Q = \frac{q(1-s)}{L} \quad (3.9)$$

Le système (3.8) est équivalent au modèle de pêche classique que nous avons rappelé à la Sec. 2 [Eq. (2.1)] sauf que le nombre  $L$  et la taille  $s$  apparaissent dans les équations via le paramètre  $Q$ . Une application directe des résultats obtenus pour le modèle classique conduit donc aux résultats suivants: Le modèle agrégé multisite [Eq. (3.8)] a un équilibre positif FE  $(n^*, E^*)$  de telle sorte que

$$\begin{cases} n^* = \frac{c}{pQ} = \frac{cL}{pq(1-s)} \\ E^* = \frac{r}{Q} \left(1 - \frac{c}{pQK}\right) = \frac{rL}{q(1-s)} \left(1 - \frac{cL}{pq(1-s)K}\right) \end{cases} \quad (3.10)$$

La pêche est viable à condition que cet équilibre appartienne au quadrant positif, à savoir,

$$L < \frac{pq(1-s)K}{c} = L_{\max} \quad (3.11)$$

En conséquence, la capture  $Y^*$  à l'équilibre est donnée par

$$Y^* = Qn^*E^* = \frac{rcL}{pq(1-s)} \left(1 - \frac{cL}{pq(1-s)K}\right). \quad (3.12)$$

L'équation (3.12) montre que, à l'équilibre, la capture dépend du nombre de sites protégées

et la taille de la réserve

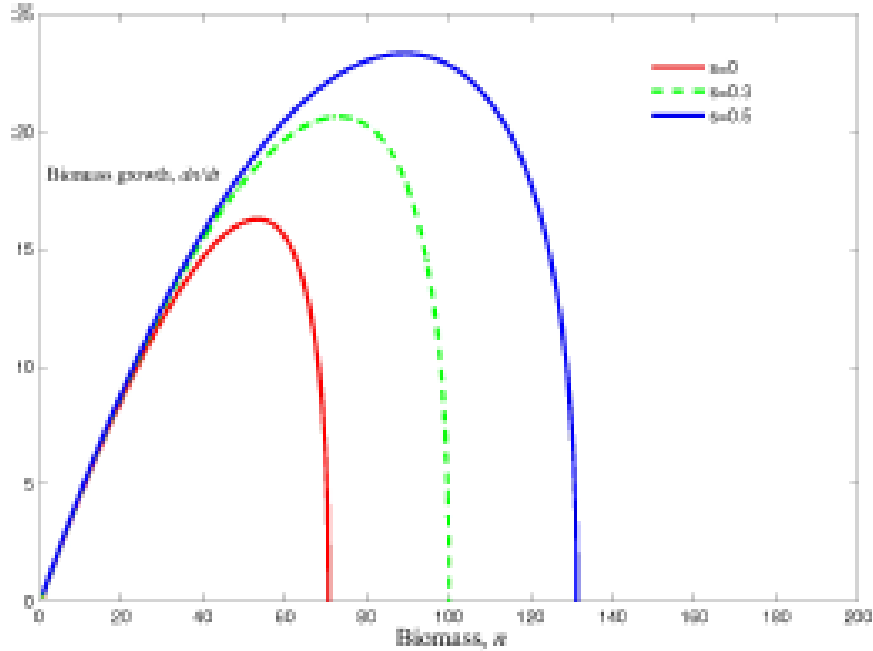


Figure. 3. L'effet de réserves marines sur la croissance de la biomasse, l'axe horizontal est  $n$ . La biomasse des poissons, l'axe vertical est  $dn/dt$ . La croissance de la biomasse. Les paramètres sont les suivants:  $r = 0,5, K = 200, q = 0,17, p = 0,15, c = 0,5, L = 1$ .

De (3.12), on montre que  $Y^*$  a un maximum pour un nombre optimal de sites egal:

$$L_{opt} = \frac{pq(1-s)K}{2c} = \frac{L_{max}}{2} \quad (3.13)$$

Nous pouvons également noter que pour  $L = L_{opt}$ , nous avons  $n = K^*$  et  $Y^* = rK/4$ .

Il peut être utile d'illustrer nos résultats par une représentation numérique de la situation résultant de (3.8). En effet, comme cela deviendra évident ci-dessous sur la Fig. 3, les réserves marines peut influencer la croissance de la biomasse dans de diverses manières. Il est par exemple possible que les réserves marines, en mettant une partie de poisson en abri de l'activité de pêche pourra améliorer la croissance de la biomasse de poisson. Le même effet peut se produire si les réserves marines parviennent à protéger croissance rapide immature ou conserver des variables importantes pour la survie des poisson et la croissance habitat. Nous avons

également effectué des simulations pour explorer les effets de la mise en œuvre de plusieurs petites réserves qu’une seule grande. A partir de ce résultat, il semble que d’avoir plusieurs petites AMP peut-être mieux en termes d’augmentation de la croissance de la biomasse de poisson qu’un seul MPA plus grande de la même surface totale (Fig. 4).

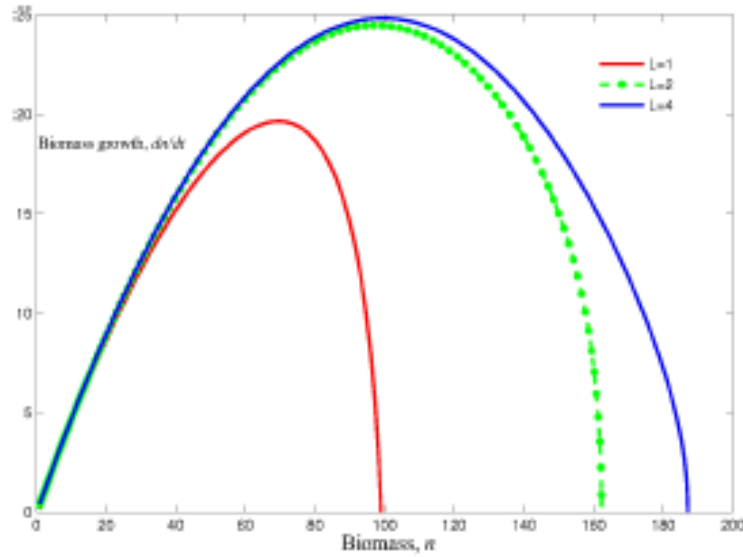


Figure. 4. L’effet de nombre de réserves sur la croissance de la biomasse. Plusieurs réserves peuvent évidemment être écologiquement supérieure à un seul grand. Les paramètres sont les suivants:  $r = 0,5$ ,  $K = 200$ ,  $q = 0,17$ ,  $p = 0,15$ ,  $c = 0,5$ ,  $s = 30\%$ .

Un exemple de l’impact des réserves marines de différentes tailles sur la biomasse de poisson effort de pêche et les capture à l’équilibre résultant des équations. (3.10) et (3.12) est illustré sur la Fig. 5.

Figure 5 démontre très clairement que l’équilibre biomasse augmente avec la taille totale de la réserve tandis que l’effet sur l’effort de pêche à l’équilibre est non monotone. Le résultat de l’augmentation des réserves marines, la biomasse de poissons et la capture par rapport à la taille de réserve. En effet, le niveau de récolte semble être maximisée dans ce cas à une taille de la réserve marine approximative de 0,6.

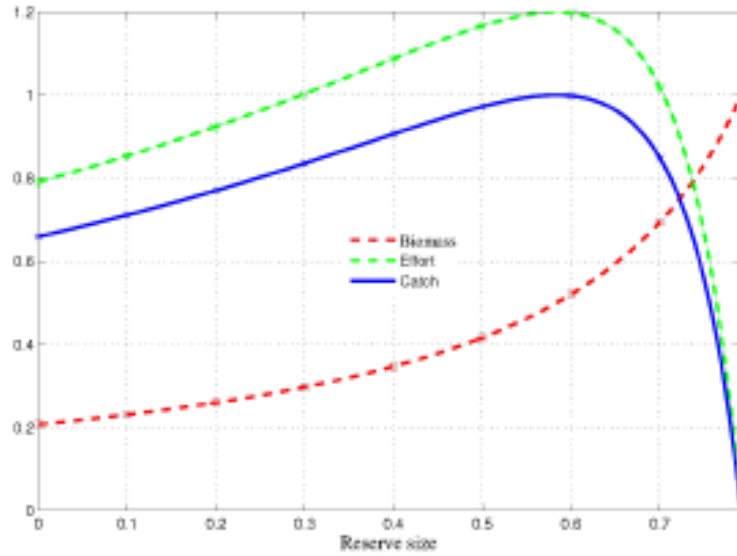


Figure. 5. Variation de la biomasse de pêche (rouge), l'effort de pêche (vert) et la capture (bleu); à l'équilibre avec la taille croissante de la réserve.  $r = 1, c = 1, L = 1, p = 1, 2, q = 1, K = 4$ .

De même, en utilisant les équations. (3.10) et (3.12), l'impact du nombre de réserves sur la biomasse, l'effort de pêche et les captures à l'équilibre est illustré dans la figure. 6.

La figure 6 illustre le cas où la biomasse, l'effort de pêche et la capture augmente en raison de l'augmentation du nombre de réserves marines, cependant, l'allure de la figure. 6 indique clairement que si le nombre des réserves augmente assez grand, l'effort de pêche et les captures pourraient effectivement être réduits. En effet, le niveau de récolte semble être maximisée dans ce cas à un nombre approximatif de réserves égal à 4.

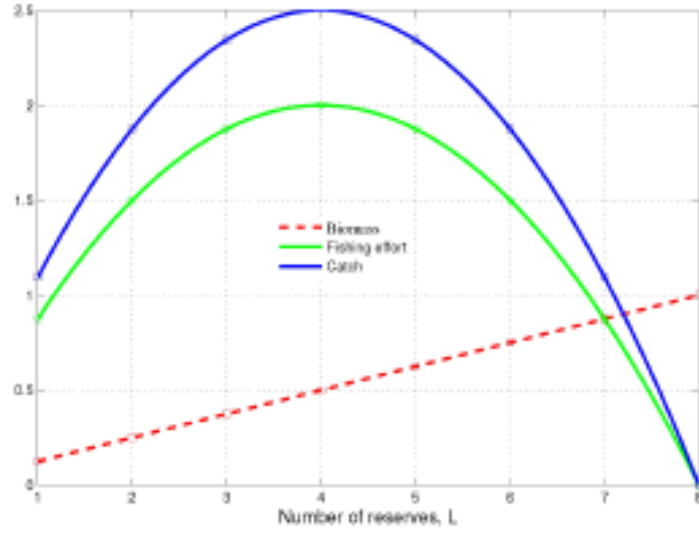


Figure. 6. L'impact du nombre de réserves marines sur la biomasse de poissons (rouge), l'effort de pêche (vert) et la capture (bleu); à l'équilibre:  $r = 0,5, c = 1, s = 0,5, p = 0,8, q = 1, K = 20$ .

### 3.6.4 Taille optimale et nombre de réserves marines

Nous examinons ici la relation entre le nombre et la taille optimale des réserves marines pour maximiser les captures à l'équilibre. L'équation (3.12) décrit les captures  $Y^*$  en fonction du nombre de zones de réserve  $L$  et la fraction des réserves  $s$ . Les dérivées partielles de  $Y^*$  par rapport à ces quantités sont:

$$\frac{\partial Y^*}{\partial L} = \frac{rc}{pq(1-s)} \left( 1 - \frac{2cL}{pq(1-s)K} \right) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial Y^*}{\partial s} = \frac{rcL}{pq(1-s)^2} \left( 1 - \frac{2cL}{pq(1-s)K} \right) \quad (4.2)$$

a partir de ces equations, le maximum de  $Y^*$  vérifie:

$$\frac{1-s}{L} = \frac{2c}{pqK} \quad (4.3)$$

Nous obtenons une expression simple entre le nombre et la taille des réserves qui maximisent

la capture à l'équilibre. L'équation (4.3) peut être interprétée comme une équation d'équilibre, en disant que la façon dont la capture est maximal à l'équilibre dépend de la fraction de la taille totale de la pêche et le nombre de réserves (voir Fig. 7). Le résultat général de cette analyse est que la capture à l'équilibre est maximale quand la taille totale et le nombre de réserves marines vérifient la relation (4.3). La taille optimale dépendra étroitement du nombre de réserves. Nous pouvons également noter que lorsque (4.3) se produit, nous avons  $n^* = K/2$  et  $Y^* = rK/4$ . On peut voir qu'il existe une ligne droite de locale maxima où la capture  $Y^*$  est égal à la PME (Fig. 7). De ce résultat graphique, il devient évident qu'il existe une taille de réserve marine optimale et un partitionnement spécifique de cette réserve qui permettra de maximiser la valeur de la pêcherie.

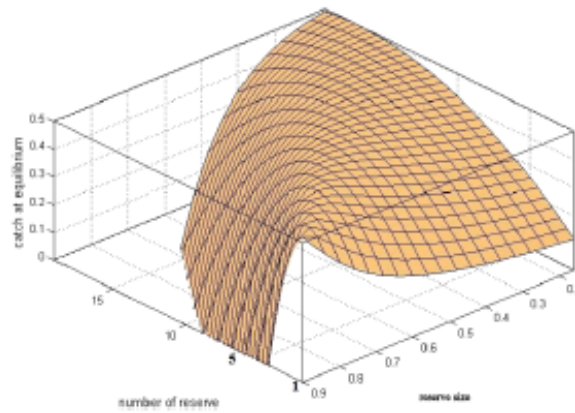


Figure. 7. Effets de la taille et du nombre de réserves marines sur les captures à l'équilibre. Les valeurs des paramètres:  $r = 1, c = 0,05, p = 1, q = 1, K = 2$ .

on peut confirmer que la biomasse de poissons augmente avec  $s$ . Cependant, il est important de noter que cette augmentation ne persiste pas. Comme la taille de la réserve devient trop grande, elle restreint la population de poisson pour la pêche et donc réduit la valeur de la pêcherie. Pour déterminer la valeur optimale de la taille de la réserve pour la pêcherie, il est nécessaire de localiser les pics de la fonction de valeur pour tous les niveaux de nombre de réserves  $L$ . Remarquez que la taille optimale de réserve est une fonction du nombre de réserves  $L$  (fig. 7 et 8). On conclut qu'il est nécessaire de constituer une réserve et sa taille dépendra étroitement du nombre de réserves.

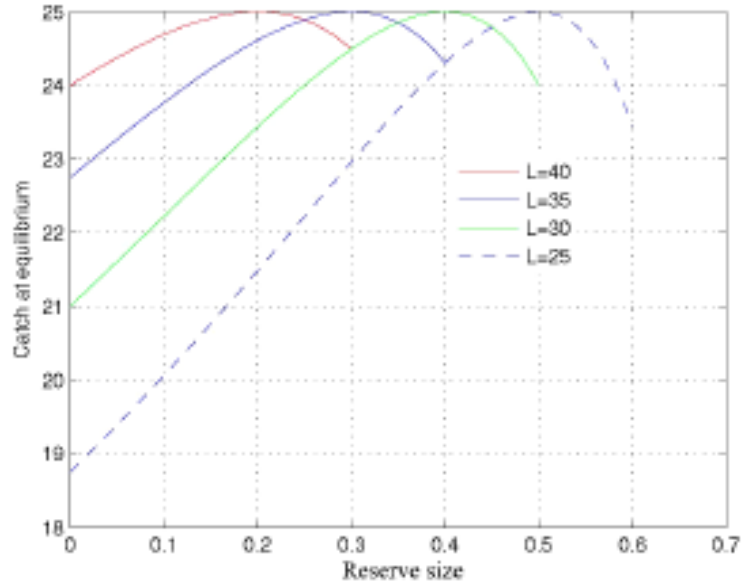


Figure. 8. La capture totale à l'équilibre en fonction de la taille des réserves, selon le nombre relatif de la réserve ( $L$ ):  $r = 2, c = 1, p = 2, q = 1, K = 50$ .

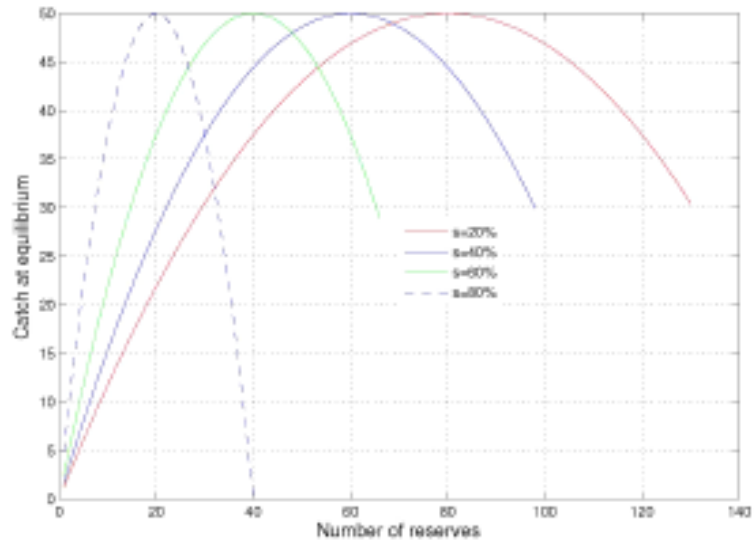


Figure. 9. variation des captures à l'équilibre par rapport au nombre de réserves pour des valeurs différentes de  $s$  découlant de (3.12):  $r = 2, c = 1, p = 2, q = 1, K = 100$ .

Les figures 7 et 8 découlant de (3.12) montrent l'effet d'extension de la taille d'une réserve marine sur les captures; nous étudions les effets de varier la taille de la réserve et les différentes

valeurs de  $L$ . Si l'on garde la taille constante, on observe un maximum de captures lorsque le nombre de réserves augmente. Si le régulateur contrôle réellement le nombre de réserves marines et vise à maximiser les captures a long terme, l'option préférée serait d'augmenter le nombre des réserves pour une petite taille de réserve, en revanche, si la taille totale des réserves est importante, la stratégie donne la capture plus élevée pour réduire le nombre de réserves. Une autre caractéristique qui peut être observée lors de l'augmentation de la taille de la réserve est que la capture optimale (MSY) est la même, mais à un nombre petit de réserves.

De même, les figures. 7 et 9 montrent le graphe de  $Y^*$  par rapport à  $L$ , mais pour des valeurs fixes de  $s$ , nous observons que nous obtenons le même MSY mais pour de nombre inférieur de réserves lorsque nous augmentons la taille de la réserve. Si le régulateur contrôle est la taille de la réserve marine et vise à maximiser les captures a long terme, l'option préférée serait d'augmenter la taille de la réserve pour un petit nombre de réserve, et de diminuer la taille de la réserve lorsque nous décidons d'installer un nombre élevé de réserves.

### 3.6.5 Discussion

Dans cette partie, nous avons présenté un modèle mathématique pour aider à la décision de savoir si oui ou non il serait bénéfique d'introduire une AMP, et si oui, comment le mettre en œuvre. plus précisément, nous avons abordé la question de savoir quel est le nombre optimal et la taille optimale des sites de réserves qui maximisent la capture à l'équilibre. Commençons par nous récapitulant brièvement les résultats obtenus. Le stock de poisson est réparti sur une zone donnée. la fermeture d'une partie de la zone augmente la biomasse de poissons dans la zone fermée. Notre modèle multisite indique l'existence d'une taille optimale et d'un nombre de réserves qui maximisent la capture totale à l'équilibre.

Nous pouvons étudier les raisons pour lesquelles un tel résultat a eu lieu. Dans le modèle agrégé, les paramètres peuvent dépendre du nombre de sites de pêche  $L$  et de la taille totale de la réserve  $s$ . Par exemple, le paramètre global du potentiel de capture  $Q$  est proportionnel à la taille de la zone non-réserve  $(1-s)$  et inversement proportionnelle à  $L$  [Eq. (3.9)]. Notre calcul a également montré que la biomasse totale à l'équilibre  $n^*$  est proportionnelle à  $L$  et inversement proportionnel à  $1-s$  [Eq s. (3.10)], ce qui est logique. L'effort de pêche à l'équilibre  $E^*$  est une fonction de  $L$  et  $s$  [Eq. (3.10)]. Nous avons établi une relation optimale entre le nombre de



réerves  $L$  et la taille totale des réserves  $s$  donnée par l'équation. (4.3) qui maximise l'effort de pêche et la capture à l'équilibre.

La relation entre les captures et le nombre de sites de réserves est en effet non linéaire (Fig. 6, 7 et 9). Pour un nombre fixe de réserves et lorsque la taille de l'AMP est petit, il est bénéfique d'augmenter sa taille, car elle permet de mieux protéger la ressources qui à son tour augmente la capture. Cependant, lorsque la taille de l'AMP est grand, il est bénéfique de réduire sa taille afin d'avoir d'avantage accès à la ressource pour la pêche et d'augmenter la capture. Entre les deux, il existe une valeur maximale de la taille MPA pour laquelle la capture totale est maximale. De même, lorsque la taille de la réserve totale est fixé , il existe un nombre optimal de sites (réserves) qui maximise la capture totale à l'équilibre ( figures 6 et 8), lorsque le nombre de réserves est faible ( $L < L_{opt}$ ), il est profitable pour augmenter le nombre de réserves. Ceci permet d'avoir plusieurs sites et des ressources aux poissons et favorise globalement l'activité totale de la pêche. Toutefois, lorsque le nombre de sites est trop grand, ( $L > L_{opt}$ ), une augmentation du nombre total de sites conduit à une diminution de l'activité totale de la pêche à la suite d'une surexploitation du stock.

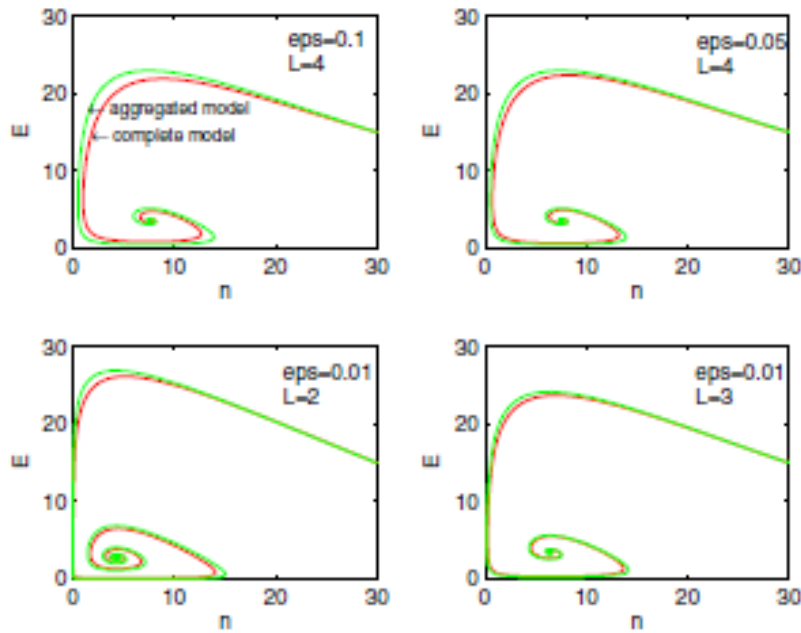


Figure. 10. Comparaison entre la dynamique de  $n$  et  $E$  donnée par le système complet (3.3-3.5) (rouge) et celle obtenue avec le système à deux dimensions (3.8) (vert) pour les valeurs de

différents de  $\epsilon$  et  $L$ . sur cette figure; on remarque que la solution de système réduit correspond assez bien à la solution du modèle complet. Les valeurs des paramètres utilisés pour la simulation sont les suivants:  $r = 0,7, k = 20, q = 0,8, p = 0,7, c = 0,6, \sigma = 1, \beta_{13} = \beta_{31} = 0,5, \beta_{35} = \beta_{53} = 0,4, \beta_{75} = \beta_{57} = 0,6$ .

L'utilisation de la méthode d'agrégation de variables nous a permis de simplifier l'analyse mathématique du modèle complet, un système de  $4L$  équations, à un modèle agrégé bidimensionnel simple. Cette simplification est possible parce que nous avons supposé qu'il y avait deux échelles de temps, un rapide pour les mouvements des poissons et des bateaux entre les sites, et un lent correspondant à la croissance de la population de poisson et à la dynamique de la pêche.

# Chapitre 4

## Annexe

# Chapitre 4

## Annexe

### 4.1 Les méthodes d'agrégation des variables

Dans cette partie, nous allons décrire quelques méthodes d'agrégation de variables à savoir les méthodes d'agrégation des modèles en temps continu dans les systèmes d'équations différentielles ordinaires. Nous allons aussi énoncer un théorème de réduction qui est un résultat central dans les méthodes d'agrégation. Mais auparavant, nous allons illustrer à travers quelques exemples qu'il est difficile de réaliser une agrégation parfaite d'un système donné et que les méthodes d'agrégation que nous allons utiliser sont des méthodes approximatives.

#### 4.1.1 Agrégation parfaite

Nous considérons un micro-système d'équations différentielles ordinaires (EDO) couplées non linéaires comportant  $N$  micro-variables  $n_i$

$$\frac{dn_i}{dt} = f_i(n_1, n_2, \dots, n_N) \quad (4.1)$$

les  $f_i$  sont des fonctions non linéaires des micro-variables. L'agrégation parfaite signifie qu'on peut trouver un ensemble de macro-variables  $Y_j$  qui sont définies à partir de l'ensemble des micro-variables précédent :

$$Y_j = g_j(n_1, n_2, \dots, n_N) \quad (4.2)$$

les  $g_j$  sont des fonctions des micro-variables. De plus pour effectuer une agrégation parfaite,

on doit obtenir un ensemble de EDO c'est à dire un macro-système gouvernant les macro-variables  $Y_j$  et ne dépend que d'elles :

$$\frac{dY_j}{dt} = h_j(Y_1, Y_2, \dots, Y_A), \quad j = 1, 2, \dots, A \quad (4.3)$$

où les  $h_j$  sont seulement fonctions des macro-variables  $Y_J$  . Cette méthode d'agrégation parfaite est très intéressante dans le cas où  $A \ll N$ . Le micro-système a été réduit ou condensé en un macro-système beaucoup plus simple. Si une telle agrégation parfaite est réalisée le système initial est remplacé par sa copie écrite différemment mais dans un sens plus synthétique. De (4.2), on voit que les dérivées par rapport au temps des macro-variables sont comme suit :

$$\frac{dY_j}{dt} = \sum \frac{\partial g_j}{\partial n_k} \frac{dn_k}{dt}$$

Toutefois, l'agrégation parfaite ne peut rarement être effectuée parce que le second membre de l'équation (4.3) ne peut être écrit comme une fonction seulement des macro-variables  $Y_j$  , voir Iwasa et al. 1986 dans lequel les conditions sont données pour effectuer une parfaite agrégation. Les méthodes d'agrégation parfaite peuvent seulement être effectuées que dans des cas particuliers c'est à dire dans les cas où les paramètres du micro-modèle prennent des valeurs particulières des paramètres. Par exemple nous considérons un ensemble de  $N$  sous populations  $n_i$  croissant linéairement avec un taux de croissance  $r_i$

$$\frac{dn_i}{dt} = r_i n_i$$

Pouvons nous agréger ces équations en une équation gouvernant une variable simple avec une population totale  $Y = n_1 + n_2 + \dots + n_N$ ? Ceci n'est possible que si tous les taux de croissance sont égaux  $r_1 = r_2 = \dots = r_N = r$  conduisant ainsi au système agrégé

$$\frac{dY}{dt} = rY$$

Autrement dit il est possible de réduire l'ensemble des  $N$  équations en une équation simple. Cet exemple est simple et trivial. Ainsi, il montre dans un cas simple que l'agrégation parfaite est en général impossible et qu'elle n'est possible que si nous prenons quelques fois des valeurs

particulières. Dans cet exemple tous les taux de croissance sont égaux. On peut aussi considérer un ensemble de  $N$  sous populations  $n_i$  croissant logistiquement avec les taux de croissance  $r_i$  et les capacités limites  $K$  ; le modèle s'écrit comme suit

$$\frac{dn_i}{dt} = r_i n_i \left(1 - \frac{n_i}{K}\right)$$

Dans ce cas l'agrégation parfaite ne peut être effectuée même dans le cas particulier où tous les taux de croissance sont les mêmes ainsi que les capacités limites. L'équation pour la population totale contient des termes quadratiques non linéaires ce qui rend impossible l'agrégation. Nous allons maintenant présenter des méthodes de réduction par approximation. La méthode d'agrégation est souvent applicable en pratique dès qu'il existe des échelles de temps différentes. L'écriture des équations fait alors intervenir un petit paramètre sans dimension  $\varepsilon \ll 1$ . Dans ce cas, l'étude du modèle agrégé suffit pour tirer certaines informations capitales du modèle original. Dans la suite, nous allons détailler les méthodes d'agrégation dans les modèles en temps continu.

#### 4.1.2 Méthodes d'agrégation des modèles en temps continu

Nous étudions un cas général qui est constitué d'une population qui peut être divisée en plusieurs catégories ou sous populations. Soit  $n_i(t)$  le nombre d'individus de la sous population  $i$  à l'instant  $t$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Nous supposons que plusieurs processus ont lieu à deux échelles de temps différentes. Un processus rapide correspond aux changements de catégories des individus et un processus lent correspond à la dynamique interne de chaque catégorie. Sous ces hypothèses, la dynamique des variables d'état peut être écrite sous la forme suivante :

$$\varepsilon \frac{dn_i}{dt} = f(n_1, \dots, n_N) + \varepsilon g(n_i) \tag{4.4}$$

où les fonctions  $f_i(n_1, \dots, n_N)$  représentent la dynamique rapide et sont fonctions de toutes les variables, les fonctions  $g_i(n_i)$  représentent la dynamique lente et dépendent seulement de la variable correspondante. En posant  $t = \varepsilon \tau$  dans le système précédent, nous obtenons un système appelé **système complet**. Puisque

$$\frac{dn_i}{dt} = \varepsilon \frac{dn_i}{d\tau}$$

En remplaçant  $\varepsilon \frac{dn_i}{dt}$  par sa valeur nous obtenons **le système complet**

$$\frac{dn_i}{dt} = f_i(n_1, \dots, n_N) + \varepsilon g_i(n_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Pour effectuer l'agrégation nous avons besoin de définir une variable globale. La variable globale dépend des  $N$  variables d'état. De plus, la variable globale doit être une constante. Nous choisissons le plus souvent comme variable globale la somme de toutes les variables d'état

$$n(t) = \sum n_i(t).$$

Dans ce cas, la condition pour que la variable globale soit constante à l'échelle de temps rapide est donc :

$$\sum f_i(n_1, \dots, n_N) = 0$$

La prochaine étape consiste à calculer l'équilibre rapide qui est obtenu en négligeant le terme  $\varepsilon$  dans **le système complet** précédent et en cherchant les solutions pour lesquelles la vitesse est à égale zéro d'où :

$$f_i(n_1, \dots, n_N) = 0$$

$$\sum n_i(t) = n$$

Le système précédent peut avoir plusieurs solutions ou non. Nous supposons qu'il existe une solution qui est un équilibre asymptotiquement stable du système :

$$\frac{dn_i}{d} = f_i(n_1, \dots, n_N), \quad i = 1, \dots, N$$

quand il est considéré sur la variété

$$\sum n_i = n$$

Cette condition de stabilité asymptotique est nécessaire pour effectuer l'agrégation.

L'équilibre rapide est noté par une étoile et vérifie :

$$f_i(n_1, \dots, n_{N-1}, n - \sum n_i) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, N$$

Donc, l'équilibre rapide est une fonction de la variable globale  $n$  et nous notons ses coordonnées par  $(n(n), \dots, n_N(n))$

L'étape suivante consiste à additionner les  $N$  équations du système complet initial (4.4) et à remplacer les variables dans l'équation (4.4) par l'équilibre rapide précédemment calculé comme une fonction de  $n$  pour arriver au système suivant :

$$\frac{dn}{dt} = \sum g_i(n_1(n), \dots, n_N(n)) + O(\varepsilon)$$

Cette équation gouverne la variable globale  $n$  et est appelée **modèle agrégé**. Ce **modèle agrégé** est une approximation du modèle complet initial. Il est obtenu comme un développement en série de Taylor tenant compte des puissances du petit paramètre  $\varepsilon \succ 0$ . Le premier terme de la série est une bonne approximation de la dynamique réelle du système complet quand les deux conditions suivantes sont réunies :

- le système  $\frac{dn}{dt} = \sum g_i(n_i^*(n))$  est structurellement stable, voir [6]
- le paramètre  $\varepsilon \succ 0$  est assez petit.

Dans le cas d'une équation agrégée qui n'est pas structurellement stable, il est nécessaire de calculer l'autre terme du développement de Taylor en tenant compte du paramètre  $\varepsilon$  pour approcher la dynamique réelle. Nous référons à [5] où le calcul des autres termes de la série est fait et appliqué à l'étude d'un exemple concret où nous supposons que le modèle agrégé est structurellement stable, et ainsi le premier terme est une bonne approximation de la dynamique réelle de la variable globale.

En agréant, nous avons réduit la dimension du modèle de  $N$  à 1. En effet, la dimension



du modèle initial complet est  $N$  qui est le nombre de variables d'état initiales tandis que la dimension du modèle agrégé est 1 parce que nous avons considéré une variable globale comme une variable unique.

En général, l'analyse mathématique du modèle complet initial est impossible parce qu'il comporte plusieurs variables et plusieurs équations. Mais, l'analyse mathématique d'une équation agrégée ne peut être possible qu'en étudiant seulement le premier terme de la série, en négligeant les autres termes.

L'agrégation permet non seulement la réduction de la dimension du modèle initial et sa simplification, mais elle fournit aussi d'intéressantes informations sur l'apparition des processus rapides à un niveau global. Certes même si l'équation agrégée ne dépend pas explicitement des fonctions  $f_i(n_1, \dots, n)$ .

# Bibliographie

- [1] M.T. Agardy. Advances in marine conservation: the role of marine protected areas. *Trend Ecol Evol* 9 (1994) 267-270.
- [2] G.W Allison, J. Lubchenco, M. H. Carr. Marine reserves are necessary but not sufficient condition for marine conservation. *Ecol Appl* 8 (1998) 79–92.
- [3] L. Anderson. A bioeconomic analysis of marine reserves. *Nat Resour Model* 15(3) (2002) 311–334
- [4] P. Auger, R. Bravo de la Parra, J.C. Poggiale, E. Sanchez, L. Sanz. Aggregation methods in dynamical systems and applications in population and community dynamics. *Physics of Life Reviews* 5 (2008) 79-105.
- [5] P. Auger, R. Bravo de la Parra, J.C. Poggiale, E. Sanchez, T. Nguyen-Huu. Aggregation of variables and applications to population dynamics. In *Structured population models in biology and epidemiology. Lecture notes in mathematics. Vol. 1936.* Edited by P. Magal and S. Ruan. *Mathematical Biosciences Subseries* (2008) Springer, Berlin., 209–263.
- [6] P. Auger, C. Lett, A. Moussaoui, S. Pioch . Optimal number of sites in artificial pelagic multi-site fisheries. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 67 (2010) 296-303.
- [7] P. Auger, J. C. Poggiale. Emergence of population growth models : fast migration and slow growth. *J. Theor. Biol.* 182 (1996) 99-108.
- [8] P. Auger, R. Roussarie. Complex ecological models with simple dynamics : from individuals to population. *Acta Biotheor.*, 42 (1994), No. 2-3, 111–136.

- [9] E.B., Barbier, I. Strand, S. Sathirathai. Do open access conditions affect the valuation of an externality ? Estimating the welfare effects of mangrove-fisher linkages. *Env. Resour. Econ.*, 21 (2002), 343-367.
- [10] O. Batrak. Etudes numérique et expérimentale de l'hydrodynamique des Lits Fluidisés Circulants gaz-particules avec prise en compte de la polydispersion granulométrique. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005.
- [11] M. Bensenane, A. Moussaoui. P. Auger: On the Optimal Size of Marine Reserves. *Acta Biotheoretica: Volume 61 (1) (2013) 109-118.*
- [12] M. Bernard. Thèse de Doctorat/ Université de Toulouse, 2014.
- [13] D.M.Benziane. Nouvelle approche pour la modélisation des problèmes multi-échelles en mécanique : la méthode 95/5.
- [14] Ugo Boscain, SISSA, via Beirut 2-4 34014 Trieste, Italy. A short Introduction to optimal control, Benedetto Piccoli, IAC-CNR, viale Del Policlinico 137, 00161 Roma, Italy
- [15] R. Bravo de la Parra., P. Auger, E. Sánchez , Aggregation methods in discrete models, *J. Biol. Syst.* 3 (1995) 603-612.
- [16] R. Bravo de la Parra, E. Sánchez. Aggregation methods in population dynamics discrete models, *Math. Comput. Model.* 27 (1998) 23-39.
- [17] R. Bravo de la Parra, E. Sánchez, O. Arino, P. Auger. A discrete model with density dependent fast migration. *Math. Biosci.* 157 (1999) 91-110.
- [18] R. Bravo de la Parra, E. Sánchez, P. Auger. Time scales in density dependent discrete models, *J. Biol. Syst.* 5 (1997) 111-129.
- [19] S. Brisset, "Démarches et outils pour la conception optimale des machines électriques," Habilitation à Diriger des Recherches, Université des Sciences et Technologies de Lille-Lille I, 2007.

- [20] W. Bandler, R. M. Biernacki, S. H. Chen, P. A. Grobelny, and R. H. Hemmers, “Space mapping technique for électromagnetic optimization,” *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 42, no. 12, pp. 2536–2544, 1994.
- [21] Bornert M., Bretheau T., Gilorimini P. (\*sous la direction de) *Homogénéisation en mécanique des matériaux : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques* Paris, Hermès Science Publications, 2001.
- [22] M. Bornert., T. Bretheau., P. Gilorimini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux : 1. Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques* Paris, Hermès Science Publications, 2001.
- [23] N. Braccikowski, Thèse de Doctorat << Modélisation multi-physique par modèles à constantes localisées Application à une machine synchrone à aimants permanents en vue de son dimensionnement>> Déc. 2012
- [24] C.W. Clark. *Mathematical Bioeconomics : The Optimal Management of Renewable Resources*. 2nd ed. Wiley, New York, 1990.
- [25] P. Chapoulie, “Modélisation systémique pour la conception de véhicules électriques multi-sources - Application aux véhicules équipés de générateurs photovoltaïques ou de supercondensateurs,” Thèse de Doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse, 1999.
- [26] T. P. Do, “Simulation dynamique des actionneurs et capteurs électromagnétiques par réseaux de réluctances : modèles, méthodes et outils,” Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 2010.
- [27] J. M. Delhaye. Jump conditions and entropy sources in two-phase systems. local instant formulation. *International Journal of Multiphase Flow*, 1(3) :395–409, 1974.
- [28] F. Feyel , JL. Chaboche. FE multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long bre SiC/Ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188 :309-330, 2000.

- [29] J. Fish , V. Belsky. Multigrid method for periodic heterogeneous media. Part 1 : Convergence studies for one dimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126 :1-16, 1995.
- [30] F. Legoll et M. Lewin, *Mathématiques des modèles multi-échelles*, Le Cermics - ENPC. Mars 2013.
- [31] R. Glowinski, T. W. Pan, T. I. Hesla, and D. D. Joseph. A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 25(5) :755–794, 1999. 2 citations pages 28 et 122.
- [32] R. Glowinski, T. W. Pan, T. I. Hesla, D. D. Joseph, and J. Periaux. A fictitious domain approach to the direct numerical simulation of incompressible viscous flow past moving rigid bodies: application to particulate flow. *Journal of Computational Physics*, 169(2) :363–426, 2001.
- [33] R. Glowinski, T. W. Pan, and J. Periaux. Distributed Lagrange multiplier methods for incompressible viscous flow around moving rigid bodies. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 151(1) :181–194, 1998.
- [34] D. Gidaspow. *Multiphase flow and fluidization : continuum and kinetic theory descriptions*. Academic Pr, 1994.
- [35] GDR CNRS 3532 Modélisation des Matériaux. <http://www.cinam.univ-mrs.fr/site/modmat/index.php?page=projet>.
- [36] S. Kreuawan, “Modélisation et conception optimale pour les applications ferroviaires,” Thèse de Doctorat, École Centrale de Lille, France, 2008.
- [37] H. M. Kim, “Target cascading in optimal system design,” Thèse de Doctorat, The University of Michigan, 2001.
- [38] J.T. Lafrance. Linear demand functions in theory and practice. *J. Econ. Theory*, 37 (1985), 147–166.

- [39] S.A. Levin, S. Pacala. Theories of simplification and scaling of spatially distributed processes, in : D. Tilman, P. Kareiva (Eds.), *Spatial Ecology : The Rol of Space in Population Dynamics and Interspecific Interactions*, Princeton University, 1997.
- [40] P.Y. Lagree, « méthodes Multi Echelles : développements Asymptotiques Raccordés », Université Pierre et Marie Curie.
- [41] M. Manuel Bernard, Thèse de Doctorat, APPROCHE MULTI-ECHELLE POUR LES ECOULEMENTS FLUIDE PARTICULES, Nov. 2014
- [42] V. Mester, F. Gillon, P. Brochet, And F. Wurtz, “Dimensionnement multi-modèle pour la conception optimale des machines électriques : méthodologie de conceptoptimale,” *Revue internationale de génie électrique*, vol. 11, no. 6, pp. 695–715, 2008.
- [43] A. Moussaoui, P.. Auger, C. Lett. Optimal number of sites in multi-site fisheries with fish stock dependent migrations, *Mathematical Biosciences and Engineering*. 8 (2011) 769-783.
- [44] J. C. Passieux, “Approximation radiale et méthode LATIN multi-échelle en temps et en espace,” Thèse de Doctorat, École Normale Superieure de Cachan-ENS Cachan, 2008.
- [45] C. S. Peskin. Flow patterns around heart valves : a numerical method. *Journal of computational physics*, 10(2) :252–271, 1972.
- [46] C. S. Peskin. Numerical analysis of blood flow in the heart. *Journal of computational physics*, 25(3) :220–252, 1977.
- [47] E. Sánchez, R. Bravo de la Parra, P. Auger. Discrete models with different timescales, *Acta Biotheor.* 43 (1995) 465-479.
- [48] L. Sanz. Métodos de agregación en sistemas discretos, Ph.D.thesis, Madrid, 1998.
- [49] L. Sanz, R. Bravo de la Parra. Variables aggregation in time varying discrete systems. *Acta Biotheor.* 46 (1998) 273-297.
- [50] L. Sanz, R. Bravo de la Parra, Variables aggregation in a time discrete linear model. *Math. Biosci.* 157 (1999) 111-146.

- [51] L. Sanz L., R. Bravo de la Parra, Time scales in stochastic multiregional models, *Nonlinear Analysis (Series B)* (2000), (in press).
- [52] Sanz L., Bravo de la Parra R., Time scales in a nonautonomous linear discrete model, *Math. Model. Meth. Appl.* (2000), (in press).
- [53] V.L. Smith. Economics of production from natural resources. *Am. Econ. Rev.*, 58 (1968), No. 3, 409–431.
- [54] V.L. Smith. On models of commercial fishing. *J. Political Economy*, 77 (1969), No. 2, 181–198..
- [55] W. C. Allee. *Animal Aggregations. A study in General Sociology*, University of Chicago Press, Chicago, (1931)
- [56] A. A. Andronov. S. E. Khaikin, A. A. Vitt, *Theory of oscillators*, Pergamon Press, Oxford, (1966).
- [57] E.A.Coddington, N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mac Graw Hill, New York, (1955)
- [58] L. O. Chua, M. Komuro, T. Matsumoto he double scroll family, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 33, Vol.11, (1986) 1072-1097.
- [59] J. Fish., V. Belsky. Multi-grid method for periodic heterogeneous media. Part 2 : Multiscale modeling and quality control in multidimensionam case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126 :17-38, 1995.
- [60] AN. Ihonov “Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives,” *Mat. Sbornik N.S.*, 31 (1952) 575-586.
- [61] K. Nakamura, S. Hisada, K. Arimatsu, T. Ohinata, K. Sakamoto, and O. Ichinokura, “Iron Loss Calculation in a Three-Phase-Laminated-Core Variable Inductor Based on Reluctance Network Analysis,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 45, no. 10, pp. 4781–4784, 2009.
- [62] Rossetto, B., Lenzini, T., Ramdani, S. & Suchey, G., “Slow-fast autonomous dynamical systems,” *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 8, Vol. 11, 2135-2145, (1998)

- [63] T. R. Malthus. An Essay on the Principle of Population, printed for J. Johnson, in St. Paul's Church-Yard, London (1798)
- [64] P. F. Verhulst. "Notice sur la loi que suit la population dans son accroissement," *Corresp. Math. Phys.*, X, 113-121, (1838)
- [65] R. Pearl, L. J. Reed. "On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation," *Proceedings of the National Academy of Science (U.S.A.)*, Vol. 6, 6, (1920) 275-288.
- [66] A. Moussaoui, M. Bensenane, P. Auger, Alassane Bah. On the optimal size and number of reserves in a multi-site fishery model. *Journal of Biological Systems* 01/2014; 22(4):1-17. 2014.
- [67] J.T. Oden., K. Vemaganti. Adaptive Modeling of Composite Structures : Modeling Error Estimation. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 1 :1-16, 2000.
- [68] G. Rateau, Thèse de Doctorat « méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles Applications a des problèmes de jonction et de fissuration de structures élancées », l'Ecole Centrale Paris.
- [69] C.Q.Ru., « Simple geometrical explanation of Gurtin-Murdoch model of surface elasticity with clarification of its related versions », *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, Volume 53, Issue 3, pp.536-544.

[http://www.ecp.fr/cms/site/gdrpolynano/cms/lang/fr/welcome\\_to\\_www\\_ecp\\_fr\\_site\\_gdrpolynano](http://www.ecp.fr/cms/site/gdrpolynano/cms/lang/fr/welcome_to_www_ecp_fr_site_gdrpolynano)



# Bibliographie

- [1] B Van der Pol. On 'Relaxation-Oscillations, *Phil. Mag.*, 7, Vol. 2, (1926) 978-992.
- [2] V. Volterra. *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, *Mem. Acad. Lincei III*, 6 (1926) 31-113.
- [3] V. Volterra. *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*, Gauthier-Villars, Paris, (1931).
- [4] Qu'est-ce que la modélisation multi-physique et multi-échelle ?
- [5] "Modélisation analytique et maximisation de l'induction magnétique à vide d'un moteur à aimants permanents montés en surface," *Électrotechnique du Futur (EF)*, pp. 1 – 10, 2003.
- [6] E. Wei-nan, B. Engquist , X. Li, W. Ren, E. Vanden-Eijnden, *The Heterogeneous Multiscale Method : A Review*. Department of Mathematics, Princeton University.

**Abstract:** In the first chapter are presented the concepts of multi-physics modeling and multiscale. Thus, one way to get a macroscopic response of a system from a microscopic description of the behavior is to use a homogenization technique. These are often analytical approaches. This type of modeling is also intended to give a description of physical phenomena at different scales.

The second chapter is dedicated to the presentation of examples in the field:

Materials Physics, one of the current challenges is to characterize materials over a very wide range of scales, from the nanometer to the millimeter, and in conditions of operation. The study of "real" materials remains a challenge. We go from the study of model systems to real systems where multiple scales are involved: atomic, defects, grain size, etc. in-situ studies offer the possibility to study fine manner the influence of this multi-scale structure on the physical properties for use in the course material.

Fluid: The fluid-particle flows can be studied and modeled by placing themselves at different spatial scales, namely micro, meso and macro. We present in this example, the three main length scales commonly used to describe the two-phase systems.

Mechanical: The problems of mechanics introduce entities with very different scales such as: atom, molecule, grain, inclusion, fiber, and tool room. For most problems analyzed considering a behavior averaged over the entire isolated system-wide system is sufficient. However, some issues raised by advances in technology for the development of materials, or more conventionally in the field of manufacturing processes, require a more detailed analysis with a consideration of the strong coupling between the behavior of the entities at the lower level and the overall system response.

The third chapter is interested in another area that is biology. The work presented here is a contribution to the multi-scale modeling and multi-physics models with two time scales, quick associated with rapid movements of fish between sites and a slow one the growth of the fish population and changing of the size of the fleet. We build a reduced model from the existence of two time scales, by applying the methods of aggregation of variables Strategy 2 (Iwasa et al, 1987, 1989. Auger and Poggiale 1996, 1998; Auger et al . 2008, 2012).

The model, also called aggregated model describes the dynamics of the total fish stock and the total fishing effort. studying this aggregate model, we can show that there is an optimal

size of the marine reserve which maximizes the total catch in equilibrium. A conclusion ends our work.

**Résumé:** Dans le premier chapitre sont présentées les concepts de la modélisation multi-physique et multi-échelle. Ainsi, une façon d’obtenir une réponse macroscopique d’un système à partir d’une description microscopique du comportement est d’utiliser une technique d’homogénéisation. Ce sont souvent des approches analytiques. Ce type de modélisation vise aussi à donner une description des phénomènes physiques à différentes échelles.

Le deuxième chapitre est dédié à la présentation d’exemples dans le domaine:

**Physique des Matériaux,** un des défis actuels est de caractériser les matériaux sur une gamme d’échelles très étendue, du nanométrique au millimétrique, et dans des conditions proches du fonctionnement. L’étude des matériaux « réels » demeure un véritable défi. On passe de l’étude de systèmes modèles à des systèmes réels où plusieurs échelles entrent en jeu: atomique, défauts, taille du grain, etc. Les études in-situ offrent la possibilité d’étudier de manière fine l’influence de cette structuration multi-échelle sur les propriétés physiques pour un matériau en cours d’usage.

**Fluides:** Les écoulements fluide-particules peuvent être étudiés et modélisés en se plaçant à différentes échelles spatiales, à savoir micro, méso et macro. Nous présentons dans cet exemple, ces trois principales échelles de longueur communément employées pour décrire les systèmes diphasiques.

**Mécanique:** Les problèmes de la mécanique introduisent des entités aux échelles très diverses telles que : atome, molécule, grain, inclusion, fibre, outil et pièce. Pour une majorité de problèmes une analyse considérant un comportement moyenné sur l’ensemble du système isolé à l’échelle du système est suffisante. Cependant, certains problèmes soulevés par les avancées dans la technologie de l’élaboration des matériaux, ou bien de façon plus classique dans le domaine des procédés de fabrication, nécessitent une analyse plus fine avec une prise en compte du couplage fort entre le comportement des entités à l’échelle inférieure et la réponse globale du système.

Le troisième chapitre s’intéresse à un autre domaine qui est la biologie. Le travail présenté ici se veut une contribution à la modélisation multi-échelle et multi-physique aux modèles comprenant deux échelles de temps, un rapide associé aux mouvements rapides des poissons entre

les sites et un lent correspondant à la croissance de la population de poissons et le changement de la taille de la flotte. Nous tirons part de l'existence de ces deux échelles de temps pour construire un modèle réduit, en appliquant les méthodes d'agrégation de variables **Stratégie 2**, (Iwasa et al. 1987, 1989; Auger et Poggiale 1996, 1998; Auger et al. 2008, 2012).

Le modèle réduit, appelé aussi modèle agrégé, décrit la dynamique du stock de poisson total et l'effort de pêche global. L'étude de ce modèle agrégé, nous permet de montrer qu'il existe une taille optimale de la réserve marine qui maximise les captures totales à l'équilibre.

Une conclusion termine notre travail.



## On the Optimal Size of Marine Reserves

M. Bensenane · A. Moussaoui · P. Auger

Received: 18 October 2012 / Accepted: 7 January 2013 / Published online: 5 February 2013  
© Springer Science+Business Media Dordrecht 2013

**Abstract** The excessive and unsustainable exploitation of our marine resources has led to the promotion of marine reserves as a fisheries management tool. Marine reserves, areas in which fishing is restricted or prohibited, can offer opportunities for the recovery of exploited stock and fishery enhancement. This study examines the impact of the creation of marine protected areas, from both economic and biological perspectives. The consequences of reserve establishment on the long-run equilibrium fish biomass and fishery catch levels are evaluated. We include reserve size as control variable to maximize catch at equilibrium. A continuous time model is used to simulate the effects of reserve size on fishing catch. Fish movements between the sites is assumed to take place at a faster time scale than the variation of the stock and the change of the fleet size. We take advantage of these two time scales to derive a reduced model governing the dynamics of the total fish stock and the fishing effort. Simulation results suggest that the establishment of a protected marine reserve will always lead to an increase in total fish biomass, an optimal size of a marine reserve can achieve to maximize the catch at equilibrium.

---

M. Bensenane

Département de Physique, Université de Tlemcen, Faculté des Sciences, 13000 Tlemcen, Algeria  
e-mail: be\_mryam@yahoo.fr

A. Moussaoui (✉)

Département de Mathématiques, Université de Tlemcen,  
Faculté des Sciences, 13000 Tlemcen, Algeria  
e-mail: moussaouidz@yahoo.fr

P. Auger

UMI IRD 209, UMMISCO, IRD France Nord, 93143 Bondy, France  
e-mail: pierre.auger@ird.fr

P. Auger

UPMC Univ Paris 06, UMI 209, UMMISCO, 75005 Paris, France

**Keywords** Spatial fishery · Population dynamics · Aggregation of variables · Stability

## 1 Introduction

Marine Protected Areas (MPAs), which we define as spatially well-defined areas where no harvesting takes place have been suggested as an alternative management tool in support of a precautionary approach to the protection of marine diversity, aquatic habitat, and fish stocks (Dugan and Davis 1993; Agardy 1994; Holland and Braze 1996; Allison et al. 1998; Luck et al. 1998; Bonocoeur et al. 2002; Anderson 2002; Rodwell et al. 2002; Neubert 2003; Hilborn et al. 2006). This growing interest for MPAs can be explained first by the various benefits expected from the creation of MPAs. These benefits can be broadly classified under three kinds: ecosystem preservation, fisheries management and development of the nonextractive recreational activities. Secondly, MPAs are often presented as a new tool to control over-exploitation of the marine resource, which is a serious worldwide problem. Third, another motivation is that many MPAs have already been practiced all over the world. Luck et al. (1998); assert that MPAs can be envisaged as a kind of insurance against scientific uncertainty or stocks assessments or effectiveness of regulation errors. This paper highlights the potential contribution of protected marine reserves to fishery enhancement through the development of a marine reserve-fishery model.

The objective of this paper is to examine the effects of marine reserves size on the levels of fish biomass and the catch in the long term. The manuscript is organized as follows: in the next section we study the dynamics of a model in the case of no reserve. We then generalize to the case of marine reserve. The model includes two time scales, a fast one associated to quick movements of fish between sites in comparison to a slow one corresponding to the growth of the fish population and the change of the fleet size. We take advantage of these two time scales to build a reduced model, by applying aggregation methods of variables (Iwasa et al. 1987, 1989; Auger and Poggiale 1996, 1998; Auger et al. 2008, 2012). The reduced model, called aggregated model, describes the dynamics of the total fish stock and the fishing effort. Studying this aggregated model, we show the existence of an optimal size of reserve marine that maximizes the total fish catch at equilibrium.

## 2 Pre-reserve

To begin, let us consider a coastal fishery and first assume that the whole coast can be represented as a single site. Let  $n(t)$  be the fish density and  $E(t)$  be the fishing effort, at time  $t$ . The following system describes the time evolution of the fishery:

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = rn\left(1 - \frac{n}{K}\right) - qnE \\ \frac{dE}{dt} = (-c + pqn)E \end{cases} \quad (1)$$

In this model, it is assumed that the fish population grows according to a logistic equation with growth rate  $r$  and carrying capacity  $K$ . It is also assumed that the catch is

proportional to the fish density and to the fishing effort.  $q > 0$  is a catchability parameter,  $c$  represents the cost per unit of fishing effort, and  $p$  is the price per unit of fish.

This system is well know because it is equivalent to a Lotka–Volterra predator–prey model with logistic growth for prey (Clark 1976, 1985, 1990). It has three equilibria,  $(0, 0)$ ,  $(K, 0)$ , which is a “fishery-free” equilibrium (FFE), and a unique and possibly positive fishery equilibrium (FE)  $(n^*, E^*)$  with

$$\begin{cases} n^* = \frac{c}{pq} \\ E^* = \frac{r}{q} \left(1 - \frac{c}{pqK}\right) \end{cases} \tag{2}$$

This equilibrium is positive when  $pqK > c$ . Using linear stability analysis, one can show that the origin  $(0,0)$  is always an unstable equilibrium (saddle point) and that the following two cases occur:

- If  $pqK < c$ , the FE  $(n^*, E^*)$  is not positive, and the FFE  $(K,0)$  is globally asymptotically stable. The fishery is not viable, i.e., the model predicts the extinction of the fishery.
- If  $pqK > c$ , the FE is positive and globally asymptotically stable, and the FFE is unstable (saddle point).

The fishery is viable and the catch per unit of time at equilibrium is

$$Y^* = qn^*E^* = \frac{rc}{pq} \left(1 - \frac{c}{pqK}\right) \tag{3}$$

Keeping all parameters constant except the catchability parameter  $q$ , one sees from Eq. (3) that  $Y^*$  is a function of  $q$ .  $Y^*$  is positive when  $q \in \left[\frac{c}{pK}, \infty\right[$  and reaches a maximum value for  $q = \frac{2c}{pK}$ . for this value of  $q$ , the optimal catch at equilibrium is  $\frac{rK}{4}$ .

### 3 Harvesting with a Marine Reserve

To protect the population and ecological environment, the region is divided into two patches. The population is spatially homogeneously distributed in the area which has a constant fish carrying capacity  $K$ . This area is divided in two patches, each one having a carrying capacity proportional to its size: sub-area 1 (NF) of non fishing patch and sub-area 2 of fishing (F) patch equal  $sK$  and  $(1 - s)K$ , respectively. where  $0 < s < 1$ . If  $s = 0$ , then there is no reserve, (see Fig. 1).

We assume that fish movements occur at a fast time scale  $\tau$ , whereas fish growth and the dynamics of the fishery occur at a slow time scale  $t = \varepsilon\tau$ , with  $\varepsilon < 1$  being a small dimensionless parameter. It makes sense to assume that fish movement rates are inversely proportional to the carrying capacity of the site they leave (Auger et al. 2010; Moussaoui et al. 2011):

$$m_i = \frac{\sigma}{K_i}, \quad i = 1, 2 \tag{4}$$

where  $\sigma$  is a positive constant that represents the migration rate when the carrying capacity of the departure site is set to 1. Thus, according to Eq. 4, fish are more



likely to remain on sites offering large carrying capacities, i.e., on sites where the resource is abundant. Otherwise we make the same assumptions as in the pre-reserve model for fish catch and for the dynamics of the fishery, using the same parameters  $r$ ,  $q$ ,  $c$ , and  $p$  (We assume that fish have the same growth rates on the fishing site and on the reserve site).

Let  $n_1(t)$  be the fish density of the reserve site at time  $t$ , let  $n_2(t)$  be the fish density on fishing site at time  $t$ , and, let  $E(t)$  be the fishing effort on fishing site at time  $t$ . The following system describes the time evolution of the fishery:

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{dt} = (m_2n_2 - m_1n_1) + \varepsilon rn_1 \left(1 - \frac{n_1}{sK}\right) \\ \frac{dn_2}{dt} = (m_1n_1 - m_2n_2) + \varepsilon \left( rn_2 \left(1 - \frac{n_2}{(1-s)K}\right) - qn_2E \right) \\ \frac{dE}{dt} = \varepsilon(-c + pqn_2)E \end{cases} \tag{5}$$

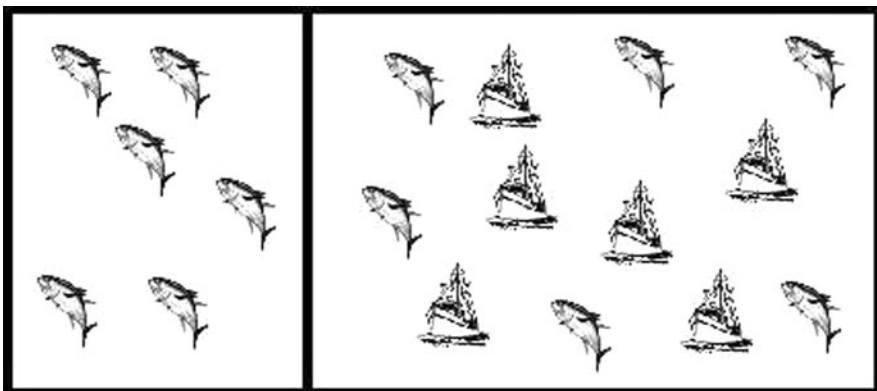
### 3.1 Fast Equilibrium

Assuming that fish move at a fast time scale in comparison to fish growth and to the dynamics of the fishery, we first look for the fast system by assuming that  $\varepsilon = 0$  in Eq. 5. At the fast time scale, the total fish density  $n(t) = n_1(t) + n_2(t)$  remains constant. It is easy to check that there is a unique positive and stable fast equilibrium for fish densities:

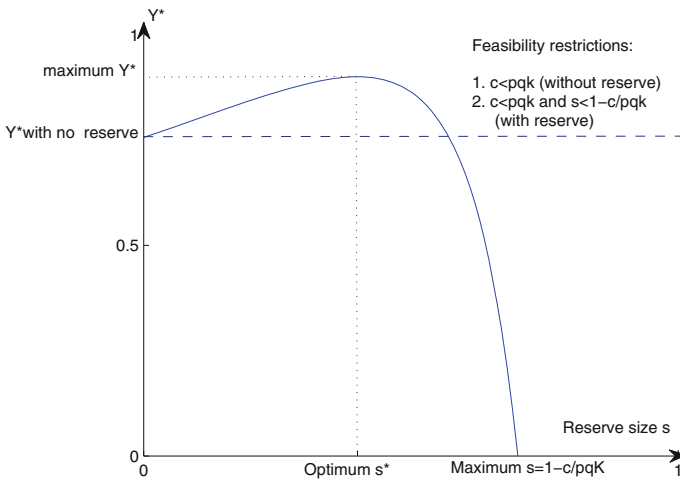
$$\begin{cases} n_1^* = sn \\ n_2^* = (1 - s)n \end{cases} \tag{6}$$

### 3.2 The Aggregated Model

Aggregation methods take advantage of two time scales to derive, from a complete model, a reduced model that describes the time evolution of global variables at the slow time scale. Here the global variables are the total fish density and the fishing effort obtained along the chain of sites. For aggregation methods, we refer to Auger and Bravo de la Parra (2000), Auger and Poggiale (1996, 1998), Auger and



**Fig. 1** Conceptual diagram of the model with refuge. The vertical line represents the boundary of a refuge, where fish are invulnerable to fishing fleet



**Fig. 2** The relationship between harvest and reserve size using reduced system. Catches increased with MPA size reaching a maximum. The parameter values are:  $r = 0.9$ ,  $c = 0.6$ ,  $p = 1$ ,  $q = 0.5$ ,  $K = 4$ . Using formula (12) we obtain  $s^* = 40\%$

Roussarie (1994), Auger et al. (2008). The aggregated model is obtained by making an approximation. This approximation consists in assuming that the fast variables are at the fast equilibrium. It is valid when  $\epsilon$  is small enough and when the aggregated model is structurally stable. The aggregated model is obtained by substituting the fast and stable equilibrium for fish (Eq. 6) into the complete system (Eq. 5) and by adding the 2 fish equations. This leads to the following structurally stable model:

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = rn\left(1 - \frac{n}{K}\right) - QnE \\ \frac{dE}{dt} = (-c + pQn)E \end{cases} \tag{7}$$

where  $n(t) = n_1(t) + n_2(t)$  is the total fish population, and  $Q$  (global catchability parameter) is given by

$$Q = q(1 - s) \tag{8}$$

The system (7) is equivalent to the pre-reserve model (1) except that the constant proportion  $s$  appears in the equations via the parameter  $Q$ . A direct application of the results obtained for the pre-reserve model therefore leads to the following results:

The aggregated model (7) has a unique positive fishery equilibrium  $(n^*, E^*)$  such that

$$\begin{cases} n^* = \frac{c}{pQ} = \frac{c}{pq(1-s)} \\ E^* = \frac{r}{Q} \left(1 - \frac{c}{pQK}\right) = \frac{r}{q(1-s)} \left(1 - \frac{c}{pq(1-s)K}\right) \end{cases} \tag{9}$$

This equilibrium is positive when

$$s < 1 - \frac{c}{pqK} = s_{\max}. \tag{10}$$

For stability analysis, the following two cases occur:

- If  $s > 1 - \frac{c}{pqK}$ , the FE  $(n^*, E^*)$  is not positive, and the FFE  $(K, 0)$  is globally asymptotically stable.
- If  $s < 1 - \frac{c}{pqK}$ , the FE is positive and globally asymptotically stable, and the FFE is unstable (saddle point).

### 3.3 The Optimal Size of a Marine Reserve

The objective of this study is to maximize the fishery’s value at equilibrium, the reserve size is an extra control variable in addition to the fishing effort. The above system (7) is studied only in ecological equilibrium,

If a reserve is to be established, it is desirable to know what size it should be in order to maximize fishery benefits. The catch per unit of time at equilibrium is given by

$$Y^* = rn^* \left( 1 - \frac{n^*}{K} \right) = \frac{rc}{pq(1-s)} \left( 1 - \frac{c}{pq(1-s)K} \right) \tag{11}$$

We then set the objective of finding the size  $s^*$  of the reserve marine that maximizes the catch at equilibrium, Eq. (11) gives the harvesting taking place in the non-reserve area as a function of the size of the reserve area. To find the optimal size, keeping all parameters constant except  $s$ , Eq. (11) is expanded into a negative parabola function of  $s$ . Optimal value for the parameter  $s$  which maximizes the stationary yields  $Y^*$  is given by

$$s^* = 1 - \frac{2c}{pqK} \tag{12}$$

whereas the second derivative of  $Y^*$  with respect to  $s$  is negative around  $s^*$

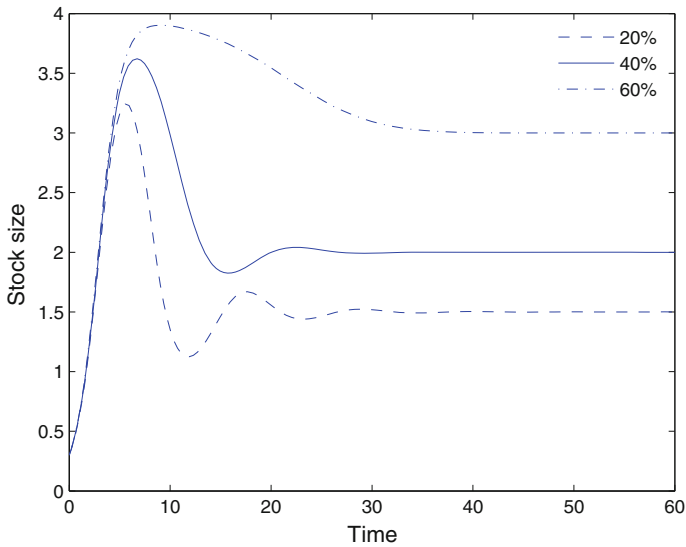
$$\frac{d^2 Y^*}{ds^2} = \frac{2rc}{pq(1-s)^3} \left( 1 - \frac{3c}{pqK(1-s)} \right) < 0$$

for  $s = s^*$ .

Thus,  $s^*$  satisfies the second-order condition and maximizes  $Y^*$ .

The optimal reserve size  $s^*$  as calculated in Eq. (12) is clearly less than  $s_{\max}$ . In other words,  $s^*$  is economically feasible (Fig. 2). We can also note that for  $s = s^*$  we have  $n^* = \frac{K}{2}$  and  $Y^* = \frac{rK}{4}$ .

Note that the size that maximize the yield at equilibrium increases with market price, catchability coefficient, and stock carrying capacity but decreases with the unit effort cost.



**Fig. 3** Effect on stock of varying reserve size  $s$ . The parameters chosen are the same as in Fig. 2

### 3.3.1 Change in Catch with the Proportion of MPA Size

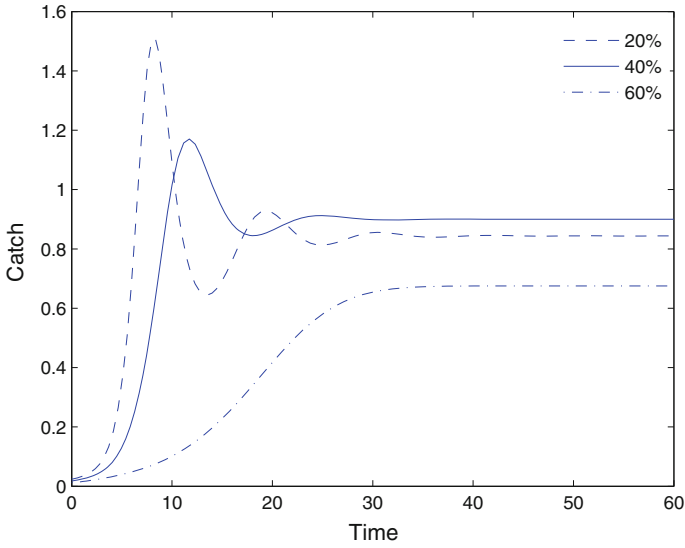
The response of catch at equilibrium to differing MPA sizes was simulated using (11). Figure 2 shows the relationship between equilibrium catch levels, reserve area and the comparative catch without a reserve: The shapes of the curves permit to conclude that the catch with the reserve can exceed catch without reserve. On the left part of the curves, yields increase with the reserve size. This phenomenon is probably linked to a better survival of fish within the MPA, while allowing fishing yield to increase by the diffusion of individuals out of the protected area. On the right part of the curve, The catch decreases if we choose  $s$  larger than  $s^*$ . In this configuration, it is assumed that the MPA has a large carrying capacity, this latter indirectly decreases the capture level. If the management objective is to maximize catch levels. For the parameters chosen, the optimal solution can be found when the reserve size is  $s^* = 40\%$ .

The simulations were run for 60 times units, which was always long enough to reach equilibrium. All equilibria were found to be stable for the same parameters chosen above.  $t = 0$  represents the time period in which the reserve was established. Figure 3 simply illustrates the equilibrium fish biomass levels for various size of reserve area. Figure 3 clearly indicates that larger reserves always increase biomass.

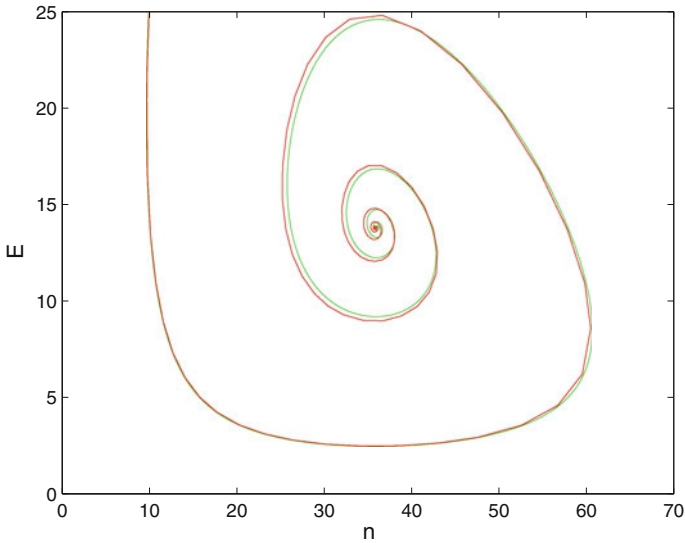
The variation of catch with MPA size in the long term has been simulated. It appears that an optimal size of the MPA exists (Fig. 4). For the same set of parameters values chosen above, the optimal relative size would equal 40%.

## 4 Discussion

The scope for implementation of marine reserves is greatly increased, if they can protect biodiversity and habitat while simultaneously maintaining or enhancing



**Fig. 4** Effect on catch of varying reserve size  $s$ . The parameters chosen are the same as in Fig. 2



**Fig. 5** Comparison between the dynamics of  $n$  and  $E$  given by the complete system (5) and that obtained with the two-dimensional system (7). We see on this figure that the reduced system solution matches quite well the complete model solution. The parameters values used in the simulation are:  $r = 0.6, k = 100, s = 0.6, q = 0.07, p = 1, c = 1, k = 100, \sigma = 1, eps = 0.0005$

fishery production. Further investigation is needed to provide more quantitative information about optimal design of reserves and to determine if reserves will be useful for the management of selected fisheries. The present work affords new

considerations on how to integrate MPAs considered as a tool for fisheries management. We have examined the effects of marine reserves size on catch at equilibrium. Our results are clearly limited to the assumptions made. There is an optimal size of the MPA in terms of fishing yield in the long term, the relationship between catch and reserve size is indeed nonlinear (Fig. 2). When the size of the MPA is small, it is beneficial to increase its size because it allows to better protect the resource which in turn increases the capture. When the size of the MPA is big, it is beneficial to reduce its size in order to have more access to the resource for the fishery and to increase the capture. In between, there is a maximum value of the MPA size for which the total capture is maximum.

In the aggregated model, parameters may depend on the total size of reserve sites  $s$ . For instance, the global catchability parameter  $Q$  is proportional to  $(1 - s)$  (Eq. 8). Our calculation has also shown that the total fish density at equilibrium  $n^*$  is inversely proportional to  $(1 - s)$  (Eq. 9), which makes sense. Indeed, large size reserve sites should lead to a larger total fish population. When the size of MPAs is small,  $s < s^*$ , it is profitable to increase the total size of reserve. This offers more resources to fish and globally favors the total fishing activity. However, when the size of reserve is too large,  $s > s^*$ , an increase of the total size of reserve marine leads to a decrease of the total fishing activity as a result of a refuge of the stock. Our simulations are restricted to the investigation of the effects of MPA size, the results show that this parameter is really to be taken into consideration if the management goal is the maximization of catches in the long term. The simulations thus suggest that by implementing MPA, there can theoretically be a compromise between both objectives of yield maximization and marine biodiversity protection.

Of course, the use of aggregation methods allowed us to simplify the mathematical analysis of the complete model, a set of 3 equations, into a simple two-dimensional aggregated model. This simplification was possible because we assumed that there were two time scales, a fast one for movements of fish and boats between sites, and a slow one dynamics. In practice, it has been shown on numerical examples that as soon as  $\varepsilon \simeq 10^{-1}$  or  $10^{-2}$ , the approximation made for “aggregating” the complete model into a reduced one is relevant, and the trajectories obtained with the aggregated model remain close to those obtained with the complete model (see Fig. 5). Therefore, if we think about a fish stock that grows annually and about boats and fish that change sites every week or so, then the method could be applied and the aggregated model used to make predictions about the complete system, as we did here.

**Acknowledgments** This work has been partly supported by the exchange program between France and Algeria Tassili: 10MDU800 and PNR: 8/u13/1030. We are very grateful to two referees for their valuable comments and suggestions which led to an improvement of our original manuscript.

## References

- Agardy MT (1994) Advances in marine conservation: the role of marine protected areas. *Trend Ecol Evol* 9:267–270
- Allison GW, Lubchenco J, Carr MH (1998) Marine reserves are necessary but not sufficient condition for marine conservation. *Ecol Appl* 8:79–92
- Anderson L (2002) A bioeconomic analysis of marine reserves. *Nat Resour Model* 15(3):311–334

- Auger P, Bravo de la Parra R (2000) Methods of aggregation of variables in population dynamics. *C R Acad Sci* 323:665–674
- Auger P, Poggiale JC (1996) Emergence of population growth models: fast migration and slow growth. *J Theor Biol* 182:99–108
- Auger P, Poggiale JC (1998) Aggregation and emergence in systems of ordinary differential equations. *Math Comput Model* 27:1–21
- Auger P, Roussarie M (1994) Complex ecological models with simple dynamics: from individuals to population. *Acta Biotheor* 42:111–136
- Auger P, Bravo de la Parra R, Poggiale JC, Sanchez E, Nguyen-Huu T (2008) Aggregation of variables and applications to population dynamics. In: Magal P, Ruan S (eds) *Structured population models in biology and epidemiology, lecture notes in mathematics*, vol. 1936, mathematical biosciences subseries. Springer, Berlin, pp 209–263
- Auger P, Lett C, Moussaoui A, Pioch S (2010) Optimal number of sites in artificial pelagic multi-site fisheries. *Can J Fish Aquat Sci* 67:296–303
- Auger P, Moussaoui A, Sallet G (2012) Basic reproduction ratio for a fishery model in a patchy environment. *Acta Biotheor* 60(1):167–188
- Bonocoeur J, Alban F, Guyader O, Thebaud O (2002) Fish, fishers, seals and tourists: economic consequences of creating a marine reserve in a multi-species, multi-activity context. *Nat Resour Model* 25(4):1–25
- Clark CW (1976) *Mathematical bioeconomics: the optimal management of renewable resources*. Wiley, New York
- Clark CW (1985) *Bioeconomic modeling and fisheries management*. Wiley, New York
- Clark CW (1990) *Mathematical bioeconomics: the optimal management of renewable resources*, 2nd ed. Wiley-Interscience, New York
- Dugan JE, Davis GE (1993) Applications of fishery refugia to coastal fishery management. *Can J Fish Aquat Sci* 50:2029–2042
- Hilborn R, Micheli F, De Leo G (2006) Integrating marine protected areas with catch regulation. *Can J Fish Aquat Sci* 63:642–649
- Holland DS, Brazee RJ (1996) Marine reserves for fisheries management. *Mar Resour Econ* 11:157–171
- Iwasa Y, Andreassen V, Levin SA (1987) Aggregation in model ecosystems. I. Perfect aggregation. *Ecol Model* 37:287–302
- Iwasa Y, Levin SA, Andreassen V (1989) Aggregation in model ecosystems. II. Approximate aggregation. *IMA J Math Appl Med Biol* 6:1–23
- Luck T, Clark CW, Mangel M, Munro GR (1998) Implementing the precautionary principles in fisheries management through marine reserves. *Ecol Appl* 8(1):72–78
- Moussaoui A, Auger P, Lett C (2011) Optimal number of sites in multi-site fisheries with fish stock dependent migrations. *Math Biosci Eng* 8:769–783
- Neubert MG (2003) Marine reserves and optimal harvesting. *Ecol Lett* 6(9):843–849
- Rodwell L, Barbier E, Roberts C, McClanahan T (2002) A model of tropical marine reserve-fishery linkages. *Nat Resour Model* 15(4):453–486





## ON THE OPTIMAL SIZE AND NUMBER OF RESERVES IN A MULTI-SITE FISHERY MODEL

ALI MOUSSAOUI\*

*Department of Mathematics, Faculty of Sciences  
University of Tlemcen, Algeria  
moussaoui.ali@gmail.com*

MERYEM BENSENANE

*Department of Physics, Faculty of Sciences  
University of Tlemcen, Algeria  
be\_mryam@yahoo.fr*

PIERRE AUGER

*UMI IRD 209 UMMISCO  
Centre IRD de Ile de France  
32 Avenue Henri Varagnat, 93143  
Bondy Cedex, France  
UPMC, Sorbonne University  
Pierre et Marie Curie-Paris 6, France  
Université Cheikh Anta Diop  
UMI 209 IRD UMMISCO-UCAD  
Dakar, Sénégal  
pierre.auger@ird.fr*

ALASSANE BAH

*ESP, Université Cheikh Anta Diop  
UMI 209 IRD UMMISCO-UCAD  
Dakar, Sénégal  
alassane.bah@gmail.com*

Received 13 November 2013

Revised 29 June 2014

Accepted 3 July 2014

Published 20 August 2014

This paper addresses the problem of the optimal size and number of marine reserves to achieve maximum value in commercial fisheries. A simplified network planning situation is analyzed to optimize the size and number of marine reserves. We consider a general  $2L$ -patch model of harvesting population dynamics with continuous time. Fish movements between the sites, as well as vessel displacements between the fishing sites, are assumed to take place at a faster time scale than the variation of the stock and the change of the fleet size. We take advantage of these two time scales to derive a reduced model governing the dynamics of the total fish stock and the total fishing effort. This reduced model is used to determine the optimal size and number of a marine reserves

\*Corresponding author.

in order to maximize the catch at equilibrium. We show that the optimal number that maximizes the total fish catch at equilibrium depend intricately on the size of the reserve: A small number of reserves is optimal when the size of the reserve is higher and inverse.

*Keywords:* Fishery Model; MPAs; Time Scales; Aggregation of Variables; Stability.

### 1. Introduction

The idea that marine protected areas (MPAs), i.e., the exclusion of certain zones of the ocean from fishing, can serve as a tool to alleviate the fisheries problem has attracted a good deal of attention in recent years. MPAs are mainly located around natural parks and biosphere reserves,<sup>1,2</sup> up to 0.25% of the ocean is currently allocated to MPAs of various types.<sup>3</sup> The number of MPAs along the Senegalese coast is around 5 at the present time (Fig. 1). The social and economic Senegalese context, the overexploitation of commercial species and global changes have motivated the creation of MPAs.<sup>4,5</sup> There are three main goals of MPAs:

- (1) To preserve biodiversity and habitats, to limit exploitation of fish populations.
- (2) To maintain a sustainable fishery with increased fish biomass as well as catches.
- (3) To promote touristical activities.

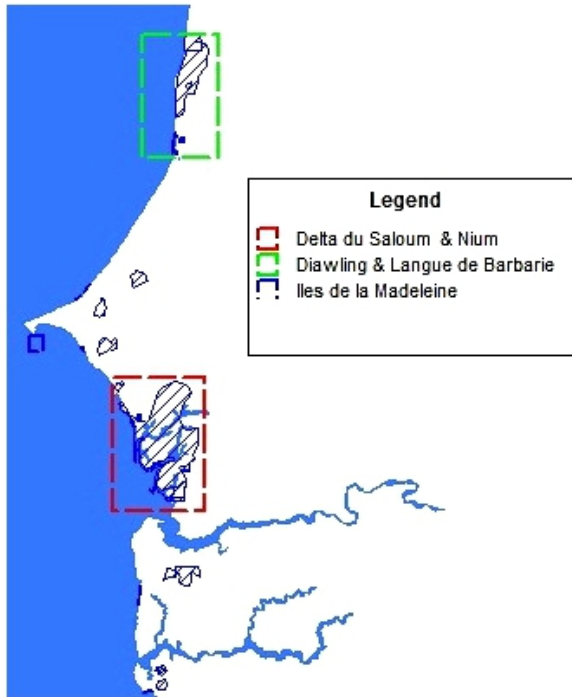


Fig. 1. Map of the Senegalese coast and the locations of MPAs (adapted by I. Tour).

Even if the utilities of MPAs are mostly recognized by local communities and governmental authorities, there are still many open problems about the creation of MPAs,<sup>6-8</sup> in particular, location, size, should it be a large one or several small ones, and interaction with the network of already established MPAs. Furthermore, some analyses reveal difficulties about the governance and management of MPAs.

The design of nature reserve systems for conserving biological diversity has received substantial attention from economists during the past decade and conservation biologists for much longer.<sup>9-11</sup> One of the most fundamental issues that has been debated is the tradeoff between the number of reserves and the size of reserves, which in the literature is known as the single large or several small (SLOSS) debate. In this paper, we place this issue in an economic context by taking into account the benefits of reserves and their opportunity. We find that the optimal number of reserves cannot, in general, be determined independently of the optimal total area of the reserve system. The optimal number of reserves is scale dependent, with the optimal scale of protection (total reserved area) depending on interactions between economic and ecological factors. We concentrate on a simple case of a coastal fishery represented as a linear chain of patches. We consider a single fish population exploited by the fishery that is not territorial and that is moving from patch to patch. Among ecological factors, we highlight the importance of multiple reserves. The paper is organized broadly as follows. In the Sec. 2, we set out our basic fisheries model in the case of no reserve. In the Sec. 3, we add the marine reserve components to the model. In order to investigate the practical effects of the protection zone on the conservation of population resources, we study the dynamics of a model in case of several sites (chain of  $L$  fishing sites and  $L$  reserve sites). To perform the analysis of this model, we build a reduced model, called the aggregated model, which describes the dynamics of the total fish stock and the total fishing effort on the chain of sites. Studying this aggregated model, we find that the optimal number of reserves that maximizes the total fish catch at equilibrium depends on the scale of protection.

## 2. Presentation of the Basic Fishery Model

In this section, we summarize some crucial properties of the basic fisheries model without marine reserves. This will serve as a convenient benchmark in evaluating the impact of marine reserves in later sections. Consider a fishing area of constant size inhabited by a stock of fish. Let  $n(t)$  be the fish biomass and  $E(t)$  be the fishing effort, at time  $t$ . We assume that the population evolves according to the logistic law of growth.<sup>12-14</sup> The following system describes the time evolution of the fishery<sup>15,16</sup>:

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{K}\right) - qnE \\ \frac{dE}{dt} = \phi(-c + pqn)E \end{cases}, \quad (2.1)$$

where  $r$  is the growth rate of the resource and  $K$  its carrying capacity. It is also assumed that the catch is proportional to the fish biomass and to the fishing effort.  $q > 0$  is a catchability parameter,  $c$  represents the cost per unit of fishing effort, and  $p$  is the price per unit of fish biomass,  $\phi$  is a stiffness parameter for the capture fishery. This system is well known because it is equivalent to a Lotka–Volterra predator–prey model with logistic growth for prey. It has three equilibria,  $(0, 0)$ ,  $(K, 0)$ , which is a “fishery-free” equilibrium (FFE), and a unique and possibly positive fishery equilibrium (FE)  $(n^*, E^*)$  with

$$\begin{cases} n^* = \frac{c}{pq} \\ E^* = \frac{r}{q} \left( 1 - \frac{c}{pqK} \right) \end{cases}. \quad (2.2)$$

This equilibrium is positive when  $pqK > c$ . Using linear stability analysis, one can show that the origin  $(0, 0)$  is always an unstable equilibrium (saddle point) and that the following two cases occur:

- (i) If  $pqK < c$ , the FE  $(n^*, E^*)$  is not positive, and the FFE  $(K, 0)$  is globally asymptotically stable. The fishery is not viable, i.e., the model predicts the extinction of the fishery.
- (ii) If  $pqK > c$ , the FE is positive and globally asymptotically stable, and the FFE is unstable (saddle point).

The fishery is viable and the catch per unit of time at equilibrium is

$$Y^* = qn^*E^* = \frac{rc}{pq} \left( 1 - \frac{c}{pqK} \right). \quad (2.3)$$

Keeping all parameters constant except the catchability parameter  $q$ , one sees from Eq. (2.3) that  $Y^*$  is a function of  $q$ .  $Y^*$  is positive when  $q \in ]\frac{c}{pK}, \infty[$  and reaches a maximum value for  $q = \frac{2c}{pK}$ . For this value of  $q$ , the optimal catch at equilibrium is the maximum sustainable yield, (MSY), and equals to  $\frac{rK}{4}$ .

### 3. Marine Reserves

We now turn our attention to marine reserves. Our objective in this section has been to address some general questions about the possible effects of multiple MPAs on the fishery activity. We will take it that marine reserves exclude some part of the total fishing area from the fishing activity. Let us refer to this part as a fraction of the total fishing area denoted by  $s$ . Clearly, being a fraction  $s \in [0, 1]$ ,  $s = 0$  represents no marine reserves and  $s = 1$  indicates that the whole fishing area is a reserve. In order to investigate the effects of space partitioning in the efficacy of MPAs, we set out to construct and analyze a spatially explicit fishery model and use it to determine the ideal size and number of marine reserves that maximizes

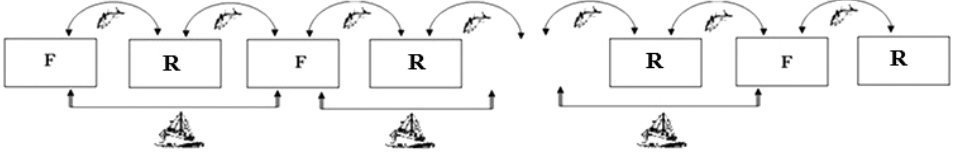


Fig. 2. Schematic representation of a multi-site fishery with several MPAs. The drawing represents a linear set of patches having a total number of patches  $2L$ , with  $L$  fishing ( $F$ ) patches and  $L$  reserve ( $R$ ) patches.

catch at equilibrium. Our model assumes a linear array of  $2L$  areas such as might occur along a coastline.<sup>10,17</sup> The underlying assumptions are (see Fig. 2):

- (1) There are  $2L$  patches in one dimension ( $L$  is the number of fishing patches as well as the number of MPAs).  $2L$  characterizes the total length of the chain of patches.
- (2) We assume that between two consecutive fishing patches, there is always a single MPA or reserve ( $R$ ), where fishing is forbidden. Also to simplify, it is assumed that the chain always starts with an ( $F$ ) patch at the left and ends with a ( $R$ ) patch at the right.
- (3) Each patch is relatively isolated, but it is assumed that fish can migrate between any pair of adjacent patches as well as boats can move between any pair of adjacent fishing patches. We assume that fish movements and boat displacements occur at a fast time scale  $\tau$ , whereas fish growth and the dynamics of the fishery occur at a slow time scale  $t = \varepsilon\tau$ , with  $\varepsilon \ll 1$  being a small dimensionless parameter. It makes sense to assume that the movement rate for boats from a site to a neighboring site depends on the distance between these sites. Therefore, we assume symmetric movement rates for boats:

$$\beta_{2i-1,2i+1} = \beta_{2i+1,2i-1}, \quad (3.1)$$

for  $i \in [1, L-1]$ . Fish movement rates are inversely proportional to the carrying capacity of the site they leave:

$$m_i = \frac{\sigma}{k_i}, \quad (3.2)$$

for all  $i \in [1, 2L]$  where  $\sigma$  is a positive constant that represents the migration rate when the carrying capacity of the departure site is set to 1. Thus, according to Eq. (3.2), fish are more likely to remain on sites offering large carrying capacities, i.e., on sites where the resource is abundant. The latter assumption means that fishes should distribute among patches according to the ideal free distribution, (IFD).<sup>18</sup>

- (4) We assume that each reserve site  $i$  ( $i = 1, \dots, L$ ) has carrying capacity  $k_i = s_i K$ , ( $s_i < 1$ ) and the total size of these reserve sites equal to  $sK$  where  $s = \sum_{i=1}^L s_i < 1$ , and represents the fraction of the total carrying capacity in MPA.  $K = \sum_{i=1}^{2L} k_i$  is the total and constant carrying capacity of the linear chain.

Let  $n_i(t)$  be the fish biomass on patch  $i$  at time  $t$ . Let  $E_i(t)$  be the fishing effort, i.e., the number of fishing days or fishing boats (in case of a homogeneous fleet) on patch  $i$  at time  $t$ . Assuming that following parameters  $r, q, c$  and  $p$  are patch independent, the next system that we call the complete system describes the time evolution of the fishery at patch  $i$  at the fast time scale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dn_i}{d\tau} = m_{i-1}n_{i-1} + m_{i+1}n_{i+1} - 2m_in_i + \varepsilon \left( rn_i \left( 1 - \frac{n_i}{k_i} \right) - qn_iE_i \right) \\ \quad \text{if area } i \text{ is not in a reserve} \\ \frac{dn_i}{d\tau} = (m_{i-1}n_{i-1} + m_{i+1}n_{i+1} - 2m_in_i) + \varepsilon rn_i \left( 1 - \frac{n_i}{k_i} \right) \\ \quad \text{if area } i \text{ is in a reserve} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

for  $i \in [2, 2L - 1]$ .

For the first and last patches we have:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dn_1}{d\tau} = (m_2n_2 - m_1n_1) + \varepsilon \left( rn_1 \left( 1 - \frac{n_1}{k_1} \right) - qn_1E_1 \right) \\ \frac{dn_{2L}}{d\tau} = (m_{2L-1}n_{2L-1} - m_{2L}n_{2L}) + \varepsilon rn_{2L} \left( 1 - \frac{n_{2L}}{k_{2L}} \right) \end{array} \right. . \quad (3.4)$$

The following system describes the time evolution of the fishing efforts along the chain at the fast time scale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE_i}{d\tau} = (\beta_{i,i-2}E_{i-2} + \beta_{i,i+2}E_{i+2} - (\beta_{i-2,i} + \beta_{i+2,i})E_i) \\ \quad + \varepsilon(-c + pqn_i)E_i \quad \text{if area } i \text{ is not in a reserve} \\ \frac{dE_i}{d\tau} = 0 \quad \text{if area } i \text{ is in a reserve} \end{array} \right. , \quad (3.5)$$

for  $i \in [3, 2L - 3]$ .

For the first patch and patch  $2L - 1$  we have:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE_1}{d\tau} = (\beta_{13}E_3 - \beta_{31}E_1) + \varepsilon(-c + pqn_1)E_1 \\ \frac{dE_{2L-1}}{d\tau} = (\beta_{2L-1,2L-3}E_{2L-3} - \beta_{2L-3,2L-1}E_{2L-1}) \\ \quad + \varepsilon(-c + pqn_{2L-1})E_{2L-1} \end{array} \right. . \quad (3.6)$$

### 3.1. *The aggregated model*

Now, we shall take advantage of aggregation of variables methods to build a reduced model.<sup>19–22</sup> The first step is to set  $\varepsilon = 0$  in the previous complete model and to look

for existence and stability of a fast equilibrium which is as follows (see Appendix):

$$\begin{cases} n_i^* = v_i^* n = \frac{k_i}{K} n \\ E_i^* = \mu_i^* E = \frac{1}{L} E & \text{if area } i \text{ is not in a reserve} \\ E_i^* = 0 & \text{if area } i \text{ is in a reserve} \end{cases} \quad (3.7)$$

Substituting the fast equilibrium into the complete model leads after some straight-forward calculation to the fishery two-dimensional aggregated model which reads as follows:

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{K}\right) - QnE \\ \frac{dE}{dt} = (-c + pQn) E \end{cases}, \quad (3.8)$$

where  $n = \sum_{i=1}^{2L} n_i$  is the total fish population,  $E = \sum_{i=1}^L E_{2i-1}$  the total fishing effort, and  $Q$  (global catchability parameter) is given by

$$Q = \frac{q(1-s)}{L}. \quad (3.9)$$

The system (3.8) is equivalent to the classical fishery model that we recalled in Sec. 2 [Eq. (2.1)] except that the number  $L$  and the size  $s$  appear in the equations via the parameter  $Q$ . A direct application of the results obtained for the classical model therefore leads to the following results: The multisite aggregated model [Eq. (3.8)] has a unique positive FE  $(n^*, E^*)$  such that

$$\begin{cases} n^* = \frac{c}{pQ} = \frac{cL}{pq(1-s)} \\ E^* = \frac{r}{Q} \left(1 - \frac{c}{pQK}\right) = \frac{rL}{q(1-s)} \left(1 - \frac{cL}{pq(1-s)K}\right) \end{cases}. \quad (3.10)$$

The fishery is viable provided that this equilibrium belongs to the positive quadrant, i.e.,

$$L < \frac{pq(1-s)K}{c} = L_{\max}. \quad (3.11)$$

As a consequence, the total catch  $Y^*$  of the fishery at equilibrium is given by

$$Y^* = Qn^*E^* = \frac{rcL}{pq(1-s)} \left(1 - \frac{cL}{pq(1-s)K}\right). \quad (3.12)$$

Equation (3.12) shows that, at equilibrium, the catch depends on the number of patches which are protected and the size of reserve.

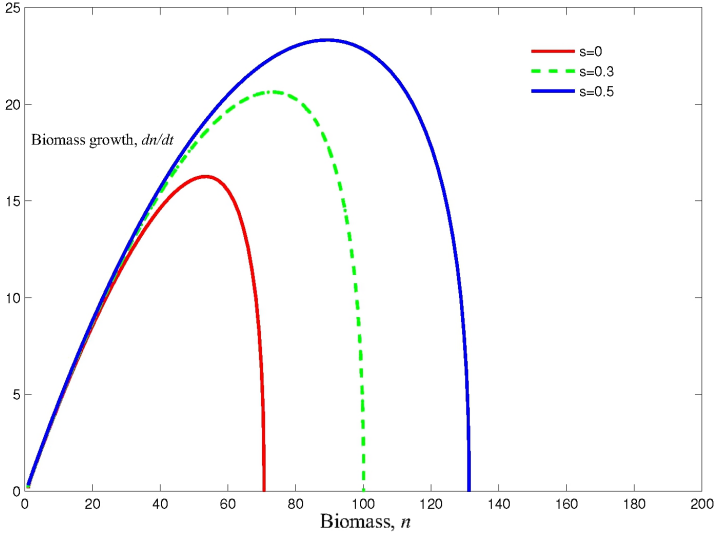


Fig. 3. The effect of marine reserves on biomass growth, the horizontal axis is  $n$ . The biomass of fish, the vertical axis is  $dn/dt$ . The biomass growth. Parameters are:  $r = 0.5, K = 200, q = 0.17, p = 0.15, c = 0.5, L = 1$ .

From (3.12) we see that  $Y^*$  has a maximum for the following number of sites:

$$L_{\text{opt}} = \frac{pq(1-s)K}{2c} = \frac{L_{\text{max}}}{2}. \quad (3.13)$$

We can also note that for  $L = L_{\text{opt}}$ , we have  $n^* = \frac{K}{2}$  and  $Y^* = \frac{rK}{4}$  which is the MSY.

To make some headway it may be useful to resort to a numerical representation of the situation arising from (3.8). Indeed, as will become evident below in Fig. 3, marine reserves may influence fish biomass growth in various ways. It is for instance possible that marine reserves, by providing some of the fish with a sanctuary from disturbing fishing activity may actually enhance fish biomass growth. The same effect may occur if marine reserves manage to protect fast growing immature fish or conserve habitat variables important for fish survival and growth.

We also performed further simulation to explore the effects of implementing several smaller reserves rather than just a large one. From this result, it appears that having several smaller MPAs may be better in terms of increased fish biomass growth than a single larger MPA of the same total area (Fig. 4).

An example of the impact of marine reserves of various sizes on fish biomass levels, fishing effort and catch at equilibrium arising from Eqs. (3.10) and (3.12) is illustrated in Fig. 5.

Figure 5 demonstrates quite clearly that equilibrium biomass increases monotonically with the extent of the total reserve size while the effect on fishing effort and harvest equilibrium is non-monotonic. The inclusion of marine reserve increases



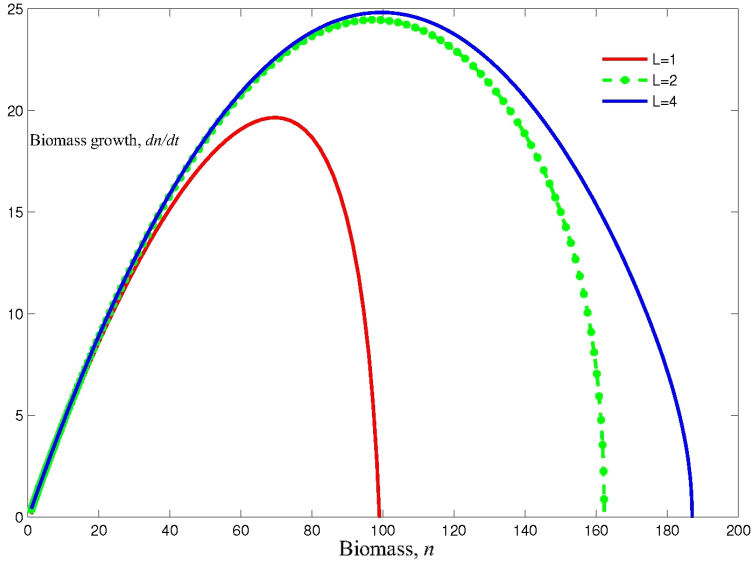


Fig. 4. The effect of number of reserves on biomass growth. Multiple reserves evidently can be ecologically superior to a single larger one. Parameters are:  $r = 0.5, K = 200, q = 0.17, p = 0.15, c = 0.5, s = 30\%$ .

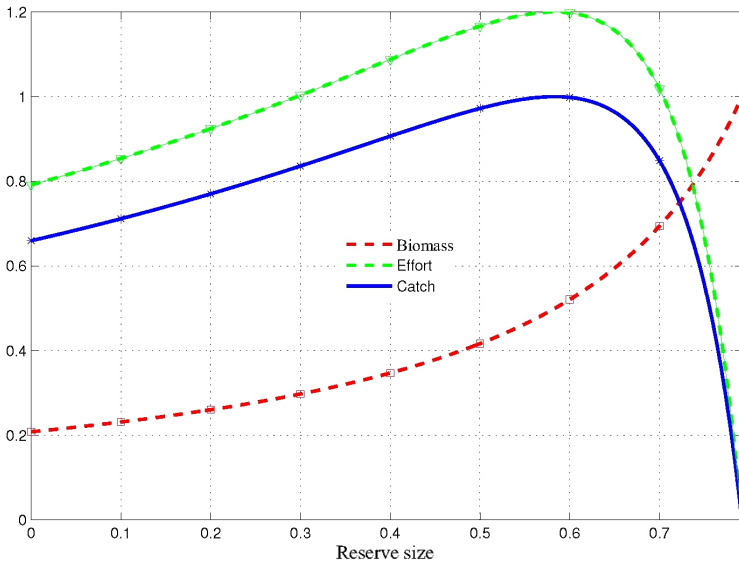


Fig. 5. Variation of the fish biomass (red), fishing effort (green) and catch (blue); at equilibrium with the increasing size of the reserve.  $r = 1, c = 1, L = 1, p = 1.2, q = 1, K = 4$ .

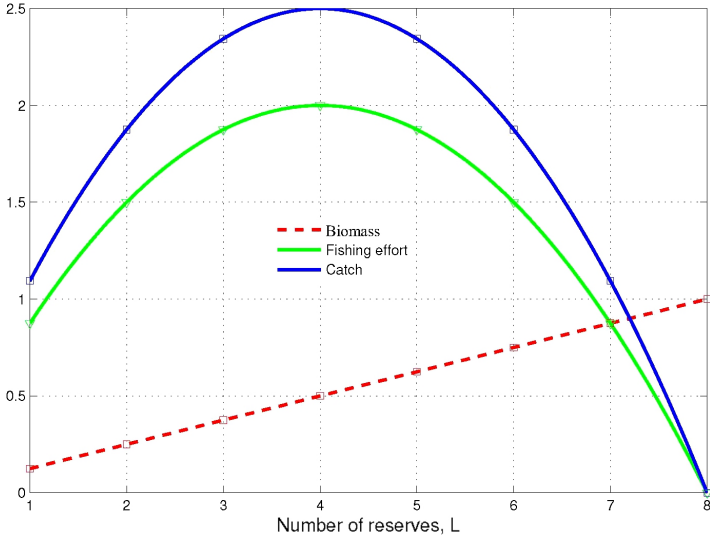


Fig. 6. The impact of number of marine reserves on fish biomass (red), fishing effort (green) and catch (blue); at equilibrium:  $r = 0.5, c = 1, s = 0.5, p = 0.8, q = 1, K = 20$ .

the biomass of fish and the catch compared to open access. Indeed the harvest level seems to be maximized in this case at an approximate marine reserve extent of 0.6.

Similarly, by using Eqs. (3.10) and (3.12), the impact of number of reserves on the fish biomass, fishing effort and catch at equilibrium is illustrated in Fig. 6.

Figure 6 illustrates the case where the biomass, fishing effort and catch at equilibrium increase as a result of the increasing of number of marine reserves, however, inspection of Fig. 6 makes it clear that if the shift in the effort equilibrium curve is large enough, fishing effort and then catch might actually be reduced. Indeed the harvest level seems to be maximized in this case at an approximate number of reserves equal to 4.

#### 4. The Optimal Size and Number of Marine Reserves

We now examine the tradeoff between the number and average size of marine reserves to maximize the catch at equilibrium. Equation (3.12) implicitly define catch  $Y^*$  as a function of number of reserve areas  $L$  and the fraction closed  $s$ . The partial derivatives of  $Y^*$  with respect to these quantities are

$$\frac{\partial Y^*}{\partial L} = \frac{rc}{pq(1-s)} \left( 1 - \frac{2cL}{pq(1-s)K} \right) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial Y^*}{\partial s} = \frac{rcL}{pq(1-s)^2} \left( 1 - \frac{2cL}{pq(1-s)K} \right) \quad (4.2)$$

it is of particular interest to determine under what conditions  $Y^*$  is optimal, according to (4.1) and (4.2), this occurs when

$$\frac{1-s}{L} = \frac{2c}{pqK}. \tag{4.3}$$

We obtain simple expression between the number and the size of reserves that maximize the catch at equilibrium. Equation (4.3) can be interpreted as a balance equation, saying that how the maximum capture at equilibrium depends on the fraction of total fishing size and number of reserves (see Fig. 7). The general result from this analysis is that the catch at equilibrium is maximized always when the total size and number of marine reserves verifies (4.3). The optimal size will depend intricately on the number of reserves. We can also note that when (4.3) occurs, we have  $n^* = \frac{K}{2}$  and  $Y^* = \frac{rK}{4}$ . It can be seen that there exists a straight line of local maxima where the catch  $Y^*$  is equal to the MSY (Fig. 7). From this graphical result, it becomes evident that there exists a positively sized optimal marine reserve and a specific partitioning of this reserve that will maximize the value of the fishery. This can be seen by noting that the value of the fishery increases as  $s$  begins to increase. However, it is important to note that the increase in value does not persist. As the size of the reserve becomes too large, it restricts the available fishery population for harvest and therefore reduces the value of the fishery. To determine the optimal reserve size for the fishery, it is necessary to locate the peaks of the value function for all levels of number of reserves  $L$ . Observe that the optimal reserve size is a decreasing function of the number of reserves  $L$  (Figs. 7 and 8). Leading one to

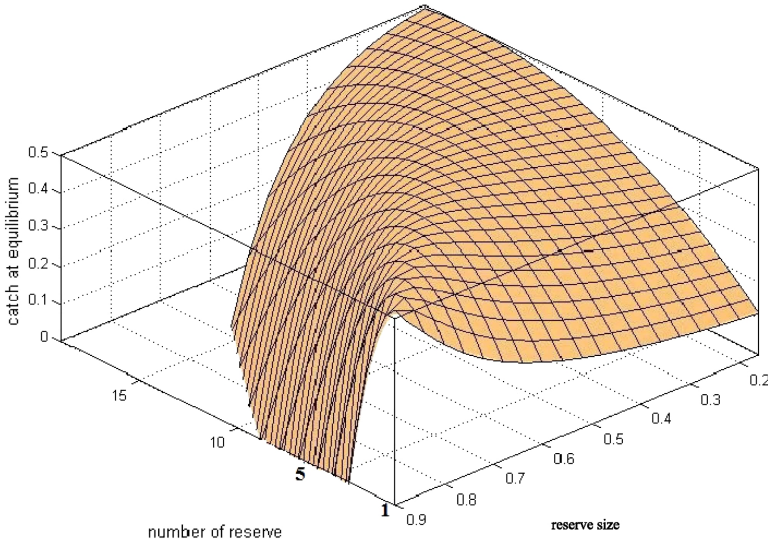


Fig. 7. Effects of size and number of marine reserves on the catch at equilibrium. Parameter values:  $r = 1, c = 0.05, p = 1, q = 1, K = 2$ .

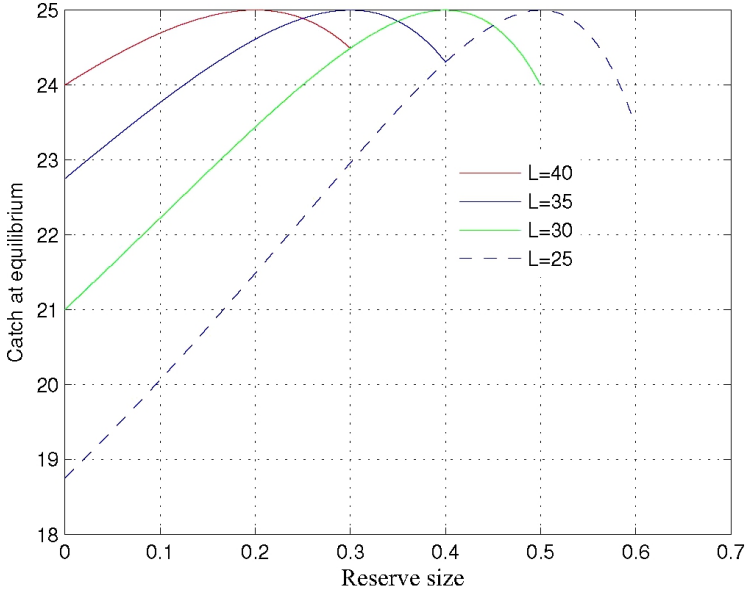


Fig. 8. Total catch at equilibrium as a function of reserve size, according to the relative number of the reserve ( $L$ ):  $r = 2, c = 1, p = 2, q = 1, K = 50$ .

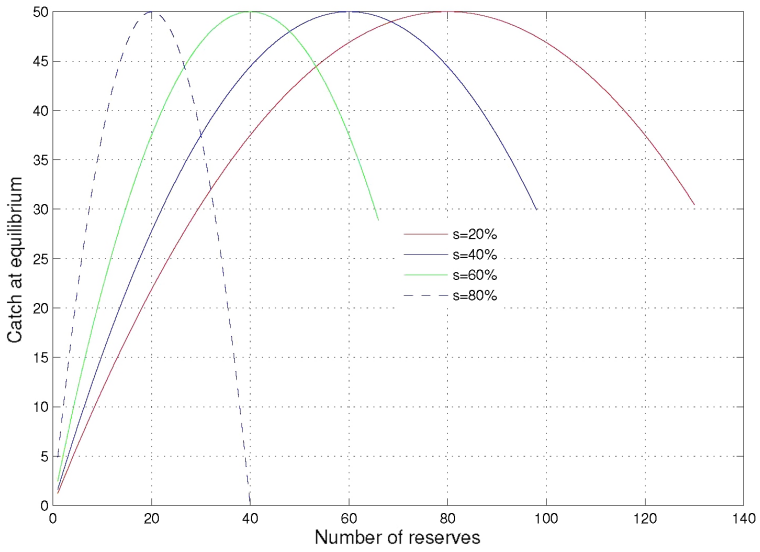


Fig. 9. Catch at equilibrium versus the number of reserves for different values of  $s$  arising from (3.12):  $r = 2, c = 1, p = 2, q = 1, K = 100$ .

draw the conclusion it is optimal to establish a reserve and its size will depend intricately on the number of reserves.

Figures 7 and 8 arising from (3.12) show the effect of extending the size of a marine reserve on sustainable catches; we study the effects of varying the size of reserve  $s$  for fixed and different values of  $L$ . If one keeps the size constant, we observe a maximum of the catch when the number of reserves increases. If the regulator actually controls the number of marine reserves and aims at maximizing sustainable catches, the preferred option would be to increase the number of the reserves for a small fixed total size of reserve, contrary, if the total size of reserves is large, the strategy gives the higher catch to reduce the number of reserves. Another feature that may be observed when increasing the size of reserve is that the optimal catch (MSY) is the same but at a lower number of reserves.

Similarly, Figs. 7 and 9 show the graph of  $Y^*$  with respect to  $L$ , but for fixed and different values of  $s$ , we observe that we get the same MSY but for lower number of reserves when we increase the size of reserve. If the regulator actually controls the size of the marine reserve and aims at maximizing sustainable catches, the preferred option would be to increase the size of the reserve for a small number of reserve, and decrease the size of reserve when we decide to install a higher number of reserves.

## 5. Discussion

In this paper, we presented a mathematical framework to aid in the decision of whether or not it would be beneficial to introduce an MPA, and if so, how to implement it. Specially, we addressed the question of what is the optimal number and, the total size of reserve sites that maximizes the catch at equilibrium. Let us begin by recapitulating briefly the results in this paper. A fish stock is distributed over a given area. Open access the stock would be fished down to its break even point, the fishing effort would be greater than needed to maximize the economic benefits. Closing off a part of the area would raise the biomass of fish in the closed area. Some of the increase in the biomass of fish in the reserve would spill over into the open area, due to the migration of the fish, and attract more fishing boats, which in turn may increase the fishing yield. Our multisite fishery model indicates the existence of an optimal size and number of reserves that maximizes the total catch at equilibrium.

Looking back at our model, we can investigate the reasons why such a result occurred. In the aggregated model, parameters may depend on the number of fishing sites  $L$  and total size of reserve  $s$ . For instance, the global catchability parameter  $Q$  is proportional to size of non-reserve area  $(1 - s)$  and inversely proportional to  $L$  [Eq. (3.9)]. Our calculation has also shown that the total fish biomass at equilibrium  $n^*$  is proportional to  $L$  and inversely proportional to  $1 - s$  [Eq. (3.10)], which makes sense. The total fishing effort at equilibrium  $E^*$  is a function of  $L$  and  $s$  [Eq. (3.10)]. We derived an optimal relationship between the number of reserves  $L$  and total size

of reserves  $s$  given by Eq. (4.3) that maximizes the fishing effort and the catch at equilibrium.

The relationship between catch and number of reserve sites is indeed nonlinear (Figs. 6, 7 and 9). For a fixed number of reserves and when the size of the MPA is small, it is beneficial to increase its size because it allows to better protect the resource which in turn increases the capture. However, when the size of the MPA is big, it is beneficial to reduce its size in order to have more access to the resource for the fishery and to increase the capture. In between, there is a maximum value of the MPA size for which the total capture is maximum. Similarly, when the size of total reserve is fixed, there exists an optimal number of fishing sites (reserves) that maximizes the total catch at equilibrium (Figs. 6 and 8), when the number of reserves is small ( $L < L_{opt}$ ), it is profitable to increase the number of reserves. This offers more sites and resources to fish and globally favors the total fishing activity. However, when the number of sites is too large, ( $L > L_{opt}$ ), an increase of the total number of sites leads to a decrease of the total fishing activity as a result of an overexploitation of the stock.

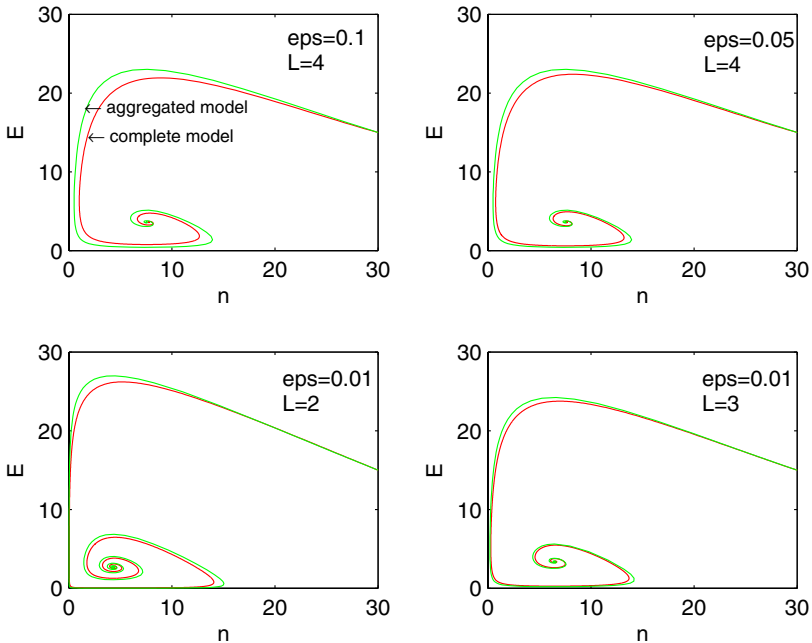


Fig. 10. Comparison between the dynamics of  $n$  and  $E$  given by the complete system (3.3-3.5) (red) and that obtained with the two-dimensional system (3.8) (green) for different values of  $\varepsilon$  and  $L$ . We see on this figure that the reduced system solution matches quite well the complete model solution. The parameters values used in the simulation are :  $r = 0.7, k = 20, q = 0.8, p = 0.7, c = 0.6, \sigma = 1, \beta_{13} = \beta_{31} = 0.5, \beta_{35} = \beta_{53} = 0.4, \beta_{75} = \beta_{57} = 0.6$ .

By now, a relatively few number of MPAs have been created in Senegal. There are still several MPAs planned in the near future. At that time, there is still few feedback about their effect on the commercial fish population. This model is a preliminary step to help decision makers in MPA design. We shall now in cooperation with the Senegalese Environmental Ministry and with the CRODT (Centre de Recherche Océanographique de Dakar Thiaroye) develop modeling scenario on commercial species such as the false cod, commonly thiof, for which data are available.<sup>23</sup>

Of course, the use of aggregation methods allowed us to simplify the mathematical analysis of the complete model, a set of  $4L$  equations, into a simple two-dimensional aggregated model. This simplification was possible because we assumed that there were two time scales, a fast one for movements of fish and boats between sites, and a slow one corresponding to the fish population growth and to the fishery dynamics. In practice, it has been shown by numerical examples that as soon as  $\varepsilon = 10^{-1}$  or  $10^{-2}$ , the approximation made for aggregating the complete model into a reduced one is relevant, and the trajectories obtained with the aggregated model remain close to those obtained with the complete model see (Fig. 10). Therefore, if we think about a fish stock that grows annually and about boats and fish that change sites every month or so, then the method could be applied and the aggregated model used to make predictions about the complete system, as we did here.

## Acknowledgments

We would like to thank the referees and the editor for their careful reading of the original manuscript and their many valuable comments and suggestions that greatly improved the presentation of this work. This work was partially supported by the Franco-Algerian Project: Tassili 10MDU800 and the National Research Project: PNR 08/U13/1030.

## References

1. Allison GW, Lubchenco J, Carr MH, Marine reserves are necessary but not sufficient for marine conservation, *Ecol Appl* **8**:346–362, 1989.
2. Gilpin ME, Diamond JM, Subdivision of nature reserves and the maintenance of species diversity, *Nature* **285**:567–568, 1998.
3. Sumaila R, Economics of marine protected areas, *The Fisheries Centre. University of British Columbia* **9**:2001.
4. Chateau O, Wantiez L, Movement patterns of four coral reef fish species in a fragmented habitat in New Caledonia: Implications for the design of marine protected area networks, *ICES J Marine Sci* **66**:50–55, 2009.
5. Weigel JY, Féral F, Cazalet B, Les aires marines protégées d’Afrique de l’Ouest. Gouvernance et politiques publiques. Presses Universitaires de Perpignan, 2007.
6. Groeneveld R, Economic considerations in the optimal size and number of reserve sites, *Ecol Econ* **52**:219–228, 2005.

7. Hannesson R, Marine reserves: What would they accomplish? *Marine Res Econ* **13**:159–170, 1998.
8. Higgs AJ, Usher MB, Should nature reserves be big or small? *Nature* **285**:568–569, 1980.
9. Botsford LW, Micheli F, Hastings A, Principles for the design of marine reserves, *Ecol Appl* **13**:25–31, 2003.
10. Hastings A, Botsford LW, Comparing designs of marine reserves for fisheries and for biodiversity, *Ecol Appl* **13**:65–70, 2003.
11. Potts MD, Vincent JR, Spatial distribution of species populations, relative economic values, and the optimal size and number of reserves, *Environ Resour Econ* **39**:91–112, 2008.
12. Auger P, Mchich R, Raïssi N, Kooi BW, Effects of market price on the dynamics of a spatial fishery model: Over-exploited fishery/traditional fishery, *Ecol Complex* **7**:13–20, 2010.
13. Bazykin AD, *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*, World Scientific, Singapore, 1998.
14. Smith VL, On models of commercial fishing, *Polit Econ* **77**:181–198, 1969.
15. Clark CM, *Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources*, 2nd edn., Wiley InterScience, New York, 1990.
16. Edelstein-Keshet L, *Mathematical Models in Biology*, Random House, New York, 1998.
17. Hilborn R, Micheli F, De Leo GA, Integrating marine protected areas with catch regulation, *Can J Fish Aquat Sci* **63**:642–649, 2006.
18. Shepherd TD, Litvak MK, Density-dependent habitat selection and the ideal free distribution in marine fish spatial dynamics: Considerations and cautions, *Fish Fisheries* **5**:141–152, 2004.
19. Auger P, Lett C, Moussaoui A, Pioch S, Optimal number of sites in artificial pelagic multisite fisheries, *Can J Fish Aquat Sci* **67**:296–303, 2010.
20. Auger P, Bravo de la Parra R, Poggiale JC, Sanchez E, Nguyen-Huu T, Aggregation of variables and applications to population dynamics, in Magal P, Ruan S (eds.), *Structured Population Models in Biology and Epidemiology*, Vol. 1936, Lecture Notes in Mathematics, Mathematical Biosciences Subseries, Springer, Berlin, pp. 209–263, 2008.
21. Bensenane M, Moussaoui A, Auger P, On the optimal size of marine reserve, *Acta Biotheor* **61**:109–118, 2013.
22. Moussaoui A, Auger P, Lett C, Optimal number of sites in multi-site fisheries with fish stock dependent migrations, *Math Biosci Eng* **8**(3):769–783, 2011.
23. Thiao D, Chaboud C, Samba A, Lalo F, Cury P, Economic dimension of the collapse of the false cod *Epinephelus aeneus* in a context of ineffective management of the small-scale fisheries in Senegal, *African J Marine Sci* **34**:305311, 2012.

## Appendices

### (a) Calculation of the fast equilibria

We notice that  $n(t)$  and  $E(t)$ , the global variables are constants of motion of the fast process, migration. Fast equilibria are the solutions of the following system:

$$\begin{cases} m_{i-1}n_{i-1} + m_{i+1}n_{i+1} - 2m_i n_i = 0 & \text{for } i \in [2, 2L - 1], \\ \beta_{i,i-2}E_{i-2} + \beta_{i,i+2}E_{i+2} - (\beta_{i-2,i} + \beta_{i+2,i})E_i = 0 & \text{for } i \in [3, 2L - 3]. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$



For  $i = 1$  and  $i = 2L$ , the first equations of (3.3) simplifies into

$$\begin{cases} m_2 n_2 - m_1 n_1 = 0 \\ m_{2L-1} n_{2L-1} - m_{2L} n_{2L} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

and for  $i = 3$  and  $i = 2L - 3$ , the second equations of (3.3) simplifies into

$$\begin{cases} \beta_{13} E_3 - \beta_{31} E_1 = 0 \\ \beta_{2L-3, 2L-1} E_{2L-1} - \beta_{2L-1, 2L-3} E_{2L-3} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

As symmetric movement rates for boats were assumed,  $\beta_{3,1} = \beta_{1,3}$  and, therefore,  $E_1$  and  $E_3$  must be equal at equilibrium and as a consequence, taking into account (3.1) and (3.2), we obtain for all  $i$

$$\begin{cases} n_i^* = v_i^* n = \frac{k_i}{K} n = s_i K \\ E_i^* = \mu_i^* E = \frac{1}{L} E & \text{if area } i \text{ is not in a reserve} \\ E_i^* = 0 & \text{if area } i \text{ is in a reserve} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

(b) Derivation of the aggregated model

We substitute the fast equilibria (A.4) into the complete model (3.3)–(3.6), and add the  $(2L)$  fish stock and the  $L$  fishing effort equations. After some algebra, one obtains the following system of two equations governing the total fish stock and fishing effort variables at the slow time scale, which we call the aggregated model:

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{K}\right) - QnE \\ \frac{dE}{dt} = (-c + pQn)E \end{cases}, \quad (\text{A.5})$$

where  $Q$  is as defined in the text.

## Résumé:

Dans le premier chapitre sont présentées les concepts de la modélisation multi-physique et multi-échelle. Ainsi, une façon d'obtenir une réponse macroscopique d'un système à partir d'une description microscopique du comportement est d'utiliser une technique d'homogénéisation. Ce sont souvent des approches analytiques. Ce type de modélisation vise aussi à donner une description des phénomènes physiques à différentes échelles. Le deuxième chapitre est dédié à la présentation d'exemples dans les domaines : physique des Matériaux, fluides et mécanique. Le troisième chapitre s'intéresse à un autre domaine qui est la biologie. Le travail présenté ici se veut une contribution à la modélisation multi-échelle et multi-physique aux modèles comprenant deux échelles de temps en biologie. Une conclusion termine notre travail.

**Mots-clés:** Modélisation multi-physique et multi-échelle, Physique des Matériaux, écoulements fluide/particules, Mécanique, Dynamique des populations, agrégation de variables

## Summary

In the first chapter are presented the concepts of multi-physics modeling and multiscale. Thus, one way to get a macroscopic response of a system from a microscopic description of the behavior is to use a homogenization technique. These are often analytical approaches. This type of modeling is also intended to give a description of physical phenomena at different scales. The second chapter is dedicated to the presentation of examples in the fields: Materials Physics, Fluid and Mechanical. The third chapter is interested in another area that is biology. The work presented here is a contribution to the multi-scale modeling and multi-physics models with two time scales. A conclusion ends our work.

**Keywords:** Multi-physics modeling and multiscale, Materials physics, fluid dynamics, mechanics, population dynamics, aggregation of variables

## ملخص

في الفصل الأول يتم عرض مفاهيم النمذجة متعددة الفيزياء و المتعددة النطاق. لذا، طريقة الحصول على استجابة العيانية للنظام هو استخدام تقنية التجانس. ويهدف هذا النوع من النمذجة أيضا لإعطاء وصف الظواهر الفيزيائية على مختلف المستويات. ويكرس الفصل الثاني لعرض أمثلة في مجالات: فيزياء المواد والسوائل والميكانيك. ويركز الفصل الثالث على مجال آخر هو علم الأحياء. العمل المقدم هنا هو المساهمة في النمذجة متعددة النطاق مع اثنين من جداول زمنية في علم الأحياء، ينتهي بخاتمة.

الكلمات الأساسية: نماذج متعددة الفيزياء ومتعددة النطاقات، مواد الفيزياء وديناميكا الموائع، وميكانيكا، وديناميات السكان، وتجميع المتغيرات